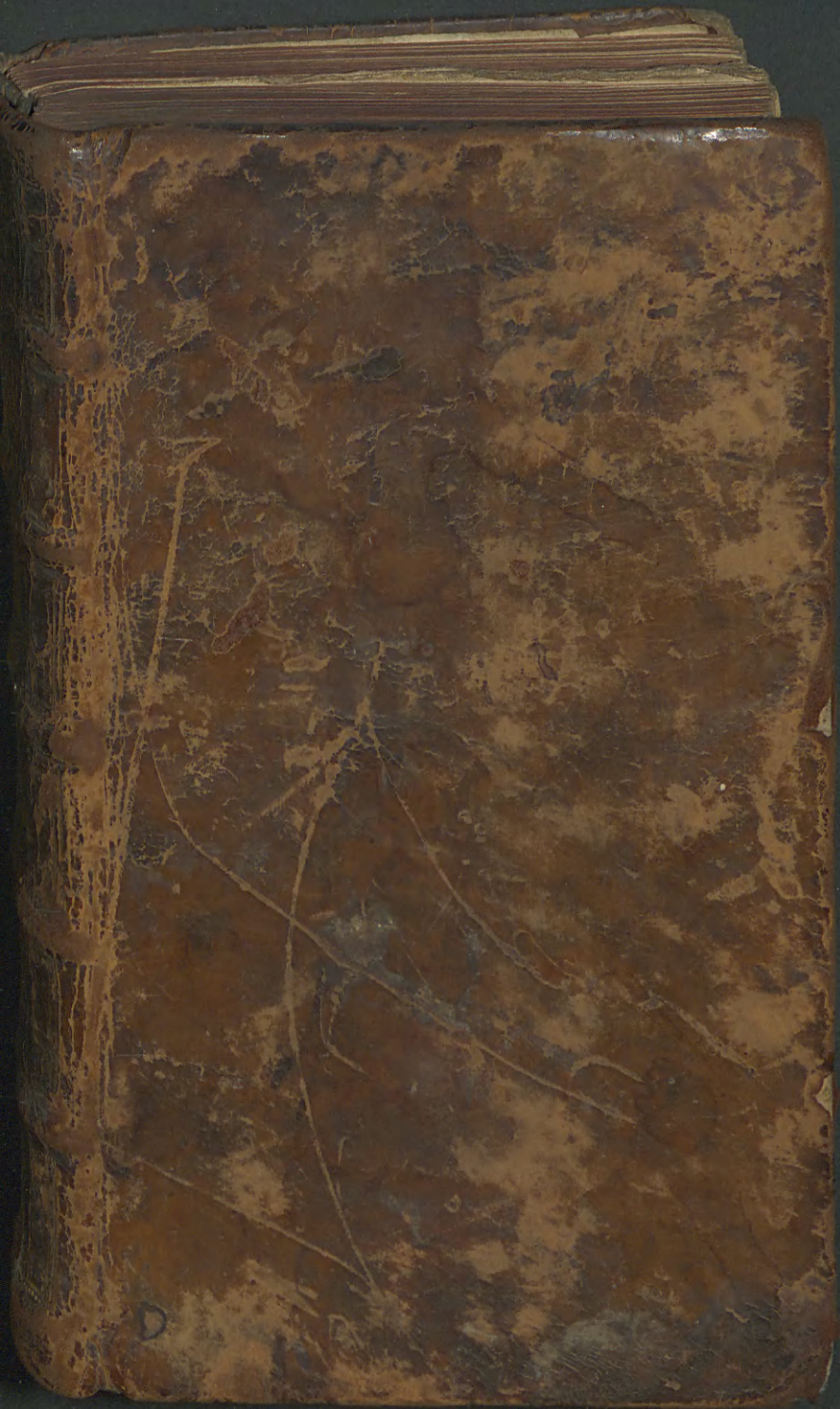
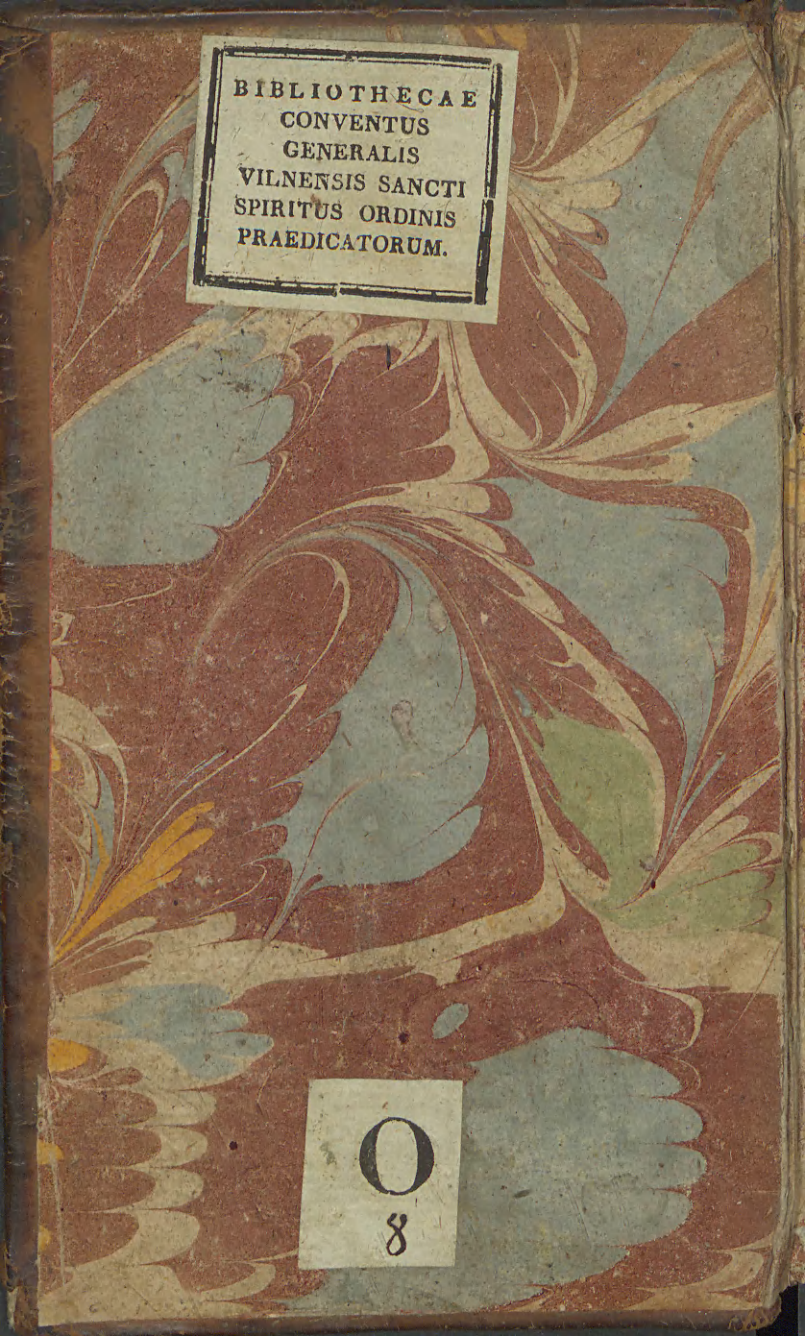






BIBLIOTHECAE
CONVENTUS
GENERALIS
VILNENSIS SANCTI
SPIRITUS ORDINIS
PRAEDICATORUM.

O
8



de
11. 11. 11.

*

837 *Kolnische Buchh.*

Der

Anfangs-Gründe
aller

Mathematischen Wissenschaften

Letzter Theil,

Welcher so wohl die gemeine

Algebra, als die Differential- und
Integral-Rechnung, und einen

Anhang

von den vornehmsten

Mathematischen Schriften

in sich begreiffet,

Und zu mehrerem Aufnehmen der
Mathematick so wohl auf hohen, als
niedrigen Schulen aufgesetzt worden
Von

Christian Frenherrn von Wolff.

Seiner Königl. Majestät in Preussen Geheimen Rathe und
Cangler der Universität Halle, wie auch Professore Juris Naturæ &
Gentium ac Matheseos daselbst, Professore honorario zu St. Petersburg,
der Königl. Academie der Wissenschaften zu Paris, wie auch der
Königl. Groß-Britannischen und der Königl. Preussl.
Societät der Wissenschaften Mitgliede.

Neue, verbesserte und vermehrte Auflage.

Halle im Magdeburgischen,
Zu finden in der Kengerischen Buchhandlung.



0-18-0-2697

8°-7981

Anfangs = Gründe

sowohl der gemeinen

Algebra,

als der

Differential =

und

Integral-Rechnung.

St. Michael's - London

Printed by J. Smith

1801

1801

1801

1801

1801

Vorrede.

Geneigter Leser:

Die Algebra kan niemahls zuviel gerühmet werden: denn sie ist eine Kunst, durch welche man mathematische Wahrheiten von sich selbst erfinden kan. Wenn ihr demnach die Anfangs-Gründe der mathematischen Wissenschaften, die ich in den drey vorhergehenden Theilen erkläret habe, euch bekandt machet, und die Algebra dabey studiret; so werdet ihr aus jenen durch diese vor euch selbst finden können, was ihr sonst aus Büchern oder von andern zu lernen von nöthen hättet. Ja ihr werdet auch vieles erfinden können, was andere vor euch noch nicht gedacht haben. Mit einem Worte sie machet euch geschickt, daß, wenn ihr nur ganz was geringes aus den mathematischen Wissenschaften gelernet, ihr von euch selbst ein mehreres erfinden könnet zu der Zeit, wenn ihr es von nöthen habet. Es ist aber keine vollkommenerer Art zu studiren, als wenn man nur ein wenig lernen darf, und sich dabey doch auf alle vorkommende Fälle geschickt machet. Ich sage aber noch
mehr.

mehr. Ihr treffet in der Algebra die aller vollkommenste Manier zu raisonniren an. Denn sie stellet die Begriffe der Sachen durch Zeichen vor, und verwandelt die Schlüsse, welche mit vielem Bedacht aus ihnen hergeleitet werden, in eine leichte Manier die Zeichen mit einander zu verknüpfen, und von einander zu trennen. Dadurch erhält man öfters in einer Zeile mehr, als in grossen Büchern nicht Raum finden würde. Durch das Anschauen weniger Zeichen werdet ihr öfters verständiger, als ihr durch vieler Jahre Arbeit nach der gemeinen Art zu lernen und zu denken nicht werden könnet. In dieser Absicht pfleget man die Algebra den Gipfel menschlicher Wissenschaften zu nennen, und dieses von Rechts wegen. Ich habe demnach so wohl die gemeine Algebra, als die unvergleichliche Differential- und Integral-Rechnung des Herrn von Leibnitz dergestalt erklären wollen, daß nicht allein ihre Kunstgriffe unvermerckt bengebracht, sondern auch die Hauptlehren von der so genannten Mathesi pura zugleich mit erlernet, ja von selbst gefunden werden.

Anfangs-Gründe der Algebra.

Der erste Theil
von den

Anfangs-Gründen der gemei-
nen Algebra.

Die 1. Erklärung.

I.

Die gemeine Algebra ist eine Wissen-
schaft aus einigen gegebenen end-
lichen Grössen, andere ihres glei-
chen, von denen in Ansehung der gegeb-
nen etwas bekandt gemacht wird, ver-
mittelft gewisser Gleichungen zu finden.

Die 1. Anmerkung.

4. Z. E. Ihr sollet zwey Zahlen finden, die mit
einander multipliciret eine gegebene Zahl 60, hingegen
zusammen addiret eine andere gegebene Zahl 16 brin-
gen. Also werden euch gegeben zwey Zahlen, und ihr
sollet aus denselben zwey andere Zahlen finden, von
welchen euch bekandt gemacht wird, daß ihre Summe
der kleineren, ihr Product aber der grösseren von den
gegebenen Zahlen gleich seyn soll. Die Algebra nun
lehret euch nicht allein in gegenwärtigem Falle die ver-
langten Zahlen, sondern auch eine allgemeine Regel
finden, nach welcher ihr alle Exempel von dieser Art
rechnen könnet.

Zusatz.

Zusatz.

3. Also ist die Algebra eine allgemeine Rechenkunst, dadurch man nemlich alles, was sich rechnen läßt, ausrechnen kan (S. 1. *Arithm.*).

Die 2. Anmerckung.

4. Daher nennet auch der grosse Mathematicus in Engelland, Herr *Isaac Newton*, seine Anweisung zur Algebra *Arithmetica Universalis*, und wir können die Algebra in unserer Deutschen Sprache mit gutem Fuge eine Allrechenkunst heissen, zumahlen, wenn man die Buchstaben-Rechenkunst mit dazu nimmet.

Die 2. Erklärung.

5. Die Buchstaben-Rechenkunst wird diejenige genennet, welche an statt der Ziffern allgemeine Zeichen der Grössen brauchet, und damit die gewöhnlichen Rechnungsarten verrichtet.

Die 3. Erklärung.

6. Eine Grösse nennen wir alles dasjenige, was sich vermehren und vermindern läßt, in so weit es sich vermehren und vermindern läßt.

Der 1. Zusatz.

7. Also bestehet das Wesen einer Grösse in der Verhältniß zu einer anderen ihres gleichen (S. 65. *Arithm.*).

Die 1. Anmerckung.

8. Z. E. Die Wärme nenne ich in so weit eine Grösse, als ich denken kan, wie vielmahl eine gegebene Wärme, als die Wärme der Luft des heutigen Tages
in

in einer anderen gegebenen Wärme, als in der Wärme der Luft des gestrigen Tages enthalten sey.

Der 2. Zusatz.

9. Und folgendes sind die Grössen und determinirte Zahlen, da man nemlich noch kein gewisses Eines setzt (§. 5.8. *Arithm.*).

Die 2. Anmerkung.

10. Nehmet $\frac{1}{4}$ eine gerade Linie von einer determinirten Länge. Setzt die Linie sey eingetheilet in 4 gleiche Theile. Wenn ihr einen von denselben zur Eines macht, und die Länge der ganzen Linie mit ihm vergleicht: so heisset die Linie 4, und ihr betrachtet die Länge als eine Zahl. Setzt abermahls die Linie sey eingetheilet in 5 gleiche Theile. Wenn ihr einen davon zur Eines macht, und die Länge der ganzen Linie mit ihr vergleicht: so heisset die Linie 5 und ihr betrachtet ihre Länge abermahls als eine Zahl. Wiederum setzt die Linie sey eingetheilet in 13 gleiche Theile, und vergleicht ihre ganze Länge mit einem solchen Theile; so heisset sie 13, und ihr betrachtet dieselbe als eine Zahl. Hieraus sehet ihr, daß die Länge einer Linie durch ungehlig viel Zahlen, grosse und kleine ausgesprochen werden kan, nachdem ihr nemlich einen grossen oder kleinen Theil derselben zur Eines annehmet. Wenn ihr nun keinen gewissen Theil setzt, mit welchem sie verglichen werden soll; sondern sie nur überhaupt betrachtet, in so weit sie mit einer gewissen Eines kan verglichen werden: so stellet ihr euch dieselbe als eine Grösse vor. Und daher kommet es, daß durch die Buchstaben-Rechenkunst sehr allgemeine Wahrheiten erfunden werden: Da hingegen die Rechenkunst nur einzelne Exempel ausrechnet, und also stets mit einzelnen Fällen zu thun hat.

Der 3. Zusatz.

11. Alles, was wir in der Welt antreffen und in uns selbst finden, hat in allem dem, was
es

es würcklich ist, und wovon sich etwas gedencken läßt, seine Schrancken, und läßt sich dannhero mit anderen Dingen von seiner Art vergleichen, und darum als etwas, so vermehret oder vermindert werden kan, das ist, als eine Grösse (§. 6. 7.) betrachten. Derowegen erstrecket sich die Buchstaben-Rechenkunst und Algebra auf alle endliche Dinge, und führet uns auf einen deutlichen Begriff, von ihrer Endlichkeit.

Die 3. Anmerckung.

12. Es kan keine vollkommenere Erkänntniß gedacht, noch verlangt werden, als wenn man von der Endlichkeit der Dinge einen deutlichen Begriff erlanget: welches ich bey anderer Gelegenheit klar und deutlich ausführen will. Daher dienet die Algebra zu einer vollkommenen Erkänntniß der Dinge zu gelangen, und ohne sie würde es in den meisten Fällen unmöglich seyn, selbige zu überkommen.

Der 4. Zusatz.

13. Weil die Grössen undeterminirte Zahlen sind (§. 9.), so kan man auch keine andere Veränderungen, als wie mit Zahlen, mit ihnen vornehmen, und daher sie entweder zusammen addiren, oder von einander subtrahiren, oder durch einander multipliciren, oder durch einander dividiren (§. 13. 15. 18. 21. 24. Arithm.).

Die 4. Anmerckung.

14. Gleichwie ihr aber mit Zahlen keine Rechnung vornehmen könnet, ihr müßet euch vorher dieselben durch gewisse Zeichen vorstellen: eben so wird in der Algebra erfordert, daß ihr für die Grössen gewisse Zeichen ersinnet.

Der

Der 1. willführliche Satz.

15. Man benenne die gegebenen Größen jederzeit mit den ersten Buchstaben des Alphabets, *a, b, c, d* u. s. w. die unbekandten aber, welche man suchet, mit den letzten *x, y, z*.

Die 1. Anmerkung.

16. Wie sich die Größen dem Verstande zu erkennen geben, so müssen sie auch durch die Zeichen von einander unterschieden werden. Nun stellen sie sich in den algebraischen Aufgaben jederzeit dem Verstande vor, entweder als gegebene, das ist, bekandt gemachte, oder als gesuchte, das ist, noch unbekandte Größen: Derowegen muß man auch durch die Zeichen unserer Einbildungskraft diesen Unterscheid klärlich vorstellen. Denn sonst wäre Gefahr, daß man das Unbekandte mit dem Bekandten leicht verwirrete, und daher in Irrthum verfiele.

Die 2. Anmerkung.

17. Es wäre bey der Benennung der Größen noch gar viel zu erinnern. Denn wenn sie geschickt und zum Erfinden dienlich seyn soll, müssen die Zeichen alle gegebene relationes der bedeuteten Dinge gegeneinander andeuten. Z. E. Wenn eine von den unbekandten Größen dreyemahl so groß ist als die andere, und die kleinere heißet *x*; so nennet man die grössere lieber *3 x* als *y*. Allein ich würde den Anfängern nicht dienen, wenn ich sie mit vielen Regeln auf einmahl überhäufete. Und halte es dannenhero für rathsamer, daß ich es inskünftige lieber durch Exempel lehre, und die Regeln nach und nach gleichsam unvermerckt und ohne Mühe heybringe.

Der 2. willführliche Satz.

18. Das Zeichen der Addition ist $+$, der Subtraction aber $-$. Jenes wird (Wolfs Mathes. Tom. IV.) Iffff durch

durch Mehr; dieses durch Weniger ausgesprochen.

Anmerkung.

19. 3 E. Die Summe zweyer Grössen a und b wird geschrieben $a + b$ und ausgesprochen: a mehr b . Hingegen die Differenz zweyer Grössen wird geschrieben durch $a - b$ und ausgesprochen: a weniger b . Als es bedeute a 7 Thaler, b 8 Groschen: so bedeutet $a + b$, 7 Thl. + 8 gl. das ist, 7 Thl. und 8 gl.; hingegen $a - b$, 7 Thl. — 8 gl. das ist 7 Thl. weniger 8 gl.

Der 3. willführliche Satz.

20. Die Multiplication hat entweder gar kein Zeichen, sondern man setzet die Buchstaben, welche einander multipliciren, ohne einiges Zeichen nebeneinander: oder man deutet sie durch ein Comma (,) oder einen Punct (.) an. Insgemein brauchet man dieses Zeichen $\times$.

Anmerkung.

21. Wenn a durch b multipliciret werden soll, so schreibet das Product ab , oder a, b oder $a. b$, oder $a \times b$. Wir werden uns des letzteren Zeichens niemahls bedienen, weil es leicht mit dem X vermengt wird. Doch haben wir es hiermit anführen sollen, weil es in allen Büchern häufig vorkommet. Am meisten werden wir kein Zeichen brauchen: das Comma und den Punct aber nur in gewissen Fällen aus besonderen Ursachen, die sich zu seiner Zeit in den Exempeln zeigen werden.

Der 4. willführliche Satz.

22. Wenn eine Grösse viele andere auf einmahl multipliciret, so schliesset man sie

sie in eine parenthesin () ein, und setzet jene ohne einiges Zeichen vor oder hinter die parenthesin: oder man setzet zwischen dieselben ein blosses Comma.

Anmerckung.

23. Das Product von $a \mp b - c$ in d , schreibet entweder also $(a \mp b - c) d$, oder dergestalt $d (a \mp b - c)$, oder auch folgender massen $a \mp b - c, d$. Insgeheim schreibet man dieses Product also:

$$a \mp b - c \propto d, \text{ oder auch } d \propto a \mp b - c.$$

Allein wir bleiben billig bey der Manier des Herrn von Leibniz, welche mit grossem Vortheile in die Acta Eruditorum Lipsientia eingeführet worden: denn man kan sich nicht so leicht verirren, wie bey dem gemeinen Zeichen, und machet auch den Buchdruckern nicht so viel unnöthige Mühe, ersparet überdieses viel an dem Raume. Andere Vortheile wollen wir jetzt nicht gedencken, die sich in folgendem zeigen werden.

Der 5. willkührliche Satz.

24. Das Zeichen der Division sind zwey Puncte :, oder man schreibet die Buchstaben, welche einander dividiren sollen, wie in der Rechenkunst einen Bruch.

Anmerckung.

25. Wenn a durch b dividiret werden soll, so schreibe man den Quotienten entweder $a:b$, oder a und spricht es beyderseits aus a durch b dividiret. $\overline{b}$

Der 6. willkührliche Satz.

26. Wenn eine Grösse viel andere auf einmahl dividiret, oder viel andere eine

dividiren, so werden, wie in der Multiplication, die vielen in eine parentheses () eingeschlossen, oder man kan auch an deren statt ein Comma brauchen.

Anmerckung.

27. Wenn $a + b$ durch c dividiret werden soll, so schreibet den Quotienten entweder $(a + b) : c$ oder $a + b : c$. Sollet ihr a durch $b + c$ dividiren, so ist der Quotient $a : (b + c)$ oder $a : , b + c$. Wie de um wenn ihr $a + b$ durch $c + d$ dividiret, so schreibet den Quotienten $(a + b) : (c + d)$ oder $a + b : , c + d$. Nach der gemeinen Art schreibet ihr diese Quotienten $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a}{b+c}$, $\frac{a+b}{c+d}$, oder auch

$$\frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{b+c}, \quad \frac{a+b}{c+d}.$$

Die 1. Aufgabe.

28. Einerley Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen zusammen zu addiren.

Auflösung.

1. Wenn sie einerley Zeichen haben, so zehlet sie wie in der Rechenkunst zusammen.
2. Sind aber die Zeichen verschieden, so ziehet von der grösseren die kleinere ab, und setzet zu dem, was überbleibet, das Zeichen der grösseren.

Exempel.

$$\begin{array}{r} a + 2b - 3c - 5d \\ 3a - 2b + 6c + 2d \\ \hline 4a \quad + 3c - 3d \end{array}$$

Be-

Beweis.

Wess die Buchstaben undeterminirte Zahlen sind (§. 9. 15.); so könnet ihr einen jeden als Eines ansehen, und demnach die Grössen, welche durch einerley Buchstaben benennet werden, als Dinge von gleicher Art zusammen zehlen (§. 8. *Aritbm.*). Alle Grössen, welche mit dem Zeichen — bemercket werden, fehlen, und hingegen die das Zeichen + haben, sind vorhanden. Wenn ich derowegen von beyder Art addiren soll, so wird durch die letzteren der Mangel aufgehoben, und muß freylich die Addition in eine Subtraction verkehret werden. W. 3. E.

Die 1. Anmerkung.

29. Die Grössen, welche mit dem Zeichen — bemercket werden, hat man nicht anders als Schulden anzusehen, und hingegen die anderen mit dem Zeichen + als baares Geld. Und daher nennet man auch die ersten weniger als nichts, weil man erst so viel weg geben muß, als man schuldig ist, ehe man nichts hat.

Die 2. Anmerkung.

30. Damit euch die Rechnung mit Buchstaben deutlicher wird, so bildet euch ein a bedeute 1 thl. b 1 gl. c 1 pf.

$$7a - 9b + 5c$$

$$7 \text{ thl.} - 9 \text{ gl.} + 5 \text{ pf.}$$

$$3a + 5b - 9c$$

$$3 \text{ thl.} + 5 \text{ gl.} - 9 \text{ pf.}$$

$$10a - 4b - 4c$$

$$10 \text{ thl.} - 4 \text{ gl.} - 4 \text{ pf.}$$

Die 2. Aufgabe.

31. Einerley Gröſſen mit einerley oder verſchiedenen Zeichen voneinander zu ſubtrahiren.

Auſlöſung.

1. Wenn einerley Zeichen ſind, und ihr ſollet das kleinere von dem gröſſeren abziehen, ſo verrichtet die Subtraction wie in Ziffern (S. 49. *Arithm.*).
2. Sollet ihr aber die gröſſere von der kleineren abziehen, ſo ziehet die kleinere von der gröſſeren ab, und zu dem übrigen ſetzt das Zeichen —, wenn die Gröſſen + haben: hingegen + wenn ſie — haben.
3. Wenn die Zeichen verſchieden ſind, ſo addiret die Gröſſen, die ihr von einander abziehen ſollet, und zu der Summe ſetzt das Zeichen derjenigen Gröſſe, von welcher die Subtraction geſchehen ſolte.

Exempel.

$$8a - 5c + 9d \quad 8 \text{ thl.} - 5 \text{ gl.} + 9 \text{ pf.}$$

$$6a - 8c - 7d \quad 6 \text{ thl.} - 8 \text{ gl.} - 7 \text{ pf.}$$

$$2a + 3c + 16d \quad 2 \text{ thl.} + 3 \text{ gl.} + 16 \text{ pf.}$$

$$9b + 15c - 7d + 8e - f$$

$$6b + 20c - 9d - 9e + 7f$$

$$3b - 5c + 2d + 17e - 8f$$

Oder verwandelt die Zeichen in niedrige von den Gröſſen, die ihr abziehen ſollet, und addiret ſie zu den anderen (S. 28.).

Be-

Beweis.

Weil ihr jeden Buchstaben als Eines ansehen könnet (S. 9. 15.); so könnet ihr auch wie in Zahlen die Subtraction verrichten. Allein, wenn ihr die grössere von der kleineren abziehet, und sie haben das Zeichen $+$, als $20c$ von $15c$, so nehmet ihr $20c$ weg, müsst aber wieder von oben die $15c$ addiren, und dannenhero fehlen nur noch so viel c als der Unterschied zwischen 20 und 15 ist, nemlich 5 . Hingegen wenn das Zeichen $-$ ist, als wenn ihr $-9d$ von $-7d$ abziehen sollet; so müsst ihr $-9d$ addiren, weil ihr es zuviel abgezogen. Denn ihr soltet $20c - 9d$ wegnehmen: ihr habet aber $20c$ ganz weggenommen. Da nun oben $7d$ fehlen, so heben sich von den $9d$, die ihr dazu addiret, 7 auf, und bleiben nur noch $2d$ übrig. Darum dürfet ihr in diesen Fällen nur allezeit die kleinere von der grösseren abziehen, und zu dem übrigen das widrige Zeichen setzen, nemlich $-$ wenn ihr $+$ habet, und $+$ wenn $-$ ist. Endlich wenn die Zeichen verschieden sind, und ihr sollet z. E. $-9e$ von $+8e$ abziehen; so wisset ihr aus dem vorhergehenden, daß die unteren $9e$ addiret werden müssen, weil ihr zu viel in dem vorhergehenden abgezogen. Und demnach bekommet ihr $+17e$. Hingegen wenn ihr z. E. $+7f$ von $-f$ subtrahiren sollet; so fehlet euch schon ein f . Wenn ihr nun die $7f$ unten auch noch wegnehmen sollet,



sollet, so fehlen euch zusammen 8f. Daher habet ihr in beyden Fällen nur nöthig die Grössen zu addiren, und zu der Summe das Zeichen zu setzen, welches die Grösse hat, da von die Subtraction geschieht. W. 3. E.

Die 3. Aufgabe.

32. Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen durch einander zu multipliciren.

Auflösung.

Verrichtet die Multiplication, wie in Zahlen (§. 55. *Arithm.*), nur mercket: daß einerley Zeichen im Producte $+$, verschiedene aber $-$ geben.

Exempel.

$$\begin{array}{rcl}
 a + b - d & 10 = 8 + 4 - 2 \\
 a - b - d & 2 = 8 - 4 - 2 \\
 \hline
 -ad - bd + dd & -16 - 8 + 4 \\
 -ab - bb + bd & -32 - 16 + 8 \\
 aa + ab - ad & 64 + 32 - 16 \\
 \hline
 aa - bb - 2ad + dd & 20 = 68 - 48
 \end{array}$$

Beweis.

Wenn ihr $+$ durch $+$ multipliciret, so ist klar, daß das Product auch $+$ haben muß. Ingleichen ist nicht schwer zu begriffen, daß in dem Producte das Zeichen $-$ seyn muß, wenn ihr $+$ durch $-$ multipliciret, weil ihr einen Mangel oder eine Schuld etliche mahl nehmet. Allein wenn $-$ durch $-$ mul-

tiplic

tipliciret wird, scheint es nicht gleich klar zu seyn, warum in dem Product $+$ ist. Mercket demnach, daß, wenn ihr $3 - 2$ durch $- 2$ multipliciren sollet, ihr den Defect $- 2$ so vielmahl nehmen sollet, als $3 - 2$ Einheiten hat; das ist, 1 mahl. Da ihr nun anfangs 3 mit $- 2$ multipliciret, so nehmet ihr den Defect 3 mahl und demnach 2 mahl zuviel. Derowegen müßet ihr ihn noch zweymahl dazu wieder addiren. Und also giebet $- 2$ mit $- 2$ zum Producte $+$ 4 W. Z. E.

Zusatz.

33. Wenn ihr $- a$ mit $+$ b multipliciret, so kommet $- ab$ heraus. Derowegen wenn ihr $- ab$ durch $+$ b dividiret, muß $- a$ heraus kommen. Dividiret ihr aber $- ab$ durch $- a$, so muß $+$ b heraus kommen. Demnach ist klar, daß auch in der Division die Regel gilt: Einerley Zeichen geben im Quotienten $+$, verschiedene aber $-$.

Die 4. Aufgabe.

34. Gröſſen mit einerley und verschiedenen Zeichen durch einander zu dividiren.

Auflösung.

Wenn eine gegebene Gröſſe durch die andere sich würcklich dividiren läſſet; so verfähret wie in Zahlen (S. 59. Arithm.), nur daß ihr die Regel von Veränderungen der Zeichen wohl in acht nehmet (S. 33.).

Kan aber die Division nicht würcklich geschehen, so bleibet es bey dem, was oben (§. 24. & seqq.) gesagt worden.

Exempel.

$$\begin{array}{r}
 \text{aa} - \text{bb} - 2\text{ad} \mp \text{dd} \quad (\text{a} \mp \text{b} - \text{d}) \\
 \text{a} - \text{b} - \text{d}) \quad \text{aa} - \text{ab} - \text{ad} \\
 \hline
 \mp \text{ab} - \text{bb} - \text{ad} \mp \text{dd} \\
 \text{a} - \text{b} - \text{d}) \mp \text{ab} - \text{bb} - \text{bd} \\
 \hline
 \mp \text{bd} - \text{ad} \mp \text{dd} \\
 \text{a} - \text{b} - \text{d}) - \text{ad} \mp \text{bd} \mp \text{dd} \\
 \hline
 \end{array}$$

o

Anmerckung.

35. Weil die Buchstaben nicht wie die Zahlen eine Bedeutung von der Stelle haben, in welcher sie stehen; so darfet ihr euch hier an keine Ordnung binden, sondern möget den Quotienten suchen, in welchem Gliede ihr ihn findet: welches auch in dem Subtrahiren des Products aus dem Divisore in den Quotienten statt findet.

Die 4. Erklärung.

36. Wenn man eine Grösse durch sich selbst multipliciret, so heisset das Product, welches herauskommet, die andere Potenz oder Dignität derselben Grösse. Multipliciret ihr die andere Dignität noch einmahl durch die erste, so kommet die dritte Potenz oder Dignität heraus. Multipliciret ihr ferner die dritte durch die erste, so kommet die vierdte Potenz oder

oder Dignität heraus. Multipliciret ihr die vierdte durch die erste, so kommet die fünfte Potenz oder Dignität heraus u. s. w. Die erste Stammgröſſe, ſo die erste Dignität genennet wird, heisset auch die Wurzel in Anſehung der anderen, dritten, vierdten, fünften zc. Dignität.

Der 7. willführliche Satz.

37. Den Grad der Potenz oder Dignität einer Gröſſe deutet durch eine kleine Ziffer, oder wenn er nicht determiniret iſt, durch einen kleinen Buchſtaben an, den ihr oben zur Rechten an denjenigen Buchſtaben ſezet, wodurch die Gröſſe benennet wird. Z. E. Die andere, dritte, vierdte zc. Dignität von x iſt x^2, x^3, x^4 , zc. x^m . Die Zahlen aber werden die Exponenten der Dignitäten genennet.

Der 1. Zuſatz.

38. Dannenhero wenn ihr eine Dignität durch eine andere von eben der Wurzel multipliciren ſollet, ſo dörfet ihr nur ihre Exponenten zuſammen addiren.

Exempel.

x^3	y^m	x^m	x^n
x^4	y^n	x^r	x^n
x^7	y^{m+n}	x^{m+r}	x^{2n}

Der

Der 2. Zusatz.

39. Hingegen wenn ihr die Dignität einer Grösse durch eine andere Dignität derselben dividiren sollet; so dürfet ihr nur ihre Exponenten von einander subtrahiren.

Exempel.

x^7	x^7	y^{m+n}	y^n
x^4	x^3	y^n	y
x^3	x^4	y^m	y^{n-1}

Der 3. Zusatz.

40. Endlich wenn ihr die Dignität einer Grösse zu einer anderen Dignität erheben sollet, so dürfet ihr nur ihren Exponenten durch den Exponenten der anderen multipliciren. Z. E. Ihr sollet x^3 zu der vierdten Dignität erheben; so multipliciret 3 durch 4, und nehmet x^{12} vor die gesuchte Dignität an. Oder überhaupt ist die Dignität n von $y^m = y^{mn}$.

Anmerkung.

41. Die Ursache ist leicht zu errathen. Denn ihr sollet den Exponenten 3 viermahl zu sich selbst addiren (§ 38.). Dieses aber geschiehet, wenn ihr ihn durch 4 multipliciret (§. 23. Arithm.).

Der 4. Zusatz.

42. Folgende wenn ihr aus einer gegebenen Dignität eine verlangte Wurzel ziehen sollet, das ist, diejenige Grösse finden, welche zu einer gewissen Dignität erhoben worden, (§. 90. 91. Arithm. & §. 36. Algebr.); so dürfet ihr nur ihren Exponenten durch den Exponenten

ten der Wurzel dividiren. Z. E. Die Wurzel der vierdten Dignität aus x^{12} ist x^3 die Wurzel m aus x^n ist $x^{n:m}$.

Anmerkung.

43. Mercket wohl diese Art die Wurzeln zu zeichnen, denn ihr werdet inskünftige grossen Vortheil davon haben.

Der 8. willführliche Satz.

44. Wenn ihr die Wurzel aus einer Grösse ziehen sollet, dergleichen sie nicht hat, so setzet folgendes Wurzelzeichen vor sie, und darüber den gehörigen Exponenten der Wurzel: in der Quadrats Wurzel aber könnet ihr den Exponenten weglassen. Also schreibet ihr die Cubic-

Wurzel von x , $\sqrt[3]{x}$; hingegen die Wurzel der fünften Dignität von x , schreibet ihr $\sqrt[5]{x}$.

Zusatz.

45. Weil $\sqrt{x} = x^{1:2}$, $\sqrt[3]{x^2} = x^{2:3}$, $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§. 42.); so könnet ihr jederzeit eine Formel in die Stelle der anderen setzen, nachdem ihr von dieser oder von jener einen Vortheil haben könnet.

Die 5. Erklärung.

46. Die Wurzel dergleichen Grössen, daraus die verlangte Wurzel nicht genau gezogen werden kan, werden Irrationalgrössen oder, wenn es Zahlen sind, Irra-

Irrationalzahlen genennet. Dergleichen
sind $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[5]{6}$.

Anmerkung.

47. Die Irrationalgrößen können entweder eine
Benennung haben, als $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{5}$. oder verschiede-
ne, als $\sqrt[4]{3}$ und $\sqrt[5]{6}$.

Die 5. Aufgabe.

48. Irrationalgrößen von verschiede-
ner Benennung zu einer Benennung zu
bringen.

Auflösung.

Es seyn die gegebenen Irrationalgrößen
 $x^{n:m}$ und $y^{r:s}$.

Weil der Unterscheid der Benennung in
dem Unterscheide der Exponenten $n:m$ und $r:s$
bestehet, hingegen man diese Brüche in an-
dere gleichgültige verwandeln kan, die einer-
ley Benennung haben (§. 81 *Arithm.*); so ist
weiter nichts vonnöthen, als daß ihr die Expo-
nenten unter einerley Benennung bringet,
und die dadurch gefundene Brüche in die
Stelle der Exponenten schreibet. So wer-
det ihr finden, daß $x^{n:m} + y^{r:s} = x^{ns:ms} + y^{sr:ms}$
 $= \sqrt[ms]{x^{ns}} + \sqrt[ms]{y^{sr}}$.

Anmerkung.

49. Auf eben diese Art könnet ihr mit den Irratio-
nalzahlen verfahren. Z. E. Ihr sollet $\sqrt[3]{5}$ und $\sqrt[3]{3}$
unter

unter eine Benennung bringen. Weil $\sqrt[3]{5} = 5^{1:3}$ und $\sqrt[6]{3} = 3^{1:2}$, so findet ihr $5^{1:3} + 3^{1:2} = 5^{2:6} + 3^{3:6} =$

$\sqrt[6]{5^2 + 3^3} =$ (wenn ihr die Grössen unter dem Wurzelzeichen würcklich zu ihrer Dignität erhebet

$\sqrt[6]{25 + 27}$.

Die 6. Aufgabe.

so Irrationalgrössen auf eine schlechte Art auszudrucken.

Auflösung.

Weil $\sqrt[m]{a^n x^m} = a^{n:m} x^{m:m} = a^{n:m} x = x \sqrt[m]{a^n}$ (S. 42.); so

1. Dividiret die Grösse unter dem Wurzelzeichen durch eine Dignität von dem Grade, der einerley Exponenten mit der Wurzel hat, als durch einen Cubum, wenn die Irrationalgrösse eine Cubicwurzel ist. Denn wenn dergleicher Division nicht angehet, so könnet ihr auch die Irrationalgrösse nicht schlechter ausdrucken.
2. Den Quotienten lasset unter dem Wurzelzeichen.
3. Vor das Wurzelzeichen aber setzet die Wurzel der Dignität, dadurch ihr dividiret.

So ist geschehen, was man verlangete.

Exem:

Exempel.

$$\begin{array}{lcl}
 \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = 2 \sqrt[3]{3} & \text{Ingleichen} \\
 \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3 \sqrt{2} & \text{Wiederum} \\
 \sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = 2 \sqrt[4]{3}
 \end{array}$$

Der 1. Zusatz.

§ 1. Wenn ihr Irrationalgrößen von einerley Art solchergestalt reduciret, und es bleibet unter dem Wurzelzeichen einerley Grösse stehen; so verhalten sie sich gegen einander wie die Rationalgrößen vor dem Wurzelzeichen. Z. E. $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2 \sqrt{2}$ und $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3 \sqrt{2}$. Derowegen ist $2 \sqrt{2} : 3 \sqrt{2} = 2 : 3$ (§. 75. *Arithm.*).

Der 2. Zusatz.

§ 2. Derowegen könnet ihr durch gegenwärtige Aufgabe finden, ob zwey Irrationalgrößen eine Verhältniß gegeneinander haben, die sich durch Rationalgrößen ausdrucken lässet, z. E. daß $\sqrt{8} : \sqrt{18} = 2 : 3$ (§. 51.).

Der 3. Zusatz.

§ 3. Weil ihr in solchergestalt reducirten Irrationalgrößen den Theil, welcher irrational bleibet, für den Namen der Einheit mit Recht haltet (§. 5 & seqq. *Arithm.*); so könnet ihr die Summe oder den Unterschied der Irrationalgrößen finden, die unter dem

dem Wurzelzeichen einerley Gröſſen haben und von einerley Art ſind, wenn ihr die Rationalgröſſen vor dem Wurzelzeichen ſammen addiret, oder von einander ſubtrahiret. So werdet ihr finden, daß $\sqrt{8} \pm \sqrt{18} = 2\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ und $\sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Ingleichen $\sqrt[3]{24} \pm \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3 \cdot 8} \pm \sqrt[3]{3 \cdot 27} = 2\sqrt[3]{3} \pm 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3}$.

Der 4. Zuſatz.

54. Wenn ihr die Gröſſen, die zum Theil rational, zum Theil irrational ſind, ganz irrational machen ſollet; ſo müſſet ihr die Gröſſe vor dem Wurzelzeichen zu der Dignität erheben, welche der Exponente über dem Wurzelzeichen andeutet, und durch ſelbige die Gröſſe unter dem Wurzelzeichen multipliciren. So werdet ihr finden, daß

$$5\sqrt{2} = \sqrt{50} \text{ und } 5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{375} \\ 5^3 = \sqrt[3]{3 \cdot 125} = \sqrt[3]{375}.$$

Die 1. Anmerkung.

55. Damit ihr erfahret, ob eine vorgegebene Zahl ſich durch eine Dignität von einem gegebenen Grade dividiren läſſet, oder nicht, ſo dürfet ihr ſie nur in dieſen Zahlen zergliedern, durch deren Multiplication ſie entſtehet. Dieſes aber geſchiehet, wenn ihr ſie mit den einhelen Zahlen zu dividiren anſanget. Z.E. Ihr ſollet auf ſolche Weiſe 368 zergliedern, ſo findet ihr:

2	184
4	92
8	46
16	28

Die 2. Anmerkung.

56. Wenn die Irrational-Rechnungen anfangs verdrüsslich fallen, der kan sie so lange überschlagen, bis sie unten vorkommen. Er hüte sich aber mit Fleiß, daß er nicht für unnütze Grillen halte, wovon er den Nutzen nicht bald sehen kan. Ihr werdet im folgenden erfahren, daß ich niemahls eine Lehre vortrage, die nicht ihren gewissen Nutzen hat.

Die 7. Aufgabe.

57. Eine Irrationalgröſſe durch eine andere von einerley Art zu multiplirciren.

Auflösung.

Weil $\sqrt[m]{a^n} = a^{n:m}$ und $\sqrt[m]{b^r} = b^{r:m}$ (§. 42.); so ist $\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{b^r} = a^{n:m} b^{r:m}$ (§. 20.) = $\sqrt[m]{a^n b^r}$ (§. 45.) und erhellet hieraus folgende Regel:

1. Multipliciret die Gröſſen unter dem Wurzel-Zeichen (a^n und b^r) durch einander.
2. Vor das Product setzet das Wurzelzeichen mit seinem Exponenten ($\sqrt[m]{}$).

So werdet ihr finden, daß $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$,
und $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$.

Zusatz.

58. Wenn ihr also eine Irrationalzahl durch eine andere Irrationalzahl dividiren sollet, so dörffet ihr nur die Zahlen unter dem Wurzelzeichen durch einander dividiren.

So werdet ihr finden, daß $\sqrt[3]{35} : \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{35} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{7}$ und $\sqrt{6} : \sqrt{3} = \sqrt{2}$.

Die 8. Aufgabe.

59. Eine Aufgabe algebraisch aufzulösen.

Auflösung.

1. Unterscheidet mit Fleiß die bekandten Gröſſen von den unbekandten, und benennet jene mit den ersten, diese mit den letzten Buchstaben des Alphabets (§. 15.). Wenn die Benennung geschehen, so
2. Suchet eine Gleichung, daß ihr nemlich eine Sache mit zweyerley Nahmen belegen: denn so müssen die beyden Werthe einander gleich seyn (§. 27. Arithm.). Ihr müſſet aber so viel Gleichungen finden, als ihr unbekandte Gröſſen habet. Wenn es nicht angehet, so ist es ein Zeichen, daß ihr die eine unbekandte Gröſſe so groß annehmen

nehmen könnet als ihr wollet. Und pfleget man dergleichen Aufgaben Underterminirte Aufgaben zu nennen. Es sind aber die Gleichungen entweder in der Aufgabe selbst angedeutet, oder ihr müßet sie aus ihren Umständen durch Hülfe derjenigen Lehrsätze suchen, welche von der Gleichheit handeln.

3. Wenn in den Gleichungen bekandte und unbekandte Grössen mit einander vermenget sind, so müßet ihr sie dergestalt einrichten, daß auf einer Seite lauter bekandte, auf der anderen aber nur eine unbekandte stehen bleibet: Welches geschiehet, wenn ihr die Grössen, welche subtrahiret sind, durch addiren; welche addiret sind, durch subtrahiren; welche andere multipliciren, durch dividiren; welche andere dividiren, durch multipliciren wegbringet, oder auch die Wurzeln zu ihren Dignitäten erhebet, oder aus den Dignitäten die gehörigen Wurzeln ausziehet: damit ihr immer eine Gleichheit erhaltet (§. 30. 31. 32. 33. *Arithm. & §. 36. Algebr.*).

Anmerckung.

60. Unerachtet die Einrichtung der gefundenen Gleichung sehr ofte auf beschriebene Weise geschehen kan; so gehet es doch nicht in allen Fällen an. Wir wollen aber erst diese Regeln uns durch Exempel bekandt machen, ehe wir zu anderen schreiten. Denn die Algebra lernet man nicht so wohl durch Regeln, als durch Exempel.

Die

Die 9. Aufgabe.

61. Aus der gegebenen Summe zweyer Gröſſen und ihrem Unterſcheide die Gröſſen ſelber zu finden.

Auſlösung.

Es ſey die Summe $= a$ die kleine Gröſſe $= x$
der Unterſcheid $= b$ die groſſe $= y$.

So iſt,

$$x + y = a \text{ (§. 15. Arithm.)} \quad y - x = b \text{ (§. 18. Arithm.)}$$

$$\begin{array}{r} x = x \quad \text{subtr.} \\ \hline y = a - x \end{array} \qquad \begin{array}{r} x \quad x \quad \text{add.} \\ \hline y = b + x \end{array}$$

demnach

$$a - x = b + x \text{ (§. 28. Arithm.)}$$

$$\begin{array}{r} x \quad x \quad \text{add.} \\ \hline a = b + 2x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b \quad b \quad \text{subtr.} \\ \hline a - b = 2x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a - b = 2x \\ \hline \quad \quad 2 \text{ div.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a - b = x \\ \hline \quad \quad 2 \end{array}$$

Folgende iſt die gröſſere $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Regel.

Zieh den Unterſcheid der beyden Gröſſen (b) von der Summe (a) ab. Den Reſt

Rest dividiret durch zwey; so ist der Quotient die kleine Grösse x . Addiret den Unterschied zu der Summe; so ist die Hälfte davon die grosse Grösse (y).

B. E. Es sey $a=30, b=8$, so ist $a-b:2=$
 $(30-8):2=22:2=11$, und $(a+b):2=$
 $(30+8):2=38:2=19$.

Probe.

Denn $19-11=8$ und $19+11=30$.
 Oder allgemein:

$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$	$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$
$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$	$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$
Summe a	Untersch. b

Anmerkung.

62. Ihr könnet jederzeit aus der letzten Gleichung eine Regel machen, dadurch die Aufgabe in allen vorkommenden Fällen aufgelöst werden kan, wenn ihr vor die Buchstaben die Nahmen der Sachen sezet, die sie bedeuten, und an statt der Zeichen die Rechnungs- Arten benennet, die sie andeuten: allein der Kürze halber werde ich ins künftige keine Regel hersehen, wenn es nicht besondere Umstände erfordern. Und dieses thue ich um so viel lieber, weil man die Exempel in Zahlen viel hurt-er auflösen kan, wenn man die Ziffern in die Stelle der Buchstaben sezet, als wenn man nach der Regel verfähret. Auch ist zu merken, daß öfters in den Gleichungen, da noch bekandtes und unbekandtes mit einander vermengt ist, nützliche Lehrsätze enthalten sind. **B. E.** Aus der Gleichung $a-b=22$ erhellet folgender Lehrsatz.

Wenn man von der Summe zweyer Grössen ihren Unterschied abziehet; so ist

ist der Rest zweymahl so groß als die kleinere.

Die 10. Aufgabe.

63. Eine Zahl zu finden, deren Hefte, $\frac{1}{3}$, und $\frac{1}{4}$ zusammen um 1 größer sind als die Zahl selbst.

Auflösung.

Es sey die gesuchte Zahl $= x$, so ist

$$x + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x$$

$$= 12x + 8x + 6x$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ = \frac{26}{24} x \text{ (§. 82. Arithm.)} \\ = x + \frac{1}{12} x \text{ (§. 78. 80. Arithm.)} \end{array}$$

$$1 = \frac{1}{12} x$$

$$\text{————— 12 mult.}$$

$$12 = x$$

Probe $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 6 + 4 + 3 = 13$.

Es ist demnach nicht mehr als die einige Zahl 12, welche diese Eigenschaft hat.

Die 11. Aufgabe.

64. Aus der gegebenen Summe zweyer Zahlen und dem Producte einer Zahl in die andere, die Zahlen selber zu finden.

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$ die halbe Differenz $= x$
 das Product $= b$;
 9999 4 so

so ist die grosse Zahl $\frac{1}{2}a + x$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{die kleine } \frac{1}{2}a - x \end{array} \right. \S. 61.$

Und also $\frac{1}{4}aa - xx = b$ (§. 32.).
 $xx \quad xx \text{ add.}$

$$\frac{1}{4}aa = b + xx$$

$b \quad b \quad \text{subtr.}$

$$\frac{1}{4}aa - b = xx$$

rad. extr.

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - b\right)} = x$$

Also ist die grosse Zahl $\frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - b\right)}$;
 die kleine $\frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - b\right)}$.

Es sey $a=14$, $b=48$, so ist $\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - b\right)} = \sqrt{(94 - 48)} = 7$, folgender ist die grosse Zahl $\frac{1}{2}a + x = 7 + 1 = 8$ und die kleine $\frac{1}{2}a - x = 7 - 1 = 6$.

Probe. Denn $8 + 6 = 14$ und $6.8 = 48$.

Anmerkung.

65. Es ist an der Benennung öfters viel gelegen. Denn wenn ihr in gegenwärtiger Aufgabe die grosse Zahl x , die kleine y nennet; kommet ihr auf eine Gleichung, die ihr noch nicht auflösen vermögend seyd. Mercket dabey den Lehrsatz, den die Gleichung $\frac{1}{4}aa = b + xx$ an die Hand giebt:

Das Quadrat der halben Summe zweyer Grössen ist gleich dem Producte derselben in einander, und dem Quadrate des halben Unterscheides.

Die 12. Aufgabe.

66. Es wird gegeben die Summe gleicher Dignitäten zweyer Grössen, und der Unter-

Unterscheid selbiger Dignitäten, ihr sol-
let die Grössen selbst finden.

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$ die kleine Grösse $= x$
der Unterschied $= b$ die grosse $= y$

so ist

$$\begin{array}{r} x^m + y^m = a \\ y^m = a - x^m \end{array}$$

$$\begin{array}{r} y^m - x^m = b \\ y^m = b + x^m \end{array}$$

Folgendes

$$a - x^m = b + x^m$$

$$a = b + 2x^m$$

$$a - b = 2x^m$$

$$(a - b) : 2 = x^m$$

$$\sqrt[m]{\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\right)} = x$$

Es sey $m=2$, $a=97$, $b=65$; so ist $x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\right)} = \sqrt{48\frac{1}{2} - 32\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$ und
 $y = \sqrt{(b + x^2)} = \sqrt{65 + 16} = \sqrt{81} = 9$.

Probe: Denn $81 + 16 = 97$ und $81 - 16 = 65$.

Die 13. Aufgabe.

67. Zwey Zahlen von der Beschaffen-
heit zu finden, daß das Product einer je-
den in die Quadratwurtzel der anderen
einer gegebenen Zahl gleich ist.

Auflösung.

Es sey das eine Product $= a$ die eine Zahl $= x$
 das andere $= b$ die andere $= y$

$$\begin{array}{l} \text{So ist } x \sqrt{y} = a \\ \hline x^2 y = a^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y \sqrt{x} = b \\ \hline y^2 x = b^2 \\ \hline x = b^2 : y^2 \\ \hline x^2 = b^4 : y^4 \end{array}$$

Wenn ihr den Werth von x^2 in die erste Gleichung zur Linken $x^2 y$ sehet, so bekommt ihr

$$\begin{array}{l} b^4 y : y^4 = b^4 : y^2 = a^2 \\ \hline b^4 = a^2 y^3 \\ \hline b^4 : a^2 = y^3 \\ \hline \sqrt[3]{b^4 : a^2} = y \end{array}$$

Es sey $a = 18$, $b = 12$, so ist $y = \sqrt[3]{b^4 : a^2}$
 $= \sqrt[3]{(20736 : 224)} = \sqrt[3]{64} = 4$ und $x = b^2$
 $: y^2 = 144 : 16 = 9$.

Probe: Denn $9 \cdot 2 = 18$ und $4 \cdot 3 = 12$.

Die 14. Aufgabe.

68 Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen, und der Differenz ihrer Quadrate die beyden Grössen zu finden.

Auf

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$ die halbe Differenz
die Differenz der der Gröſſen $= y$
Quadr. $= b$

Es ist die eine Gröſſe $\frac{1}{2}a + y$ (§. 61.)
die andere $\frac{1}{2}a - y$

Das Quadrat der ersten $\frac{1}{4}aa + ay + yy$

Das Quadrat der andern $\frac{1}{4}aa - ay + yy$

Die Differenz $b = 2ay$

 $2a$

folgend $b : 2a = y$

Es sey $b = 40, a = 10$; so ist $y = 40 : 20 = 2$,
folgend die eine Zahl $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$;
die andere $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Probe: Denn $7 + 3 = 10$ und $49 - 9 = 40$.

Die 15. Aufgabe.

69. Aus der gegebenen Summe zweyer
Gröſſen, und der Summe ihrer Quadrate
te die beyden Gröſſen zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste Summe $= a$ die eine Gröſſe
 $\frac{1}{2}a + y$ (§. 61.).

Die andere $= b$ die andere $\frac{1}{2}a - y$

Es ist das Quadrat der ersten $\frac{1}{4}aa + ay + yy$
der andern $\frac{1}{4}aa - ay + yy$

Die Summe $b = \frac{1}{2}aa + 2yy$

Fol.

Folgendes

$$b - \frac{1}{2}aa = 2yy$$

$$\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa = yy$$

$$\sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa)} = y$$

Es sey $a=10$, $b=58$, so ist $\sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa)} = \sqrt{(29 - 25)} = \sqrt{4} = 2$ folgendes $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ und $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Probe: Denn $7+3=10$ und $49+9=58$.

Die 16. Aufgabe.

70. Zwey Zahlen zu finden, deren Product einer gegebenen Zahl gleich ist, das Quadrat aber der Summe zu dem Quadrate der Differenz beyder Zahlen eine gegebene Verhältniß hat.

Auflösung.

Es sey das Product $= a$ die Summe $= 2x$
 die gegebene Verhältniß $= b:c$ der Unterscheid
 $= 2y$

so ist die eine Zahl $x+y$
 die andere $x-y$

und also

$$xx - yy = a \quad b:c = 4x^2 : 4y^2 = x^2 : y^2 \quad (\S. 75. \text{ Arithm. })$$

$$xx = a + y^2 \quad by^2 = cx^2 \quad (\S. 109. \text{ Arithm. })$$

$$by^2 : c = x^2$$

Folgendes

$$a + y^2 = by^2 : c$$

$$ac + cy^2 = by^2$$

$$ac = by^2 - cy^2$$

$$b - c \text{ div.}$$

$$ac : (b - c) = y^2$$

$$\sqrt{ac} : \sqrt{(b - c)} = y$$

Es sey $a = 96$, $b : c = 25 : 1$, so ist $y = \sqrt{96 : \sqrt{(25 - 1)}} = \sqrt{4} (\S. 58) = 2$; und $x = \sqrt{(a + y^2)} = \sqrt{(96 + 4)} = \sqrt{100} = 10$; folgendes $x + y = 10 + 2 = 12$ und $x - y = 10 - 2 = 8$.

Probe: $12 \cdot 8 = 96$ und $25 : 1 = 400 : 16$.

Die 17. Aufgabe.

71. Aus der gegebenen Tagereise zweyer Bothen und der Zeit, da der andere dem ersten nachgeheth, die Zeit zu finden, in welcher er ihn einholet.

Auflösung.

Es sey die Tagereise des ersten $= a$ die gesuchte Zeit $= x$
des andern $= b$
die gegebene Zeit $= c$

So ist die Reise des ersten in der gegebenen Zeit $= ac$, in der gesuchten $= ax$. Die Reise des andern in der letzteren Zeit $= bx$. Da nun beyde einen gleichen Weg zurücke gelegt; so ist

$$ac \div ax = bx$$

$$\frac{ax}{ax} \text{ subtr.}$$

$$ac = bx - ax = (b - a)x$$

$$\frac{\quad}{\quad} \text{ } b - a \text{ div.}$$

$$ac : (b - a) = x$$

Es sey $a=6$, $b=8$; $c=4$; so ist $x=24$;
 $(8-6) = \frac{24}{2} = 12$.

Probe: Denn $12 \cdot 8 = 96$ und $4 \cdot 6 \div 12$.
 $6 = 24 \div 72 = 96$.

Anmerkung.

72. Weil man in Auflösung dieser Aufgabe weder auf den Begriff der Tagereise, noch der Bothen sieht; so ist daraus abzunehmen, daß sie bey der Bewegung aller Körper kan angebracht werden.

Die 18. Aufgabe.

73. Aus der gegebenen Tagereise eines Bothen und der Zeit, da er hinweg ist, die Tagereise eines anderen Bothen zu bestimmen, der ihn in einer gegebenen Zeit einholen soll

Auflösung.

Es sey die Tagereise des ersten $= a$ des andern $= x$

die verflossene Zeit $= b$

die gegebene Zeit $= c$

so findet man wie in der vorhergehenden Aufgabe

$$ab \div ac = cx$$

$$\frac{ab \div a}{c} = x$$

c

Es

Es sey $a=6, b=4, c=12$; so ist $x=\frac{24}{12}+6=+6=8$.

Probe: Denn $24+72=96$ und $8.12=96$.

Die 19. Aufgabe.

74. Aus der gegebenen Weite zweyer Orter von einander, aus welchen zu gleicher Zeit zwey Bothen ausreihen, und der Tagereise eines jeden, die Zeit zu bestimmen, da sie einander begegnen.

Auflösung.

Es sey die Weite $=a$ die gesuchte Zeit $=x$
 die Tagereise des ersten $=b$
 des anderen $=c$

So ist der Weg des ersten in der zu bestimmenden Zeit $=bx$, des anderen $=cx$; folgendes, weil beyde zusammen die ganze Weite der Orter von einander durchreiset,

$$bx + cx = a$$

$$\text{das ist } (b + c)x = a$$

$$x = a : (b + c)$$

Es sey $a=120, b=6, c=4$; so ist $x=120:(6+4)=120:10=12$. Sie begegnen also einander in dem zwölften Tage.

Probe: Denn $6.12+4.12=72+48=120$.

Die 20. Aufgabe.

75. Aus dem gegebenen Werthe einer Kanne guten Weines zu bestimmen, wie viel man Wasser darunter mischen muß, damit man das Maas um einen verlangten geringeren Preis geben kan.

Auf.

Auflösung.

Der höhere Preis sey $= a$ das Wasser $= x$
 der geringere $= b$

das Kannen-Maas $= 1$

Da nun der Preis von $1 = b$, so ist der Preis
 von $1+x = b+bx$ (§. 113. *Arithm.*) und daher,
 weil das Wasser x nichts gilt,

$$b+bx=a \text{ (§. 28. Arithm.)}$$

$$bx = a - b$$

$$x = (a-b) : b$$

Es sey $a=16, b=10$; so ist $x=(16-10):10$
 $=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

Probe: Denn wenn $1\frac{3}{5}$ Kannen 16 Gros-
 schen kommen; so kommt eine Kanne 10
 Groschen (§. 113. *Arithm.*).

Die 21. Aufgabe.

76. Aus dem gegebenen Preise zweyer
 Weine von verschiedener Güte zu bestim-
 men, wie viel man von dem geringeren zu
 dem besseren gießen muß, damit man ihn
 vor einen verlangten Preis geben kan.

Auflösung.

Es sey der Preis des	die Grösse des schlech-
guten $= a$	ten $= x$
des schlechten $= b$,	so ist sein Preis $= bx$
des vermischten,	die Grösse des guten
$= c$	$= 1-x$
das Kannenmaas,	sein Preis $= a - ax$
$= 1$	

Folgendes.

$$a - \underset{ax}{ax} + \underset{ax}{bx} = c \quad (\S. 28. \text{ Arithm.}).$$

$$\begin{array}{r} a + bx = ax + c \\ bx \quad bx \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a = ax - bx + c \\ c \qquad \qquad c \end{array}$$

$$a - c = ax - bx = (a - b)x$$

$$(a - c) : (a - b) = x$$

$a - b \text{ div.}$

Es sey $a = 16$, $b = 10$, $c = 12$; so ist $x = (16 - 12) : (16 - 10) = 4 : 6 = \frac{2}{3}$. Demnach werden von dem schlechten $\frac{2}{3}$ und von dem guten $\frac{1}{3}$ genommen.

Probe: Denn $\frac{1}{3}$ vom guten kommet $5\frac{1}{3}$ Gr. und $\frac{2}{3}$ vom schlechten $6\frac{2}{3}$ Gr. folgendes der vermischte 12 Gr.

Anmerkung.

77. Die auf besondere Arten der Fälle gerichtete Aufgaben sind schwerer aufzulösen, als die allgemeinen von Zahlen und Gröſſen: Denn man hat hier viel besondere Umstände, welche zur Auflösung der Aufgabe nichts beytragen, und es ist öfters, sonderlich für Anfänger nicht eine geringe Mühe, wenn man die Aufgaben von den besonderen und zur Auflösung nicht dienenden Umständen befreyen soll.

Die 6. Erklärung.

78. Wenn die Wurzel einer Dignität oder Potentz aus zwey Theilen bestehet, (Wolfs Mathes. Tom. IV.) Shh hh nen-

nennet man sie eine Binomische Wurzel, als $a+b$. Bestehet sie aus drey Theilen, als $a+b+c$; so heisset sie eine Trinomische Wurzel: wenn sie aus vier Theilen bestehet, eine Quadrinomische Wurzel u. s. w. überhaupt aber nennet man sie Polynomische Wurzel, wenn sie aus mehr als zwey Theilen bestehet.

Die 22. Aufgabe.

79. Die Natur des Quadrates oder der anderen Dignität einer Binomischen Wurzel zu finden.

Auflösung.

Ihr verlanget zu wissen, wie das Quadrat einer Binomischen Wurzel entstehen kan (S. 4. Method. Mathem.). Multipliciret demnach die Binomische Wurzel $a+b$ durch sich selbst, so wird das Product zeigen, aus was für Theilen das Quadrat zusammen gesetzt wird, und wie diese Theile des Quadrates aus den Theilen der Wurzel entstehen.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline +ab+b^2 \\ a^2+ab \end{array}$$

$a^2 + 2ab + b^2$ Quadrat der Binomischen Wurzel.

Lehrsatz.

Das Quadrat der Binomischen Wurzel begreift in sich die Quadrate der beyden Theile (a^2 und b^2) und ein Product ($2ab$) aus dem einen Theile zweymahl genommen ($2a$) in den anderen (b).

Anmerkung.

80. Ihr habet hier auf eine sehr leichte Art den andern Lehrsatz der Rechenkunst (§. 93. *Arithm.*) gefunden, daraus wir die Ausziehung der Quadratwurzel (§. 97. *Arithm.*) hergeleitet. Wenn ihr aber dieselben Regeln vergessen hättet, könnte euch dieses allgemeine Exempel $a^2 + 2ab + b^2$ an statt derselben dienen. Denn ihr sehet, daß, wenn ihr in der ersten Classe zur Linken das darinnen befindliche Quadrat a^2 abziehet, ihr den ersten Theil der Wurzel a habet. Wollet ihr nun den anderen finden, so müßet ihr mit $2a$, das ist, mit dem gefundenen Quotienten zweymahl genommen, die folgende Zahl $2ab$ dividiren, und hernach nicht allein das Product aus dem Divisore $2a$ in den neuen Quotienten b , sondern auch das Quadrat des neuen Quotienten b^2 subtrahiren.

Zusatz.

81. Setzet $a = a + b$ und $b = c$, so kommet für das Quadrat der Trinomischen Wurzel $(a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$. Und also müßet ihr zu dem Binomischen Quadrate noch das Product aus der Summe der beyden Theile der Binomischen Wurzel zweymahl genommen in den dritten Theil, und das Quadrat des dritten Theiles addiren. Setzet $a = a + b + c$, und $b = d$, so kommet für das Quadrat der Quadrinomischen Wurzel $(a + b + c)^2 + 2$

$2 \quad d \quad d \quad d \quad d \quad 2$

$(a + b$

$(a \pm b \pm c) d \pm d^2$. Derowegen müßet ihr zu dem Quadrate der Trinomischen Wurzel noch das Product aus der Summe der ersten drey Theile zwey mahl genommen in den vierdten Theil und das Quadrat des vierdten Theiles addiren. Solchergestalt sehet ihr, daß ihr nach der Binomischen Formul auch das Quadrat einer jeden Polynomischen Wurzel finden, ingleichen aus einer gegebenen Zahl eine jede Polynomische Wurzel ziehen könnet. Denn $(a \pm b \pm c \pm d \pm e \&c.)^2 = a^2 \pm 2ab \pm b^2 \pm 2(a \pm b)c \pm c^2 \pm 2(a \pm b \pm c)d \pm d^2 \pm 2(a \pm b \pm c \pm d)e \pm e^2$ u. s. w. unendlich fort.

Die 7. Erklärung.

82. Eine unreine Quadratische Gleichung (*Aequatio quadratica affecta*) wird genennet in welcher $x^2 \pm ax = \pm b^2$.

Die 23. Aufgabe.

83. Eine unreine Quadratische Gleichung aufzulösen.

Auflösung.

Weil $x^2 \pm ax = b^2$, so nehmet x für den einen Theil einer Binomischen Wurzel an. Alsdenn wird a die bekandte Gröſſe des andern Gliedes, der andere Theil der Wurzel zweymahl genommen, und also $\frac{1}{2}a$ der andere Theil der Wurzel seyn: folgendes fehlet zu einem vollkommenen Quadrate das Quadrat von $\frac{1}{2}a$, nemlich $\frac{1}{4}aa$ (§. 79.). Wenn ihr nun
sol

solches beyderseits addiret; so lasset sich die Quadratwurzel ausziehen und die gegebene Gleichung völlig einrichten.

Es sey $x^2 + ax = b^2$

$$\begin{array}{r} \frac{\frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{4}a^2} \\ x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2 \\ \hline x + \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} \\ \hline x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} - \frac{1}{2}a \end{array}$$

Es sey ferner

$$\begin{array}{r} x^2 - ax = b^2 \\ \hline \text{so ist } x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2 \\ \hline x - \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} \\ \hline \text{oder } \frac{1}{2}a - x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} \end{array}$$

folgender $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$

Denn weil $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ grösser als $\frac{1}{2}a$ ist; so gehet die andere Wurzel $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$ nicht an.

Es sey endlich

$$\begin{array}{r} x^2 - ax = -b^2 \\ \hline \text{so ist } x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2 \\ \hline x - \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)} \\ \hline \text{oder } \frac{1}{2}a - x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)} \\ \hline x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)} \end{array}$$

Weil $\sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2 - b^2\right)}$ kleiner als $\frac{1}{2}a$; so läßt es sich von $\frac{1}{2}a$ subtrahiren, und also gehen beyde Wurzeln an.

Nemlich dieses findet statt, wenn man zwey unbekandte Gröſſen hat, und es gilt gleich viel, welche von beyden man x nennet, indem immer einerley Gleichungen heraus kommen.

Anmerckung.

84. Den Nutzen dieser Regel werdet ihr inskünftige überflüssig sehen. Jetzt vergnüget mich dieselbe durch die beyden folgenden Aufgaben zu erläutern.

Die 24. Aufgabe.

85. Zwey Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß ihr Product, ihre Summe und die Differenz ihrer Quadrate einander gleich sind.

Auflösung.

Es sey die groſſe Zahl $= x$

die kleine

$= y$, so ist

$$x^2 - y^2 = xy$$

$$xy = x + y$$

$$xy - y = x$$

$$y = x : (x - 1)$$

Wenn ihr den Werth y in der ersten Gleichung an seine Stelle ſetzt, so bekommt ihr, weil $y^2 = x^2 : (x - 1)^2$ und $xy = x^2 : (x - 1)$,

$$\begin{array}{r}
 x^2 \quad \quad \quad -x^2 = x^2 \\
 \hline
 x^2 - 2x + 1 \quad \quad x - 1 \\
 \hline
 x^2 - 2x^2 + 1 \text{ mult.} \\
 \hline
 x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 = x^3 - x^2 \\
 \hline
 x^4 - 3x^3 = -x^2 \\
 \hline
 \quad \quad \quad x^2 \text{ div.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 3x = -1 \\
 \frac{9}{4} \quad \quad \frac{9}{4} \text{ (§. 83.).} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$x - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{5}$$

$$\text{oder } \frac{3}{2} - x =$$

$$x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$$

$$\text{oder } x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5}$$

Ferner weil $xy - x = y$, so ist $x = y: (y - 1)$.
 Wenn ihr diesen Werth in der ersten Gleichung in die Stelle x setzt, so bekommt ihr

$$\begin{array}{r}
 y^2 \quad \quad \quad - y^2 = \quad y^2 \\
 \hline
 y^2 - 2y + 1 \quad \quad y - 1
 \end{array}$$

und wenn ihr die Reduction wie vorhin anstellt, so findet ihr endlich $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$ oder $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5}$.

Weil $\frac{1}{2} \sqrt{5}$ grösser ist als $\frac{1}{2}$; so findet bloß die erste Wurzel statt. Derowegen weil diese allein mit $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$, nicht aber mit $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5}$; hingegen die falsche Wurzel $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5}$ mit

mit $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ die Probe hält; so sind die verlangten Zahlen $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Probe: Denn $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5}$, und $(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}) = 2 + \sqrt{5}$, in gleichen $\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{4} = 2 + \sqrt{5}$.
 Gleichergestalt ist $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = 2 - \sqrt{5}$, und $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}) = 2 - \sqrt{5}$, in gleichen $\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{4} = 2 - \sqrt{5}$.

Die 25. Aufgabe.

86. Aus dem gegebenen Producte zweyer Gröſſen und ihrer Differenz die Gröſſen ſelber zu finden.

Auſlösung.

Es ſey das Product $= a$ die größte Gröſſe $= x$
 die Differenz $= b$ die andere $= y$

So iſt,

$$\begin{array}{r} a = xy \\ \hline a : y = x \end{array} \quad \begin{array}{r} b = x - y \\ \hline b + y = x \end{array}$$

Folgendes $a : y = b + y$

$$\begin{array}{r} \hline a = by + y^2 \\ \frac{1}{4}b^2 \qquad \frac{1}{4}b^2 \text{ (§. 83.)} \\ \hline a + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2 + by + y^2 \\ \hline \sqrt{a + \frac{1}{4}b^2} = \frac{1}{2}b + y \\ \hline \sqrt{a + \frac{1}{4}b^2} - \frac{1}{2}b = y \end{array}$$

Es sey $a=40, b=3$, so ist $y=\sqrt{(40+\frac{9}{4})}$
 $-\frac{3}{2}=\sqrt{(169:4)}-\frac{3}{2}=\frac{13}{2}-\frac{3}{2}=\frac{10}{2}=5$
 und demnach $x=8$.

Probe: Denn $5 \cdot 8=40$ und $8-5=3$.

Die 26. Aufgabe.

87. Die Natur der dritten Dignität einer Binomischen Wurzel zu finden.

Auflösung.

Ihr habet nur die andere Dignität,

durch die Wurzel $a^2+2ab+b^2$ $a+b$ zu multiplici-
 ren (§. 32.)

$$\begin{array}{r} +a^2b+2ab^2+b^3 \\ a^3+2a^2b+ab^2 \end{array}$$

so ist $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ die ver-
 langte dritte Dignität (§. 78.).

Lehrsatz.

Die dritte Dignität einer Binomischen Wurzel enthält in sich die dritte Dignität der beyden Theile (a^3 und b^3) und ein Pro-
 duct aus dem Quadrate des ersten Theiles
 drey mahl genommen ($3a^2$), in den anderen
 (b), nebst noch einem anderen Producte aus
 dem ersten Theile drey mahl genommen ($3a$)
 in das Quadrat des anderen Theiles (b^2).

Die 1. Anmerkung.

88. Ihr habet hier abermahls auf eine sehr leichte
 Art den 3ten Lehrsatz der Rechenkunst (§. 99. Arithm.)
 gefunden, daraus die Ausziehung der Cubicwurzel
 hergeleitet worden (§. 103. Arithm.). Wenn ihr aber
 die dort gegebenen Regeln vergessen hättet, könnte euch
 das

das allgemeine Exempel $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ an deren statt dienen. Denn ihr sehet, daß wenn ihr in der ersten Classe zur Linken die daselbst befindliche dritte Dignität a^3 abziehet, ihr den ersten Theil der Wurzel a habet. Wenn ihr nun aus den übrigen Gliedern den anderen Theil finden wollet, müßet ihr das erste zur Linken $3a^2b$ durch das Quadrat des ersten dreymahl genommen ($3a^2$) dividiren, und hernach nicht allein das Product aus diesem Divisore ($3a^2$) in den neuen Quotienten (b) sondern auch das Product aus dem Quadrate des neuen Quotientens (b^2) in den vorhergehenden dreymahl genommen ($3a$) und endlich die dritte Dignität des neuen Quotientens (b^3) abziehen.

Zusatz.

89. Setzet $a = a + b$ und $b = c$, so kommet für die dritte Dignität der Trinomischen Wurzel $a + b + c$ heraus $(a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$, und also müßet ihr zu der Dignität der Binomischen Wurzel noch das Product aus dem Quadrate der Binomischen Wurzel dreymahl genommen $3(a + b)^2$ in den dritten Theil c , das Product aus der Binomischen Wurzel dreymahl genommen $3(a + b)$ in das Quadrat des dritten Theiles c^2 und die dritte Dignität desselben Theiles c^3 addiren. Setzet $a = a + b + c$ und $b = d$, so ist die dritte Dignität der Quadrimomischen Wurzel $(a + b + c)^3 + 3(a + b + c)^2d + 3(a + b + c)d^2 + d^3$; folgendes müßet ihr noch zu der Dignität der Trinomischen Wurzel $(a + b + c)^3$ das Product aus dem Quadrate der Trinomischen Wurzel dreymahl genommen $3(a + b + c)^2$ in

in den vierdten Theil d , das Product aus der Trinomischen Wurzel drey-mahl genommen $3(a+b+c)$ in das Quadrat des vierdten Theiles d^2 und die dritte Dignität des vierdten Theiles d^3 addiren. Solchergeſtalt ſehet ihr, daß ihr nach der Binomischen Regel auch die dritte Dignität einer jeden Polynomischen Wurzel finden, ingleichen aus einer gegebenen Zahl eine jede Polynomische Cubicwurzel ziehen könnet. Denn $(a+b+c+d+e \&c.)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 + 3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3 + 3(a+b+c+d)^2e + 3(a+b+c+d)e^2 + e^3$ u. ſ. w. unendlich fort.

Die 2. Anmerkung.

90. Auf eben ſolche Weiſe könnet ihr für die höheren Dignitäten Regeln finden. Und unerachtet ich in der folgenden Aufgabe zeigen werde, wie ihr an ſtatt unendlicher Regeln für unendliche Dignitäten, zu denen eine Gröſſe erhoben werden kan, eine einige finden könnet; ſo wird euch die Mühe doch nicht verdrüſſen, wenn ihr auf gleiche Art die Natur der vierdten, fünften, ſechſten Dignität u. ſ. w. unterſuchet. Denn dieſe Unterſuchung ſelbſt wird euch dienen, die allgemeine Regel zu erfinden.

Die 27. Aufgabe.

91. Eine allgemeine Regel zu finden, nach welcher jede Binomische Wurzel zu jeder verlangten Dignität erhoben werden kan.

Auflöſung.

Wenn ihr die Binomische Wurzel nach und nach zu ihren Dignitäten erhebet, wie beygefügte Taſel ausweiſet.

$1a^1$	$1b$	$1b^3$	$1b^3$	$1b^4$	$1b^5$	$1b^6$	$1b^7$	$1b^8$	$1b^9$	$1b^{10}$
$1a^2$	$2ab$	$3ab^2$	$4ab^3$	$5ab^4$	$6ab^5$	$7ab^6$	$8ab^7$	$9ab^8$	$10ab^9$	
$1a^3$	$3a^2b$	$6a^2b^2$	$10a^2b^3$	$15a^2b^4$	$21a^2b^5$	$28a^2b^6$	$36a^2b^7$	$45a^2b^8$	$54a^2b^9$	
$1a^4$	$4a^3b$	$10a^3b^2$	$15a^3b^3$	$21a^3b^4$	$28a^3b^5$	$36a^3b^6$	$45a^3b^7$	$54a^3b^8$	$63a^3b^9$	
$1a^5$	$5a^4b$	$15a^4b^2$	$20a^4b^3$	$25a^4b^4$	$30a^4b^5$	$35a^4b^6$	$40a^4b^7$	$45a^4b^8$	$50a^4b^9$	
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^5b^2$	$20a^5b^3$	$25a^5b^4$	$30a^5b^5$	$35a^5b^6$	$40a^5b^7$	$45a^5b^8$	$50a^5b^9$	
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^6b^2$	$35a^6b^3$	$56a^6b^4$	$84a^6b^5$	$112a^6b^6$	$140a^6b^7$	$168a^6b^8$	$196a^6b^9$	
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^7b^2$	$56a^7b^3$	$70a^7b^4$	$84a^7b^5$	$100a^7b^6$	$112a^7b^7$	$126a^7b^8$	$140a^7b^9$	
$1a^9$	$9a^8b$	$36a^8b^2$	$84a^8b^3$	$126a^8b^4$	$126a^8b^5$	$84a^8b^6$	$36a^8b^7$	$9a^8b^8$	$1a^8b^9$	
$1a^{10}$	$10a^9b$	$45a^9b^2$	$120a^9b^3$	$210a^9b^4$	$252a^9b^5$	$210a^9b^6$	$120a^9b^7$	$45a^9b^8$	$10a^9b^9$	

so werdet ihr wahrnehmen, daß eine jede Dignität aus verschiedenen Producten zusammen gesetzt ist, und diese Producte durch verschiedene Zahlen multipliciret werden. Es entstehen aber diese Producte, wenn ihr jeden Theil der Wurzel zu allen niedrigeren Dignitäten als die gegebene ist, erhebet, und sie verfehret in einander multipliciret. Z. E. In der sechsten Dignität sind alle Dignitäten von 1 bis zu der sechsten der beyden Theile $a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a^1, 1$, und $1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6$. Multipliciret die erste Reihe in die andere, so bekommet ihr $a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6$, das ist, alle Producte, woraus die sechste Dignität bestehet, ausser denen Zahlen, welche sie multipliciren, und nach dem Exempel des Oughtred (Clavis Mathematicæ c. 12. §. 6. p. m. 38.) sonderlich von denen Engelländern Unciæ genennet werden. Derowegen wenn der Exponente m ist, so sind die Producte $a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + a^{m-4}b^4 + a^{m-5}b^5 + a^{m-6}b^6$ u. s. w. unendlich fort.

Die Un-

gen.

$$1 + 1$$

$$1 + 2 + 1$$

$$1 + 3 + 3 + 1$$

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1$$

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$$

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$$

$$1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1$$

&c.

wer

werden gefunden, wenn ihr die Exponenten der Dignitäten, die in einander multipliciret werden, unter einander schreibet, und den Bruch aus den zwey ersten Zahlen für die Unke des anderen Gliedes, den Bruch aus den beyden ersten oberen und beyden ersten unteren Zahlen zur Unke des dritten Gliedes nehmet zc. Z.E. Es sollen die Unken für die sechste Dignität gefunden werden: so schreibet die angeführten Exponenten dergestalt untereinander:

$$\begin{array}{cccccc} 6. & 5. & 4. & 3. & 2. & 1 \\ 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6 \end{array}$$

Alsdenn ist $\frac{6}{1} = 6$ die Unke des anderen Gliedes

$$\text{des, } \frac{6.5}{1.2} = 15 \text{ die Unke des dritten, } \frac{6.5.4}{1.2.3}$$

$$= 20 \text{ die Unke des vierdten, } \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15$$

$$\text{die Unke des fünften, } \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} = 6 \text{ die}$$

$$\text{Unke des sechsten, und endlich } \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6}$$

$$= 1 \text{ die Unke des letzten Gliedes.}$$

Auf eben solche Art werden die Unken gefunden, wenn die Exponenten undeterminiret sind. Man schreibet sie nemlich dergestalt untereinander:

$$m.m-1.m-2.m-3.m-4..m-5.2c.$$

$$1. 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5. \quad 6$$

und nimmet $\frac{m}{1}$ für die Unze des anderen

$$1$$

Gliedes; $\frac{m.m-1}{1}$ für die Unze des dritten,

$$1. 2.$$

$\frac{m.m-1.m-2}{1}$ für die Unze des vierdten,

$$1. 2. \quad 3.$$

$\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1}$ für die Unze des fünften

$$1. 2. \quad 3. \quad 4.$$

$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1}$ für die Unze des

$$1. 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5.$$

sechsten, $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1}$ für

$$1. 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5. \quad 6.$$

die Unze des siebenden 2c.

Wenn ihr nun diese Uncias in die oben ge-
fundene Producte multipliciret; so bekommet
ihr für die Dignität m von $a \pm b$.

$$\frac{a^m}{1} \pm \frac{ma^{m-1}b}{1. 2.} \pm \frac{m.m-1.a^{m-2}b^2}{1. 2.} \pm \frac{m.m-1.m-2.a^{m-3}b^3}{1. 2. 3.} \pm \frac{m.m-1.m-2.m-3.a^{m-4}b^4}{1. 2. 3. 4.} \pm \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.a^{m-5}b^5}{1. 2. 3. 4. 5.} \pm \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.a^{m-6}b^6}{1. 2. 3. 4. 5. 6.} \&c.$$

$$\frac{a^m}{1} \pm \frac{ma^{m-1}b}{1. 2.} \pm \frac{m.m-1.a^{m-2}b^2}{1. 2.} \pm \frac{m.m-1.m-2.a^{m-3}b^3}{1. 2. 3.} \pm \frac{m.m-1.m-2.m-3.a^{m-4}b^4}{1. 2. 3. 4.} \pm \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.a^{m-5}b^5}{1. 2. 3. 4. 5.} \pm \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.a^{m-6}b^6}{1. 2. 3. 4. 5. 6.} \&c.$$

$$\frac{a^m}{1} \pm \frac{ma^{m-1}b}{1. 2.} \pm \frac{m.m-1.a^{m-2}b^2}{1. 2.} \pm \frac{m.m-1.m-2.a^{m-3}b^3}{1. 2. 3.} \pm \frac{m.m-1.m-2.m-3.a^{m-4}b^4}{1. 2. 3. 4.} \pm \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.a^{m-5}b^5}{1. 2. 3. 4. 5.} \pm \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.a^{m-6}b^6}{1. 2. 3. 4. 5. 6.} \&c.$$

$$\frac{a^m}{1} \pm \frac{ma^{m-1}b}{1. 2.} \pm \frac{m.m-1.a^{m-2}b^2}{1. 2.} \pm \frac{m.m-1.m-2.a^{m-3}b^3}{1. 2. 3.} \pm \frac{m.m-1.m-2.m-3.a^{m-4}b^4}{1. 2. 3. 4.} \pm \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.a^{m-5}b^5}{1. 2. 3. 4. 5.} \pm \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.a^{m-6}b^6}{1. 2. 3. 4. 5. 6.} \&c.$$

$$1. 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5. \quad 6.$$

Das

Das ist, weil $a^{m-1} = a^m : a$, $a^{m-2} = a^m : a^2$,
 $a^{m-3} = a^m : a^3$, $a^{m-4} = a^m : a^4$ &c. (§. 39.),

$$\begin{array}{r}
 a^m + ma^m b + m.m - 1. a^m b^2 + m.m - 1. m - 2. \\
 \hline
 \begin{array}{ccccccc}
 1 & a & 1. 2 & a^2 & 1. & 2. & 3 \\
 a^m b^3 + m.m - 1. m - 2. m - 3. a^m b^4 + m.m - 1. \\
 \hline
 a^3 & 1. 2. & 3. & 4. & a^4 & 1. 2. \\
 m - 2. m - 3. m - 4. a^m b^5 + m.m - 1. m - 2. \\
 \hline
 3. & 4. & 5. & a^5 & 1. 2. & 3 \\
 m - 3. m - 4. m - 5. a^m b^6 \text{ \&c.} \\
 \hline
 4. & 5. & 6. & a^6
 \end{array}
 \end{array}$$

Wenn ihr nun ferner $a = P$ und $b : a = Q$, das
 erste Glied = A, das andere = B; das dritte
 = C, das vierdte = D, das fünfte = E u.
 f. w. sehet; so findet ihr endlich $(P + PQ)^m$
 $= P^m + m A Q + m - 1 B Q + m - 2 C Q +$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & 2. & & 3. & & \\
 m - 3 D Q + m - 4 E Q + m - 5 F Q \text{ u. f. w.} \\
 \hline
 4. & & 5. & & 6. & & \\
 \text{unendlich fort.}
 \end{array}
 \end{array}$$

Also habet ihr eine allgemeine Regel ge-
 funden, nach welcher ihr eine jede Binomische
 Wurzel zu einer jeden verlangten Dignität
 erheben könnet.

Die I. Anmerkung.

92. Ihr verlangt die vierdte Dignität von 18 oder

10 + 8, so ist $m=4, P=10, Q=8: 10=4: 5$,
folgendes $P^m = 10^4 = 10000 = A$

$$m. \quad A Q = 4. \quad 10000. \frac{4}{5} = 32000 = B$$

$$m - 1 \quad B Q = \frac{3}{2}. \quad 32000. \frac{4}{5} = 38400 = C$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ m - 2 \quad C Q = \frac{2}{3}. \quad 38400. \frac{4}{5} = 20480 = D \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ m - 3 \quad D Q = \frac{1}{4}. \quad 20480. \frac{4}{5} = 4096 = E \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ m - 4 \quad E Q = 0. \quad 4096. \frac{4}{5} = 0 = F \end{array}$$

5

$$10000 = A$$

$$32000 = B$$

$$38400 = C$$

$$20480 = D$$

$$4096 = E$$

104976 vierdte Dignität von
18

Die 2. Anmerkung.

93. Ihr werdet vielleicht meinen, daß man mit leichter Mühe durch das gewöhnliche multipliciren die gegebenen Zahlen zu der verlangten Dignität erheben kan, und dannhero die gesundene allgemeine Regel für unnütze halten. Allein ihr sollet zu seiner Zeit erfahren, wie sehr ihr euch in eurer Meinung betrogen, wenn ihr ihren vielfältigen Nutzen verspähren werdet. Jetzt erinnere ich nur dieses. Wenn ihr aus einer gegebenen Zahl eine verlangte Wurzel ausziehen sollet; so könnet ihr die Regeln, nach welchen solches geschieht, wie für die Quadrat- und Cubicwurzel (§. 80. 88.)

(Wolfs Mathes. Tom. IV.)

III

fin

finden, wenn ihr durch die gefundene allgemeine Regel die Binomische Wurzel $a \pm b$ zu der gehörigen Dignität erhebet. Z. E. Ihr sollet die Wurzel der fünften Dignität aus einer gegebenen Zahl ziehen; so dürfet ihr nur $a \pm b$ zu der fünften Dignität erheben. Das allgemeine Exempel wird euch die Regel bald an die Hand geben.

Die 3. Anmerkung.

94. Gleichwie ihr aber schon oben gesehen habet, daß die Regeln für die Binomische Wurzeln auch dienen eine Polynomische Wurzel zu der anderen und dritten Dignität zu erheben (§. 81. 89.); also gehet es auch an, daß ihr nach dieser allgemeinen Regel, die zwar eigentlich auch nur auf Binomische Wurzeln gerichtet ist, auf eine gleiche Weise eine jede Polynomische Wurzel zu der verlangten Dignität erhebet, und die Wurzel selbst nach derselben findet: wie aus folgender Aufgabe zu ersehen.

Die 28. Aufgabe.

95. Eine allgemeine Regel zu finden, aus allen Dignitäten eine verlangte Binomische Wurzel zu ziehen.

Auflösung.

Weil $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ (§. 42.), so ist das Wurzelausziehen so viel als eine GröÙe zu einer Dignität erheben, die zu ihrem Exponenten eine gebrochene Zahl hat. Derowegen wenn ihr in der vorhin gefundenen Regel an statt des Exponenten m den Exponenten $m:n$ sezet, so bekommet ihr eine allgemeine Regel, nach welcher sowohl jede GröÙe zu einer verlangten Dignität erhoben, als aus derselben

selben eine verlangte Wurzel gezogen werden kan. Es ist aber folgende:

$$\sqrt[n]{(P \pm PQ)^m} = P^{m:n} \pm \frac{m}{n} A Q \pm \frac{m(m-1)}{n \cdot 2n} B Q^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{n \cdot 2n \cdot 3n} C Q^3 \pm \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot 4n} D Q^4 \pm \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot 4n \cdot 5n} E Q^5 \pm \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot 4n \cdot 5n \cdot 6n} F Q^6 \text{ u. s. w. unendlich fort.}$$

Die 1. Anmerkung.

96. Diese sehr nützliche Regel hat der vortrefliche Geometra in Engelland *Isaac Newton* zu erst gefunden, wiewohl auf eine andere Art, als ich gewiesen habe: wie solches aus dem Briefe erhellet, den er An. 1676. an den unvergleichlichen Mathematicum und Polyhistorem, den Herrn Reichs-Hofrath von *Leibnitz*, geschrieben, und *Walisius* mit in den dritten Theil seiner mathematischen Werke f. 622. drucken lassen. Es ist aber diese Regel einerley mit der vorigen. Denn wi. ihr $m:n$ durch ganze Zahlen in dem Gebrauche derselben erklären könnet, wenn ihr $n=1$ sehet: so könnet ihr auch in der vorigen Regel m durch einen Bruch erklären, wenn eine Wurzel ausgezogen werden soll. Z. E. Ihr sehet $m = \frac{1}{2}$, wenn ihr die Quadratwurzel verlanget; $m = \frac{1}{3}$, wenn ihr die Cubicwurzel suchet u. s. w.

Die 2. Anmerkung.

97. Damit ihr aber den Gebrauch der Regel deutlich erkennen möget: so will ich selbige mit einem Exempel erläutern. Ihr verlanget zu wissen die Quadratwurzel aus $aa - x^2$: so ist $m=1$, $n=2$, $P=aa$, $Q=-x^2$: folgend:

$$Pm:n=a=A$$

$$\frac{+m}{n}AQ = \frac{1}{2}a - x^2; a = -x^2 = B$$

$$\frac{+m-n}{2n}BQ = 1 - 2 \frac{x^2}{2a} - \frac{x^2}{a^2} = -x^4 = C$$

$$\frac{+m-2n}{3n}CQ = 1 - 4 \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^2}{a^2} = -x^6 = D$$

$$\frac{+m-3n}{4n}DQ = 1 - 6 \frac{x^6}{8} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{x^2}{a^2} = -5x^8 = E$$

$$\frac{+m-4n}{5n}EQ = 1 - 8 \frac{x^8}{10} - \frac{x^8}{128a^7} - \frac{x^2}{a^2} = -7x^{10} \&c.$$

$$\text{Demnach ist } \sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3}$$

$$- \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9} \text{ u. s. w. unendlich fort.}$$

Die 3. Anmerkung.

98. Wenn man aus der gegebenen Grösse eine vollkommene Wurzel haben kan, so ist die Zahl der Glieder allezeit endlich. Hingegen wo dergleichen nicht vorhanden, so gehen die Glieder unendlich fort. Man nimmet aber von denselben so viele in jedem Falle als nöthig ist, bis nemlich durch Weglassung der übrigen kein merklicher Fehler entsteht.

Die 4. Anmerkung.

99. Wenn einem die 27. und 28. Aufgabe zu schwer vorkommen sollte, der kan sie so lange bey Seite setzen, bis wir unten ihrer nöthig haben werden.

Die

Die 29. Aufgabe.

100. Die Differenz zweyer Quadrate zu finden, derer Wurtzel um 1 unterschieden sind.

Auflösung.

Es sey die eine Wurtzel n , die andere $n+1$,
so ist das Quadrat der grossen $n^2 + 2n + 1$
 —————
 der kleinen n^2

die Differenz $2n + 1$.

Wenn nun jede Zahl zweymahl genommen eine gerade Zahl bringet, und eine gerade Zahl von einer ungeraden um 1 unterschieden ist; so ist die Differenz zweyer Quadrate, derer Wurtzeln um 1 unterschieden sind, eine ungerade Zahl, die der Summe der Wurtzeln gleich ist. Es seyn die Wurtzeln 8 und 9, so ist die Differenz ihrer Quadrate $17 = 8 + 9$.

Der 1. Zusatz.

101. Also kan man durch bloße Addition die Quadratzahlen aller Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung finden. Man darf nemlich nur zu dem vorhergehenden Quadrate beständig seine und zugleich die folgende Wurtzel addiren.

Der 2. Zusatz.

102. Die Quadratzahlen werden auch in ihrer Ordnung nach einander gefunden, wenn
 Jil ii 3 man

man die ungeraden Zahlen in ihrer Ordnung zu einander addiret.

Wurzeln.	ungerade Zahl.	Quad. Zahl.
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36
7	13	49
8	15	64
9	17	81
10	19	100

Die 30. Aufgabe.

103. Den Unterschied zweyer Cubiczahlen zu finden, deren Wurzeln um 1 von einander unterschieden sind.

Auflösung.

Es sey die eine Wurzel $= n$, die andere $n+1$
so ist

die grosse Cubiczahl $n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
die kleine n^3

der Unterschied $3n^2 + 3n + 1$

Das

Das ist $n^2 + 2n + 1 + 2n^2 + n = (n + 1)^2 + 2n^2 + n$. Also ist der verlangte Unterschied die Summe aus dem Quadrate der grossen Wurzel und dem Quadrate der kleinen zweymahl genommen, und der kleinen Wurzel. Z. E. Es seyn die Wurzeln 8 und 9; so ist der Unterschied ihrer Cubiczahlen $217 = 81 + 128 + 8 = 9^2 + 2 \cdot 8^2 + 8$.

Setzet ferner die dritte Wurzel $n + 2$ so ist die Cubiczahl

	$n^2 + 6n^2 + 12n + 8$
Die vorige	$n^2 + 3n^2 + 3n + 1$
Der Unterschied	$3n^2 + 9n + 7$
Der erste Unterschied	$3n^2 + 3n + 1$
Der andere Untersch.	$6n + 6 = 6(n + 1)$

Also ist der andere Unterschied zweyer Cubiczahlen die Wurzel der kleineren 6 mahl genommen.

Zusatz.

104. Wenn man also die Quadratzahlen in ihrer Ordnung nach einander gefunden (§. 101. 102.); so kan man daraus die Cubiczahlen durch blosser Addition finden aus dem ersten Unterschiede. Oder wenn man die Cubiczahlen ohne die Quadratzahlen finden will; so addiret man erstlich den anderen Unterschied 1. 6. 12. 18. 24. 30 etc. um den ersten zu finden, und darnach den ersten Unterschied

um die Cubiczahlen zu erhalten, wie aus bey-
gesetzten Täfeln abzunehmen.

Wurzeln.	ander Unter- scheid.	erster Unter- scheid.	Cubiczah- len.
1	1	1	1
2	6	7	8
3	12	19	27
4	18	37	64
5	24	61	125
6	30	91	216
7	36	127	343
8	42	169	512
9	48	217	729
10	54	271	1000

Die 31. Aufgabe.

105. Zu finden, was für eine Zahl her-
auskommt, wenn man eine gerade Zahl
zu einer ungeraden addiret, oder sie von
einander abziehet, oder auch durch eine
ander multipliciret.

Auflösung.

Weil eine gerade Zahl sich in zwey gleiche
Theile theilen läffet, eine ungerade aber um 1
von einer geraden unterschieden ist; so nennet
die gerade Zahl $2x$, die ungerade $2y+1$

$$2y+1$$

$$2x$$

$$2y+1$$

$$2x$$

$$2y+1$$

$$2x$$

Summe $2x+2y+1$ Differ. $2y+1-2x$ Prod.

$$4xy+2x$$

Die

Die Summe und Differenz sind ungerade Zahlen, das Product ist eine gerade Zahl. Denn dieses lässt sich halbiren, jene nicht.

Die 32. Aufgabe.

106. Zu finden, was für eine Zahl heraus kommt, wenn man eine gerade Zahl zu einer geraden addiret, oder sie von einander subtrahiret, oder auch durch einander multipliciret.

Auflösung.

Es sey die eine gerade Zahl $2x$, die andere $2y$. So ist die Summe $2x + 2y$, die Differenz $2x - 2y$, das Product $4xy$ und also sind alle drey gerade Zahlen, denn sie lassen sich halbiren.

Die 33. Aufgabe.

107. Zu finden, was für Zahlen heraus kommen, wenn ihr eine ungerade Zahl zu einer ungeraden addiret, oder sie von einander subtrahiret, oder auch durch einander multipliciret.

Auflösung.

Es sey die eine ungerade Zahl $2x + 1$, die andere $2y + 1$.

$$\begin{array}{rcl}
 & 2x + 1 & 2x + 1 \\
 & 2y + 1 & 2y + 1 \\
 \hline
 \text{Summe} = & 2x + 2y + 2 & \text{Differ.} = 2x - 2y
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2x + 1 \\
 2y + 1 \\
 \hline
 + 2x + 1 \\
 4xy + 2y \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\text{Product} = 4xy + 2x + 2y + 1$$

Die Summe und Differenz lassen sich halbiren, sind also gerade Zahlen. Das Product läßt sich nicht halbiren: ist also eine ungerade Zahl.

Die 34. Aufgabe.

108. Zu finden, was für Zahlen heraus kommen, wenn ihr lauter gerade Zahlen, oder eine gerade Anzahl ungerader Zahlen, oder auch eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen addiret.

Auflösung.

Es seyn die gerade Zahlen $2x, 2y, 2z, 2t$. s. w. so ist die Summe $2x + 2y + 2z + 2t$ u. s. w. das ist $2(x + y + z + t + 2c.)$ also eine gerade Zahl. Derowegen die Summe von lauter geraden Zahlen ist eine gerade Zahl.

Es seyn die ungeraden Zahlen $2x + 1, 2y + 1, 2z + 1, 2t + 1$. u. s. w. ihre Anzahl $2m$. So ist ihre Summe $2x + 2y + 2z + 2t$ u. s. w. $+ 2m$, das ist $2(x + y + z + t + 2c.) + 2m$, folgender eine gerade Zahl.

Derowegen

Derowegen wenn lauter ungerade Zahlen in gerader Anzahl zusammen addiret werden, so ist die Summe eine gerade Zahl.

Es seyn die ungeraden Zahlen abermahls $2x + 1, 2y + 1, 2z + 1, 2t + 1$ u. s. w. ihre Anzahl $2m + 1$. So ist ihre Summe $2x + 2y + 2z + 2t$ u. s. w. $+ 2m + 1$, das ist, $2(x + y + z + t \text{ u. s. w.}) + 2m + 1$, folgendes eine ungerade Zahl. Derowegen wenn lauter ungerade Zahlen in ungerader Anzahl zusammen addiret werden, so ist die Summe eine ungerade Zahl.

Anmerckung.

109. Wenn diese Aufgaben gleich sonst keinen Nutzen hätten, so sollten sie euch doch angenehm seyn, weil sie euch eine neue Maxime der Benennung an die Hand geben. Ihr werdet aber auch bey andern Gelegenheiten ihren Nutzen verspühren. Z. E. Wenn einer verlangt, ihr soltet 20 in 5 ungerade Zahlen theilen; so werdet ihr bald sehen, daß dieses unmöglich sey, weil ungerade Zahlen in ungerader Anzahl eine ungerade Zahl bringen, wenn sie summiret werden.

Die 35. Aufgabe.

110. Zu finden, was für eine Dignität herauskommet, wenn man eine Quadrat- oder Cubiczahl durch sich selbst multiplircet.

Auflösung.

Es sey die Quadratzahl x^2 , die Cubiczahl x^3 . Multipliciret jede durch sich selbst, so kommet in dem ersten Falle x^4 , in dem anderen x^6 .

Weil

Weil der Exponente 4 sich durch 2, der Exponente 6 aber so wohl durch 2 als durch 3 sich dividiren läſſet; ſo iſt x^4 ein Quadrat, x^6 aber zugleich eine Quadrat- und eine Cubiczahl. Derowegen wenn eine Quadratzahl durch ſich ſelbſt multipliciret wird, ſo iſt das Product eine vierdte Dignität und Quadratzahl; wenn eine Cubiczahl durch ſich ſelbſt multipliciret wird, ſo iſt das Product zugleich eine Quadrat- und auch eine Cubiczahl.

Anmerkung.

111. Auf dieſe Manier könnet ihr noch gar viel andere dergleichen Lehrſätze finden, wenn ihr dieſelben nöthig habet.

Die 36. Aufgabe.

112. Zu finden, wie groß in einer arithmetiſchen Progreſſion die Summe der beyden äußerſten Glieder ſey.

Auflöſung.

Es ſey das erſte Glied a , der Unterſcheid der Glieder d , ſo iſt die Progreſſion (§. 69. Arithm.).

$$\begin{array}{r}
 a \cdot a + d. \quad a + 2d. \quad a + 3d. \quad a + 4d. \quad a + 5d \\
 \underline{a + 4d} \qquad \qquad \underline{a + 2d} \qquad \qquad \underline{a} \\
 2a + 5d = 2a + 5d = 2a + 5d \\
 \\
 a \cdot a + d. \quad a + 2d. \quad a + 3d. \quad a + 4d \\
 \underline{a + 3d} \qquad \underline{2} \qquad \qquad \underline{a} \\
 2a + 4d = 2a + 4d = 2a + 4d
 \end{array}$$

Lehre

Lehrsatz.

In einer arithmetischen Progression ist die Summe der beyden äußersten Glieder der Summe jeder zweyen Glieder gleich, die von den äußersten gleich weit abstehen, ingleichen zweymahl so groß als das mittlere, wenn die Glieder an der Zahl ungleich sind.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Z. E.} & 3. & 6. & 9. & 12. & 15. & 18. & 21 \\
 & & & & 12 & 9 & 6 & 3 \\
 \hline
 & & & & 24 & = 24 & = 24 & = 24
 \end{array}$$

Der 1. Zusatz.

113. Derowegen bekommet ihr die Summe der ganzen Progression, wenn ihr die Summe des ersten und letzten Gliedes durch die halbe Zahl der Glieder multipliciret. Es sey das erste Glied a , die Differenz d , die Zahl der Glieder n , so ist das letzte Glied $a + (n-1)d$, folgender die Summe der Progression $(2a + (n-1)d) \frac{1}{2}n = an + (n^2 - n) \frac{1}{2}d$. Es sey z. E. $a=3$, $n=7$, $d=3$, so ist die Summe der Progression $21 + (49 - 7) \frac{3}{2} = 21 + 42$. $\frac{3}{2} = 21 + 21$. $3 = 21 + 63 = 84$.

Der 2. Zusatz.

114. Ihr könnet demnach die Summe einer arithmetischen Progression finden, wenn
euch

euch das erste Glied, der Unterschied und die Zahl der Glieder gegeben sind.

Der 3. Zusatz.

115. Es sey $a=1$, $d=2$, die Zahl der Glieder $=n$; so ist die Summe der Progression $n + n^2 - n = n^2$: woraus von neuem erhellet, daß die Quadratzahlen herauskommen, wenn man die ungeraden Zahlen, das ist, die Glieder in der arithmetischen Progression 1. 3. 5. 7. 9. 11. u. s. w. zusammen addiret.

Der 4. Zusatz.

116. Es sey $a=\frac{1}{2}d$, das ist, das erste Glied sey dem halben Unterschiede der Glieder gleich; so ist die Summe der Progression $an + an^2 - an = an^2$.

Der 5. Zusatz.

117. Es sey $a=n=\frac{1}{2}d$, das ist, das erste Glied, die Zahl und der halbe Unterschied der Glieder sind einander gleich; so ist die Summe $n^2 + n^3 - n^2 = n^3$, das ist, der Cubus von dem ersten Gliede. Z. E. $a=n=\frac{1}{2}d=8$, oder die Progression 8. 24. 40. 56. 72. 88. 104. 120; so ist die Summe 512. oder die Cubiczahl von 8.

Anmerkung.

118. Hieraus erhellet, wie man aus allgemeinen Lehrrsätzen besondere finden kan.

Die

Die 37. Aufgabe.

119. Aus dem ersten und letzten Gliede einer arithmetischen Progression und dem Unterscheide der Glieder, ihre Zahl und die Summe der Progression zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$ die Zahl der Glieder $= x$
 das letzte $= b$ die Summe $= y$
 der Unterscheid $= d$

So ist (§. 113.)

$$b = a + dx - d \quad y = \frac{1}{2}(b + a)x$$

$$= (b + a)(b - a) + \frac{1}{2}(b - a)$$

$$\frac{b - a + d = dx}{2d}$$

$$\frac{b - a + 1 = x}{d} = \frac{b^2 - a^2 + b + a}{2d \quad 2}$$

Es sey z. B. $a = 2, b = 17, d = 3$, so ist
 $x = (17 - 2) : 3 + 1 = 15 : 3 + 1 = 6$ und $y =$
 $\frac{1}{2}(17 + 2) + (289 - 4) : 6 = \frac{19}{2} + \frac{285}{2} = 9\frac{1}{2} +$
 $47\frac{1}{2} = 57.$

Probe: Denn $a + dx - d = 2 + 3 \cdot 6 - 3 = 2$
 $+ 18 - 3 = 2 + 15 = 17$ und $\frac{1}{2}(b + a)x = \frac{6}{2}$
 $(17 + 2) = 3 \cdot 19 = 57.$

Die 38. Aufgabe.

120. Aus dem ersten Gliede, dem Unterscheide der Glieder, und der Summe einer arithmetischen Progression die Zahl der Glieder und das letzte Glied zu finden.

Aufg.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$ die Zahl der
 Glieder $= x$
 der Unterschied $= d$ das letzte Glied
 $= y$

die Summe $= c$

So ist (§. 113.)

$$\frac{1}{2}x(a+y) = c \quad a+dx-d=y$$

$$ax+xy=2c$$

$$xy=2c-ax$$

$$y=(2c-ax):x \text{ folgendes}$$

$$(2c-ax):x=a+dx-d$$

$$2c-ax=dx^2+ax-dx$$

$$2c:d=x^2+\frac{(2a-d)}{d}x$$

Setzet $(2a-d):d=m$, so ist

$$2c:d=x^2+mx$$

$$\frac{1}{4}m^2 \quad \frac{1}{4}m^2 \quad (§. 83.).$$

$$\frac{1}{4}m^2+2c:d=x^2+mx+\frac{1}{4}m^2$$

$$\sqrt{(\frac{1}{4}m^2+2c:d)}=+\frac{1}{2}m+x$$

$$\sqrt{(\frac{1}{4}m^2+2c:d)}-\frac{1}{2}m=x$$

Oder

$$\text{Oder } x = \sqrt{\frac{4a^2 - 4ad + d^2 + 2c}{4d^2}} - \frac{2a + d}{d} - \frac{2a + d}{2d}$$

folgendes

$$y = \sqrt{2cd + a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2} - \frac{1}{2}d$$

$$= \sqrt{2cd + (a - \frac{1}{2}d)^2} - \frac{1}{2}d$$

Es sey $a=2, d=3, c=57$, so ist $m=(4-3):$
 $\frac{3}{1369} = \frac{1}{36}$, folgendes $x = \sqrt{(\frac{1}{36} + \frac{114}{3})} - \frac{1}{6} = \sqrt{\frac{369}{36}} - \frac{1}{6} = \frac{37}{6} - \frac{1}{6} = \frac{36}{6} = 6$. Ferner ist $y = \sqrt{(342 + \frac{1}{4})} - 1\frac{1}{2} = 18\frac{1}{2} = 17$.

Probe: Denn $(2 + 17)3 = 3 \cdot 19 = 57$
 und $2 + 3 \cdot 6 - 3 = 2 + 18 - 3 = 17$.

Die 39. Aufgabe.

121. Aus dem ersten und letzten Gliede und der Summe einer arithmetischen Progression die Zahl und den Unterschied der Glieder zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$ die Zahl der Glieder $= x$
 das letzte $= b$ der Untersch. $= y$
 die Summe $= c$

So ist (§. 113.)

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}x(a+b) & = & c \\ x(a+b) & = & 2c \\ x & = & 2c:(a+b) \end{array} \quad \begin{array}{rcl} a+xy-y & = & b \\ xy-y & = & b-a \\ xy & = & b+y-a \\ x & = & (b+y-a):y \end{array}$$

(Wolfs Mathes. Tom. IV.) R III Sol.

Folgendes

$$\begin{array}{r}
 2c : (a + b) = (b + y - a) : y \\
 \hline
 2cy : (a + b) = b + y - a \\
 \hline
 a + b \\
 2cy = ab + ay - a^2 + b^2 + by - ab \\
 \hline
 2cy - ay - by = b^2 - a^2 \\
 \hline
 2c - a - b \\
 y = (b^2 - a^2) : (2c - a - b)
 \end{array}$$

Es sey $a=2, b=17, c=57$, so ist $x=114$:
 $(2 + 19) = 114 : 19 = 6$, und $y = (289 - 4) :$
 $(114 - 19) = 285 : 95 = 3$.

Probe: Denn $3(2 + 17) = 3 \cdot 19 = 57$
 und $2 + 3 \cdot 6 - 3 = 2 + 18 - 3 = 17$, wie
 vorhin (§. 120.).

Die 40. Aufgabe.

122. Aus dem Unterscheide und der
 Zahl der Glieder, ingleichen der Summe
 einer arithmetischen Progression, das
 erste und letzte Glied, und folgendes alle
 übrigen zu finden.

Auflösung.

Es sey die Zahl der Glieder $= n$ das erste Glied
 $= x$
 der Unterscheid $= d$ das letzte $= y$
 die Summe $= c$

So ist (§. 113.)

$$\frac{\frac{1}{2}n(x+y)=c}{2}$$

$$y=x+nd-d$$

$$\frac{n(x+y)=2c}{n}$$

$$x+y=2c:n$$

$$y=2c:n-x \quad \text{Folgendes}$$

$$2c:n-x=x+nd-d$$

$$2c:n+d-nd=2x$$

$$c:n+\frac{1}{2}(d-nd)=x$$

$$\begin{array}{r} \text{Es sey } n=6, d=3, c=57, \text{ so ist } x= \\ 57+3-18=57+9-9=66-9=11-9= \\ \frac{6}{2} \quad \frac{6}{6} \quad \frac{6}{6} \end{array}$$

$$2 \text{ und } y=\frac{114}{6}-2=19-2=17.$$

Die Probe ist wie vorhin (S. 120.).

Die 41. Aufgabe.

123. Aus dem Unterscheide der Glieder, dem letzten Gliede und der Summe einer arithmetischen Progression das erste Glied und die Zahl der Glieder zu finden.

Auflösung.

Es sey das letzte Glied $=b$ das erste Glied $=x$
 der Unterscheid $=d$ die Zahl der
 die Summe $=c$ Glieder $=y$

KIII 2

Co

So ist (§. 113.)

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{1}{2}y(x \mp b) = c & & b = x \mp dy - d \\
 \hline
 y(x \mp b) = 2c & \text{2} & b \mp d - dy = x \\
 \hline
 & y & \\
 x \mp b = 2c : y & & \\
 \hline
 x = 2c - b & &
 \end{array}$$

y

Folgende

$$\begin{array}{rcl}
 2c - b = b \mp d - dy & & \\
 \hline
 y & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & & y \\
 2c - by = by \mp dy - dy^2 & & \\
 \hline
 dy^2 - 2by - dy = -2c & & \\
 \hline
 y^2 - (2b \mp d)y = -2c : d & & d \\
 \hline
 & & d
 \end{array}$$

Setzet $(2b \mp d) : d = m$, so ist

$$\begin{array}{rcl}
 y^2 - my = -2c : d & & \\
 \frac{1}{4}m^2 & & \frac{1}{4}m^2 (\S. 83.) \\
 \hline
 y^2 - my \mp \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2 - 2c : d & & \\
 \hline
 \frac{1}{2}m - y \text{ oder } y - \frac{1}{2}m = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 2c : d)} & & \\
 \hline
 y = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 2c : d)} & & \\
 y = 2b \mp d \pm \sqrt{(4b^2 \mp 4bd \mp d^2 - 2c)} & & \\
 \hline
 2d & & 4d^2 & d \\
 \hline
 = 2b \mp d \pm \sqrt{(4b^2 \mp 4bd \mp d^2 - 8cd)} & & \\
 \hline
 2d & &
 \end{array}$$

folgt

folgendes

$$x = b + d - b - \frac{1}{2}d \pm \frac{1}{2}\sqrt{(4b^2 \pm 4bd + d^2 - 8cd)}$$

$$= \frac{1}{2}d \pm \frac{1}{2}\sqrt{(4b^2 \pm 4bd + d^2 - 8cd)}$$

Es ist aber $4b^2 \pm 4bd + d^2 = (2b \pm d)^2$

Es sey $b = 17, d = 3, c = 57,$

so ist $2b \pm d = 34 \pm 3 = 37,$ folgendes

$$y = 37 - \sqrt{(1369 - 1368)} = 37 - 1 = 36 =$$

6
6
6

6 und $x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$

Die Probe ist wie vorhin (§. 120.).

Die 42. Aufgabe.

124. Aus der Summe einer arithmetischen Progression, der Zahl der Glieder und dem Producte aus dem ersten Gliede in das letzte, die Glieder zu finden.

Auflösung.

Es sey das Product $= a$ das erste Glied $= x$
 die Zahl der Glieder $= n$ das letzte $= y$
 die Summe $= c$

So ist

$$\frac{1}{2}n(x + y) = c \quad (\S. 113.) \quad a = xy$$

$$n(x + y) = 2c \quad \frac{a}{x} = y$$

$$x + y = 2c : n$$

$$y = 2c - x$$

folgendes

$$a : x = 2c : n - x$$

$$x$$

$$a = 2cx - x^2$$

$$n$$

$$x^2 - 2cx = -a$$

$$n$$

$$c^2 : n^2 \quad c^2 : n^2$$

$$x^2 - 2cx \pm c^2 : n^2 = c^2 : n^2 - a$$

$$n$$

$$\pm c \pm x = \sqrt{c^2 - a}$$

$$n$$

$$n^2$$

$$c \pm \sqrt{c^2 - a} = x$$

$$n$$

$$n^2$$

Nemlich wenn man das Zeichen — braucht, so bekommt man x ; wenn man das Zeichen $\pm$ brauchet, bekommt man y .

Es sey $c=57$, $n=6$, $a=34$, so ist $x =$

$$\frac{57}{6} - \sqrt{\frac{3249}{36} - 34} = \frac{57}{6} - \sqrt{\frac{3249 - 1224}{36}}$$

$$= \frac{57}{6} - \sqrt{\frac{2025}{36}} = \frac{57}{6} - \frac{45}{6} = \frac{12}{6} = 2 \text{ und}$$

 hingegen $y = \frac{57}{6} \pm \frac{45}{6} = \frac{102}{6} = 17.$

pro

Probe: Denn $\frac{6}{2}(2 + 17) = 3.19. = 57$
und $2.17 = 34.$

Die 8. Erklärung.

125. Wenn man etliche Glieder von einer arithmetischen Progreſſion, die ſich von 1 anfänget, zu einander addiret; ſo heiſſet die Summe eine Polygonalzahſ (Numerus Polygonus).

Die 9. Erklärung.

126. Inſondere heiſſet es eine Triangulärzahl, wenn die Differenz der Glieder in der Progreſſion 1 iſt; eine Quadratzahl, wenn ſie 2 iſt; eine Pentagonalzahſ, wenn ſie 3 iſt; eine Hexagonalzahſ, wenn ſie 4 iſt u. ſ. w.

Arithm. Progr.	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8
Triang. Zahlen	1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36
Arithm. Progr.	1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15
Quadr. Zahlen	1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64
Arithm. Progr.	1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22
Pentagonalzahſ	1. 5. 12. 22. 35. 51. 70. 92
Arithm. Progr.	1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29
Hexagonalzahſ	1. 6. 15. 28. 45. 66. 91.

120

Anmerkung.

127. Ihr werdet inſkünſtige erfahren, daß es nicht ohne Nutzen ſey, wenn man allerhand Progreſſionen der Zahlen ſummiren lernet. Zu dem Ende wollen wir auch unterſuchen, wie man die Polygonalzahlen ſummiren kan.

Die 10. Erklärung.

128. Die Seite der Polygonalzahls heisset die Zahl der Glieder, welche von der Progression summiret worden, damit dieselbe entstanden.

Anmerkung.

129. Die Polygonalzahlen haben ihren Namen von den regulären Figuren, darein sich die Einheiten, daraus sie bestehen, versetzen lassen. Es kommen aber in die Seite der Figur jederzeit so viel Einheiten oder Punkte (wodurch sie angedeutet werden) als Glieder von der Progression summiret worden, damit man die Polygonalzahl bekomme.

Die 11. Erklärung.

130. Durch die Zahl der Winkel verstehen wir diejenige, welche andeutet, wie viel Winkel die Figur hat, von der die Polygonalzahl ihren Namen bekommt.

Der 1. Zusatz.

131. Also ist die Zahl der Winkel in Trigonalzahlen 3; in Quadrat- oder Tetragonalzahlen 4; in Pentagonalzahlen 5 u. s. w.

Der 2. Zusatz.

132. Da nun in Trigonalzahlen der Unterschied der Glieder 1, in Quadratzahlen 2, in Pentagonalzahlen 3 u. s. w. ist; so ist die Zahl der Winkel jederzeit um 2 grösser als der Unterschied der Glieder in der Progression, durch deren Summirung die Polygonalzahlen entstehen.

Die

Die 43. Aufgabe.

133. Aus der gegebenen Seite einer Polygonalzahls und der Zahl der Winkel die Polygonalzahls zu finden.

Auflösung.

Es sey die Seite $= a$

Die Zahl der Winkel $= n$

das erste Glied der Progr. ist $= 1$ (§. 125.)

der Unterschied der Glieder $= n - 2$ (§. 132.)

das letzte Glied $1 + (n - 2)(a - 1)$ (§. 113.)

$$= an - 2a - n + 3$$

das erste Glied $= 1$

Summe des ersten und letzten $an - 2a - n + 4$

halbe Zahl der Glieder $\frac{1}{2}a$ (§. 128.)

Polygonalzahls $\frac{1}{2}a^2n - a^2 - \frac{1}{2}an + 2a$ (§. 113.)

$$a^2n - 2a^2 - an + 4a = (n - 2)a^2 - a(n - 4)$$

Es sey $n = 3$, so ist die Trigonalzahls $= 1a^2 + 1a$.

Es sey $n = 4$, so ist die Tetragonalzahls $= 2a^2 - 0a = a^2$.

Es sey $n = 5$, so ist die Pentagonalzahls $= 3a^2 - 1a$.

2.

RIII 5

Es

Es sey $n=6$, so ist die Hexagonalzahl =
 $\underline{4a^2 - 2a = 2a^2 - a.}$

²
 Es sey $n=7$, so ist die Heptagonalzahl =
 $\underline{5a^2 - 3a.}$

²
 Es sey $n=8$, so ist die Octogonalzahl =
 $\underline{6a^2 - 4a = 3a^2 - 2a}$ u. s. w. unendlich fort.

²
 Nämlich die um zwey verminderte Zahl der Winkel wird durch das Quadrat der Seite, und die um 4 verminderte Zahl der Winkel durch die Seite der Polygonalzahl multipliciret; das letzte Product aber von dem ersten abgezogen und der Rest durch zwey dividiret.

Exempel.

Ihr sollet die sechste Trigonalzahl finden.
 Weil $a=6$; so ist $\underline{a^2 + a = 36 + 6 = 18}$

² ²
 $+ 3 = 21$. Wenn ihr die achte Pentagonal
 Zahl suchet; so ist $a=8$, und also $\underline{3a^2 - a =}$

²
 $\underline{3 \cdot 64 - 8 = 3 \cdot 32 - 4 = 96 - 4 = 92.}$ Wenn

²
 ihr die fünfte Hexagonalzahl suchet, so ist
 $a=5$, und also $\underline{2a^2 - a = 50 - 5 = 45.}$

Die

Die 44. Aufgabe.

134. Aus der gegebenen Polygonalzahl und der Zahl der Winkel die Seite zu finden.

Auflösung.

Es sey die Polygonalzahl $= p$ die Seite
die Zahl der Winkel $= n$ $= x$

So ist der Unterschied der Glieder $n-2$ (§. 132.)
das erste Glied 1 (§. 125.)

Derowegen das letzte $1 + (x-1)(n-2)$ (§. 113. 128.).

das ist $3 + nx - 2x - n$

das erste Glied 1

Summe des ersten und letzten $4 + nx - 2x - n$
halbe Zahl der Glieder $\frac{1}{2}x$ (§. 128.)

$$2x + \frac{1}{2}nx^2 - x^2 - \frac{1}{2}nx$$

Derowegen ist

$$\frac{1}{2}nx^2 - x^2 + 2x - \frac{1}{2}nx = p$$

$$nx^2 - 2x^2 - nx + 4x = 2p$$

$$x^2 - \left(\frac{n-4}{n-2} \right) x = \frac{2p}{n-2}$$

Das ist, wenn $(n-4):(n-2)=m$

$x^2 -$

$$x^2 - mx = 2p : (n-2)$$

$$\frac{\frac{1}{4}m^2}{\frac{1}{4}m^2}$$

$$x^2 - mx + \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2 + 2p : (n-2)$$

$$x - \frac{1}{2}m = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + 2p : (n-2))}$$

$$x = \frac{1}{2}m + \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + 2p : (n-2))}$$

Das ist, wenn man vor m seinen Werth
setzet,

$$\frac{x=n-4}{2n-4} + \sqrt{\frac{n^2-8n+16}{4n^2-16n+16} + \frac{4p}{2n-4}} =$$

$$\frac{n-4 + \sqrt{(8p(n-2) + (n-4)^2)}}{2n-4}$$

$$\text{Es sey } n=3; \text{ so ist } x = \frac{2n-4}{2} - 1 + \sqrt{(8p+1)}$$

$$\text{Es sey } n=4; \text{ so ist } x = \frac{2}{0} + \sqrt{(16p+0)}$$

$$\text{Es sey } n=5; \text{ so ist } x = \frac{4}{1} + \sqrt{(24p+1)}$$

$$\text{Es sey } n=6; \text{ so ist } x = \frac{6}{2} + \sqrt{(32p+4)}$$

$$\text{Es sey } n=7; \text{ so ist } x = \frac{8}{3} + \sqrt{(40p+9)}$$

$$\text{Es sey } n=8; \text{ so ist } x = \frac{10}{4} + \sqrt{(48p+16)}$$

$$\text{u. s. w. unendlich fort.} \quad \text{Wenn}$$

Wenn ihr diese Polygonalzahlen betrachtet, so werdet ihr wahrnehmen, 1. daß überall die Zahl außer dem Wurzelzeichen, die um 4 ver- geringerte Zahl der Winkel; und 2. daß die andere Zahl unter dem Wurzelzeichen das Quadrat von dieser Zahl sey; 3. die erste aber dem Producte aus der Polygonalzahl in den Divisorem 4 mahl genommen gleiche, und 4. der Divisor die Summe der Zahl außer dem Wurzelzeichen und der Zahl der Winkel ausmache.

Es sey 21 eine Trigonalzahl: ihr sollt die Seite finden, das ist, die wie viele sie in ihrer Ordnung ist. Weil $p=21$, so ist die verlangte Seite $-\frac{1 \pm \sqrt{168 \pm 1}}{2} =$

$$\frac{1 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-1 \pm 13}{2} = \frac{12}{2} = 6. \text{ Es sey}$$

$p=45$ und zwar eine Hexagonalzahl; so ist die verlangte Seite $2 \pm \sqrt{(32 \cdot 45 \pm 4)}$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{1444}}{8} = \frac{2 \pm 38}{8} = \frac{40}{8} = 5.$$

Zusatz.

135. Wenn ihr also nach und nach eine gegebene Zahl in die Stelle von p setzt; so werdet ihr sehen, ob sie mit unter die Polygonalzahlen gehöre, und in welche Reihe derselben sie

sie zu setzen sey. Denn sie findet in allen Reihen statt, wo für ihre Seite eine ganze Rationalzahl heraus kommt. Also wenn euch 21 wäre gegeben worden, würdet ihr gefunden haben, daß es die sechste Trigonalzahl sey.

Anmerkung.

136. Ihr dürft aber nicht weiter versuchen, ob die gegebene Zahl sich für p setzen lasse, wenn ihr die Zahl der Winkel gleich wird, als in dem gegebenen Exempel 21.

Die 45. Aufgabe.

137. Die GröÙe des Products der beyden äußersten Glieder in einer geometrischen Proportion zu determiniren.

Auflösung.

Es sey in dem ersten Falle, wenn nur 3 Glieder sind, das erste $= a$, der Exponente $= m$, so ist die Proportion

$$\frac{a}{ma} = \frac{ma}{m^2 a} \quad (\S. 66. \text{ Arithm.})$$

$$(ma)^2 = m^2 a^2 \quad (\S. 88. \text{ Arithm.})$$

Es sey in dem anderen Falle, wenn 4 Glieder sind, das erste $= a$, der Exponente $= m$, das dritte $= b$, so ist die Proportion

$$a : ma :: b : mb \quad (\S. 66. \text{ Arithm.})$$

$$\frac{b}{mab} = \frac{a}{mab}$$

Lehrsatz.

Wenn drey Grössen einander geometrisch proportional sind, so ist das Product der beyden äussersten dem Quadrate der mittleren gleich: sind aber vier einander proportional, so ist das Product der äussersten dem Producte der beyden mittleren gleich.

Anmerkung.

138. Von den Zahlen ist dieses schon in der Rechenkunst erwiesen worden (S. 109. 110. *Arithm.*). Wir haben aber in der Geometrie solches mit Recht auch auf die Linien, Flächen und Körper gedeutet, indem man alle Grössen als undeterminirte Zahlen ansehen kan (S. 9.); welches nun durch gegenwärtige algebraische Rechnung noch mehr gerechtfertiget wird.

Die 46. Aufgabe.

139. Drey Geometrische Proportionalgrössen zu finden, aus dem gegebenen Producte des Quadrates der dritten in die erste und dem Exponenten.

Auflösung.

Es sey das Product $= a$ die erste Grösse $= x$
 der Exponente $= m$ so ist die andere $= mx$
 die dritte $= m^2 x$

Folgende $a = m^4 x^3$

$$\frac{a}{m^4} = x^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{m^4}} = x$$

Es

Es sey $a = 648$, $m = 3$, so ist $x = \sqrt[3]{(648 : 81.)} = \sqrt[3]{8} = 2$, folgendes $mx = 6$, $m^2x = 18$.
 Probe: Denn $2 \cdot 18 = 6 \cdot 6 = 36$ (§. 137.).

Die 47. Aufgabe.

140. Aus der gegebenen Summe des ersten und vierdten Gliedes in einer geometrischen Proportion, ingleichen der Summe des anderen, und drittens, und dem Exponenten, jedes Glied insbesondere zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste Summe $= a$ das erste Glied $= x$
 die andere $= b$ so ist das II $= mx$
 der Exponente $= m$. das III $= b - mx$
 das IV $= a - x$

Folgendes

$$x : mx = b - mx : a - x$$

daher
$$\frac{ax - x^2}{x} = \frac{mbx - m^2x^2}{x} \quad (\S. 137.)$$

$$a - x = mb - m^2x$$

$$m^2x - x = mb - a$$

$$\frac{m^2x - x}{m^2 - 1} = \frac{mb - a}{m^2 - 1} \quad \text{I div.}$$

$$x = (mb - a) : (m^2 - 1)$$

Es sey $a = 13$, $b = 11$, $m = 2$, so ist $x = 22 - 13 = \frac{9}{2} = 3$ und $mx = 6$, folgendes

$$4 - 1$$

sind

sind die vier Proportionalzahlen $3 : 6 = 5 : 10$.

Probe: Denn $3 \cdot 10 = 5 \cdot 6 = 30$ (§. 137.).

Die 48. Aufgabe.

141. Aus der gegebenen Summe des ersten und letzten Gliedes und dem Exponenten in einer geometrischen Proportion von 3 Gliedern, die Glieder selbst zu finden.

Auflösung.

Es sey die Summe $= a$ das erste Glied $= x$
 der Exponent $= m$ das andere $= mx$
 das dritte $= m^2x$

Folgendes $a = m^2x + x$ (§. 137.)
 $m^2 + 1 \text{ div.}$

$$a : (m^2 + 1) = x$$

Es sey $a = 50$, $m = 2$, so ist $x = 50 : (4 + 1)$
 $= 50 : 5 = 10$, $mx = 20$, $m^2x = 40$.

Probe: Denn $10 \cdot 40 = 20 \cdot 20 = 400$ (§. 137.).

Die 49. Aufgabe.

142. Zu finden, auf wie vielerley Art die Glieder einer geometrischen Proportion versetzt werden können, damit sie einander proportional verbleiben.

Auflösung.

Versetzet sie auf alle mögliche Weise, und vergleiche ihre Summen, Unterscheide u. s. w. mit ihnen untereinander: so werdet ihr bald sehen, in welchen Fällen eine Proportion bleibt, (Wolfs Mathes. Tom. IV.)

||||

bet,

bet, wenn ihr nur acht gebet, ob in beyden Verhältnissen, die mit einander verglichen werden, einerley Exponente ist (§. 65. Arithm.). Es sey demnach $a : ma = b : mb$

so ist 1. (alternativ) $a : b = ma : mb$

2. (inverse) $ma : a = mb : b$

3. (conversim) $a \mp ma : a = b \mp mb : b$

4. (composite) $a \mp ma : ma = b \mp mb : mb$

5. (divisim) $ma - a : a = mb - b : b$

$ma - a : ma = mb - b : mb$

6. $a^2 : m^2 a^2 = b^2 : m^2 b^2$

$a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n$

7. $a : mac = b : mbc$

8. $a : ma = b : mb$

$\frac{\quad}{c} \quad \frac{\quad}{c}$

9. $ac : ma = bc : mb$

10. $a : ma = b : mb$

$\frac{\quad}{c} \quad \frac{\quad}{c}$

11. $ac : mac = b : mb$

12. $a : ma = b : mb$

$\frac{\quad}{c} \quad \frac{\quad}{c}$

13. $ac : mac = bd : mbd$

14. $a : ma = b : mb$

$\frac{\quad}{c} \quad \frac{\quad}{c} \quad \frac{\quad}{d} \quad \frac{\quad}{d}$

15. $ac : mad = bc : mbd$

16. $a : ma = b : mb$

$\frac{\quad}{c} \quad \frac{\quad}{d} \quad \frac{\quad}{c} \quad \frac{\quad}{d}$

Es

Es sey ordinate $a : ma = b : mb$

und $ma : mna = mb : mnb$

so ist 17. *ex aequo* $a : mna = b : mnb$

es sey perturbate $a : ma = b : mb$

und $ma : mna = b : b$

$\frac{a}{n}$

so ist 18. *ex aequo* $a : mna = b : mb$

$\frac{a}{n}$

Anmerkung.

143. Hier habet ihr ohne Mühe 18 sehr nützliche Lehrsätze gefunden, die ihr euch wohl bekandt machen müßet, wenn ihr ins künftige entweder die mathematischen Schriften zu lesen, oder auch durch eigenes Nachsinnen mathematische Wahrheiten heraus zu bringen gedencket. Denn die geometrische Proportion ist die Seele der mathematischen Wissenschaften. Der Beweis beruhet darauf, weil überall einerley Exponente für eine angegebene Proportion heraus kommet, als im 3. Lehrsatz ist $\frac{a}{1+m} = \frac{1}{1+m}$ und $\frac{b}{1+m} = \frac{1}{1+m}$

$\frac{a}{1+m}$; im siebenden $\frac{a}{mac} = \frac{1}{mc}$ und $\frac{b}{mbc} = \frac{1}{mc}$

im siebenzehenden $\frac{a}{mna} = \frac{1}{mn}$ und $\frac{b}{mnb} = \frac{1}{mn}$

Ich halte es aber für unnöthig die gefundenen Lehrsätze mit Wörtern auszudrucken, weil ein jeder das für sich selbst thun kan, wenn er Lust darzu hat.

3. E. Der 1. Lehrsatz lautet also: Wenn vier Grössen proportional sind, so verhält sich

sich auch die erste zu der dritten, wie die andere zu der vierdten. Der 11. wird so gegeben: Wenn ihr in einer geometrischen Proportion das erste und andere Glied durch eine Gröſſe multipliciret; so bleiben auch die veränderten Gröſſen den vorigen proportional.

Die 50. Aufgabe.

144. Zu finden, wie zwey Gröſſen verändert werden können, daß doch ihre erste Verhältniß gegen einander unverändert bleibet.

Auſſung.

Es ſeyn zwey Gröſſen a und ma , die ſich gegen einander verhalten wie 1 zu m ; ſo iſt:

$$\text{I. } a : ma$$

$$\frac{c}{c}$$

$$\frac{ac : mac}{= 1 : m} = a : ma$$

$$\text{II. } a : ma$$

$$\frac{c}{c}$$

$$\frac{a : ma}{\frac{c}{c}} = \frac{a : ma}{1} = 1 : m$$

$$\text{III. } a : ma$$

$$\frac{b : mb}{b : mb}$$

$$\frac{a - b : ma - mb}{= 1 : m} = a : ma = b : mb = 1 : m$$

$$\text{IV. } a : ma$$

$$\frac{b : mb}{b : mb}$$

$$\frac{a + b : ma + mb}{= 1 : m} = a : ma = b : mb = 1 : m$$

Lehrsatz.

1. Wenn ihr zwey Gröſſen durch eine dritte multipliciret, ſo verhalten ſich die Producte gegen einander, wie die multiplicirten Gröſſen. 2. Wenn ihr zwey Gröſſen durch eine dritte dividiret, ſo verhalten ſich die Quotienten wie dieſelben Gröſſen. 3. Wenn ſich die weggenommenen Theile gegen einander verhalten wie die ganze Gröſſen, ſo verhalten ſich auch die übrigen Theile wie die ganzen Gröſſen. 4. Wenn die hinzu geſetzten Gröſſen ſich verhalten wie die Gröſſen, zu denen ſie addiret werden, ſo haben auch die Summen eben ſelbige Verhältniß.

Und dieſes letztere gehet an, auch wenn vieler Proportionalgröſſen Förder- und Hinter-Glieder zu einander addiret werden. Z.E. Es ſey $a:m=b:mb=c:mc=d:md=e:me$ &c. ſo iſt $a+b+c+d+e$ &c.; $ma+mb+mc+md+me$ &c. $=a:ma=1:m$.

Die 51. Aufgabe.

145. Die Gröſſe des Products der beyden äußerſten Glieder in einer geometriſchen Progreſſion zu finden.

Auſlösung.

Es ſey das erſte Glied $=a$, der Exponente oder Mahme der Verhältniß $=m$, ſo iſt die Progreſſion.

$$\begin{array}{ccccccc}
 a & ma & m^2a & m^3a & m^4a & m^5a & m^6a \\
 m^5a & m^4a & m^3a & m^2a & m^1a & m^0a & \\
 \hline
 m^6a^2 & = & m^6a^2 & = & m^6a^2 & = & m^6a^2
 \end{array}$$

Lehrsatz.

In einer geometrischen Progreſſion iſt das Product der beyden äußerſten Glieder dem Producte zweyer von den mittleren gleich, die von den äußerſten gleich weit abſtehen, und dem Quadrate des mittleren, wenn ſie an der Zahl ungleich ſind. Und das letzte Glied in einer geometriſchen Progreſſion iſt gleich dem Producte aus dem erſten Gliede in die Dignität des Exponenten, deren Grad um 1 weniger iſt als die Zahl der Ordnung.

Die 52. Aufgabe.

146. Die Größe des Quotienten zu determiniren, der heraus kommt, wenn der Unterſcheid der beyden äußerſten Glieder durch den um 1 vergeringerten Exponenten dividiret wird.

Auſlösung.

Es ſey das erſte Glied $= a$, der Exponente $= m$, die Zahl der Glieder $= n$, ſo iſt das letzte Glied $m^{n-1}a$, der Unterſcheid des erſten und letzten $m^{n-1}a - a$. Dividiret denſelben durch $m - 1$, ſo kommt heraus $m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a + m^{n-7}a$ u. ſ. w. Wenn demnach n eine

determ.

determinirte Zahl ist, z. E. 7, so ist $n-7=0$ und demnach $m^{n-7}=m^0=1$, folgendes $m^{n-7}a=a$. Solchergehalt ist der Quotient die Summe aller Glieder weniger das letzte.

$$\begin{array}{r} m-1) m^{n-1}a-a \\ m^{n-1}a-m^{n-2}a \end{array} \left\{ \begin{array}{l} m^{n-2}a \mp m^{n-3}a \mp \\ m^{n-4}a \mp m^{n-5}a \\ \mp m^{n-6}a \text{ \&c.} \end{array} \right.$$

$$\mp m^{n-2}a-a$$

$$\mp m^{n-2}a-m^{n-3}a$$

$$\mp m^{n-3}a-a$$

$$m^{n-3}a-m^{n-4}a$$

$$\mp m^{n-4}a-a$$

$$m^{n-4}a-m^{n-5}a$$

$$\mp m^{n-5}a-a$$

$$m^{n-5}a-m^{n-6}a$$

$$\mp m^{n-6}a-a$$

&c.

Zusatz.

147. Wenn ihr demnach den Unterschied des ersten und letzten Gliedes in einer geometrischen Progression durch den um 1 verringerten Exponenten dividiret, und zu dem Quotienten das letzte Glied addiret; so habet ihr die Summe der ganzen Progression. Es sey das erste Glied a , der Exponente m , die Zahl der Glieder n , so ist das letzte Glied $m^{n-1}a$. Und demnach die Summe der

Progression $m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : (m - 1)$,
 das ist, wenn $m = 2, a = 1, n = 8, 128 + 127 : 1 = 255$. Wenn ihr alles zu einer Benennung bringet, so ist die Summe $(m^n a - m^{n-1}a + m^{n-1}a - a) : (m - 1) = (m^n a - a) : (m - 1)$.

Die 53. Aufgabe.

158. Aus dem gegebenen ersten und letzten Gliede, mit der Zahl der Glieder in einer geometrischen Progression, den Exponenten zu finden.

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$ der Exponente $= x$

das letzte $= b$

die Zahl der Glieder $= n$

So ist $b = x^{n-1}a$ (§. 145.)

$$\frac{b : a = x^{n-1}}{b^1 : (n-1) : a^1 : (n-1) = x}$$

$$b^1 : (n-1) : a^1 : (n-1) = x$$

Es sey $a = 2, b = 486, n = 6$, so ist $x = \sqrt[5]{486 : 2} = \sqrt[5]{243} = 3$.

Probe: Denn $3^5 \cdot 2 = 243 \cdot 2 = 486$.

Die 54. Aufgabe.

149. Aus dem gegebenen Exponenten der Zahl der Glieder und der Summe der

der geometrischen Progreſſion das erſte
Glieder zu finden.

Auſlöſung.

Es ſey der Exponente $= m$ das erſte Glied

die Zahl der Glieder $= n$ So iſt das letzte

die Summe $= c$ $(\S. 145.)$

Folgendſ.

$$c = (m^n x - x) : (m - 1)$$

$$m - 1$$

$$mc - c = m^n x - x$$

$$m^n - 1$$

$$(m - 1) c : (m^n - 1) = x$$

Es ſey $m = 3, n = 6, c = 728$, ſo iſt $x = 2$
 $728 : 728 = 2.$

Probe: Denn $(486 - 2) : 2 + 486 = 243$
 $- 1 + 486 = 242 + 486 = 728.$

Die 55. Aufgabe.

150. Aus dem erſten und letzten Gliede
und dem Exponenten die Zahl der Glieder
in einer geometriſchen Progreſſion zu
finden.

Auſlöſung.

Es ſey das erſte Glied $= a$ die Zahl der
Glieder $= x$

das letzte $= b$

der Exponente $= m$

III 5

So

Es ist $m^{x-1}a = b$, das ist, wenn ihr den Logarithmum von $a = la$ und den Logarithmum von $m = lm$ sehet,

$$xlm - lm \mp la = lb \quad (\S. 23. Trig.)$$

$$xlm = lb - la \mp lm$$

$$x = \frac{lb - la \mp 1}{lm}$$

Es sey $n = 2, b = 486, m = 3$, so ist

$$lb = 2.6866363$$

$$la = 0.3010300$$

$$lb - la = 2.3856063$$

$$\begin{array}{r} \text{3 2 2} \\ lb - la = 23886063 \} 5 \\ lm = 4771213 \} 1 \\ \hline 6 = x \end{array}$$

Probe: Denn $2.243 = 486$ (§. 145.).

Die 56. Aufgabe.

151. Eine unendliche Zahl Brüche zu summiren, deren Zehler Eins ist, die Nenner aber in einer geometrischen Verhältniß fortgehen.

Auflösung.

Es sey der Nenner des ersten Buches $= a$, der Exponente $= m$. Weil die Brüche unendlich abnehmen, so muß der letzte so klein
wer

werden, daß er in Ansehung des ersten für nichts zu halten. Und also ist die Differenz des ersten und letzten Gliedes dem ersten gleich, das ist, $1:a$, folgend die Summe $1:a$
 $\pm 1 : (ma - a) = (m - 1 \pm 1) : (ma - a) = m :$
 $(m - 1) a.$

Es sey $m = 2$, so ist die Summe der Brüche $= 2 : a$, folgend $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} +$ u. s. w. unendlich fort $= 1.$

Es sey $m = 3$, so ist die Summe der unendlichen Brüche $= 3 : 2a$, folgend $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ u. s. w. unendlich fort $= 3 : 6 = \frac{1}{2}.$

Es sey $m = 4$, so ist die Summe der unendlichen Brüche $= 4 : 3a$, folgend $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ u. s. w. unendlich fort $= 4 : 12 = \frac{1}{3}.$

Die 57. Aufgabe.

152. Die Summe unendlicher Brüche zu finden, deren gemeiner Zehler einer gegebenen Zahl gleich ist, die Nenner aber in einer geometrischen Progression fortgehen.

Auflösung.

Es sey der gemeine Zehler $= b$, der Exponente der Nenner in der Progression $= m$, der Nenner des ersten Bruches $= a$, so ist der erste Bruch $= \frac{b}{a}$. Weil nun der letzte

Bruch aus der unendlichen Progression in Ansehung des ersten nichts ist, so ist der Un-

ter.

terscheid dieser beyden b folgend die Summe

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{a} = \frac{bm - b}{a} + \frac{b}{a} = \frac{bm}{a}.$$

$$a \quad ma - a \quad ma - a \quad (m-1)a.$$

Es sey $m=2$, $a=6$, $b=3$, so ist die Summe der Progreſſion $= 6 : 6 = 1$, das iſt, $\frac{3}{6} + \frac{3}{12} + \frac{3}{24}$ u. ſ. w. unendlich fort.

Eben ſo findet ihr, das $\frac{5}{7} + \frac{5}{21} + \frac{5}{63}$ u. ſ. w. unendlich fort $= 15 : 14 = 1 \frac{1}{14}$.

Ungleichem findet ihr, daß $\frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32}$ &c. $= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}$.

Anmerckung.

153. Dieſe Aufgaben gehören in die Arithmetica infinitorum, die *Johannes Wallisius* zuerſt erfunden, und *Iſmael Bullialdus* weiter ausgeführt: ich aber in meinen *Elementis Analyſeos Infinitorum* zwar kurz, jedoch viel allgemeiner als beyde abgehandelt. Allein weil man dieſelbe nicht mehr ſonderlich nöthig hat, nachdem der Herr von Leibnitz ſeine Differential- und Integralrechnung bekannt gemacht; wollen wir uns auch mit derſelben nicht aufhalten.

Die 12. Erklärung.

154. Drey oder vier Gröſſen ſind harmoniſch proportional, wenn im erſten Falle der Unterſcheid der erſten und der andern ſich verhält zu dem Unterſcheide der andern und dritten, wie die erſte zu der dritten, im anderen Falle aber wie der Unterſcheid der erſten und anderen zu dem Unterſcheide der dritten und vierden wie die erſte zu der vierden. Der-

glei-

gleichen Zahlen sind 2, 3 und 6, denn
 $1:3 = 2:6$.

Die 13. Erklärung.

155. Wenn in dem ersten Falle die Glieder vervielfältiget werden; so entsteht eine harmonische Progression.

Die 58. Aufgabe.

156. Zu zwey gegebenen Grössen die dritte harmonische Proportionalgröße zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste $= a$ die dritte $= x$
 die andere $= b$

So ist (§. 154.).

$$b - a : x - b = a : x$$

$$ax - ab = bx - ax \quad (§. 137.)$$

$$2ax - bx = ab$$

$$ab : (2a - b) = x$$

Es sey $a = 10$, $b = 16$; so ist $x = 160 : (20 - 16) = 160 : 4 = 40$.

Probe: Denn $16 - 10 : 40 - 16 = 6 : 24 = 10 : 40 = 1 : 4$.

Der 1. Zusatz.

157. Wenn $2a = b$; so ist $x = ab : 0$, und also $1 : 0 = x : ab$, folgender kann keine harmonische Proportionalgröße gefunden werden:
 welch

welches vielweniger angehet, wenn b grösser als $2a$.

Der 2. Zusatz.

158. Wenn man die dritte Grösse für die andere nimmet; so kan man auf gleiche Weise die vierdte finden, und so weiter fort. Die Glieder einer harmonischen Progreßion

a, b, ab	ab	ab	ab
$2a - b$	$3a - 2b$	$4a - 3b$	$5a - 4b$
ab	ab		
$6a - 5b$	$7a - 6b$ &c.		

Die 59. Aufgabe.

159. Zwischen zwey gegebenen Grössen die mittlere harmonische Proportionalgrösse zu finden.

Auflösung.

Es sey die erste $= a$ die andere $= x$
 die dritte $= b$

So ist (§. 154.)

$$x - a : b - x = a : b$$

$$bx - ab = ab - ax \quad (§. 137.)$$

$$bx + ax = 2ab$$

$$x = 2ab : (a + b)$$

Es sey $a = 10$, $b = 403$ so ist $x = 800 : 50$
 $= 16$.

Pro

Probe: Denn $16-10:40-16=6:24$
 $=10:40=1:4$, wie vorhin (§. 156.).

Die 60. Aufgabe.

160. Zu drey gegebenen Grössen die vierdte harmonische Proportionalgröſſe zu finden.

Auflösung.

Es ſey die erſte $=a$ die vierdte $=x$
 die andere $=b$
 die dritte $=c$

So iſt (§. 154.)

$$b-a : x-c = a : x$$

$$bx-ax = ax-ac \quad (§. 137.)$$

$$ac = 2ax - bx$$

$$ac : (2a-b) = x$$

Es ſey $a=6$, $b=8$, $c=12$, ſo iſt $x=72:(12-8)=72:4=18$.

Probe: Denn $8-6:18-12=2:6=6:18=1:3$ (§. 154.).

Anmerckung.

161. Nachdem wir den Nutzen der Algebra in arithmetiſchen Exempeln gezeigt: ſo iſt es Zeit, daß wir zu geometriſchen Aufgaben ſchreiten.

Die 61. Aufgabe.

162. Aus dem gegebenen Radio des Circuls ED die Seite des in ihm beſchriebenen

Tab. I.
Fig. 1.

benen regulären Drey-Eckes AB zu finden.

Auflösung.

Es sey DB die Seite des Sechs-Eckes. Weil $DB=BE$ (§. 135. Geom.) und bey F rechte Winkel sind (§. 125. Geom.); so ist auch $DF=EF$ (§. 96. Geom.). Es sey demnach

$$DB=a \qquad BA=x.$$

$$\text{So ist } DF=\frac{1}{2}a \quad BF=\frac{1}{2}x.$$

$$\text{folgends } \frac{3}{4}aa=\frac{1}{4}xx \text{ (§. 172. Geom.)}$$

$$\begin{array}{r} \hline 3aa=xx \\ \hline \sqrt{3aa}=x \end{array}$$

Tab. I.
Fig. 2.

Ihr findet demnach x , wenn ihr zwischen $3a$ und a die mittlere Proportional-Linie suchet (§. 210. Geom.). Besser aber geschieht es also: Aus A und B machet mit dem Diameter AB einen Durchschnit in D und ziehet aus dem Mittelpunct C die Linie CD. Diese ist die Seite des Dreyeckes. Denn da $DB^2=4a^2$ und $CB^2=a^2$, so ist $DC^2=3aa$. (§. 172. Geom.) folgends $DC=\sqrt{3aa}$. Oder machet $AE=a$; so ist wegen des rechten Winkels bey E (§. 115. Geom.) $EB=\sqrt{3aa}$ (§. 172. Geom.).

Der I. Zusatz.

Tab. I.
Fig. 1.

163. Weil $3aa=xx$, so ist $aa:xx=1:3$; das ist, $DE^2:AB^2=1:3$.

Der

Der 2. Zusatz.

164. Wenn die Seite des Dreieckes b gegeben ist, und ihr solltet den Radius des Circuls y finden, welcher um selbiges beschrieben werden kan; so habet ihr $3y^2 = b^2$ und also $y = \sqrt{\frac{1}{3}b^2}$, folgendes dörfet ihr nur zwischen der Linie AB (b) und dem dritten Theile derselben ($\frac{1}{3}b$) die mittlere Proportionallinie suchen (§. 210. Geom.). Tab. I. Fig. 1.

Der 3. Zusatz.

165. Die halbe Seite AB, nemlich BF, ist der Sinus des Bogens BD von 60° (§. 2. Trig.). Derowegen könnet ihr durch gegenwärtige Aufgabe den Sinum von 60° finden (§. 11. Trig. 112. Arithm.).

Die 62. Aufgabe.

166. Aus dem gegebenen Radio des Circuls AC die Seite des in ihm beschriebenen regulären Achteckes zu finden. Tab. I. Fig. 3.

Auflösung.

Es sey $AC = BC = DC = a$ $BD = x$; so ist $AB = \sqrt{2a^2}$ (§. 172. Geom.).

$$BE = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2} \text{ (§. 125. Geom.)} = \sqrt{\frac{1}{2}a^2} \text{ (§. 54.)}$$

$$EC = \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}a^2} \text{ (§. 172. Geom.)} = \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$$

$$DE = a - \sqrt{\frac{1}{2}a^2}, \text{ folgendes}$$

(Wolfs Mathes. Tom. IV.) Mmm mm DE^2

$$DE^2 = \frac{3}{2}a^2 - 2a\sqrt{\frac{1}{2}a^2}$$

$$BE^2 = \frac{1}{2}a^2$$

$$DB^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{\frac{1}{2}a^2} \text{ (§. 172. Geom.)}$$

$$DB = \sqrt{2a^2 - 2a\sqrt{\frac{1}{2}a^2}}$$

Zusatz.

167. Die halbe Seite des Achteckes ist der Sinus des Bogens von $22^\circ 30'$ (§. 2. Trig.) Diesen könnet ihr demnach durch gegenwärtige Aufgabe finden.

Die 63. Aufgabe.

Tab. I.
Fig. 3.

168. Aus der gegebenen Seite des Achteckes DB den Radium des Circuls AC zu finden, der um dasselbe beschrieben werden kan.

Auflösung.

Es sey $DB=b$, $BC=y$, so ist, vermöge dessen, was bey der vorhergehenden Aufgabe erwiesen worden.

$$b^2 = 2y^2 - 2y\sqrt{\frac{1}{2}y^2}$$

$$2y\sqrt{\frac{1}{2}y^2} = 2y^2 - b^2$$

$$2y^4 = 4y^4 - 4b^2y^2 \mp b^4$$

$$-b^4 = 2y^4 - 4b^2y^2$$

$$-\frac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2$$

$$b^4 \quad b^4 (\S. 83.)$$

$$\frac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2 \mp b^4$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}b^4} = y^2 - b^2$$

$$b^2 \mp \sqrt{\frac{1}{2}b^4} = y^2$$

$$\sqrt{(b^2 \mp \sqrt{\frac{1}{2}b^4})} = \sqrt{(b^2 \mp b\sqrt{\frac{1}{2}b^2})} = y$$

Eine geometrische Construction hat man zwar nicht nöthig, weil sie aus den Anfangs-Gründen der Geometrie leichter zu haben. Doch Tab. I. Fig. 4. kan man den Radius y und den Mittelpunct des Circuls aus dem gefundenen Werthe folgendergestalt finden.

1. Theilet die Seite des Achteckes AB in zwey gleiche Theile in D und beschreibet darüber einen halben Circul AFB ; so ist $AF = FB = \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$ (§. 172. Geom.).

Zieheth aus dem Mittelpuncte D durch F eine gerade Linie DC , welche auf AB perpendicular stehet. 3. Machet $AE = 2AB$ und beschreibet über AE

$\mp 2FB = 2b \mp 2\sqrt{\frac{1}{2}b^2}$ und beschreibet über AE einen

Mmm mm 2

einen

einen halben Circul; so ist $AC = \sqrt{(b^2 + b\sqrt{\frac{1}{2}})}$ oder der verlangte Radius und in C der Mittelpunct des Circuls, der um das Achtecke beschrieben wird (§. 420. *Geom.*).

Es ist auch nicht nöthig, daß man AFB und ACE beschreibt, denn man darf nur AD und DF einander gleich machen, BF in BH tragen und mit HA den Perpendicul DC in C durchschneiden, so hat man den Mittelpunct C, daraus durch A und B der verlangte Circul beschrieben wird. Und diese Construction ist so beschaffen, daß man sie in die Anfangs-Gründe der Geometrie eintragen kan.

Die 64. Aufgabe.

Tab. I.
Fig. 5.

169. Aus dem gegebenen Radio des Circuls AC die Seite des Zehneckes AB zu finden.

Auflösung.

Weil $AB = \frac{1}{10}$ der Peripherie, so ist der Winkel ACB 36° , folgender sind die Winkel CAB und ABC ein jeder 72° . (§. 109. *Geom.*). Machet $AD = AC$, so ist jeder von den Winkeln ADC und DCA 36° (§. 101. 107. *Geom.*) daher DCB 72° , und demnach $BD:BC = BC:BA$ (§. 183. *Geom.*). Es sey $AC = BC = AD = a$, $AB = x$, so ist $BD = a + x$, und dannenhero vermöge dessen, was erwiesen worden.

$a + x$

$$\begin{aligned}
 & a + x : a = a : x \\
 & \hline
 & a^2 = ax + x^2 \\
 & \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 \quad (\S. 83.) \\
 & \hline
 & \frac{5}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + ax + x^2 \\
 & \hline
 & \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{1}{2}a + x \\
 & \hline
 & \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a = x
 \end{aligned}$$

Richtet auf dem Diameter AB den Ra- Tab. I.
 dium DC = a aus dem Mittelpuncte C per- Fig. 6.
 pendicular auf (§. 95. Geom.) und theilet CB in
 zwey gleiche Theile in E (§. 120. Geom.), so ist
 CE = $\frac{1}{2}a$ und folgendes DE = $\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 172.
 Geom.) machet EF = DE, so ist CF = $\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$.
 — $\frac{1}{2}a$.

Anmerkung.

170. Auf solche Art lehret Ptolemaus Almag.
 lib. 1. die Seite des Zehenecks zu finden.

Die 65. Aufgabe.

171. Aus dem gegebenen Radio des Tab. I.
 Circuls DC, die Seite des Fünfecks AB Fig. 3.
 zu finden.

Auflösung.

$$\begin{aligned}
 & \text{Es sey } DC = a & AB = x \\
 & \text{so ist } DB = \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - \frac{1}{2}a} \quad (\S. 169.) & BE = \frac{1}{2}x \\
 & EC = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} \\
 & DE = a - \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}
 \end{aligned}$$

Folgendes

$$\begin{aligned} DE^2 &= 2a^2 - \frac{1}{4}x^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} \\ BE^2 &= \frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } DB^2 &= 2a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} \\ \text{es ist auch } DB^2 &= \frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{daher } \frac{1}{2}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} &= 0 \\ &(\S. 31. Ar.) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = 2\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$$

$$\frac{6}{4}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = 4a^2 - x^2$$

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{10}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} \\ &= a^2 + \frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} \end{aligned}$$

Tab. I.
Fig. 5.

Demnach $AB^2 = DC^2 + DB^2$, das ist, das Quadrat des regulären Fünfeckes ist gleich dem Quadrate des Sechseckes und Zehneckes, die in einem Circul beschrieben sind, zusammen genommen. Daher weil DC die Seite des Sechseckes, und FC die Seite des Zehneckes (§. 169.); so ist DF die Seite des Fünfeckes.

Tab. I.
Fig. 6.

Anmerckung.

172. Ptolemaeus lehret abermahl die Seite des Fünfeckes auf solche Art finden.

Zusatz.

173. Die halbe Seite des Fünfeckes ist der Sinus von 36° , die halbe Seite des Zehneckes der Sinus von 18° (§. 2. Trig.). Dero-
wegen

wegen könnet ihr aus dem gegebenen Radio des Circuls diese beyden Sinus finden (§. 11. Trig.).

Die 66. Aufgabe.

174. Eine gerade Linie AC dergestalt Tab. I. in F zu schneiden, daß die ganze Linie AC Fig. 6. sich zu dem grossen Theile CF verhält, wie der grosse Theil CF zu dem kleinen FA, oder daß $CF^2 = AC$ in FA.

Auflösung.

Es sey $AC = a$, $CF = x$, so ist $FA = a - x$ und also $x^2 = aa - ax$

$$x^2 + ax = a^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2 \quad (\S. 83.)$$

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$$

$$x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

$$x = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$$

Setzet $AC = DC = a$ rechtwinclich zusam Tab. I. men, und machet $CE = \frac{1}{2}a$, so ist $DE = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ Fig. 6. (§. 172. Geom.). Machet ferner $EF = ED$, so ist die Linie AC in F auf verlangte Art getheilet.

Anmerckung.

175. Die alten Geometra nennen dieses lineam media & extrema ratione secare. Man pfleget es auch divinam sectionem zu nennen, weil (wie aus dem Euclide zu sehen) man viel aus dieser Einttheilung demonstriret hat.

Zusatz.

176. Wenn a der Radius eines Circuls ist, so ist der grosse Theil von der Linie x die Seite des Zehneckes (§. 169.).

Die 67. Aufgabe.

Tab. I.
Fig. 7.

177. Aus der gegebenen Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyeckes AB und seinem Inhalte das Dreyeck ABD zu zeichnen.

Auflösung.

Es sey $AB = a$ der Perpendicular $DC = y$
der Inhalt $= bb$ so ist der Inhalt $= \frac{1}{2} ay$
(§. 156. Geom.)

und demnach

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} ay = ba \\ \hline y = 2bb \\ \hline a \end{array}$$

Beschreibet über $AB = a$ einen halben Circul: richtet in A auf dem Diameter $AE = 2b$ perpendicular auf und ziehet die Linie EB. Machet $AG = \frac{1}{2} AE = b$ und ziehet FG mit EB parallel; so ist $AF = 2bb : a$ (§. 87. Geom.). Wenn demnach FD mit dem Diameter AB parallel gezogen wird; so giebet sich der verlangte Triangel ADB.

Die 68. Aufgabe.

Tab. I.
Fig. 8.

178. Aus dem gegebenen Umfange $AB + BC + CA$ eines rechtwinklichten Triangels und seinem Inhalte, die grösste Seite BC zu finden.

Aufs

Auflösung.

Es sey $AB + BC + CA = a$, $BC = x$,
 der Inhalt $= bb$ so ist $AC + BA = a - x$
 $(AC + BA)^2 = a^2 - 2ax + x^2$
 $AC^2 + BA^2 = x^2$ (§. 172. Geom.)

$2 BA, AC = a^2 - 2ax$ (§. 93. Arithm.)
 daher (§. 156. Geom.)

$$a^2 - 2ax = 4bb$$

$$a^2 - 4bb = 2ax$$

$$\frac{1}{2}a - 2bb = x$$

a

Suchet zu $AB = a$, $BC = 2b$ und $BD = b$ die Tab. I.
 vierdte Proportionallinie $BE = 2bb : a$ (§. 187. Geom.). Beschreibet mit $BE = \frac{1}{2}a$ den
 Bogen FG ; so ist $EG = x$ und ihr könnet den
 verlangten Triangel nach der vorhergehenden
 Aufgabe beschreiben.

Anmerkung.

179. Weil alle Flächen durch das Quadrat ausge-
 messen werden (§. 147. Geom.); so giebet man in geo-
 metrischen Aufgaben jederzeit die Fläche durch eine Li-
 nie, deren Quadrat ihr gleich ist.

Die 69. Aufgabe.

180. Aus der gegebenen Grundlinie Tab. I.
 BC und den beyden Winkeln an derselben Fig. 10.
 B und C , die Höhe AD zu finden.

Mmm mm 5

Auf

Auflösung.

Es sey $BC=a$, $AD=x$. Weil bey Drechte Winckel sind, so wisset ihr auch die Winckel BAD und DAC (§. 102. *Geom.*). Es sey der Sinus des Winckels $ABD=t$, der Sinus des Winckels $BAD=r$, der Sinus des Winckels $DAC=q$, der Sinus des Winckels $ACD=p$, so ist $t:r=x:BD$ und $p:q=x:DC$, (§. 43. *Trig.*) folgendes $BD=rx:t$ und $DC=qx:p$. Derowegen weil $BD+DC=BC$, so habet ihr

$$\begin{array}{r} rx:t+qx:p=a \\ \hline pt \\ prx+txq=apt \\ \hline pr=tq \\ x=apt:(pr+txq). \end{array}$$

Anders.

Wenn ihr AD als den Sinum totum ansehet, so ist BD der Tangens des Winckels BAD , und DC der Tangens des Winckels DAC (§. 6. *Trigon.*). Es sey der Sinus Totus $=t$, die Tangentes seyn m und n , so ist $t:m=x:BD$ und $t:n=x:DC$, folgendes ist $BD=mx:t$, und $DC=nx:t$ und demnach

$$\begin{array}{r} a=(nx+mx):t \\ \hline at=nx+mx \\ \hline n+m \\ at:(n+m)=x \end{array}$$

Suchet also zu der Summe der Tangentium der

der beyden Winkel BAD und DAC dem Sinu toto und der Grundlinie BC die vierdte Proportionalzahl (§. 113. *Arithm.*); so kommet die Höhe des Triangels AD heraus.

Die 70. Aufgabe.

181. Aus drey gegebenen Seiten eines Tab. I. Triangels AB, AC und CB die Höhe AD zu finden. Fig. 10.

Auflösung.

$$\begin{array}{ll} \text{Es sey } AB = a & BD = x \\ BC = b & \text{so ist } DC = b - x \\ AC = c & \end{array}$$

Weil nun $AB^2 - BD^2 = AD^2$ und $AC^2 - DC^2 = AD^2$ (§. 172. *Geom.*), so ist auch $AB^2 - BD^2 = AC^2 - DC^2$, folgendes

$$\begin{array}{r} a^2 - x^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2 \\ \hline a^2 + b^2 - c^2 = 2bx \\ \hline a^2 - c^2 + \frac{1}{2}b = x \\ \hline 2b \end{array}$$

Folgendes $(a^2 - c^2) : 2b = a(a + c)(a - c) : 2b$ derhalbe Unterscheid der Theile CD und BD (§. 61.).

Lehrsatz.

Wenn in einem Triangel ACB aus dem Scheitelpuncte A auf die Grundlinie CB ein Perpendicul AD gefällt wird; so verhält sich die Grundlinie BC zu den beyden Schenkeln AB und AC zusammen genommen

genommen, wie der Unterschied derselben zu dem Unterschiede der Theile von der Grundlinie BD und CD.

Wenn ihr BD habet, so könnet ihr (§. 172. Geom.) AD finden.

Es sey $a=6, b=4, c=3$, so ist $x = (36 - 9) : 8 + 2 = 27 : 8 + 2 = 5 + \frac{3}{8}$ oder $= (9 - 3) : 8 + 2 = 27 : 8 + 2 = 3\frac{3}{8} + 2 = 5\frac{3}{8}$.

$$AB^2 = 2.3.0.4 : 64$$

$$BD^2 = 1849 : 64$$

$$AD^2 = 455 : 64 \quad (\S. 172. \text{Geom.})$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} 4 & 55 & 00 & 00 \\ \hline 4 & & & \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 21\frac{33}{160} \text{ demnach ist} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c|c|c} 55 & & \\ \hline 41 & & \end{array}$$

$$AD = 2133 : 800.$$

$$\begin{array}{c|c|c} 14. & 0.0 & \\ \hline 4 & 23 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 12 & 69 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 3.1. & 0.0 \\ \hline & 42 & 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 27 & 89 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 3 & 11 \end{array}$$

Anmerckung.

182. Auf eine gleiche Weise könnet ihr aus drey gegebenen Seiten die Höhe des Triangels finden, wenn er stumpfwinklicht ist.

Zusatz.

183. Derowegen könnet ihr auch aus drey gegebenen Seiten den Inhalt eines Triangels finden (§. 156. Geom.).

Die 71. Aufgabe.

184. Aus dem gegebenen Inhalte eines rechtwinklichten Triangels ABC, dessen drey Seiten AC, BA, BC in einer geometrischen Progreßion sind, die Seiten selbst zu finden.

Auflösung.

Es sey der Inhalt $= a^2$ AB $= y$

CA $= x$

so ist BC $= x^2$ (§. 113. Arithm.)

y

und demnach

$$x^4 : y^2 = x^2 + y^2 \quad (\S. 172. Ge.) \quad xy = 2a^2 \quad (\S. 156. Ge.)$$

$$x^4 = x^2 y^2 + y^4$$

$$x^4 - x^2 y^2 = y^4$$

$$x = 2a^2 : y$$

$$x^2 = 4a^4 : y^2$$

$$x^4 = 16a^8 : y^4$$

$$y = 2a^2 : x$$

$$y^2 = 4a^4 : x^2$$

$$y^4 = 16a^8 : x^4$$

ingleichen

Hier

Hieraus nun wird gefunden

$$16a^8 - 4a^4 = y^4$$

$$\frac{y^4}{y^4}$$

$$16a^8 - 4a^4y^4 = y^8$$

$$16a^8 = y^8 + 4a^4y^4$$

$$\frac{4a^8}{4a^8} \quad \frac{4a^8}{4a^8}$$

$$20a^8 = y^8 + 4a^4y^4 + 4a^8$$

$$2a^4\sqrt{5} = y^4 + 2a^4$$

$$a^4(2\sqrt{5} - 2) = y^4$$

$$\frac{a^4}{a^4} (2\sqrt{5} - 2) = y$$

$$x^4 - 4a^4 = 16a^8$$

$$\frac{x^4}{x^4}$$

$$x^8 - 4a^4x^4 = 16a^8$$

$$\frac{4a^8}{4a^8} \quad \frac{4a^8}{4a^8}$$

$$x^8 - 4a^4x^4 + 4a^8 = 20a^8$$

$$x^4 - 2a^4 = 2a^4\sqrt{5}$$

$$x^4 = a^4(2 + 2\sqrt{5})$$

$$\frac{x^4}{x^4} = \frac{a^4}{a^4} (2 + 2\sqrt{5})$$

Tab. I.
Fig. 11.

Richtet auf $AB = a$ eine Perpendiculararlinie $CA = 2a$ auf; so ist $BC = \sqrt{5}aa$. Machet $DB = AB = a$; so ist $DC = \sqrt{5}aa - a$. Traget DC aus C in E und aus E in K die Linie $CA = 2a$, und beschreibet so wohl über AE als AK einen halben Circul. Ziehet durch C mit AB die Linie FL parallel; so ist $FC = \sqrt{(2a\sqrt{5}aa - 2aa)}$ und $CL = \sqrt{(2aa + 2a\sqrt{5}aa)}$, oder $FC = \sqrt{(2a^2\sqrt{5} - 2a^2)} = a\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)}$ und $CL = a\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})}$. Theilet CA in zwey gleiche Theile in H , daß $CH = a$, und machet $CG = CF$ und $CM = CL$. Beschreibet sowohl über HG , als HM einen halben Circul; so ist $CI = \sqrt{(aa\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)})}$

$$= \frac{a^4}{a^4} \sqrt{(2\sqrt{5} - 2)} = y$$
, und $CN = \sqrt{(a^2\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})})}$

$(2 \pm 2\sqrt{5}) = a^4 \sqrt{(2 \pm 2'\sqrt{5})} = x$.
 Derowegen wenn ihr $CO = CN$ machet und
 die Linie IO ziehet; so ist ICO der verlangte
 Triangel.

Die 72. Aufgabe.

185. Aus der gegebenen Summe der Tab. I.
 Seiten $AC \pm AB$ in einem rechtwinclich- Fig. 8.
 ten Triangel CAB und dem Perpendicul
 AD die Seiten zu finden.

Auflösung.

Es sey $AB \pm AC = a$, $CA - BA = y$, $BC = x$,
 $AD = b$; so ist $AC = \frac{1}{2}(a \pm y)$, $AB = \frac{1}{2}(a - y)$
 (§. 61. §. 172. Geom. und §. 183. Geom.).

folgende

$$x^2 = \frac{1}{2}(aa \pm yy)$$

$$2x^2 = aa \pm yy$$

$$2x^2 - a^2 = y^2$$

$$BA : DA = BC : AC$$

$$\frac{1}{2}(a - y) : b = x : \frac{1}{2}(a \pm y)$$

$$\frac{1}{4}(aa - yy) = bx$$

$$aa - 4bx = yy$$

Derowegen $2x^2 - aa = aa - 4bx$

$$x^2 \pm 2bx = aa$$

$$x^2 \pm 2bx \pm bb = aa \pm bb (\S. 83.).$$

$$x = \sqrt{aa \pm bb} - b$$

Auf

Tab. I.
Fig. 12.

Auf der gegebenen Linie $CD = a$ beschreibet ein Rectangulum $CDFG$, dessen Höhe DF der Höhe des Triangels b gleich ist: so ist $CF = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Machet $FE = FD$ und $CB = CE$: so ist $CB = \sqrt{(a^2 + b^2)} - b$. Beschreibet demnach über CB einen halben Circul, und ziehet die Linien AB und AC ; so ist CAB der verlangte Triangel.

Die 73. Aufgabe.

Tab. II.
Fig. 13.

186. Aus dem gegebenen Sinu eines Winkels den Sinum des doppelten, dreyfachen, vierfachen zc. Winkels zu finden.

Auflösung.

Es sey der einfache Winkel LAM . Nemet AB für den Sinum Totum an, und machet $AB = BC = DC = DE = EK$, so ist BF der Sinus des Winkels A (§. 3. *Trigon.*) und $AF = FC$ (§. 107. *Geom.*) der Cosinus (§. 7. *Trigon.*) ferner $DBC = 2 BAC$ (§. 101. 107. *Geom.*), $DCE = CDA + CAD$ (§. *cit.*) $= 3 CAD$, $KDE = DEA + KAE$ (§. *cit.*) $= 4 KAE$ u. s. w. Weil nemlich $CDA = CBD$ (§. 107. *Geom.*) $= 2 BAC$, wie erwiesen worden, und $DEA = DCE$ (§. 107. *Geom.*) $= 3 KAE$, wie gleichfalls erwiesen worden. Folgendes ist GC der Sinus des doppelten, DH des dreyfachen, EI des vierfachen Winkels A (§. 3. *Trigon.*) hingegen BG der Cosinus des doppelten, CH des dreyfachen, DC des vierfachen Winkels (§. 7. *Trigon.*).

Es sey $AB=r$, $BF=b$, $AF=c$
 so ist $AB:BF=AC:GC$ (§. 183. Geom.)

$$\begin{array}{cccc} r & b & 2c & 2bc:r \\ AB:AF=AC:AG & (\S. cit.) \\ r & c & 2c & 2cc:r \end{array}$$

Derowegen ist $BG=DG=2cc:r-r=$
 $(2cc-r):r=(\text{weil } r^2=b^2+c^2) (2cc-b^2-c^2)$
 $:r=(c^2-b^2):r$, folgend $AD=AG+GD=$
 $(3c^2-b^2):r$.

Es ist ferner (§. 184. Geom.)

$$AB:BF=AD:DH$$

$$r : b = \frac{3c^2-b^2}{r} : \frac{3bc^2-b^3}{r^2}$$

$$AB:AF=AD:AH$$

$$r:c = \frac{3c^2-b^2}{r} : \frac{3c^3-b^2c}{r^2}$$

Derowegen ist $CH=HE=AH-AC=$
 $(3c^3-b^2c):r^2-2c=(3c^3-b^2c-2cr^2):r^2=$
 $(\text{weil } r^2=c^2+b^2) (3c^3-b^2-b^2c-2c^3-2b^2c)$
 $:r^2=(c^3-3b^2c):r^2$, folgend $AE=EH+HA$
 $(3c^3-b^2c+c^3-3b^2c):r^2=(4c^3-4b^2c):r^2$.

Es ist weiter (§. 183. Geom.)

$$AB:BF=AE:EI$$

$$r : b = \frac{4c^3-4b^2c}{r^2} : \frac{4bc^3-4b^3c}{r^3}$$

$$AB:AF=AE:AI$$

$$r : c = \frac{4c^3-4b^2c}{r^2} : \frac{4c^4-4b^2c^2}{r^3}$$

(Wolfs Mathes. Tom. IV.) Nnnnn Des

Derowegen ist $DI = AI - AD = (4c^4 - 4b^2c^2) : r^3 - (3c^2 + b^2) : r = (4c^4 - 4b^2c^2 - 3c^2r^2 + b^2r^2) : r^3 = (4c^4 - 4b^2c^2 - 3b^2c^2 - 3c^4 + b^4 + b^2c^2) : r^3 = (c^4 - 6b^2c^2 + b^4) : r^3$, weil nemlich $r^2 = b^2 + c^2$.

Wenn demnach der Sinus totus r , der Sinus des einfachen Winkels b , und sein Cosinus c ist, so ist der Sinus

des zwiefachen $2bc : r$

des dreyfachen $(3bc^2 - b^3) : r^2$

des vierfachen $(4bc^3 - 4b^3c) : r^3$

des fünffachen $(5bc^4 - 10b^3c^2 + b^5) : r^4$

des sechsfachen $(6bc^5 - 20b^3c^3 + 6b^5c) : r^5$

Hingegen der Sinus Complementi oder Cosinus

des zwiefachen $(cc - bb) : r$

des dreyfachen $(c^3 - 3b^2c) : r^2$

des vierfachen $(c^4 - 6b^2c^2 + b^4) : r^3$

des fünffachen $(c^5 - 10b^2c^3 + 5b^4c) : r^4$

des sechsfachen $(c^6 - 15b^2c^4 + 15b^4c^2 - b^6) : r^5$

Wenn ihr diese Formeln gegen das Potens kentäfelein (§. 91.) haltet, so werdet ihr wahrnehmen, daß die Glieder vor die Sinus aus den geraden, vor die Cosinus aber aus den ungeraden Stellen der Potenzen genommen werden, nur daß das Mehr- und Minderzeichen beständig abwechselt. Wollet ihr demnach allgemeine Formeln haben; so dürfet ihr sie nur aus der allgemeinen Formel für die Potenzen ausschreiben. Nemlich der Sinus des vielfachen Bogens ist

$$\frac{mc^{m-1}b - m.m - 1.m - 2.c^{m-3}b^3 \pm m.m - 1.m}{r^{m-1}} \quad \begin{matrix} 1. & 2. & 3. & r^{m-1} \\ & & & 1. & 2. \end{matrix}$$

$$\frac{-2.m - 3.m - 4.c^{m-5}b^5 \&c.}{3. & 4. & 5. & r^{m-1}} \quad \text{Hingegen sein}$$

Cosinus ist $\frac{c^m - m.m - 1.c^{m-2}b^2 \pm m.m - 1.}{r^{m-1}} \quad \begin{matrix} 1. & 2. & r^{m-1} \\ & & 1. & 2. & 3. \end{matrix}$

$$\frac{m - 2.m - 3.c^{m-4}b^4 \&c.}{4. & r^{m-1}}$$

Zusatz.

187. Weil der Tangens des einfachen Winkels $t = br:c$ und also $c = br:t$ (§. 18. Trig.) und (S. cit.) wenn der Tangens des zwiefachen v ist

$$\frac{c^2 - b^2}{r} : \frac{2bc}{r} = r : v$$

das ist $\frac{c^2 - b^2}{r} : \frac{2bc}{r} = r : v$

oder $\frac{b^2r^2 - b^2}{t^2} : \frac{2b^2r}{t} = r : v$

so ist $\frac{r^2 - t^2}{r^2 - t^2} : \frac{2tr}{r^2 - t^2} = r : v$

und $\frac{v}{r^2 - t^2} = \frac{2tr}{r^2 - t^2}$

Anmerkung.

188. Auf eben diese Art könnet ihr die Tangentes der übrigen vielfachen Winkel, ja auch eine allgemeine Formel für alle Tangentes der vielfachen Winkel finden. Ihr könnet aber auch die Tangentes suchen, ohne daß ihr nöthig habet, die Sinus zu wissen, wie in der folgenden Aufsaabe gezeiget wird. Und dazu habet ihr folgenden Satz nöthig.

Nnnnn 2

Wenn

Tab. II.
Fig. 14.

Wenn der Winkel CAB durch die Linie EA in zwey gleiche Theile getheilet wird, so verhält sich die eine Seite AB zu dem ihr anliegenden Theile der Grundlinie BE, wie die Seite AC zu dem Theile EC, so an ihr lieget.

Beweis.

Verlängert BA in D, bis $AD = AC$ und ziehet die Linie CD. Weil der Winkel $CAB = ACD + ADC$ (§. 101. *Geom.*) und $ACD = ADC$ (§. 107. *Gnom.*); so ist $ACD = \frac{1}{2} CAB = CAE$, folgendes EA mit CD parallel (§. 98. *Geom.*), und daher $BA : BE = AD (= AC) : EC$ (§. 184. *Geom.*). W. Z. E.

Zusatz.

189. Derowegen verhält sich auch $BA : AC = BE : EC$, folgendes $BA + AC : AC = BC : EC$ (§. 142.).

Die 74. Aufgabe.

Tab. II.
Fig. 15.

190. Aus dem Tangente und Secante des einfachen Winkels die Tangentes und Secantes des zweyfachen, dreysfachen, vierfachen 2c. zu finden.

Auflösung.

Nehmet AB für den Sinum totum' an, so ist BC der Tangens des einfachen Winkels CAB, BD der Tangens des zwiefachen DAB u. s. w.

Es sey $AB = a$, $BC = b$, $BD = x$; so ist $CD = x - b$, $CD^2 = x^2 - 2bx + b^2$, $AD^2 = aa + xx$. Nun ist $AB : AD = BC : CD$ (§. 187.), und

und daher $AB^2 : AD^2 = BC^2 : CD^2$ (§. 142.),
das ist,

$$\begin{array}{r} a^2 : a^2 \mp x^2 = b^2 : x^2 - 2bx \mp b^2 \\ \hline a^2 b^2 \mp b^2 x^2 = a^2 x^2 - 2a^2 bx \mp a^2 b^2 \\ \hline 2a^2 bx = a^2 x^2 - b^2 x^2 \\ \hline = a^2 x - b^2 x \\ \hline 2a^2 b : (a^2 - b^2) = x \end{array}$$

Derowegen ist $CD = x - b = 2a^2 b : (a^2 - b^2)$
 $- b = (2a^2 b - a^2 b \mp b^3) : (a^2 - b^2) = (a^2 b \mp b^3) :$
 $(a^2 - b^2).$

Den Secantem AD findet ihr nun also.

$BC : CD = AB : AD$ (§. 187.).

$b : a^2 b \mp b^3 = a : AD$

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2}$$

das ist $1 : a^2 \mp b^2 = a : AD$

folgende $AD = (a^2 \mp ab^2) : (a^2 - b^2)$

Oder wenn ihr den Secantem des einfachen
 Winkels $AC = \sqrt{(a^2 \mp b^2)} = c$ setzet, so ist AD
 $= ac^2 : (a^2 - b^2) = ac : (2a^2 - c^2).$

Auf gleiche Art wird der Tangens des drey-
 fachen Winkels $BE = (3a^2 b - b^3) : (a^2 - 3b^2)$
 und der Secans $AE = c^3 : (a^2 - 3b^2)$ gefunden,
 u. s. w.

Die 75. Aufgabe.

191. Aus dem gegebenen Inhalte eines Tab. I.
 rechtwinklichten Triangels ABC und dem Fig. 8.
 Winkel B die Seiten zu finden.

Nnnnn 3

Auf.

beschreiben richtig sey oder nicht, zu untersuchen.

Auflösung.

Die Regel des *Renaldini* ist diese: Wenn man über dem Diameter AB einen gleichseitigen Triangel aufrichtet, den Diameter AB aber in so viel gleiche Theile theilet, als die Peripherie soll getheilet werden, und aus F durch den andern Theilungspunct D die Linie FG zieht; so ist BG die Seite des verlangten Vieleckes. Wir wollen durch das Achteck zeigen, daß die Regel unrichtig ist. Denn in andern Fällen verfähret man auf gleiche Weise. Es sey demnach der halbe Diameter $CB = 1$, die halbe Seite des Vierecks $EG = x$, und BG sey die Seite des Achteckes; so ist $CD = \frac{1}{2}$ vermöge der Regel und $FC = \sqrt{3}$ (§. 162.). Weil nun FCB und CEG rechte Winkel sind, und $CDF = GDE$ (§. 61. Geom.); so ist (§. 183. Geom.).

$$FC : CD = EG : DE$$

$$\sqrt{3} : \frac{1}{2} = x : x$$

Daher ist $CE = \frac{1}{2} + x = \sqrt{3} + x$, folgendes

$$\text{weil } CE^2 + EG^2 = CG^2 \text{ (§. 172. Geom.)}$$

$$3 + 2x\sqrt{3} + x^2 + x^2 = 1$$

12

12

Nnnnn 4

3 +

$$\begin{array}{r}
3 + 2x\sqrt{3} + 13x^2 = 12 \\
\hline
13x^2 + 2x\sqrt{3} = 9 \\
\hline
x^2 + \frac{2}{13}x\sqrt{3} = \frac{9}{13} \\
\hline
x^2 + \frac{2}{13}x\sqrt{3} + \frac{3}{13 \cdot 13} = \frac{9}{13} + \frac{3}{13 \cdot 13} = \frac{120}{13 \cdot 13} \\
\hline
\frac{1}{13}\sqrt{3} + x = \frac{1}{13}\sqrt{120} = \frac{2}{13}\sqrt{30} \text{ (§. 50.)} \\
\hline
x = \frac{2}{13}\sqrt{30} - \frac{1}{13}\sqrt{3} \\
\text{Nun ist aber } x = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ (§. 16. Trig.).}
\end{array}$$

Derowegen erhellet, daß die Regel des Renaldini die halbe Seite des Viereckes unrichtig herausbringeret, wie noch klarer erhellet, wenn man in zehentheiligen Brüchen so wohl aus dem Renaldinischen als dem wahren Werthe die Wurzel heraus ziehet.

Die 77. Aufgabe.

193. Einen Circul zu finden, der so groß ist als die Fläche eines gegebenen Cylinders.

Auflösung.

Es sey der Diameter des Cylinders = d seine Peripherie = p , die Höhe = a , so ist die Fläche = ap (§. 121. Geom.). Es sey ferner der Diameter des Circuls = x , so ist $d:p = x^2:px$ (§. 121. Geom.). Und demnach die Peripherie des Circuls $px:d$, folgendes seine Fläche $px^2:4d$ (§. 168. Geom.). Derowegen ist

$$px^2$$

$$px^2 : 4d = ap$$

$$x^2 = 4ad$$

$$x = \sqrt{4ad} = 2\sqrt{ad}$$

oder $\frac{1}{2}x = \sqrt{ad}$

Der halbe Diameter des verlangten Circuls ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Höhe und dem Diameter des Cylinders.

Lehrsatz.

Die Fläche des Cylinders ist gleich einem Circul, dessen Radius die mittlere Proportionallinie ist zwischen der Höhe und dem Diameter des Cylinders.

Die 78. Aufgabe.

194. Aus der gegebenen Verhältniß der Höhe eines Cylinders zu seinem Diameter und dem Diameter eines Circuls, der seiner Fläche gleich ist, die Höhe des Cylinders und seinen Diameter zu finden.

Auflösung.

Es sey die gegebene Verhältniß $m:n$, der Diameter des Circuls $=d$, seine Peripherie $=p$, die Höhe des Cylinders $=x$; so ist sein Diameter $=nx:m$ und seine Peripherie $=np x : md$, folgender

$$np x^2 : md = \frac{1}{4}pd$$

$$x^2 = md^2 : 4n$$

$$x = \sqrt{(md^2 : 4n)}$$

Nnnnn 5

Ma

Tab. II.
Fig. 18.

Machet $AB = n$ und richtet darauf perpendicular auf $BC = m$. Machet ferner $AD = \frac{1}{2}d$ und richtet in D die Perpendicularlinie DE auf $= md : 2n$. Machet endlich $DF = DE$ und beschreibet über AF einen halben Circul; so ist $DG = md^2 : \sqrt{4n}$ (§. 210. Geom.).

Die 79. Aufgabe.

195. Aus dem gegebenen Diameter einer Kugel und der Höhe eines Cylinders, der ihr gleich ist, den Diameter des Cylinders zu finden.

Auflösung.

Es sey die Höhe des Cylinders $= a$, der Diameter der Kugel $= d$, ihre Peripherie $= p$, der Diameter des Cylinders $= x$; so ist der Inhalt der Kugel $= \frac{1}{6}pd^2$ (§. 237. Geom.) die Peripherie des Cylinders $px : d$, sein Inhalt $apx^2 : 4d$ (§. 221. Geom.) und demnach

$$\begin{array}{r} \frac{1}{6}pd^2 = apx^2 : 4d \\ \hline \frac{4}{6}pd^3 = apx^2 \quad 4d \\ \hline \quad \quad \quad ap \\ \hline \quad \quad \quad 2d^3 = x^2 \\ \hline \quad \quad \quad 3a \\ \hline \sqrt{(2d^3 : 3a)} = x \end{array}$$

Tab. II.
Fig. 18.

Es wird also der Werth von x eben wie in der vorhergehenden Aufgabe gefunden. Nennlich man machet $AB = a$, $BC = \frac{2}{3}d$ und $AD = d$; so ist $DE = DF = 2d^2 : 3a$ folgendes $DG = \sqrt{(2d^3 : 3a)}$.

Die

Die 80. Aufgabe.

196. Aus dem gegebenen Diameter und der Höhe eines Coni, den Diameter eines Cylinders zu finden, der ihm der Höhe und dem Inhalte nach gleich ist.

Auflösung.

Es sey der Diameter des Coni $= d$, die Höhe $= a$, der Diameter des Cylinders $= x$, die Verhältniß des Diameter zur Peripherie $= d:p$; so ist der Inhalt des Coni $= \frac{1}{12} adp$ (§. 229. Geom.), die Peripherie des Cylinders $px:d$, und sein Inhalt $apx^2:4d$ (§. 221. Geom.), folgendes

$$\frac{1}{12} adp = apx^2 : 4d$$

$$\frac{1}{3} ad^2 p = apx^2 \quad 4d$$

$$\frac{1}{3} d^2 = x^2 \quad ap$$

$$\sqrt{\frac{1}{3} d^2} = x$$

Beschreibet auf dem Diameter des Kegels d einen gleichseitigen Triangel und darum einen Circul; dieser ist viermahl so groß als die Grundfläche des Cylinders (§. 164.), folgendes wenn um den Radium dieses Circuls ein anderer beschrieben wird; ist derselbe Radius der verlangte Diameter des Cylinders.

Die 81. Aufgabe.

197. Aus dem gegebenen Diameter eines Coni und seiner Höhe, den Diameter

ter einer Kugel zu finden, die ihm gleich ist.

Auflösung.

Es sey der Diameter der Grundfläche des Coni $= d$, seine Peripherie $= p$, die Höhe $= a$, der Diameter der Kugel $= x$; so ist der Inhalt des Coni $= \frac{1}{12} adp$ (§. 229. Geom.) hingegen der Inhalt der Kugel $px^3 : 6d$ (§. 237. Geom.). Derowegen ist

$$\frac{1}{12} adp = px^3 : 6d$$

$$\frac{1}{2} ad^2 = x^2$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2} ad^2} = x$$

Anmerkung.

198. Bisher habe ich in leichten geometrischen Exempeln den Nutzen der Algebra gezeigt: nun aber wird es Zeit seyn, daß ich darthue, wie man in der höheren Geometrie mit sonderbahrem Vortheile sich derselben bediene. Es handelt aber die höhere Geometrie von den krummen Linien. Derowegen soll ich zeigen, wie man durch Hülfe der Algebra die Eigenschaften der krummen Linien finden kan. Zwar dienet darzu hauptsächlich die Differential- und Integral-Rechnung, von der im andern Theile gehandelt werden soll: allein man kan auch durch die gemeine Algebra gar viel ausrichten. Damit ihr aber verstehen möget, was hinfort hergebracht werden soll; so muß überhaupt etwas von den krummen Linien angeführet werden. Bildet euch aber nicht ein, als wenn diese Betrachtung gong fruchtlos wäre. Vielmehr versichert euch, daß sie denenjenigen sehr zu statzen kommet, welche die Geheimnisse der Natur und Kunst

Kunst genauer als andere einzusehen belieben. Ich würde jetzt vergeblich reden, wenn ich einen weitläufigen Beweis davon führen wolte. Hier mercket nur überhaupt, daß man gewohnet ist die krummen Linien durch algebraische Gleichungen zu erklären, welche die Relation gewisser geraden Linien, die man innerhalb denselben ziehen kan, gegen einander andeuten. Z. E. Es sey AMB ein halber Circul, und in demselben PM auf dem Diameter AB perpendicular. Setzet $AB = a$, $AP = x$; so ist $BP = a - x$. Es sey ferner $PM = y$; so ist beständig $y^2 = ax - xx$. (S. 210. Geom. & S. 137. Algebra). Derowegen drucket die Gleichung die Relation aus, welche die Linie PM zu AP in allen Punkten der Peripherie AMB hat. Und darum nennet man sie die Erklärung des Circuls. Oder es sey $AC = a$, $PC = x$, $PM = y$; so ist $a^2 - x^2 = y^2$ (S. 172. Geom.). Derowegen drucket diese Gleichung die Relation aus, welche PM und PC in allen Punkten der Peripherie gegeneinander haben. Und also nennet man auch sie eine Erklärung des Circuls. Gleichwie nun aber alles, was von der Sache erkannt werden kan, aus ihrer Erklärung hergeleitet wird (S. 2. Meth. Math.); so pfleget man auch aus dergleichen Gleichungen durch die Algebra die Eigenschaften der krummen Linien herzuleiten.

Tab. II.
Fig. 19.

Von den krummen Linien.

Die 13. Erklärung.

199. Die Linie AX, welche alle gerade Linien MM, die mit einander innerhalb einer krummen Linie parallel gezogen werden, in zwey gleiche Theile PM und PM theilet, wird der Diameter und insonderheit die Axe genennet, wenn sie mit

Tab. II.
Fig. 20.

mit eben den Linien einen rechten Winkel machet.

Die 14. Erklärung.

100. Die Linien MM werden die Ordinaten; ihre Helften aber PM die Semioordinaten genennet.

Die 15. Erklärung.

201. Zingegen die Abscisse AP ist das Stücke des Diameters oder der Axc, welches die Ordinaten MM abschneiden.

Die 16. Erklärung.

Tab. II.
Fig. 20.

202. Der Scheitel der krummen Linie ist der Punct A, darinnen sich die Axc oder auch der Diameter AX endet.

Die 17. Erklärung.

203. Eine algebraische Linie wird genennet deren Natur durch eine algebraische Gleichung sich erklären läßt.

Die 1. Anmerckung.

204. Durch die Algebraische Gleichungen verstehen wir diejenigen, die einerley Grad haben in allen Puncten der krummen Linie. Dergleichen ist die Gleichung des Circuls $y^2 = ax - x^2$, oder auch $a^2 - x^2 = y^2$ (§. 198.).

Die 2. Anmerckung.

205. Man nennet insgemein mit dem *des Cartes* die algebraischen Linien geometrische Linien: allein wir sind bey der Benennung des Herrn von Leibniz geblieben, mit welchem auch der grosse Engelländische Geometra *Newton* übereinstimmt, welcher (in *Arithm. Univ.* p. 280.) wohl erinnert, daß nicht die Gleichung Ursache sey, warum man eine krumme

me Linie in Auflösung der Fragen in die Geometrie nehmen solle, sondern es solle vielmehr darum geschehen, weil sie sich leicht beschreiben läßt.

Die 18. Erklärung.

206. Eine transcendentische Linie wird genennet, deren Natur durch keine algebraische Gleichung sich erklären läßt.

Anmerkung.

207. Insgemein nennet man die transcendentischen Linien mechanische Linien, abermahls mit dem des Cartes, und wirft solchergestalt viel Linien aus der Geometrie, die sich leicht beschreiben lassen: welches wir mit dem Herrn von Leibniz mit Recht mißbilligen, als welcher eine besondere Art der Gleichungen für diese Linien erfunden, dadurch ihre Eigenschaften so wohl als der algebraischen Linien herausgebracht werden.

Die 19. Erklärung.

208. Alle algebraische Linien werden zu einem Geschlechte gerechnet, da die Glieder der Gleichungen auf gleiche Abmessungen steigen. Da nun die Gleichung für eine gerade Linie allein eine Abmessung haben kan, so nennet man eine Linie von dem ersten Geschlechte, wenn die Glieder der Gleichung zwey Abmessungen haben: sind derselben drey, so ist es eine Linie von dem anderen Geschlechte: sind ihrer viere: eine Linie von dem dritten Geschlechte u. s. w.

Anmerkung.

209. Die Gleichung für den Circul ist $y^2 = ax - x^2$, oder auch $a^2 - x^2 = y^2$. Demnach ist der Circul eine Linie von dem ersten Geschlechte. Wie der,

derum wenn $ax = y^2$ die Natur einer krummen Linie erklärt; so ist dieselbe abermahl eine von dem ersten Geschlechte. Hingegen wenn die Erklärung der krummen Linie $a^2 x = y^3$ ist, so ist sie eine Linie von dem anderen Geschlechte.

Die 20. Erklärung.

210. Die Algebraischen Linien rechnen wir zu einer Familie, in deren Gleichungen alle Glieder bis auf die Exponenten der Dignitäten miteinander übereinkommen.

Die 1. Anmerkung.

211. Demnach gehören die krummen Linien, deren Natur durch die Gleichungen $ax = y^2$, $a^2 x = y^3$, $a^3 x = y^4$ erklärt wird, zu einer Familie.

Zusatz.

212. Die krummen Linien können alle unter eine Gleichung gebracht werden, die zu einer Familie gehören, wenn man nemlich für die determinirte Exponenten undeterminirte setzt.

Die 2. Anmerkung.

213. Solchergestalt sind alle krumme Linien, die sich durch $ax = y^2$, $a^2 x = y^3$, $a^3 x = y^4$ u. s. w. erklären lassen, unter dieser Gleichung enthalten $a^{m-1}x = y^m$ oder, wenn $a = 1$ angenommen wird $x = y^m$.

Die 3. Anmerkung.

214. Solchergestalt könnet ihr alle algebraische Linien für eine grosse Familie rechnen, die aus unendlich kleineren bestehet, deren jede unendliche Geschlechter hat. Denn; weil in allen Gleichungen, da-
durch

Durch die Natur der krummen Linien erklärt wird, entweder eine gewisse Dignität der Abscisse und Ordinate bloß durch bekannte Gröſſen, oder zugleich verschiedene Dignitäten derselben in einander, oder auch für einige Glieder lauter bekannte Gröſſen in einander multipliciret werden, alle Gleichungen aber sich auſſolviern, wenn man alle Glieder auf eine Seite ſeſet, (als a ſtatt $ax = y^2$ könnet ihr ſagen $y^2 - ax = 0$); ſo wird eine General Gleichung für alle algebraiſche Linien ſeyn $ay^m + bx^n + cy^r + dx = 0$. Man ſeſet überall das Zeichen $+$, weil die Zeichen auf gar viel Arten verändert werden können.

Die 4. Anmerkung.

215. Dieſe Eintheilung der Linien in ihre Geſchlechter und Familien hat ihren Nutzen: und deneet die letztere ſonderlich dazu, daß wir dasjenige, was vielen Linien gemein iſt, auf einmahl erkennen. Die erſtere Eintheilung iſt zu dem Ende aufgebracht worden, daß man eine Wahl der Linien anſtellen könnte, wenn man einige zu Auflöſung einer Aufgabe auſſuchen ſoll; wovon ich an ſeinem Orte reden will.

Die 5. Anmerkung.

216. Unter den krummen Linien ſind ſonderlich dieſenigen für andern berühmt, welche aus geſchickter Zerſchneidung eines Kegels oder Coni entſtehen, und daher von den Alten *Sectiones Conicae*, oder Kegelschnitte genennet werden. Denn weil ſie die Alten nebst dem Circul allein in die Geometrie nahmen; haben ſie auch viel von ihren Eigenſchaften geſchrieben, und die Neuern haben noch ein mehreres dazu gefunden. Derowegen wollen auch wir ihre vornehmſte Eigenſchaften durch algebraiſche Rechnungen unterſuchen, und zu dem Ende für ihre Erklärungen algebraiſche Gleichungen annehmen. Es ſind aber dieſer Linien drey, nemlich die *Parabola*, die *Ellipsis* und die *Hyperbola*. Mercket hier einmahl für allemahl, daß wir beſtändig
(Wolfs Mathes. Tom. IV.) D o o o o dig

die die Abscisse x und die halbe Ordinate y nennen wollen.

Die 21. Erklärung.

217. Die *PARABOLA* ist eine krumme Linie, in welcher $ax = y^2$, das ist, in welcher das Quadrat der halben Ordinate dem Rectangulo aus der Abscisse in eine beständige Linie gleich ist, die der Parameter genennet wird.

Der 1. Zusatz.

218. Derowegen ist in der Parabel $a = y^2 : x$, das ist, der Parameter ist die dritte Proportionallinie zu einer jeden Abscisse und der ihr zugehörigen halben Ordinate.

Der 2. Zusatz.

219. Es ist ferner $\sqrt{ax} = y$, das ist, die halbe Ordinate ist die mittlere Proportionallinie zwischen dem Parameter und der ihr zugehörigen Abscisse.

Der 3. Zusatz.

220. Solchergestalt könnet ihr eine Parabel beschreiben, wenn deren Parameter gegeben wird. Traget nemlich auf die Linie AX den Parameter BA und ziehet durch A die Linie CD auf AX perpendicular. Beschreibet nach Gefallen Circul, die einander in B berühren, und die Linie BX in P , die Linie CD in 1. 2. 3. 4. 5. durchschneiden. Durch P ziehet Linien I. I. II. II, III. III, u. s. w. mit CD parallel, und lasset darauf aus 1. 2. 3. u. s. w. perpendicularinten 1. I. 2. II. 3. III. u. s. w. herunter fallen,

Tab. II.
Fig. 21.

fallen, oder welches gleichviel ist, machet $PI = A_1, PII = A_2, PIII = A_3$ u. s. w.; so sind die Puncte I, II, III. u. s. w. in der Parabel. Denn es sey $AB = a, AP = x, A_3 = PIII = y$; so ist $y^2 = ax$ (§. 210. *Geom.*) und also der Punct III in der Parabel (§. 217.).

Der 4. Zusatz.

221. Ihr könnet auch in einer jeden Para- Tab. III.
bel einen verlangten Punct geometrisch deter- Fig. 22.
miniren. Z. E. Ihr wollet wissen, ob M recht in der Parabel sey. Lasset aus M in P ein Perpendicular fallen, und traget aus P in B den Parameter. Werffet über BA einen halben Circul, wenn er durch den Punct M gehet, so ist er in der Parabel (§. 210. *Geom.* & §. 217. *Algebr.*).

Der 5. Zusatz.

222. Endlich ist $x^2 = y^2 : a$, das ist, die Ab- Tab. III.
scisse ist die dritte Proportionallinie zu dem Fig. 23.
Parameter und der halben Ordinate. Da- her wenn AB der Parameter ist und BAQN ein Rectangulum; wenn man ferner NM mit BP parallel ziehet, und auf AN die Linie AM perpendicular aufrichtet; so ist der Punct M in der Parabel. Denn in dem bey A recht- wincklichten Triangel NAM ist $NQ : QA = QA : QM$, das ist, $AB : PM = PM : AP$, oder $a : y = y : x$.

Der 6. Zusatz.

223. Die erklärte Parabel (welche man
ooo oo 2 die

die Apollonische zu nennen pfleget, weil Apollonius Pergæus unter den Alten gründlich von ihr geschrieben), ist eine Linie von dem ersten Geschlechte (§ 108.).

Der 7. Zusatz.

224. Wenn ihr demnach $a^2x=y^3$, $a^3x=y^4$, $a^4x=y^5$ &c. sehet, so habet ihr Parabeln von dem anderen, dritten, vierdten &c. Geschlechte. Und daher erkläret $a^{m-1}x=y^m$ eine ganze Familie unendlicher Geschlechter der Parabeln. Gleichergestalt wenn ihr $ax^2=y^3$, $ax^3=y^4$, $ax^4=y^5$ &c. sehet; so habet ihr noch andere Arten der Parabeln von dem anderen, dritten, vierdten &c. Geschlechte, welche alle unter der Gleichung $ax^{m-1}=y^m$ enthalten sind. Beyde Familien gehören unter diese Gleichung nebst unendlich anderen Linien $a^n x^m = y^{n+m}$.

Der 8. Zusatz.

Tab. III.
Fig. 23.

225. Wenn ihr auf die Sehne AM der Parabel von dem ersten Geschlechte ein Perpendicular AR aufrichtet, welches die Semiorbinate PM, wenn sie verlängert wird, in R durchschneidet; so ist der Punct R in der Parabel von dem anderen Geschlechte. Denn wegen des rechten Winkels bey A ist $PM:AP=AP:PR$ (§ 210. Geom.) und daher $PM^2:AP^2=AP^2:PR^2$, oder $PM^2:SR^2=SR^2:AS^2$ (§ 142.). Wenn ihr demnach $AB=a$, $AP=SR=y$ und $PR=SA=x$ sehet: so habet ihr $ay:y^2=y^2:x^2$, folgendes $y^3=ax^2$.

Die

Die 1. Anmerkung.

226. Auf gleiche Weise wird vermittelst der Parabel von dem anderen Geschlechte, die von dem dritten und so weiter unendlich fort gefunden, wie ich in den Actis Eruditorum des 1717ten Jahres gezeigt.

Der 9. Zusatz.

227. Wenn ihr S dem Parameter gleich Tab. III. Fig. 24. macht, und R_s in S perpendicular aufrichtet, dann aus S in R die halbe Ordinate QM traget und endlich aus A durch R die Linie AN ziehet; so ist N ein Punct in der Parabel von dem anderen Geschlechte, in welcher $y^3 = a^2 x$. Denn es sey $AQ = y$, $AS = a$; so ist $QM = SR = y^2 : a$, folgendes da $AS : SR = AQ : QN$, das ist, $a : y^2 = y : x$; so findet ihr $a^2 x = y^3$,

oder $a^2 \cdot QN = AQ^3$.

Die 2. Anmerkung.

228. Auf gleiche Weise wird vermittelst der Parabel von dem anderen Geschlechte, die von dem dritten und so weiter unendlich fort gefunden, wie ich gleichfalls in den Actis Eruditorum A. 1717. gezeigt.

Die 22. Erklärung.

229. Der Brennpunct (Focus) ist der Punct in der Axe, wo der Parameter die Ordinate abgiebet.

Die 82. Aufgabe.

230. Die Weite des Brennpunctes F Tab. III. Fig. 25. von der Scheitel A zu finden.

Auflösung.

Es sey $AF = x$, der Parameter $= a$, so ist $FR = \frac{1}{2} a$ (§. 229.), folgendes

000 00 3

$\frac{1}{4} a^2$

$$\frac{1}{4}a^2 = ax$$

$$\frac{1}{4}a = x$$

Tab. III.
Fig. 25.

In der Parabel ist die Weite des Brennpunctes F von der Scheitel A dem vierdten Theile des Parameters gleich.

Die 83. Aufgabe.

231. Die Verhältniß zu finden, welche die Ordinaten gegen einander haben.

Auflösung.

Tab. III.
Fig. 22.

Es sey der Parameter $= a$, $AP = x$, $Ap = v$, $PM = y$, $pm = z$, so ist $y^2 = ax$, und $z^2 = av$ (§. 217.), folgend $y^2 : z^2 = ax : av = x : v$ (§. 144.). Demnach ist $PM^2 : pm^2 = AP : Ap$, das ist,

In der Parabel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten wie die Abscissen.

Die 84. Aufgabe.

232. Die Gröſſe des Rectanguli aus der Summe zweyer halben Ordinaten $PM \mp pm$ in ihre Differentz mR zu finden.

Auflösung.

$$\left. \begin{aligned} pm \mp PM &= \sqrt{av} \mp \sqrt{ax} \\ mR &= \sqrt{av} - \sqrt{ax} \end{aligned} \right\} \text{§. 219.}$$

$$(pm \mp PM) mR = av - ax = a(v - x)$$

Das

Das Rectangulum aus der Summe zweyer halben Ordinaten in ihrer Differenz ist gleich dem Rectangulo aus dem Parameter in die Differenz der zugehörigen Abscissen.

Zusatz.

233. Derowegen verhält sich der Parameter zu der Summe zweyer halben Ordinaten, wie ihre Differenz zu der Differenz der Abscissen.

Die 85. Aufgabe.

234. Die Verhältniß der Sehnen AM Tab. III. und Am zu finden, welche aus der Scheitel der Parabel A gegen das Ende der Ordinaten gezogen werden. Fig. 22.

Auflösung.

Weil $PM^2 = ax$, $AP^2 = x^2$; so ist $AM^2 = ax + x^2$ (§. 172. Geom.). Wiederum wenn ihr $AP = v$ sehet; so ist $AM^2 = av + v^2$. Derowegen ist

$$\begin{aligned} AM^2 : Am^2 &= ax + x^2 : av + v^2 \\ &= (a + x)x : (a + v)v \end{aligned}$$

Die Quadrate der Sehnen AM und Am verhalten sich in der Parabel wie die Rectangula aus den Abscissen in die Aggregate der Abscissen und des Parameters.

Die 86. Aufgabe.

235. Die Grösse der Linie FM zu finden, Tab. III.

Do o o o 4

die Fig. 25.

die aus dem Brennpuncte an das Ende einer Ordinate M gezogen wird.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= a$, $AP = x$, so ist $AF = \frac{1}{4}a$ (§. 230.), $PF = x - \frac{1}{2}a$, folgendes

$$PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$$

$$PM^2 = ax \quad (\S. 217.)$$

$$FM^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 \quad (\S. 172. \text{ Geom. })$$

$$FM = x + \frac{1}{4}a.$$

Die gerade Linie FM, welche aus dem Brennpuncte F einer Parabel gegen das Ende ihrer Ordinate M gezogen wird, ist gleich der Summe aus der Abscisse und der Weite des Brennpunctes von der Scheitel.

Der 1. Zusatz.

Tab. III.
Fig. 25.

236. Wenn ihr den vierdten Theil des Parameters aus A in F und in f traget, durch AX so viel Parallellinien MM ziehet, als euch gefället, und aus F mit der Weite Pf die Puncte M beyderseits abschneidet; so könnet ihr abermahls eine Parabel beschreiben.

Der 2. Zusatz.

Tab. III.
Fig. 26.

237. Ihr könnet auch dieses durch die Bewegung verrichten. Denn nehmet wie vorherhin auf der Aye $AF = Ff = \frac{1}{4}a$. Befestiget in f ein Lineal DC dergestalt, daß es in f mit fX einen

einen rechten Winkel machet. Nehmet ein Winkelmaaß IGH und befestiget an seinem einen Ende H einen Faden, der ihm gleich ist: das andere Ende aber des Fadens bindet an einen Nagel, den ihr im Brennpuncte F eingeschlagen. Wenn ihr einen Stift an das Winkelmaaß IGH haltet und es an dem Lineale DC verschiebet; so wird sich die Parabel beschreiben. Denn es ist beständig $FM = AP + Af = x + \frac{1}{4}a$, und daher M ein Punct in der Parabel (S. 235.).

Anmerkung.

238. Auf ebenmäßige Art könnet ihr die Eigen: Tab. III. schaften der Parabeln von höheren Geschlechtern untersuchen. Wollet ihr aber diejenigen haben, welche allen Parabeln gemein sind, so dürfet ihr nur die allgemeine Gleichung für ihre ganze Familie annehmen. Denn weil $a^{m-1}x = y^m$, so ist auch $a^{m-1}v = z^m$, folgendes $PM^m : pm^m = AP : Ap$. Wiederum weil

$$PM + pm = \sqrt{a^{m-1}x} + \sqrt{a^{m-1}v}, mR = \sqrt{a^{m-1}v} - \sqrt{a^{m-1}x}; \text{ so ist } (PM + pm).mR = \sqrt{a^{2m-2}} \quad \text{Tab. III. Fig. 25.}$$

$v^2 = \sqrt{a^{2m-2}x^2}$. Weil $FR = \frac{1}{2}a$; so ist $a^m : 2^m = a^{m-1}x$, folgendes $x = a : 2^m = AF$. Derrwegen kommt in den Parabeln von dem höheren Geschlechte der Brennpunct dem Scheitelpuncte immer näher, wenn sie einen Parameter haben.

Die 23. Erklärung.

239. Die ELLIPSIS ist eine krumme Linie, in welcher sich verhält das Rectan: Tab. III. Fig. 27.

000 00 5

gulum

gulum aus den Theilen der Ase AP und PB, zu dem Quadrate ihrer halben Ordinate PM wie die Ase AB zu einer unveränderlichen Linie, die ihr Parameter genennet wird: das ist, wenn ihr $AB = a$, den Parameter $= b$, $PM = y$ und $AP = x$ setzet, in welcher $ay^2 = abx - bx^2$.

Der 1. Zusatz.

240. Derowegen ist $y^2 = bx - bx^2 : a$, das ist, das Quadrat der halben Ordinate ist gleich einem Rectangulo aus der Abscisse in den Parameter, weniger ein Rectangulum aus eben dieser Abscisse in die vierdte Proportionallinie zu der Ase, dem Parameter und der Abscisse.

Der 2. Zusatz.

241. Weil $ay^2 = abx - bx^2$, so ist

$$bx^2 : (bx - y^2) = a$$

Tab. III.
Fig. 28.

Demnach könnet ihr in einer Ellipsi aus dem gegebenen Parameter der Abscisse und halben Ordinate die Ase folgendergestalt finden. Suchet zu $PE = b$, $PM = PF = y$ die dritte Proportionallinie $PG = y^2 : b$. Machtet $AP = x$ und $PH = PG$; so ist $AH = x - y^2 : b = (bx - y^2) : b$. Machtet ferner $A = AH$ und $AL = AP = x$, und ziehet LB mit IP parallel, so ist $AB = a$, oder die verlangte Ase.

Der

Der 3. Zusatz.

242. Wiederum weil $ayy = abx - bxx$, Tab. III. so ist $b = ayy : (ax - x^2)$, und daher könnet ihr Fig. 39. in einer gegebenen Ellipsi den Parameter also finden. Richtet in B die Perpendicular-Linie BE auf, und ziehet aus A durch M die Linie AE, so ist $BE = ay : x$ (S. 184. Geom.). Machet $BG = PM$, und ziehet die Linie PE, und mit ihr GH parallel; so ist $BH = ay^2 : (ax - x^2) = b$ (S. cit.), das ist der verlangte Parameter.

Der 4. Zusatz.

243. Weil $yy = (abx - bxx) : a$, so ist Tab. III. $y = \sqrt{(bx - bxx : a)}$. Derowegen wenn Fig. 30. auch die Aye und der Parameter gegeben werden, könnet ihr für jede Abscisse ihre gehörige halbe Ordinate folgendergestalt finden. Suchet zu der Aye $AB = a$ dem Parameter $BC = b$ und der Abscisse $AP = x$ die vierdte Proportionallinie $PD = bx : a$. Ziehet DE mit AB parallel; so ist $CE = b - bx : a$. Machet $PF = CE$ und beschreibet über AF einen halben Circul; so ist $PM = \sqrt{(bx - bxx : a)} = y$, das ist, die verlangte halbe Ordinate.

Die 87. Aufgabe.

244. Die Weite des Brennpunctes AF von der Scheitel A zu finden.

Auf.

Auflösung.

Tab. III.
Fig. 27.

Es sey $AB=a$, der Parameter $=b$, $AF=x$,
so ist $FR=\frac{1}{2}b$ (§. 229.), und

$$\frac{1}{4}ab^2 = abx - bxx \text{ (§. 240.)}$$

$$x^2 - ax = -\frac{1}{4}ab$$

$$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab$$

$$\frac{1}{2}a - x = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right)}$$

$$\frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right)} = x$$

Traget aus B in E $\frac{1}{2}b$; so ist $CE = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$.
Beschreibet über AE einen halben Circul, welcher die in dem Mittelpuncte C aufgerichtete Perpendicularlinie CD in G durchschneidet; so ist $G = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab\right)}$. Machet $CF=CG$; so ist in F der Brennpunct.

Zusatz.

245. Also ist die Weite des Brennpunctes von dem Mittelpuncte $C = \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ab}$, das ist die mittlere Proportionallinie zwischen $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$.

Die 24. Erklärung.

Tab. III.
Fig. 27.

246. Die Perpendicularlinie DC, welche die grössere Axc AB in zwey gleiche Theile theilet, ist die halbe kleine Axc.

Die

Die 88. Aufgabe.

247. Aus dem gegebenen Parameter Tab. III. und der grossen Ase AB die kleine Ase CD Fig. 27. zu finden.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= b$, $AB = a$, $CD = \frac{1}{2}z$, so ist

$$\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}z^2 = a : b \text{ (§. 239.)}$$

$$z^2 = ab$$

$$z = \sqrt{ab}$$

das ist:

Die kleine Ase in der Ellipsi ist die mittlere Proportionallinie zwischen der grossen und dem Parameter.

Der 1. Zusatz.

248. Derowegen ist der Parameter die dritte Proportionallinie zu der grossen und kleinen Ase.

Der 2. Zusatz.

249. Wenn die Weite des Brennpunctes von der Scheitel $AF = x$ ist; so ist $ax - xx = \frac{1}{4}ab$ (§. 244.). Derowegen ist das Rectangulum aus der Weite des Brennpunctes von der Scheitel AF in ihr Complement zur grossen Ase FB dem Rectangulo aus der grossen

grossen Aye in den vierdten Theil des Parameters gleich.

Die 89. Aufgabe.

Tab. III.
Fig. 27.

250. Die Verhältniß zu finden, welche die halben Ordinaten PM und pm in der Ellipsi gegeneinander haben.

Auflösung.

Es sey $AB = a$ der Parameter $= b$, $AP = x$, $PM = y$, $Ap = x$, $pm = v$, so ist

$$\left. \begin{aligned} yy &= bx - bx^2 : a \\ v^2 &= bz - bz^2 : a \end{aligned} \right\} (\S. 240.)$$

Derowegen ist $y^2 : v^2 = abx - bx^2 : abz - bz^2 = ax - x^2 : az - z^2 = (a-x)x : (a-z)z$, das ist, $PM^2 : pm^2 = PB. AP : pB. Ap$, nemlich

In der Ellipsi verhalten sich die Quadrate der halben Ordinaten wie die Rectangula aus den Theilen der Aye.

Der I. Zusatz.

251. Derowegen ist auch $DC^2 : PM^2 = C B^2 : AP. PB$, folgendes $DC^2 : CB^2 = PM^2 : AP. PB$ (§. 142.), das ist, das Quadrat der halben kleinen Aye verhält sich zum Quadrate der halben grossen, wie das Quadrat der halben Ordinate zu dem Rectangulo aus den Theilen der Aye.

Der

Der 2. Zusatz.

252. Setzet demnach $CP = x$, so ist $AP = \frac{1}{2}a$ Tab. III.
 $-x$, $PB = \frac{1}{2}a + x$, folgendes $\frac{1}{4}ab; \frac{1}{4}a^2 = y^2; \frac{1}{4}$ Fig. 27.
 $a^2 - x^2$. Derowegen ist

$$\begin{aligned} ay^2 &= \frac{1}{4}a^2b - bx^2 \\ y^2 &= \frac{1}{4}ab - bx^2 : a \end{aligned}$$

Der 3. Zusatz.

253. Es sey $CD = d$, $AC = r$, $PC = x$; so
ist $AP = r - x$ und $PB = r + x$, folgendes AP .
 $PB = r^2 - x^2 = AC^2 - PC^2$, und daher

$$\begin{aligned} d^2 : r^2 &= y^2 : r^2 - x^2 \\ y^2 &= a^2 (r^2 - x^2) : r^2 \end{aligned}$$

Also habet ihr noch eine andere Gleichung,
welche die Natur der Ellipsis erkläret.

Die 90. Aufgabe.

254. Die Grösse der Linie zu determiniren, welche aus dem Brennpuncte f an Fig. 27.
das Ende D der kleinen Axe gezogen
wird.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= b$, $AB = a$, so ist
 $fC^2 = \frac{1}{4}aa - ab$ (§. 245.) und $DC^2 = \frac{1}{4}ab$ (§.
247.), folgendes $fD^2 = \frac{1}{4}a^2$ (§. 172. Geom.).
Dannenhhero $fD = \frac{1}{2}a = CB$.

Zusatz.

255. Wenn euch die kleine und grosse Axe
gegeben werden, könnet ihr die Brennpuncte
Fund

Tab. III.
Fig. 27.

Fund f gar leicht finden. Denn theilet die grosse Aye AB in zwey gleiche Theile in C, und richtet aus C die halbe kleine Aye CD perpendicular auf, so könnet ihr aus D mit der halben grossen Aye CB die Brennpuncte F und f determiniren.

Die 91. Aufgabe.

Tab. III. 256. Die Grösse der geraden Linien FM und fm zu finden, welche aus beyden Brennpuncten F und f an das Ende M einer Semordinate PM gezogen werden.

Auflösung.

Es sey alles wie vorhin, nur $FC = fC = c$; so ist $PC = \frac{1}{2}a - x$, $Pf = c + \frac{1}{2}a - x$, $PF = c - \frac{1}{2}a + x$, $PF^2 = cc - ac + 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$, $Pf^2 = cc + ac - 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$. Nun ist (§. 251.).

$$BC^2 : DC^2 = AP \cdot PB : PM^2$$

$$\text{Das ist } \frac{\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}a^2 - c^2}{1 : 1 - 4c^2} = ax - x^2 : PM^2$$

$$\frac{1}{a^2}$$

Solchergehalt ist

$$PM^2 = ax - xx - 4ccx : a + accxx : aa$$

$$PF^2 = cc - ac + 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$$

$$FM^2 = cc - ac + 2cx + \frac{1}{4}a^2 - 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a$$

$$FM = \frac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

Wie

Wiederum

$$PM^2 = ax - xx - 4ccx : a + 4ccxx : aa$$

$$Pf^2 = cc + ac - 2cx + \frac{1}{4}aa - ax + xx$$

$$fM^2 = c^2 + ac - 2cx + \frac{1}{4}a^2 - 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$

$$fM = \frac{1}{2}a + c - 2cx : a$$

$$FM = \frac{1}{2}a - c + cx : a$$

$$fM + FM = a = AB, \text{ nemlich}$$

In der Ellipsi sind die beyden Linien fM und FM, welche aus den Brennpuncten f und f an einen Punct M in der Peripherie gezogen werden, zusammen genommen, der grossen Axe AB gleich.

Zusatz.

257. Daher könnet ihr gar leicht aus der Tab. III. gegebenen grossen und kleinen Axe die Ellipsin Fig. 31. beschreiben. Denn suchet die Brennpuncte F und f, und schlaget in ihnen zwey Nägel ein. Bindet an die Nägel einen Faden FMf, der so lang ist als die grosse Axe AB. Dehnet den Faden mit einem Stifte aus, und führet den Stift an den Faden herum, so wird die Ellipsis beschrieben.

Die 1. Anmerkung.

258. Ausser der Ellipsi des Apollonii, welche von dem ersten Geschlechte ist, könnet ihr noch unendlich viel andere von höheren Geschlechtern erdencken, welche unter der allgemeinen Gleichung begriffen werden:

$$aym + n = bx^m (a - x)^n. \text{ Es ist nemlich in allen}$$

(Wolfs Mathes. Tom. IV.) Ppppp wie

wie der Parameter zu der grossen Aye, also die Dignität der halben Ordinate, deren Exponente den Exponenten der Dignitäten von den Theilen der Aye zusammen gleich ist, zu dem Producte aus diesen Dignitäten. Z. E. In der Ellipsi von dem andern Geschlechte ist $b:a=y^2:x^2(a-x)$; in der Ellipsi von dem vierdten Geschlechte $b;a=y^4:x^2(b-x)^2$.

Die 2. Anmerckung.

259. Wenn die grosse Aye der kleinen gleich wird, so wird aus der Ellipsi ein Circul. Denn alsdenn ist $\frac{1}{4}ab=\frac{1}{4}a^2$ (§. 247.) und daher $b=a$, folgendes anstatt $ay^2=abx-bx^2$ bekommt ihr $ay^2=a^2x-ax^2$ das ist, $y^2=ax-xx$, welche Gleichung den Circul erkläret. Wie man nun aber Ellipses von höheren Geschlechtern hat, also giebet es auch Circul von höheren Geschlechtern, wenn ihr nemlich setzet $Ap^m:PM^m=PM:PB$, das ist, $x^m:y^m=y:a-x$. Also ist die Gleichung für unendliche Circul $ax^m-x^{m+1}=y^{m+1}$. Z. E. Wenn $m=1$, so ist $ax-x^2=y^2$ für den Circul des ersten Geschlechtes; ist $m=4$, so ist $ax^4-x^5=y^5$ die Gleichung für den Circul von dem vierdten Geschlechte.

Tab. II.
Fig. 19.

Die 25. Erklärung.

260. Die Hyperbel ist eine krumme Linie, in welcher $ay^2=abx+bx^2$, das ist, wie eine unveränderliche Linie b , welche der Parameter heisset, zu einer anderen unveränderlichen Linie a , welche die Zwerch Aye (axis transversus) genennet wird, so das Quadrat der Semiordinate y^2 zu dem Rectangulo aus der Summe der Abscisse

scisse und Zwerchare $a+x$ in die Abscisse x .

Zusatz.

261. Derowegen ist $y^2 = bx + bx^2$; $a, b = ay^2 : (ax + xx)$, $a = bx^2$; $y^2 = bx$ u. s. w. wie in der Ellipsi, nur daß ihr das Zeichen $+$ anstatt des Zeichens $-$ habet.

Die 26. Erklärung.

262. Weil die Gleichung der Hyperbel mit der Gleichung für die Ellipsin übereinkommet, nur daß sie bloß in dem einen Zeichen von ihr unterschieden ist; so nennet man auch hier die mittlere Proportionallinie zwischen der Zwerchare und dem Parameter die kleine Ase.

Die 27. Erklärung.

263. Wenn ihr die Ase der Hyperbel Tab. IV. Fig. 32. AX über die Scheitel A verlängert, und AB der Zwerchare gleich macht, so heisset der Punct C, durch welchen AB in zwey gleiche Theile getheilet wird, der Mittelpunkt.

Die 92. Aufgabe.

264. Aus dem gegebenen Parameter Tab. IV. Fig. 32. und der Zwerchare AB die Weite des Brennpunctes F von der Scheitel A zu finden.

Auflösung.

Es sey der Parameter $= b$, $AB = a$; so ist $FR = \frac{1}{2}b$ (229.) und (§. 260.).

Ppppp 2

$b:a$

$$b:a = \frac{1}{4}bb : ax + xx$$

$$\frac{\frac{1}{4}abb}{b} = \frac{abx + bxx}{b}$$

$$\frac{1}{4}ab = ax + xx$$

$$\frac{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab}{\frac{1}{4}ab} = \frac{\frac{1}{4}aa + ax + xx}{\frac{1}{4}ab}$$

$$\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab)} = \frac{1}{2}a + x$$

$$\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab)} - \frac{1}{2}a = x$$

Tab. IV.

Fig. 32.

Machet $BE = \frac{1}{2}b$, so ist $EC = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.
 Richtet in C einen Perpendicul auf, und beschreibet über EA einen halben Circul; so ist $CG = \sqrt{(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}ab)}$. Machet $CF = CG$; so ist in F der Brennpunct.

Der 1. Zusatz.

265. Also ist die Weite des Brennpunctes von dem Mittelpuncte $FC = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab)}$.

Der 2. Zusatz.

266. Weil $ax + xx = \frac{1}{4}ab$, und $ax + xx = AF \cdot FB$, hingegen $\frac{1}{4}ab$ das Quadrat der halben kleinen Axe CD (§. 262.); so ist $AF \cdot FB = CD^2$.

Die 93. Aufgabe.

Tab. IV.

Fig. 32.

267. Die Verhältniß zu finden, welche die Semiordinaten PM und pm gegeneinander haben.

Auf.

Auflösung.

Es sey die Zwerchare $AB=a$, der Parameter $=b$, $AP=x$, $PM=y$, $Ap=v$, $pm=z$, so ist $y^2 : z^2 = (bx \mp bxx : a) : (bv \mp bv^2 : a) = ax \mp xx : av \mp vv = (a \mp x)x : (a \mp v)v$, das ist, $PM^2 : pm^2 = PB \cdot AP : pB \cdot Ap$, nemlich

Die Quadrate der Semiordinaten verhalten sich wie die Rectangula aus den Abscissen und der Zwerchare in die Abscissen.

Die 94. Aufgabe.

268. Die Verhältniß zu finden, welche das Quadrat der Zwerchare zu dem Quadrate der kleinen Aye hat.

Auflösung.

Das Quadrat der Zwerchare ist aa , der kleinen Aye aber ab (§. 262.). Also verhält sich jenes zu diesem wie aa zu ab , das ist, wie a zu b (§. 144.), oder wie die Zwerchare zu dem Parameter.

Zusatz.

269. Weil $b:a = PM^2 : AP \cdot PB$, (§. 260.); Tab. IV. Fig. 32. so ist auch das Quadrat der kleinen Aye zu dem Quadrate der Zwerchare wie das Quadrat der Semiordinate zu dem Rectangulo aus der Abscisse in die Summe aus der Abscisse und der Zwerchare.

Die 95. Aufgabe.

Tab. III.
Fig. 33.

270. Es seyn zwey Hyperbeln von gleicher Grösse, die also einen Parameter, eine Zwerchare und eine kleine Are haben, einander entgegen gesetzt in der Weite ihrer Zwerchare AB. Zieheth aus beyder Brennpuncte f und F gegen einen Punct einer Hyperbel M zwey gerade Linien fM und FM. Ihr sollet ihre Grösse finden.

Auflösung.

Es sey alles wie vorhin, nur $FC = fC = c$; so ist $AF = c - \frac{1}{2}a$, $f = c + \frac{1}{2}a$, $PF = x - c + \frac{1}{2}a$, $Pf = c + \frac{1}{2}a + x$, $PF^2 = xx - 2cx + cc + ax - ac + \frac{1}{2}aa$, $Pf^2 = cc + ac + \frac{1}{4}aa + 2cx + ax + xx$. Nun ist (§. 266.) $CD^2 = cc - \frac{1}{4}aa$ und (§. 268. 269.) $A^2 : CD^2 = AP : PB : PM^2$, das ist, $\frac{1}{4}aa : cc - \frac{1}{4}aa = ax + xx : PM^2$ folgendes $1 : 4cc - 1 = ax + x^2 : PM^2$

Demnach ist

$$\begin{aligned} PM^2 &= -ax - xx + 4c^2x : a + 4ccxx : a^2 \\ PF^2 &= xx - 2cx + cc + ax - ac + \frac{1}{4}aa \\ \hline FM^2 &= cc - 2cx - ac + \frac{1}{4}aa + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2 \\ \hline FM &= c - \frac{1}{2}a + 2cx : a \end{aligned}$$

Wiederum

$$\begin{aligned} PM^2 &= -ax - x^2 + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2 \\ Pf^2 &= cc + ac + \frac{1}{4}aa + 2cx + ax + xx \\ \hline fM^2 &= cc + ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2 \\ &fM \end{aligned}$$

$$fM = c + \frac{1}{2}a + 2cx : a$$

$$FM = c - \frac{1}{2}a + 2cx : a$$

$$fM - FM = a = AB.$$

Zusatz.

271. Hieraus fließet folgende Manier die Tab. IV. Hyperbel zu beschreiben. Auf eine gerade Fig. 33. Linie ZX traget die Zwerchaye AB und aus A in F, ingleichen aus B in f die Weite des Brennpunctes von der Scheitel (§. 264.). Schlaget in F und f Nägel ein. Bindet an den Nagel F einen Faden FMC, und mit seinem anderen Ende an das eine Ende eines Lineals fC, welches um die Zwerchaye AB länger als der Faden ist. Hängt das Lineal mit dem anderen Ende an den Nagel in f. Drücket den Faden mit einem Stifte an das Lineal und schiebet es fort, so wird er die Hyperbel beschrieben.

Anders.

Traget auf eine gerade Linie die Zwerch- Tab. IV. Aye AB und ferner aus B in f und aus A in F Fig. 32. die Weite des Brennpunctes von der Scheitel (§. 264.). Zieheth aus f nach Gefallen die Linie fVII und traget aus f in L die Länge der Zwerchaye BA. Beschreibet aus f mit beliebiger Eröffnung des Circuls die Bogen 1. 1, 2. 2, 3. 3, u. s. w. und durchschneidet sie

sie aus F mit LI, LII, LIII u. s. w. in 1. 2. 3. u. s. w. so sind die Punkte 1. 2. 3. 2c. in der Hyperbel.

Die 28. Erklärung.

Tab. IV.
Fig. 34.

272. Wenn ihr die kleine Axe DE an die Scheitel der Hyperbel A rechtwinklicht setzet, und aus dem Mittelpuncte C durch ihre beyden Ende D und E die geraden Linien CR und Cr ziehet; so werden dieselben die Asymptoten genennet.

Der 1. Zusatz.

273. Weil $CA:AE=CP:Pr$ und $CA:DA(=AE)=CP:PR$ (§. 184. *Geom.*); so ist $PR=Pr$ (§. 71. *Arithm.*), folgendes, da $PM=Pm$, auch $MR=mr$ (§. 31. *Arithm.*).

Der 2. Zusatz.

274. Wenn AI mit CK parallel gezogen wird; so ist $EA:ED=AI:DC$ (§. 184. *Geom.*), folgendes da $AE=\frac{1}{2}ED$ §. 272.), auch $AI=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}CE$. Weil nun ferner $EA:ED=EI:EC$ (§. 184. *Geom.*) und daher, weil $EA=\frac{1}{2}ED$ auch $EI=\frac{1}{2}CE=CI$; so ist auch $AI=CI$ (§. 28. *Arithm.*)

Die 29. Erklärung.

275. Das Quadrat der Linie AI oder CI wird die Potenz der Hyperbel genennet.

Die

Die 96. Aufgabe.

276. Die Grösse der Potenz der Hyperbel zu finden.

Auflösung.

Es sey $CA = \frac{1}{2}a$, $AE = \frac{1}{2}c$; so ist $CE = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2\right)}$ (S. 172. *Geom.*), und daher $CI = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2}$ (S. 172. *Geom.*), und daher $CI^2 = \frac{1}{4}(a^2 + c^2)$ folgendes $CI^2 = (a^2 + c^2) : 16$, nemlich die Potenz der Hyperbel ist dem vierdten Theile der Quadrate der beyden halben Axen gleich. Tab. IV. Fig. 34.

Die 97. Aufgabe.

277. Den Unterschied zwischen den Quadraten PM und PR zu finden. Tab. IV. Fig. 34.

Auflösung.

Weil $CA : DA = CP : PR$ (S. 184. *Geom.*) und $DA = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$ (S. 262.), $CP = \frac{1}{2}a + x$, so findet ihr $PR = \left(\frac{1}{2}a \sqrt{\frac{1}{4}ab} + x \sqrt{\frac{1}{4}ab}\right) : \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}ab} + 2x \sqrt{\frac{1}{4}ab} : a$. Derowegen ist

$$PR^2 = \frac{1}{4}ab + bx + bxx : a$$

$$PM^2 = bx + bxx : a \quad (\text{S. 261.})$$

$$PR^2 - PM^2 = \frac{1}{4}ab = DA^2.$$

Zusatz.

278. Wenn ihr setzt, daß die Hyperbel mit ihrer Asymptote zusammen stosse, so fällt der Punct R auf M und ist $PR^2 = PM^2$

ppppp 5

fol

folgendes $PR^2 - PM^2 = 0$. Allein $PR^2 - PM^2 = DA^2$. Darum ist $DA^2 = 0$. Da nun dieses ungereimt ist, so kan die Asymptote mit der Hyperbel niemahls zusammen kommen.

Die 98. Aufgabe.

Tab. IV.
Fig. 34.

279. Die Grösse des Rectanguli aus MR in Mr zu finden.

Auflösung.

Es sey $PR = c$, $MP = y$, so ist $MR = c - y$, $mR = y + c$, folgendes $MR \cdot mR = c^2 - y^2 = PR^2 - PM^2$, nemlich

Das Rectangulum aus MR in mR ist gleich der Differentz der Quadrate von PR und PM.

Zusatz.

280. Weil $PR^2 - PM^2 = DA^2$ (§. 277.), so ist $mR \cdot MR = DA^2$.

Die 99. Aufgabe.

Tab. IV.
Fig. 34.

281. Wenn Qm und sm mit der einen Asymptote Cr, hingegen qm und SM mit der anderen CR parallel gezogen wird, die Verhältniß der Rectangulorum aus QM in MS und qm in ms zu finden.

Auflösung.

Es sey $RM = mr = a$, $Rm = rM = b$, $MQ = v$, $mq = z$. Nun ist (§. 184. Geom.).

RM

$$RM : MQ = Rm : mf$$

$$a : v = b : (bv : a)$$

$$rm : mq = rM : MS$$

$$a : z = b : (bz : a)$$

Derowegen ist $MQ \cdot MS = bvz : a$ und $mq \cdot mf = bvz : a$, folgendes $MQ \cdot MS = mq \cdot mf$.
Das ist,

Die Rectangula aus MQ in MS und mq in mf sind einander gleich.

Die 100. Aufgabe.

282. Die Verhältniß des Rectanguli aus Tab. IV. qm in ms zu der Potentz der Hyperbel zu Fig. 34. finden.

Auflösung.

Es sey $mr = z$, $qm = y$, $AE = c$; so sind wegen der Parallellinien AE und Pr die Winkel CEA und qrm , und wegen der Parallelen AI und qm die Winkel AIE und mqr einander gleich (§. 97. Geom.), folgendes (§. 183. Geom.).

$$mr : qm = AE : AI$$

$$z : y = c : (cy : z)$$

Wiederum weil $mR \cdot mr = AE^2$ (§. 280.); so ist (§. 237.).

$$mr : AE = AE : mR$$

$$z : c = c : (c^2 : z)$$

Endlich wegen der Parallellinien fm und CE ist $o = x$ und wegen der Parallelen DE und Rm

$Rm\ x=y$ (§. 97. *Geom.*), folgendes $o=y$ (§. 28. *Arithm.*): Wegen der Parallelen AI und CR aber ist $IAE=CDE$, und wegen der Parallelen DE und $Rm\ CDE=fRm$ (§. 97. *Geom.*) folgendes $IAE=fRm$ (§. 28. *Arithm.*). Daher (§. 183. *Geom.*).

$$AE : IE = mR : fm$$

$$c : \frac{cy}{z} = \frac{cc}{z} : \frac{c^2y}{z^2}$$

Solchergestalt ist $fm.qm=c^2y^2:z^2$. Da nun auch $AI^2=c^2y^2:z^2$; so ist $fm.qm=AI^2$, das ist,

Das Rectangulum aus fm , oder Cq , in qm ist der Potenz der Hyperbel gleich.

Der 1. Zusatz.

Tab. IV.
Fig. 34.

283. Es sey $CI=AI=a$, $Cq=x$, $qm=y$; so ist $xy=aa$ die Gleichung, welche die Natur der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten erkläret.

Der 2. Zusatz.

Tab. IV.
Fig. 35.

284. Wenn demnach die Asymptoten BA und AC nebst der Potenz der Hyperbel DE^2 gegeben werden: so könnet ihr die Hyperbel beschreiben. Ziehet nemlich durch E die Linie FG mit AC und PN mit DE parallel. Ziehet ferner aus A in N eine gerade Linie AN und HM mit AC parallel; so ist der Punct M in der Hyperbel. Denn $PA; PN=AD$:
DH

DH (§. 184. *Geom.*), das ist, weil $PN=DE$
und $PM=DH$, auch (§. 275.) $ED=DA$, AP :
 $DE=AD:PM$

$$x:a=a:y$$

folgende $\frac{\quad}{a^2=xy}$

Der 3. Zusatz.

285. Die Gleichung für unendliche Hyperbeln ist $a^{m+n}=x^m y^m$.

Anmerkung.

286. Eben so könnet ihr eine Gleichung für unendliche Hyperbeln in Ansehung der Axc finden $ay^{m+n}=bx^m(a+x)^n$, deren Beschreibung Intieri in aditu ad nova arcana Geometrica detegenda lehret pag. 36. & seq. Es ist aber zu merken, daß nach seiner Manier die Hyperbeln von einem höheren Geschlechte niemahls beschrieben werden können, man habe denn zuvor alle niedrigeren beschrieben. Eine andere leichtere Manier zeige ich in den Actis Eruditorum A. 1717.

Der 4. Zusatz.

287. Wenn ihr wie vorhin $AD=DE=a$, Tab. IV.
 $AI=b$, $IP=x$, $PM=y$ setzet; so ist $AP=b+x$, Fig. 35.
folgende $a^2=by+x y$.

Die 30. Erklärung.

288. Eine gleichseitige Hyperbel wird ge- Tab. IV.
nennt, in welcher die beyden Axen AB und Fig. 34.
DE einander gleich sind.

Der 1. Zusatz.

289. Also ist auch der Parameter der Axen
AB gleich (§. 262.).

Der

Der 2. Zusatz.

290. Wenn man in der Gleichung für die Hyperbel $y^2 = bx + bx^2$; a demnach $a=b$ setzt; so kommet die Gleichung für die gleichseitige $y = bx + x^2$.

Der 3. Zusatz.

Tab. IV.
Fig. 34.

291. Weil $CA = AE$; so ist der Winkel ACE 45° , folgendes der Asymptotenwinkel RCr ein rechter Winkel.

Anmerkung.

292. Damit nun erhelle, daß die Parabel Ellipsis und Hyperbel aus einem Kegele sich schneiden lassen, und also die Kegelschnitte der Alten sind; so will ich folgende drey Aufgaben noch hinzusetzen.

Die 101. Aufgabe.

Tab. IV.
Fig. 36.

293. Die Natur der krummen Linie zu finden, die heraus kommet, wenn man den Kegel ABC dergestalt schneidet, daß die Are des Schnittes DE mit der Seite des Kegels CA parallel ist.

Auflösung.

Es sey HI mit AB und PM mit EN parallel, $AE = HP = v$, $PI = t$, $DP = x$, $DE = z$; so ist (§. 148. *Geom.*).

$$DP : DE = PI : EB$$

$$x : z = t : (tz : x)$$

und $PM^2 = HP \cdot PI$ (§. 198.) $= tv$, $EN^2 = AE \cdot BE = tzv : x$ (*J. cit.*), folgendes

PM^2

$$\begin{aligned} PM^2 : EN^2 &= tv : (tzv : x) \\ &= x : z \quad (\S. 144.) \\ &= DP : DE \end{aligned}$$

Solchergestalt ist DLN eine Parabel (§. 231.).

Die 102. Aufgabe.

294. Die Natur der krummen Linie zu Tab. IV. finden, die entsteht, wenn ein Kegelschnitt BCA Fig. 37. dergestalt geschnitten wird, daß die Ure des Schnittes DE den Diameter der Grundfläche AB durchschneidet, so sie beyde verlängert werden.

Auflösung.

Es sey $DE = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $QL = f$; so ist $PE = a - x$, $QE = a - v$ und weil IH mit LK parallel,

$$DP : PH = DQ : QK \quad (\S. 184. \text{ Geom.})$$

$$x : t = v : (vt : x)$$

$$EQ : QL = EP : PI$$

$$a - v : s = a - x : \frac{af - fx}{a - v}$$

Demnach ist $PM^2 = HP \cdot PI = (tfa - tfx) : (a - v)$ und $QN^2 = KQ \cdot QL = vtf : x$ (§. 198.), folgend

$$PM : QN^2 = \frac{tfa - tfx}{a - v} : \frac{vtf}{x}$$

$$= ax - x^2 : av - v^2 \quad (\S. 144.).$$

Solchergestalt ist die Linie DLEND eine Ellipsis (§. 250.).

Die

Die 103. Aufgabe.

Tab. IV.

Fig. 38.

295. Die Natur der krummen Linie zu finden, welche entsteht, wenn ein Regel ACB dergestalt geschnitten wird, daß die Are des Schnittes DQ die Seite des Regels AC schneidet, wenn beyde verlängert werden.

Auflösung.

Es sey $ED=a$, $DP=x$, $DQ=v$, $PH=t$, $PI=f$; so ist $EP=a+x$, $EQ=a+v$, und (§. 184. Geom.).

$$EP : PH = EQ : AQ$$

$$a+x : t = \frac{a+v : at+tv}{a+x}$$

$$DP : PI = DQ : QB$$

$$x : f = v : (fv+x)$$

Demnach ist $PM^2 = HP \cdot PI = tf$ und $QN^2 = Q \cdot QB = (atfv + v^2 ft) : (ax + x^2)$ (§. 198.) folgendes

$$PM^2 : QN^2 = tf : \frac{atfv + v^2 ft}{ax + x^2}$$

$$= ax + x^2 : av + a^2 \quad (\S. 144.).$$

Solchergestalt ist die Linie $DLMND$ eine Hyperbel (§. 267.).

Die 31. Erklärung.

296. Es sey eine gerade Linie BD , welche

che mitten in E von einer anderen AC rechtwinclich durchschnitten wird. Ziehet aus C durch DB so viel gerade Linien als ihr wollet, und machet überall $QM = EA$. Die Linie, welche durch alle Puncte M gehet, ist die Muschellinie, (CONCHOIS Tab. V. oder CONCHILIS) des Nicomedis. Der gleichen Linie entstehet auch unten, wenn man überall $QN = EF$ machet. Fig. 39.

Der 1. Zusatz.

297. Weil QM mit DB immer einen schiefen Winkel machet, je weiter sie von EA wegkommet; so muß die Conchois der geraden Linie DB immer näher kommen.

Der 2. Zusatz.

298. Doch weil QM niemahls zu einem Puncte werden kan, sondern vielmehr immer einerley Länge behält; so können auch die Puncte Q und M niemahls zusammen stossen, folgender kan die Conchois niemahls mit der Linie DB zusammen kommen. Und also ist DB ihre Asymptote.

Die 104. Aufgabe.

299. Eine Gleichung zu finden, welche die Natur der Muschellinie erkläret.

Auflösung.

Es sey $QM = AE = a$, $EC = b$, $MR = EP = x$, $ER = PM = y$; so ist $CP = b + x$ und (S. 184. Geom.).

(Wolfs Mathes. Tom. IV.) Q. q q q q PE

$$PE : QM = EC : CQ$$

$$x : a = b : (ab : x)$$

Daher $CM = a + ab : x = (ax + ab) : x$, folgendes, weil $PM^2 + PC^2 = CM^2$ (§. 172. *Geom.*) $y^2 + x^2 + 2bx + b^2 = (a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2) : x^2$, das ist, $x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 + b^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2$, welche Gleichung die Natur der oberen Muschellinie MAM erklärt.

Es sey $CE = b$, $QN = a$, $EG = ON = x$, $GN = EO = y$, so ist $GC = b - x$ und (§. 184. *Geom.*).

$$EG : QN = GC : CN$$

$$x : a = b - x : (ab - ax) : x$$

Daher, weil $CN^2 = CG^2 + GN^2$ (§. 172. *Geom.*), $(a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2) : x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$, das ist; $a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2 = b^2x^2 - 2bx^2 + x^4 + x^2y^2$, welche Gleichung die Natur der unteren Muschellinie NFN erklärt.

Die 32. Erklärung.

Tab. IV.
Fig. 40.

300. Wenn man die Semiordinaten des Circuls PM verlängert und auf die Sehnen AM den Perpendicul AN aufrichtet, die sie in N durchschneiden; so kommt die krumme Linie heraus, welche *Diocles* vor diesem *CISSOIDE* M genennet.

Der

Der 1. Zusatz.

301. Weil $PB : PM = PM : PA$ und $PM : PA = PA : PN$ (S. 210. *Geom.*); so sind die vier Linien EP, PM, AP und PN in einer stetigen Proportion.

Der 2. Zusatz.

302. Es sey $AB = a, PN = y, AP = x$, so ist $PB = a - x$. Da nun (S. 301. 142.)

$$BP^2 : PM^2 = AP^2 : PN^2$$

so ist $a^2 - 2ax + x^2 : ax - x^2 = x^2 : y^2$

das ist $a - x : x = x^2 : y^2$

folgendes $x^2 = ay^2 - xy^2$

oder $y^2 = x^3 : (a - x)$

Der 3. Zusatz.

303. Wenn $x = a$ und also $BD = y$, so ist $a^3 = ay^2$, folgendes $0 : 1 = a^3 : y^2$ und demnach BD in Ansehung AB unendlich groß, das ist, die Asymptote von der *CISSOIDE*.

Die 33. Erklärung.

304. Theilet einen Quadranten eines Circuls ABC in so viel gleiche Theile als auch beliebt. In eben so viel Theile

theilet den halben Diameter AB in I. II. III. u. s. w. Richtet aus diesen Punkten Perpendicularlinien auf, und ziehet aus dem Mittelpuncte A in die Theilungspuncte des Bogens die Linien

A_1, A_2, A_3 u. s. w. welche die Perpen-

dicularlinien in a, b, c, d, e durchschneiden. Die krumme Linie, welche durch die Punkte a, b, c &c. gehet, wird die *QVADRA-TRIX* des Dinostratis genennet.

Zusatz.

305. Derowegen ist allezeit wie der ganze Bogen BC zu dem Bogen C4, so AB zu AIV. Es sey $BC=b$, $AB=a$, $C4=x$, $AIV=y$, so ist $ax=by$.

Die 34. Erklärung.

Tab. V.
Fig. 42.

306. Theilet eine Linie Ap in lauter gleiche Theile, und richtet aus den Theilungspuncten A, P, p &c. Perpendicularenlinien auf AN, PM, pm &c. die in einer geometrischen Proportion abnehmen. Die krumme Linie, welche durch die Punkte N, M, m &c. gehet, wird die Logarithmische genennet.

Zusatz.

307. Es sind demnach die Abscissen AP die Logarithmi der Semiordinaten PM (S. 21. Trigon.).

Anmerckung.

308. *Hugenius* hat zu Ende seines Discurses für la pesanteur verschiedene Eigenschaften dieser Linie beschrieben, welche *Guido Grandus* in einem besonderen Buche demonstrirret, daß er unter dem Titul *Geometrica Demonstratio Theorematum Hugenianorum circa Logisticam seu Logarithmicam Lineam* zu Florenz 1701. in 4. herausgegeben. Es können noch andere Arten der Logarithmischen Linien erdacht werden. So hat man eine Logarithmische Spirallinie erfunden.

Tab. V.
Fig. 43.

finden, da der Quadrant AB in gleiche Theile getheilet wird, und aus dem Mittelpuncte C gegen die Theilungspuncte des Bogens die Radii CI, CII, CIII, &c. gezogen, von ihnen aber in geometrischer Proportion die Linien C.I.C.2., C.3., &c. abgeschnitten werden, durch deren Ende 1. 2. 3. 4c. die verlangte Linie gehet.

Die 35. Erklärung.

309. Wenn sich ein Circul auf einer Tab. V. Linie AC fort bewege, bis er sich ganz Fig. 44. überworffen hat, so beschreibet der Punct a die Linie ABC, welche CYCLOIS oder die Radlinie genennet wird.

Zusatz.

310. Es ist also die Linie AC der Peripherie des Circuls und überhaupt eine jede Semiordinate PM dem Bogen Ma gleich. Denn die gerade Linie Ad ist dem Bogen Pd, und daher der übrige Bogen Pb, folgendes auch der Bogen BM der Linie dD gleich. Nun ist $OD = ML$ (§. 22. Geom.) $= PN$ (§. 122. Geom. §. 2. Trig.). Derowegen da $NM = dO$, so ist auch $PN + MN = Od + OD$, das ist, $PM = dD$. Folgendes ist die Semiordinate PM dem Bogen Pb, oder ihrer Abscisse BM gleich.

Die 36. Erklärung.

311. Wenn die Peripherie des Cir- Tab. IV. culs APA, in gleiche Theile getheilet wird, Fig. 39. und man den Radium CA in eben so viel Theile theilet, nach diesen CM einem, Cm zweyen 2c. solchen Theilen gleich machet; so sind die Puncte M, m &c. in der Spiral-
Linie

Linie des Archimedis. Diese Linie kan nach Gefallen unendlich verlängert werden, durch Hülfe neuer Circul. die mit dem zwiefachen, dem dreyfachen 2c. Radio beschrieben werden.

Zusatz.

312. Es sey die Peripherie $= p$, $AC = r$, $AP = x$, $PM = y$; so ist $CM = r - y$, folgendes $pr - py = rx$. Wenn aber $CM = y$; so ist $py = rx$, und demnach für unendliche Spirallinien $r^n x^m = p^n y^m$.

Anmerkung.

313. Bisher habe ich die leichtesten Regeln der Algebra von den niedrigsten Gleichungen erkläret, und bey allerhand Aufgaben angebracht. Nun will ich die übrigen vornehmen, welche man in Auflösung der höheren Gleichungen vonnöthen hat.

Von der Natur der Gleichungen.

Die 37. Erklärung.

314. Die Wurzel ist der Werth der unbekandten Grösse in einer Gleichung. Und ist es eine wahre Wurzel, wenn sie das Zeichen $+$ hat. Z. E. Wenn $x = +3$; hingegen eine falsche Wurzel, wenn sie das Zeichen $-$ hat. Z. E. Wenn $x = -3$.

Die 105. Aufgabe.

315. Die Natur der Gleichungen und ihre vornehmste Eigenschaften zu untersuchen.

Auflösung.

1. Nehmet so viel Werthe von x an als euch beliebet

beliebet, formiret daraus einfache Gleichungen, und bringet sie auf 0.

2. Multipliciret die einfachen Gleichungen in einander, so werden die höheren herauskommen, deren Betrachtung euch ihre Eigenschaften offenbahren wird.

Es sey $x = 2$

$$x = -3$$

$$x = 4$$

$$\text{so ist } x - 2 = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x - 4 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$+ 3x - 6$$

$$x^2 - 2x$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x - 4 = 0$$

$$- 4x^2 - 4x + 24$$

$$x^3 + x^2 - 6x$$

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24$$

$$x = a$$

$$x = -b$$

$$x = c$$

$$x - a = 0$$

$$x + b = 0$$

$$x - c = 0$$

$$x - a = 0$$

$$x + b = 0$$

$$x^2 + bx - ab = 0$$

$$- 1x$$

$$x - c = 0$$

$$x^3 + bx^2 - abx + abc = 0$$

$$- ax^2 - bcx$$

$$- cx^2 + acx$$

Wenn ihr diese Gleichungen (die ihr nach Belieben auf höhere Grade erhöhen könnet) betrachtet; so werdet ihr mit dem Harriot und Cartesio wahrnehmen,

1. Die bekandte Gröſſe des anderen Gliedes

Q. q q q q 4

des

des sey die Summe aller Wurtzeln mit einem wiedrigen Zeichen; des dritten Gliedes die Summe der Producte aus zwey in zwey Wurtzeln; des vierdten die Summe der Producte aus drey in drey Wurtzeln 2c. endlich das letzte Glied das Product aus allen Wurtzeln miteinander. Z. E. In der Quadratischen Gleichung ist die bekandte Gröſſe des anderen Gliedes $+1$, die Wurtzeln sind $+2$ und -3 .

2. Eine jede Gleichung habe so viel Wurtzeln als das erste Glied Abmessungen hat, oder der Exponente der Dignität desselben Gliedes Einheiten in sich begreiffet. Z. Z. In der Quadratischen Gleichung ist der Exponente 2, die Zahl der Wurtzeln ist auch 2.

3. Und zwar seyn in jeder Gleichung so viel wahre Wurtzeln als Abwechslungen der Zeichen sind; so viel falsche als einerley Zeichen auf einander folgen. Z. E. In unserer Quadratischen Gleichung, die eine wahre Wurtzel $+2$ und eine falsche -3 hat, folgen auf einander $++$ und wechseln ab $+ -$. In der Cubischen, welche zwey wahre Wurtzeln $+2$ und $+4$ und eine falsche -3 hat; wechseln anfangs $++$, darauf folgen auf einander $--$ und abermahls wechseln ab $-+$.

Die

Die 1. Anmerkung.

316. Der erste und andere Satz läſſet ſich gar leichte aus der Art, wie die Gleichungen entſtehen, demonſtriren, ſo daß ich es für unnöthig achte, den Beweis hieher zu ſetzen. Allein den dritten, welchen *Harriot* zuerſt durch vielen Verſuch gefunden, hat zur Zeit noch keiner überhaupt erweiſen können, daher ihn auch *Reynault* aus ſeiner Analyſe demonſtré gar weggelaſſen, weil er die Regeln der Algebra demonſtriren wollen.

Die 2. Anmerkung.

317. Ihr dürffet euch nicht wundern, daß eine einige Gleichung ſo gar verſchiedene Wurzeln haben kan. Denn es iſt zu wiſſen, daß eine einige Aufgabe öfters verſchiedene Fälle haben kan, und wir in jedem Falle auf einerley Gleichung verfallen: wie wir Exempel von der Quadratiſchen Gleichung gehabt, da einerley Gleichung herauskommet, ob man die eine oder die andere von den geſuchten Gröſſen x nennt. Doch weil unterweilen einige Fälle unmöglich werden, ſo muß auch die Gleichung unmögliche Wurzeln haben. Wie viel aber in jedem Falle unmögliche Wurzeln ſind, hat zwar *Newton* in ſeiner Arithmetica Univerſali p. 212. zu zeigen einigermaßen ſich bemühet; doch weil weder die Regel allgemein iſt, noch auch er die Demonſtration hinzu ſetzt, ſo wollen wir uns damit nicht aufhalten, zumahl da man ſie auch in den Leipziger Actis A. 1708. p. 522. 523. findet.

Die 106. Aufgabe.

318. Die Wurzel einer gegebenen Gleichung um eine gegebene Gröſſe zu vermehren oder zu vermindern, unerachtet man ſie noch nicht erkannt hat.

Auſlöſung.

Es ſey die gegebene Equation $x^2 - 6x^2$

29999 5

†13

$\pm 13x - 10 = 0$. Ihr sollet die Wurzel um 3 vermehren. Setzet

$$\begin{array}{rcl} & x + 3 = y & \\ \text{so ist} & x = y - 3 & \\ & x^2 = y^2 - 6y + 9 & \\ \hline & x^3 = y^3 - 9y^2 + 27y - 27 & \\ & - 6x^2 = - 6y^2 + 36y - 54 & \\ \pm 13x = & \pm 13y - 39 & \\ - 10 = & - 10 & \\ \hline \end{array}$$

$$y^3 - 15y^2 + 76y - 130 = 0$$

Eine neue Gleichung, darinnen $y = x + 3$.

Wenn ihr in der Gleichung die Wurzel um 3 vermindern sollet, so setzet

$$\begin{array}{rcl} & y - 3 = x & \\ \text{so ist} & y = x + 3 & \\ & y^2 = x^2 + 6x + 9 & \\ \hline & y^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27 & \\ - 15y^2 = & - 15x^2 - 90x - 135 & \\ \pm 76y = & \pm 76x + 228 & \\ - 130 = & - 130 & \\ \hline \end{array}$$

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$$

Eine neue Gleichung darinnen $x = y - 3$.

Die 107. Aufgabe.

319. Die Wurzel in einer Gleichung durch eine gegebene Grösse zu multiplizieren.

Auf

Auflösung.

Ihr sollet in der Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ die Wurzel durch a multipliciren.
 Setzet

$$ax = y$$

so ist $x = y : a$

$$x^2 = y^2 : a^2$$

$$x^3 = y^3 : a^3$$

$$- px^2 = - py^2 : a^2$$

$$+ qx = + qy : a$$

$$- r = - r.$$

$$a^3 y^3 : a^3 - py^2 : a^2 + qy : a - r = 0$$

$y^3 - apy^2 + a^2 qy - a^3 r = 0$, Eine neue Gleichung, in welcher $y = ax$.

Zusatz.

320. Hieraus erhellet, daß ihr nur die vorgegebene Gleichung durch eine geometrische Progression multipliciren dürffet, deren erstes Glied 1, der Exponente aber diejenige Zahl ist, durch welche die Wurzel multiplicirt werden soll. Z. E. Es soll in der Gleichung $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ die Wurzel durch 2 multiplicirt werden: so verfaret also.

$$\begin{array}{cccccc} x^4 & + & 4x^3 & - & 19x^2 & - & 106x & - & 120 = 0 \\ 1 & & 2 & & 4 & & 8 & & 16 \end{array}$$

$y^4 + 8y^3 - 76y^2 - 848y - 1920 = 0$ eine Gleichung, darinnen $y = 2x$.

Wiederum es soll in der Gleichung $x^4 + qx^2 - rx - f = 0$ die Wurzel durch c multipliziert werden. Verfaßet also

$$\begin{array}{cccccc} x^4 & * & + & qx^2 & - & rx & - & f = 0 \\ 1 & c & & c^2 & c^3 & c^4 \end{array}$$

$y^4 + c^2qx^2 - c^3rx - c^4f = 0$ eine neue Gleichung, darinnen $y = cx$.

Anmerkung.

321. Der Stern wird jederzeit in die Stelle der Glieder gesetzt, welche fehlen.

Die 108. Aufgabe.

322. Die Wurzel in einer gegebenen Gleichung durch eine gegebene Grösse zu dividiren.

Auflösung.

Es sey die gegebene Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$. Die Wurzel soll durch a dividirt werden. Setzet

$$\begin{array}{r}
 x : a = y \\
 \hline
 \text{so ist } x = ay \\
 x^2 = a^2 y^2 \\
 \hline
 x^3 = a^3 y^3 \\
 - px^2 = - a^2 p y^2 \\
 + qx = - a q y \\
 - r = - r \\
 \hline
 a^3 y^3 - a^2 p y^2 + a q y - r = 0 \\
 \hline
 y^3 - p y^2 : a + q y : a^2 - r : a^3 = 0
 \end{array}$$

Eine neue Gleichung, in welcher $y = x : a$.

Zusatz.

323. Hieraus erhellet, daß ihr die vor-
gegebene Gleichung nur durch eine geometris-
sche Progression dividiren dürfft, deren er-
stes Glied 1, der Exponente aber diejenige
Größe ist, wodurch die Division geschehen
soll. S. E. Die Wurzel von $x^4 + 8x^3 -$
 $76x^2 - 848x - 1920 = 0$ soll durch 2 divi-
diret werden. Verfabret also:

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0 \\
 \begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & \\
 \hline
 y^4 + 4y^3 - 19y^2 - 106y - 120 = 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Eine neue Gleichung, darinnen $y = \frac{1}{2}x$.

Wie

Wiedrum es soll die Wurzel von $x^3 - 36x - 54 = 0$ durch 3 dividiret werden. Verfähret also:

$$\begin{array}{r} x^3 - 36x - 54 = 0 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \end{array}$$

$y^3 - 4y - 2 = 0$, eine neue Gleichung, darinnen $y = \frac{1}{3}x$.

Die 109. Aufgabe.

324. Eine Gleichung, darinnen einige Glieder fehlen, vollständig zu machen.

Auflösung.

Vermehret die Wurzel um so viel als ihr wollet, oder vermindert sie (S. 318.): so ist geschehen, was man verlangete.

B. E. Es sey $x^3 - 23x - 70 = 0$. Setzet

$$\begin{array}{r} x + 1 = y \\ \text{so ist } x = y - 1 \\ x^2 = y^2 - 2y + 1 \\ \hline x^3 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \\ - 23x = - 23y + 23 \\ - 70 = - 70 \\ \hline y^3 - 3y^2 - 20y - 48 = 0 \end{array}$$

Eine

Eine neue Gleichung, darinnen kein Glied fehlet und $y = x + 1$.

Die 110. Aufgabe.

325. Aus einer gegebenen Gleichung das andere Glied weg zu schaffen.

Auflösung.

Wenn das andere Glied das Zeichen $+$ hat, so vermehret; hat es aber das Zeichen $-$, so vermindert die Wurzel (S. 318.) durch den Quotienten, der heraus kommet, so man die bekandte Gröſſe des anderen Gliedes durch den Exponenten des ersten dividiret.

Z. E. Ihr ſollet aus der Gleichung $x^3 - 8$ $x^2 - x + 8 = 0$ das andere Glied wegnehmen.

Setzet $x - 8 : 3 = y$

ſo iſt $x = y + 8 : 3$

$$x^2 = y^2 + 16y : 3 + 64 : 9$$

$$x^3 = y^3 + 8y^2 + 192y : 9 + 512 : 27$$

$$- 8x^2 = - 8y^2 - 128y : 3 - 512 : 9$$

$$- x = - y - 8 : 3$$

$$+ 8 = + 8$$

$$y^3 + - 67y : 3 - 880 : 27 = 0$$

Eine neue Gleichung, darinnen das andere Glied fehlet und $y = x - 8 : 3$.

Zuſatz.

326. Wenn ihr alſo aus einer Quadratiſchen Gleichung das andere Glied wegnehmet;

met; Können ihr solche noch auf eine andere Art, als vorhin (§. 83.) geschehen, auflösen.
Z. E.

Es sey $x^2 - 8x + 15 = 0$. Setzet $x - 4 = y$;
so ist $x^2 = y^2 + 8y + 16$

$$- 8x = - 8y - 32$$

$$+ 15 = \quad + 15$$

$$y^2 - 1 = 0$$

$$y = 1$$

folgendes $x = 1 + 4 = 5$

Die III. Aufgabe.

327. Aus einer gegebenen Gleichung die Brüche wegzuschaffen.

Auflösung.

Multipliret die Wurzel durch das Product aus den Nennern aller vorkommenden Brüche, oder eine Zahl, durch welche sich die Nenner dividiren lassen. So ist geschehen, was man verlangere.

Beweis.

$$y^3 * - 67y; 3 - 880 : 27 = 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \end{array}$$

$$x^2 * - 201x - 880 = 0.$$

Eine neue Gleichung, in welcher $x = 3y$

x^3

$$x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x - 64 = 0$$

I 12 114 1728

$$y^3 - 8y^2 + 108y - 110592 = 0$$

Eine neue Gleichung, in welcher $y = 12x$.

Die 112. Aufgabe.

328. Aus einer gegebenen Gleichung die Irrationalgrößen abzuschaffen.

Auflösung.

Unterweilen kan solches durch die Multiplikation; zuweilen durch die Division geschehen. Keine Regel ist allgemein.

$$x^4 + 2ax^3\sqrt{2} + 8abx^2 - a^3x\sqrt{8} - 2a^2b^2 = 0$$

I $\sqrt{2}$ 2 $\sqrt{8}$ 4

$$y^4 + 4ay^3 + 16aby^2 - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0, \text{ eine neue Gleichung, darinnen } y = x\sqrt{2}.$$

$$x^3 - ax^2\sqrt{2} + abx\sqrt{32} - a^2b = 0$$

I $\sqrt{4}$ $\sqrt{16}$ 4

$$y^3 - 2ay^2 + 8aby - 4aab = 0$$

Eine neue Gleichung, die ganz rational ist,

und deren Wurzel $y = x\sqrt{4}$.

$$x^3 - ax^2\sqrt{2} + abx\sqrt{32} - a^2b = 0$$

I $\sqrt{2}$ $\sqrt{4}$ 2

$$y^3 - ay^2 + 2aby - \frac{1}{2}aab = 0$$

(Wolfs Mathes. Tom. IV.) Arrrr Eine

Eine neue Gleichung, die ganz rational ist,
und deren Wurzel $y = x : \sqrt[3]{2}$

Anmerkung.

329. Alles, was bisher von den Gleichungen gelehrt worden, ist zu dem Ende geschehen, damit wir sie völlig auflösen, das ist, den Werth der unbekannten Grösse, so wohl geometrisch, als in Zahlen finden könnten, welches nun in folgenden angezeigt werden soll.

Die 113. Aufgabe.

330. Alle Rationalwurzeln die in einer gegebenen Gleichung enthalten sind, zu finden.

Auflösung.

1. Es sey die gegebene Gleichung $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Weil 24 das Product aus allen Wurzeln ist (§. 315.); so zerfällt es in die Zahlen, durch deren Multiplication es entsteht, welche sind 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24. und machet daraus folgende einfache Gleichungen $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 4 = 0$ &c.
2. Dividiret die gegebene Gleichung durch diese einfachen, denn durch die sie sich dividiren läßt, die zeigen ihre Rationalwurzeln (§. 315.). Als $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ läßt sich dividiren durch $x + 3$, dero wegen ist -3 eine falsche Wurzel von dieser Gleichung. Der Quotient, so heraus kommt, $x^2 - 6x + 8 = 0$ läßt sich ferner dividiren durch $x - 2$ und der neue Quotient ist

ist $x-4$. Derowegen sind 2 und 4 zwey wahre Wurkeln von der gegebenen Gleichung.

Anders.

Ihr dörfet auch nur die Zahlen, in welche das letzte Glied zerfället worden, nach einander in die Stelle vor x setzen: denn wenn dadurch die ganze Gleichung zernichtet wird, so ist die vor x gesetzte Zahl eine von ihren Rationalwurkeln (§. 315.). Z. E. Es sey $x^2 - 6x + 8 = 0$. Das letzte Glied 8 entstehet, wenn ihr 2 durch 4 multipliciret.

$$\text{Setzet } 4 = x$$

$$\text{so ist } 16 = x^2$$

$$- 24 = - 6x$$

$$+ 8 = + 8$$

$$0 = 0$$

Solchergestalt ist $+ 4$ eine von den Rationalwurkeln.

Die I. Anmerckung.

331. Weil in der ersten Manier das viele Dividiren beschwerlich fallen würde, hat man diesen Vortheil ausgedacht. 1. Ziehet die Zahl, welche ihr versuchen wollet, von der bekandten Zahl des andern Gliedes ab, und was heraus kommet, multipliciret durch eben selbige Zahl. 2. Das Product ziehet von der bekandten Zahl in dem dritten Gliede ab, und was überbleibet, multipliciret abermahl durch mehr gedachte Zahl. 3. Das neue Product ziehet von dem vierdten Gliede ab, u s w. Wenn endlich bey dem letzten Gliede nichts übrig bleibet, so ist die versuchte Zahl eine von den Rational-

tionalwurzeln. 3. E. Ihr suchet die Rationalwurzeln von $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$. Das letzte Glied 15 läßt sich in 1. 3. 5. 15. zerfallen. Wenn ihr versucht suchen wollet, ob einige darunter von den Wurzeln seyn, geschiehet es folgendergestalt

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0 \\ -1 \quad +2 \quad +15 \\ \hline -2 \quad -15 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +2 \quad +15 \\ x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0 \\ +3 \quad -18 \quad +15 \\ \hline -6 \quad +5 \quad 0 \\ +3 \quad +3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -18 \quad +15 \\ x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0 \\ -5 \quad -10 \quad +15 \\ \hline +2 \quad -3 \quad 0 \\ -5 \quad -5 \\ \hline -10 \quad +15 \end{array}$$

Also ist $x - 1 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 5 = 0$, das ist, 1 und 5 sind die beyden wahren Wurzeln, 3 ist die falsche.

Die 2. Anmerkung.

332. Damit ihr aber sehet, daß dieser Vortheil aus der ersten Manier völlig genommen, und für keine besondere zu halten sey, will ich das vorige Exempel nach der gemeinen Art rechnen,

$$\begin{array}{r}
 x-1 \left\{ \begin{array}{l} x^3-3x^2-13x+15=0 \\ x^3-x^2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x^2-2x-15 \\ x^2-2x-15 \end{array} \right. \\
 \hline
 -2x^2-13x \\
 -2x^2+2x \\
 \hline
 -15x+15 \\
 -15x+15 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Die 114. Aufgabe.

333. Die Schranken zu finden, zwischen welchen die Grösse der Wurzeln enthalten ist.

Auflösung.

Es sey $x^3 - qx + r = 0$, so ist $x^3 + r = qx$ und demnach qx grösser als r , folgender x grösser als $r:q$. Wiederum qx ist grösser als x^3 , und daher q grösser als x^2 , folgender x kleiner als $\sqrt{q}$. Die Schranken der Wurzeln in gegenwärtigem Falle sind also $r:q$ und $\sqrt{q}$.

Es sey $x^3 + qx - r = 0$, so ist $x^3 + qx = r$, und demnach qx kleiner als r , folgender x kleiner als $r:q$. Wiederum r ist grösser als x^3 und daher x kleiner als $r^{1/3}$, folgender $xr^{2/3}$ grösser als x^3 , und $xr^{2/3} + qx$ grösser als r , endlich x grösser als $r:(r^{2/3} + q)$. Also fällt die Grösse der Wurzel zwischen $r:q$ und $r:(r^{2/3} + q)$.

Es sey $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, so ist $x^3 - px^2 = r - qx$. Wenn nun x grösser als p , so ist auch

R r r r r 3

r gröss

r grösser als qx und dannenhero x kleiner als $r:q$. Hingegen wenn p grösser als x ist, so ist qx grösser als r , und dannenhero auch x grösser als $r:q$. Derowegen fallen in beyden Fällen die Wurzeln zwischen p und $r:q$.

Es sey $x^3 - px^2 - qx + r = 0$, so ist $x^3 + r = px^2 + qx$, folgendes $px^2 + qx$ grösser als r , und daher auch $x^2 + qx : p + qq : 4pp$ grösser als $r : p + qq : 4pp$, $x + q : 2p$ grösser als $\sqrt{(r : p + qq : 4pp)}$ endlich x grösser als $\sqrt{(r : p + qq : 4pp)} - q : 2p$. Wiederum $px^2 + qx$ ist grösser als x^3 , dannenhero $px + q$ grösser als x^2 , und q grösser als $x^2 - px$, das ist $x^2 - px + \frac{1}{4}pp$ kleiner als $q + \frac{1}{4}pp$, $x - \frac{1}{2}p$ kleiner als $\sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$, endlich x kleiner als $\frac{1}{2}p + \sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$. Die Schrancken also der Wurzeln sind $\sqrt{(r : p + qq : 4pp)} - q : 2p$ und $\frac{1}{2}p + \sqrt{(q + \frac{1}{4}pp)}$.

Es sey $x^4 - qx^2 - rx - s = 0$, so ist $x^4 - qx^2 = rx + s$. Demnach ist x^2 grösser als q , weil sich qx^2 von x^4 abziehen läßt, und x grösser als $\sqrt{q}$. Daher $x\sqrt{q}$ grösser als q und $x^3\sqrt{q}$ grösser als qx^2 . Wiederum weil $x^4 - rx = qx^2 + s$, so ist x^3 grösser als r und x grösser als $r^{1/3}$. daher x^2 grösser als $xr^{1/3}$, x^3 grösser als $xr^{2/3}$, und $x^3r^{1/3}$ grösser als rx . Endlich da $x^4 - s = qx^2 + rx$, so ist x^4 grösser als s , und x grösser als $s^{1/4}$, folgendes x^3 grösser als $s^{3/4}$ und $x^3s^{1/4}$ grösser als s . Weil nun $x^4 = qx^2 + rx + s$, so ist x^4 kleiner als $x^3\sqrt{q} + xr^{1/3}$.

$\pm x^3 r^{1:4} \pm x^3 s^{1:4}$, und deswegen x kleiner als $q^{1:2} \pm r^{1:3} \pm s^{1:4}$. Die Schranken der Wurzel in gegenwärtigem Falle sind also $\sqrt{q}$ oder $r^{1:3}$ und $q^{1:2} \pm r^{1:3} \pm s^{1:4}$.

Eben so wird in anderen Fällen verfahren.

Anmerkung.

334. Damit ihr die vorgeschriebene Manier besser fassen möget, will ich ein Exempel in Zahlen anführen. Z. E. Es sey $x^3 - 3x + 1 = 0$, so ist $q = 3$ und $r = 1$, folgendes $r : q = 1 : 3$ und $\sqrt{q} = \sqrt{3}$. Solchergestalt sind die Schranken dieser Gleichung $\frac{1}{3}$ und $\sqrt{3}$, das ist, die Wurzel muß grösser als $\frac{1}{3}$ und kleiner als $\sqrt{3}$ seyn.

Zusatz.

335. Wenn ihr die Zahl wisset, welche grösser als eure Wurzel ist, so werdet ihr nicht mit vergeblichen Zahlen (§. 330. 331.) versuchen, ob sie unter die Rationalwurzeln gehöre oder nicht.

Die 115. Aufgabe.

336. Aus einer Cubischen Gleichung die Wurzeln zu finden.

Auflösung.

Wenn aus den cubischen Gleichungen das andere Glied weggenommen wird, so bekommt ihr drey Fälle, nemlich

$$x^3 = \pm px \pm q$$

$$x^3 = -px \pm q$$

$$x^3 = \pm px - q$$

Damit ihr nun die Wurzel findet, so setzet

R r r r 4

x =

$$x = y + z$$

Dann ist $x^3 = y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3$

$$px = py + pz$$

$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 = py + pz + q$ im ersten
Satz $3y^2z + 3z^2y = py + pz$ (Salle.

so ist $3yz = p$

$$z = p : 3y$$

Ferner ist $y^3 + z^3 = q$

das ist $y^3 + p^3 : 27y^3 = q$

$$y^6 + p^3 : 27 = qy^3$$

$$y^6 - py^3 = -p : 27$$

$$\frac{1}{4}qq \quad \frac{1}{4}qq \text{ (§. 83.)}$$

$$y^6 - qy^3 + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$$

$$y^3 - \frac{1}{2}q = \sqrt{\left(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3\right)}$$

$$y = \left(\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)^{1/3}$$

Nun ist

$$z^3 = q - y^3$$

das ist $z^3 = \frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3\right)}$

$$z = \left(\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)^{1/3}$$

Demnach ist $z + y = \left(\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)^{1/3} + \left(\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3\right)}\right)^{1/3}$ die verlangte Wurzel in dem ersten Falle.

Eben

Eben so findet ihr für x in dem andern Falle
 $(\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{2}qq \pm \frac{1}{27}p)})^{1:3} \pm (\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{2}qq \pm \frac{1}{27}p^3)})^{1:3}$.

Und in dem dritten Falle $(-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{2}qq - \frac{1}{27}p^3)})^{1:3} \pm (\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{2}qq - \frac{1}{27}p^3)})^{1:3}$.

Die 1. Anmerkung.

337. Diese Regeln werden insgemein *Cardani* Regeln genennet, weil er sie aus *Scipionis Ferrei* Erfindung zuerst in Druck gegeben.

Die 2. Anmerkung.

358. Damit aber ihr Gebrauch erhellet, so will ich eines und das andere Exempel anführen. Es sey $x^3 = * 6x + 40$. Weil $p=6$, $q=40$, und daher $\frac{1}{2}q=20$, $\frac{1}{4}qq=400$, $\frac{1}{3}p=2$, $\frac{1}{27}p^3=8$; so ist vermöge der ersten Regel $x = (20 - \sqrt{(400-8)})^{1:3} \pm (20 + \sqrt{(400-8)})^{1:3} = (20 - \sqrt{392})^{1:3} \pm (20 + \sqrt{392})^{1:3}$ = (wenn die Cubicwurzel beyderseits würcklich ausgezogen wird) $2 - \sqrt{2} \pm 2 + \sqrt{2} = 4$. Ist demnach 4 eine wahre Wurzel.

Es sey $x^3 = * - 3x + 36$. Weil $p=-3$, $q=36$, und daher $\frac{1}{2}q=18$, $\frac{1}{4}qq=324$, $\frac{1}{3}p=-1$, $\frac{1}{27}p^3=-1$; so ist vermöge der andern Regel die Wurzel $(18 - \sqrt{(324+1)})^{1:3} \pm (18 + \sqrt{(324+1)})^{1:3}$ = (wenn ihr die Cubicwurzel beyderseits würcklich ausziehet) $1\frac{1}{2} - \sqrt{3\frac{1}{4}} \pm 1\frac{1}{2} \pm \sqrt{3\frac{1}{4}} = 3$.

Es sey $x^3 = * 6x - 40$. Weil $p=6$, $q=-40$, und daher $\frac{1}{2}q=-20$, $\frac{1}{4}qq=400$, $\frac{1}{3}p=2$, $\frac{1}{27}p^3=8$; so ist vermöge der dritten Regel $(-20 + \sqrt{(400-8)})^{1:3} \pm (-20 - \sqrt{(400-8)})^{1:3} = (-20 + \sqrt{392})^{1:3} \pm (-20 - \sqrt{392})^{1:3}$ = (wenn die Cubicwurzel beyderseits würcklich ausgezogen

zogen wird) $1 - 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2 = -4$. Demnach ist 4 eine falsche Wurzel der vorgegebenen Gleichung.

Die 3. Anmerkung.

339. Man hat zwar auf eine gleiche Art eine Regel für die Wurzeln aus einer Gleichung von dem vierden Grade auszuziehen gefunden: allein weil sie nicht sonderlich gebraucht wird, so will ich die Anfänger damit nicht aufhalten, sondern gehe vielmehr fort und zeige, wie man durch Näherung die Wurzel finden kan, wenn eine Gleichung keine Rationalwurzel hat.

Die 116. Aufgabe.

340. Aus einer jeden gegebenen Gleichung die Wurzel durch Näherung zu finden.

Auflösung.

Wir wollen die Regeln bald bey Exempeln anbringen, und zwar den Anfang von einer quadratischen Gleichung machen, damit wir sie desto besser begreifen.

Es sey demnach $x^2 - 5x - 31 = 0$. Setzet vermöge der Gränzen, welche die Gleichung haben kan (§. 333.), die Wurzel sey $8 + y$, dergestalt, daß y einen Bruch bedeutet, und welchen 8 entweder grösser oder kleiner ist als x . Solchergestalt ist

$$\begin{array}{r} x^2 = 64 + 16y + y^2 \\ - 5x = -40 - 5y \\ - 31 = -31 \end{array}$$

$$-7 + 11y + y^2 = 0$$

Da nun die Dignitäten eines Bruches beschränkt

standia abnehmen, und man hier nur die Wurzel bey nahe wissen will, so lasset man y^2 weg, und nimmet an

$$-7 \pm 11y = 0$$

$$\text{das ist } 11y = 7$$

$$y = 0.6 = 0.\frac{6}{10}$$

$$\text{Also ist } x = 8 \pm 0.6 = 8.6.$$

Weil der Werth von x in Zehentheiligen noch nicht genau genug bestimmt; so setzet $x = 8.6 \pm y$ und verfahret, wie vorhin. Ihr findet demnach

$$x^2 = \frac{7396}{100} \pm \frac{172}{10}y \pm y^2$$

$$-5x = -\frac{430}{10} - 5y$$

$$-31 = -31$$

$$\frac{7396}{100} - \frac{430}{10} - 31 \pm \frac{172}{10}y - 5y = 0$$

Das ist, wenn man die Brüche unter einerley Benennung bringet (welches hier den Anfangern zu Gefallen einmahl für allemahl geschehen soll.)

$$73.96 - 4300 - 3100 \pm (1720 - 500)y = 0$$

$$-0.04 \pm 12.20y = 0.$$

$$12.20y = 0.04.$$

$$y = 0.0032$$

Also

Also ist $x = 8.6000 + 0.0032 = 8.6032$.

Wenn ihr die Wurzel noch genauer verlangt
get; so setzet $x = 8.6032 + y$. Alsdenn ist

$$\begin{aligned} x^2 &= 74.01505024 + 17.20640000y + y^2 \\ - 5x &= -43.01600000 - 5.00000000y \\ - 31 &= -31.00000000 \end{aligned}$$

$$-0.000094976 + 12.20640000y = 0$$

$$12.20640000y = 0.00094976$$

$$y = 0.000077808$$

Also ist $x = 8.603277808$

Man soll ferner die Wurzel aus der Cubi-
schen Gleichung $x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$
ausziehen. Setzet

$$5 + y = x$$

$$\begin{aligned} \text{so ist } x^3 &= 125 + 75y + \dots \\ + 2x^2 &= + 50 + 20y + \dots \\ - 23x &= - 115 - 23y \\ - 70 &= - 70 \end{aligned}$$

$$-10 + 72y = 0$$

$$72y = 10$$

$$y = 0.1$$

Also ist $x = 5 + 0.1 = 5.1$

Setzet

Setzet ferner $x = 5.1 + y$; so ist

$$\begin{aligned} x^3 &= 132.651 + 78.030y \dots \\ + 2x^2 &= +52.020 + 20.400y \dots \\ - 23x &= -11.300 - 23.000y. \\ - 70 &= -70.000 \end{aligned}$$

$$-2.629 + 75.430y = 0$$

$$75.430y = 2.629$$

$$y = 0.0348$$

Also ist $x = 5.1 + 0.0348 = 5.1348$.

Wolte man die Wurzel noch genauer haben; so setze man $x = 5.1348 + y$ und suche den Werth von y , wie vorhin.

Wenn ihr die Wurzel geschwinder in vielen Zahlen genau haben wollet; so müßet ihr noch den Werth von y^2 beibehalten, und die quadratische Gleichung auf gewöhnliche Art (§. 83.) auflösen, nur daß ihr zehentheilige Brüche behaltet. Nämlich wenn $x = 5 + y$; so ist

$$\begin{aligned}
 x^3 &= 125 + 75y + 15y^2 \\
 + 2x^2 &= +50 + 20y + 2y^2 \\
 - 23x &= -115 - 23y \\
 - 70 &= -70
 \end{aligned}$$

$$-10 + 72y + 17y^2 = 0$$

$$17y^2 + 72y = 10$$

$$\begin{aligned}
 y^2 + 4.2352y &= 0.58823530 \\
 4.48422976 & \quad 4.48 + 22976
 \end{aligned}$$

$$y^2 + 4.2352y + 4.48422976 = 5.07246506$$

$$y + 2.1176 = 2.2522$$

$$y = 0.1346$$

$$\text{also ist } x = 5.1346$$

Wolltet ihr nun setzen $x = 5.1346 + y$ und wie vorhin den Werth von y finden; so würdet ihr gleich durch die andere Rechnung sehr weit hinauf kommen.

Die 1. Anmerkung.

341. In meinen Element. Analyf. (§. 327.) habe ich gemiesen, wie auf diese Art gar leichte die Regel des Herrn *Halley* heraus gebracht werde, daraus man in Engelland sehr viel machet. Allein weil die gegebene Regel eben so geschwinde den Werth der Wurzel in so kleinen Theilen giebet, und doch viel leichter als die Hallesianische zu behalten ist, indem sie die Klarheit ihres Beweises mit sich führet: so kan man am sichersten bey derselben verbleiben.

Die 2. Anmerkung.

342. Nun könnte ich auch zeigen, wie der Werth von x in den gegebenen Gleichungen geometrisch gesucht wird.

wird. Allein weil die geometrische Ausführung der determinirten Aufgaben sich am besten aus der Ausführung der undeterminirten herleiten läßt; will ich zuerst arithmetische Exempel von dergleichen Aufgaben beybringen, zumahl da sie in der höheren Geometrie und der Differentialrechnung mehr Nutzen haben, als wohl einige vermeinen, auch besondere Kunstgriffe nachzusinnen an die Hand geben.

Von undeterminirten Aufgaben.

Die 117. Aufgabe.

343. Vier Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß die Summe der beyden ersten der dritten und ihre Differenz der vierden Zahl gleich sey.

Auflösung.

Es sey die erste Zahl x , die andere y , die dritte z , die vierde t , so ist

$$\begin{array}{rcl} y + x & = & z \\ \hline 2y + t & = & z \\ \hline 2y & = & z - t \\ \hline y & = & (z - t) : 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x - y & = & t \\ \hline x & = & t + y \\ \hline x & = & t + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t \\ \hline x & = & (z + t) : 2 \end{array}$$

da nun nicht mehr Gleichungen zu erdencken sind, können die Zahlen z und t nach Belieben angenommen werden. Es sey $z=8$, $t=2$; so ist $x=(8+2):2=10:2=5$, und $y=(8-2):2=6:2=3$. Es sey $z=5$, $t=1$; so ist $x=(5+1):2=6:2=3$, $y=(5-1):2=4:2=2$.

Anmerkung.

344. Wenn ihr ganze Zahlen verlangt, so müssen vor z und z solche angenommen werden, deren Summe und Differenz sich durch 2 dividiren läßt.

Die 118. Aufgabe.

345. Zwey Zahlen zu finden, deren Summe zugleich mit ihrem Producte einer gegebenen Zahl gleich ist.

Auflösung.

Es sey die gegebene Zahl $= a$, die eine von den beehrten $= x$, die andere $= y$, so ist

$$\begin{array}{r} xy + x + y = a \\ \hline xy + x = a - y \\ \hline x = (a - y) : (y + 1) \end{array}$$

Es sey $a = 30$, $y = 2$, so ist $x = 30 - 2 : (2 + 1) = 28 : 3 = 9\frac{1}{3}$. Es sey $a = 20$, $y = 2$, so ist $x = (20 - 2) : (2 + 1) = 18 : 3 = 6$. Es sey $a = 19$, $y = 4$, so ist $x = (19 - 4) : (4 + 1) = 15 : 5 = 3$.

Die 119. Aufgabe.

346. Zwey Zahlen zu finden, deren Product ein vollkommener Cubus ist, dessen Wurzel dem Producte aus der ersten in das Quadrat der anderen gleich ist.

Auflösung.

Es sey die erste Zahl $= x$, die andere y , die Cubicwurzel $= v$, so ist

 $v =$

$$\begin{array}{r} v = xy^2 \\ \hline v : y^2 = x \\ \hline v : y^2 = v^3 : y \\ \hline v = v^3 y \\ \hline 1 = v^2 y \\ \hline 1 : v^2 = y \end{array}$$

Derowegen ist $v^5 = x$

Setzt $v = 2$, so ist $x = 32$, $y = \frac{1}{4}$. Es sey $v = 3$, so ist $x = 243$, $y = \frac{1}{9}$.

Die 120. Aufgabe.

347. Die Summe zweyer vollkommenen Quadrate in zwey andere vollkommene Quadrate zu theilen.

Auflösung.

Es sey die Seite des größten Quadrates $= a$, des kleinsten $= b$: die Seite des einen von den gesuchten $a - z$, des anderen $yz - a$. So ist

$$aa - 2az + zz + y^2 z^2 - 2byz + ba = aa + bb$$

$$zz + y^2 z^2 = 2byz + 2az$$

$$z + y^2 z = 2by + 2a$$

$$z = (2by + 2a) : (y^2 + 1)$$

(Wolfs Mathes. Tom. IV.) Es s s s Also

Also ist $a - z = a - (2by + 2a) : (y^2 + 1)$
 $= (ay^2 + a - 2by - 2a) : (y^2 + 1) = (ay^2 - 2by - a) : (y^2 + 1)$. Hingegen $yz - b = (2by^2 + 2ay) : (y^2 + 1) - b = (2by^2 + 2ay - by^2 - b) : (y^2 + 1) = (by^2 + 2ay - b) : (y^2 + 1)$.

Es sey $a=3, b=2, y=2$; so ist $z = (8 + 6) : 5 = 14 : 5$, folgendes $a - z = 3 - 14 : 5 = \frac{11}{5}$ und $yz - b = 28 : 5 - 2 = (28 - 10) : 5 = 18 : 5$. Deren Quadrate $(1 + 324) : 25 = 13 = 9 + 4$.

Man nimmt die beyden Seiten $a - z$ und $yz - b$ an, weil von der Summe der beyden Quadrate sich $aa + bb$ muß abziehen und das übrige durch z dividiren lassen, wenn der Werth von z rational seyn soll.

Die 121. Aufgabe.

348. Zwey vollkommene Quadrate zu finden, deren Differenz einer gegebenen Zahl gleich ist.

Auflösung.

Es sey die Seite des kleinen $= x$, des großen $x + y$, die Differenz $= d$. So ist das kleine Quadrat $= x^2$, das große $x^2 + 2xy + y^2$, folgendes

$$\begin{array}{r} y^2 + 2xy = d \\ \hline 2xy = d - y^2 \\ \hline x = (d - y^2) : 2y \end{array}$$

Weil

Weil sich y^2 von d abziehen läßt, so muß y kleiner seyn als $\sqrt{d}$.

3. E. Es sey $d=10, y=3$; so ist $x=(10-9):6=\frac{1}{6}$, $x+y=3+\frac{1}{6}$. Es sey $d=11, y=2$; so ist $x=(11-4):4=\frac{7}{4}$, $x+y=2+\frac{7}{4}=\frac{15}{4}$.

Man nimmet die Seite des grossen Quadrates $x+y$ an und nicht bloß y , damit der Werth von x rational gefunden wird.

Die 122. Aufgabe.

349. Eine Zahl in zwey andere zu zertheilen, deren Product ein vollkommenes Quadrat ist.

Auflösung.

Es sey die Zahl $=2a$, die Differenz $=2y$; so ist die grosse $a+y$, die kleine $a-y$ (§. 61.), ihr Product $=aa-yy$. Setzet die Seite des Quadrates $xy=a$. So ist

$$aa-yy=aa-2axy+x^2y^2$$

$$2axy=x^2y^2+y^2$$

$$2ax=x^2y+y$$

$$2ax:(x^2+y)=y$$

$$2ax:(x^2+y)=y$$

Es sey $x=2, 2a=10$; so ist $y=20:5=4$, $a+y=5+4=9$, $a-y=5-4=1$.

Es sey $2a=10, x=0$; so ist $y=0$, folgendes $a+y=5$, $a-y=5$.

Es s s s 2

Es

Es sey $2a=10$, $x=3$; so ist $y=30:10=3$, $a+x=5+3=8$, $a-y=5-3=2$.

Die Seite des Quadrates wird $xy - a$ angenommen, damit man in der Gleichung aa wegbringen und das übrige durch y dividiren kan, damit der Werth von y rational gefunden wird.

Die 143. Aufgabe.

350. Zwey Zahlen zu finden von der Beschaffenheit, daß, wenn die eine zu dem Quadrate der anderen gesetzt wird, die Summe ein Quadrat sey, deren Seite die Summe der Zahlen ist.

Auflösung.

Es sey die eine Zahl x , die andere y ; so ist

$$x^2 + y = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\frac{y - y^2 = 2xy}{2y}$$

$$(1 - y) : 2 = x$$

Es sey $y = \frac{1}{2}$; so ist $x = \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$. Es sey $y = \frac{1}{3}$; so ist $x = (1 - \frac{1}{3}) : 2 = \frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$.

Die 124. Aufgabe.

351. Zwey Zahlen zu finden von der Beschaffenheit, daß, wenn die eine zu dem Quadrate der anderen gesetzt wird, die Summe die Seite eines Quadrates sey, so den beyden Zahlen gleich ist.

Auf

Auflösung.

Es sey die eine Zahl z , die andere y ; so ist

$$z^2 + y = \sqrt{(z + y)}$$

$$z^4 + 2z^2y + yy = z + y$$

$$z^4 + 2z^2y - y + yy = z$$

das ist, wenn $2z^2 - 1 = v$

$$vy + yy = z - z^4$$

$$\frac{1}{4}v^2 + vy + yy = \frac{1}{4}v^2 + z - z^4$$

$$\frac{1}{2}v + y = \sqrt{(\frac{1}{4}v^2 + z - z^4)}$$

$$y = \sqrt{(\frac{1}{4}v^2 + z - z^4)} - \frac{1}{2}v$$

das ist, wenn ihr für v wieder seinen Werth in die Stelle sehet

$$y = \sqrt{(z^4 - z^2 + \frac{1}{4} + z - z^4)} - z^2 + \frac{1}{2}$$

das ist $y = \sqrt{(\frac{1}{4} + z - z^2)} + \frac{1}{2} - z^2$

Wenn ihr nun Rationalzahlen verlangt, so muß $\frac{1}{4} + z - z^2$ ein vollkommenes Quadrat seyn.

Setzet demnach seine Seite $= zx - \frac{1}{2}$ (S. 349.), so ist

$$\begin{array}{r}
 z^2x^2 - zx + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + z - z^2 \\
 \hline
 z^2x^2 - zx = z - z^2 \\
 \hline
 zx^2 - x = 1 - z \\
 \hline
 zx^2 + z = x + 1 \\
 \hline
 z = (x + 1) : (x^2 + 1)
 \end{array}$$

Es sey $x = 2$; so ist $z = (2 + 1) : (4 + 1) = \frac{3}{5}$, folgendes $y = \frac{1}{2} - \frac{9}{25} + \sqrt{(\frac{1}{4} + \frac{3}{5} - \frac{9}{25})} = (25 - 18) : 50 + \sqrt{((25 + 24) : 100)} = 7 : 70 + 350$

$$50 + \sqrt{(49 : 100)} = \frac{7}{50} + \frac{7}{10} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

$$\frac{420}{505} = \frac{21}{25}$$

Die 125. Aufgabe.

352. Zwey Quadrate von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn ihr das eine zu dem Producte von beyden addiret, eine jede Summe ein vollkommenes Quadrat sey.

Auflösung.

Es sey das eine Quadrat x^2 , das andere y^2 , so ist ihr Product x^2y^2 ; folgendes sind $x^2y^2 + x^2$ und $x^2y^2 + y^2$ vollkommene Quadrate. Dividiret das erste durch x^2 , das andere durch y^2 ; so sind $y^2 + 1$ und $x^2 + 1$ gleichfalls vollkommene Quadrate. Nennet die Seite des ersten $z - y$, das andere $z - x$, damit sich y^2 und x^2 subtrahiren läffet, folgendes der Werth von

von y und x rational gefunden werden mag;
so ist

$$\begin{array}{l} y^2 + 1 = z^2 - 2zy + y^2 \\ \hline 1 = z^2 - 2zy \\ \hline 1 + 2zy = z^2 \\ \hline y = (z^2 - 1) : 2z \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 + 1 = t^2 - 2tx + x^2 \\ \hline 1 = t^2 - 2tx \\ \hline 2tx = t^2 - 1 \\ \hline x = (t^2 - 1) : 2t \end{array}$$

Es sey $z=2$, $t=3$, so ist $y=(4-1):4=\frac{3}{4}$ und $x=(9-1):6=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

Es sey $z=3$, $t=4$; so ist $y=(9-1):6=\frac{4}{3}$
 $x=(16-1):8=\frac{15}{8}$.

Die 126. Aufgabe.

353. Zwey Quadrate von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn ihre Summe zu ihrem Producte gesetzt wird, ein vollkommenes Quadrat herauskommet.

Auflösung.

Es sey das eine Quadrat x^2 , das andere y^2
so ist $x^2y^2 + x^2 + y^2$ ein vollkommenes Quadrat. Setzet anfangs aus vorhin (§. 352.) angeführtem Grunde.

$$\begin{array}{l} y^2 - 2ty + tt = yy + 1 \\ \hline \text{so ist } t^2 = 1 + 2ty \\ \hline (t^2 - 1) : 2t = y \\ t - y = t - (t^2 - 1) : 2t = (t^2 + 1) : 2t \end{array}$$

Setzet ferner $v = \sqrt{(yy + 1)} = t - y = (t^2 + 1) : 2t$; so ist $x^2 y^2 + x^2 + y^2 = x^2 v^2 + y^2$.
 Stellet dessen Seite $= z - vx$ (§. 349.); so ist

$$x^2 v^2 + y^2 = z^2 - 2vxz + v^2 x^2$$

$$y^2 = z^2 - 2vxz$$

$$2vxz = z^2 - y^2$$

$$x = (z^2 - y^2) : 2vz$$

Hier werden z und t nach Gefallen angenommen.

Es sey z. B. $z=2, t=3$, so ist $y = (9 - 1) : 6 = 8 : 6 = \frac{4}{3}$, $v = t - y = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$ und
 also $x = (4 - 16) : 0 = (3^2 - 6) : 10 = 20$
 $20 = 3 = 1$
 $3 \quad 9 \quad 3.$

Die 127. Aufgabe.

352. Zwey Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn ihr Product zu der Summe ihrer Quadrate gesetzt wird ein vollkommenes Quadrat heraus kommt.

Auflösung.

Es sey die Summe der beyden Zahlen $2x$, ihre Differenz $2y$, die Seite des Quadrates $t = y$; so ist die groſſe Zahl $x + y$, die kleine $x - y$, und demnach

x^2

$$x^2 - y^2 + x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2, \text{ d. i. } 3x^2 + y^2 = t^2 + 2ty + yy$$

$$3x^2 - t^2 = 2ty$$

$$(3x^2 - t^2) : 2t = y$$

Es sey $x=4$, $t=6$, so ist $y=(48-36):12=12:12=1$, folgendes $x+y=4+1=5$,
 $x-y=4-1=3$.

Die 128. Aufgabe.

355. Eine Zahl von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn sie durch zwey bekandte Zahlen multipliciret wird, beyde Producte ein vollkommenes Quadrat sind.

Auflösung.

Es sey die eine gegebene Zahl $=a$, die andere b , die gesuchte x , das eine Quadrat y^2 , das andere v^2 , so ist

$$\begin{array}{rcl} ax = y^2 & & bx = v^2 \\ \hline x = y^2 : a & & x = v^2 : b \\ y^2 : a = v^2 : b & & \\ \hline by^2 = av^2 & & \\ \hline y^2 = av^2 : b & & \\ \hline y = v\sqrt{a:b} & & \end{array}$$

Es s s s s

Wenn

Wenn demnach eine Rationalzahl gefunden werden soll, muß $a:b$ ein vollkommenes Quadrat seyn.

Es seyn $a=32, b=8$; so ist $\sqrt{a:b}=2$.
 Setzet $v=5$, so ist $y=10$, folgendes $x=25$.
8

Die 129. Aufgabe.

356. Eine Zahl zu finden von der Beschaffenheit, daß, wenn sie durch zwey gegebene Zahlen multipliciret, und zu jedem Producte noch eine andere Zahl addiret wird, beyderseits ein vollkommenes Quadrat heraus kommet.

Auflösung.

Es seyn die ersten beyden gegebenen Zahlen a und b , die anderen c und d , die gesuchte x ; die beyden Quadrate yy und vv ; so ist

$$\begin{array}{rcl}
 ax + c = yy & & bx + d = vv \\
 \hline
 x = (yy - c) : a & & x = (vv - d) : b \\
 (yy - c) : a = (vv - d) : b \\
 \hline
 byy - bc = avv - ad \\
 \hline
 byy = av^2 - ad + bc \\
 \hline
 y^2 = (av^2 - ad + bc) : b \\
 \hline
 y = \sqrt{((av^2 - ad + bc) : b)}
 \end{array}$$

Wenn

Wenn ihr nun ein Rationalzahl verlangt, setzet $a:b=m^2$, so ist

$$y^2 = m^2 v^2 - m^2 d + c$$

Setzet ferner für die Seite des Quadrates $t-mv$ oder $mv-t$ (S. 349.), so ist

$$m^2 v^2 - m^2 d + c = m^2 v^2 - 2tmv + t^2$$

$$2tmv = t^2 + m^2 d - c$$

$$v = (t^2 + m^2 d - c) : 2tm$$

das ist, wenn ihr für m^2 seinen Werth wieder hinsetzet $v = (bt^2 + ad - bc) : 2tbm$.

Es sey $t=4$, $a=1$, $b=1$, $c=2$, $d=3$, so ist $m^2=1:1=1$ und $m=1$, folgendes $v = (16 + 3 - 2) : 8 = 17 : 8 = 2\frac{1}{8}$ und $x = 289 : 64 - 3 = (289 - 192) : 64 = 97 : 64$.

Von den geometrischen Orten.

Die 38. Erklärung.

357. Die Linie, durch welche eine undeterminirte Aufgabe geometrisch aufgelöst wird, heisset ein geometrischer Ort (Locus Geometricus). Ins besondere nennet man es einen Ort an einer geraden Linie, wenn sie eine gerade Linie ist: einen Ort an dem Circul, wenn sie ein Circul ist: einen Ort an der Parabel, Hyperbel, ELIPSI

LIPSI u. s. w. wenn sie eine von diesen Linien ist.

Die 39. Erklärung.

558. Der Ort an einer geraden Linie wird ein einfacher Ort (Locus simplex); der an einem Circul ein ebener Ort (Locus planus); der an einer Parabel, Hyperbel und Ellipsi ein körperlicher Ort (Locus solidus) genennet.

Die 130. Aufgabe.

359. Einen Ort an einer geraden Linie zu beschreiben.

Auflösung.

Einen Ort beschreiben, heisset die Linie ziehen, welche der undeterminirten Aufgabe ein Gnügen thut. Alle Derter an einer geraden Linie lassen sich durch folgende Gleichungen vorstellen:

$$y = \frac{ax}{b} \quad y = \frac{ax}{b} \mp c \quad y = c - \frac{ax}{b}$$

Tab. V.
Fig. 45.

Ziehet also eine gerade Linie AB und machet $AI = b$. Ziehet unter einem beliebigen Winkel $EI = a$. Wenn PM, pm &c. mit EI parallel gezogen werden; so sind AP, Ap &c. $= x$, PM, pm &c. $= y$. Denn (§. 184. geom.).

AI:

$$\begin{array}{l} AI : IE = AP : PM \\ b : a = x : y \\ \hline ax : b = y \end{array}$$

Verlängert EI in G, bis $IG = c$ und ziehet durch G die Linie Dg mit AB, AD mit EG parallel. Wenn PM bis in Q verlängert wird; so ist $DQ = AP = x$ und $QM = \frac{ax}{b} + c = y$.

Hingegen machet $LG = b$ und $GE = a$, $IG = c$; so ist $QM = ax : b$ (§. 184. Geom.) und $PM = \frac{ax}{b} - c$.

Endlich sey $AC = c$ und $AD = b$. Ziehet Tab. V. durch D die Linie FE mit AC parallel und ma. Fig. 46; chet $DE = a$. Ziehet ferner die Linie AL und mit ihr CB, hingegen NM mit AC parallel; so ist $PN = ax : b$ (§. 184. Geom.), folgendes $PM = MN - NP = c - ax : b$.

Die 131. Aufgabe.

560. Einen jeden Ort an einer Parabel zu beschreiben.

Auflösung.

Es können zwei Fälle vorkommen. Denn es beziehen sich die Linien x und y entweder auf die Höhlung, oder das erhabene der Parabel.

Im

Tab. V.

Fig. 47.

Im ersten Falle sey $KD = PN = n$, $AK = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = s$, der Parameter $= t$, $DQ = x$, $QM = y$; so ist (§. 184. Geom.).

$$DH : HL = DQ : QN$$

$$q : r = x : rx$$

$$DH : DL = DQ : DN$$

$$q : s = x : sx$$

$$\text{Demnach } AP = KP (= DN) - KA = \frac{sx - p}{q}$$

$$- p \text{ und } PM = QM - QN - PN = y - rx - n,$$

folgende weil $t \cdot AP = PM^2$ (§. 217.).

$$\frac{y^2}{q} - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q} - \frac{2ny}{q} + \frac{2nrx}{q} + \frac{n^2}{q} = \frac{tsx - tp}{q}$$

das ist,

$$\frac{y^2}{q} - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q} - \frac{2ny}{q} + \frac{2nrx}{q} + \frac{n^2}{q} = \frac{tsx + tp}{q}$$

Tab. V.

Fig. 48.

Im anderen Falle sey $DK = PN = n$, $AK = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = s$, $DQ = IM = y$, $QM = DI = x$; so ist (§. 184. Geom.).

DH

$$DH : HL = DQ : QN$$

$$q : r = y : \frac{ry}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$

$$q : s = y : \frac{sy}{q}$$

Demnach $AP = KP (= DN) = AK \frac{sy}{q} = p$ und

$PM = QM - QN - NP = x - \frac{ry}{q} - n$, folgender

weil r. $AP = PM^2$ (§. 217.).

$$\frac{x^2}{q} - \frac{2rxy}{q^2} + \frac{r^2y^2}{q^2} - \frac{2nx}{q} + \frac{2rny}{q} + n^2 = \frac{tsy}{q} - \frac{tp}{q}$$

das ist,

$$\frac{x^2}{q} - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q} - \frac{2nx}{q} + \frac{2rny}{q} + n^2 = 0$$

$$- \frac{tsy}{q} + \frac{tp}{q}$$

Wenn ihr nun die Glieder einer gegebenen Gleichung mit denen Gliedern einer von den gefundenen vergleicht, so könnet ihr in jedem Falle finden, wie groß die Linien DK, AK, DH und LH in dem vorkommenden Falle anzunehmen sind, oder welche von ihnen gar weg bleiben, und solchergestalt, den verlangten Ort beschreiben.

§. E. Es sey $y - ax = 0$; so ist vermöge der ersten Gleichung

$$\begin{array}{rcl} \frac{-2r=0}{q} & \frac{-2n=0}{n=0} & \frac{-tf=-a}{q} \quad \frac{n^2+tp=0}{p=0} \\ \hline r=0, q=s & & t=a \end{array}$$

Tab. V.
Fig. 47.

Weil demnach $LH=0$, und $DK=0$; so fällt die Linie DH auf KP und, weil $AK=0$, der Punkt K in A , folgendes DQ in AP und QM in PM , und ist weiter nichts nöthig, als daß mit dem Parameter a eine Parabel beschrieben wird. Denn so ist $AP=x$ und $PM=y$.

Wiederum es sey $y^2 - ay - bx + \frac{1}{4}aa = 0$; so ist vermöge der ersten Gleichung

$$\begin{array}{rcl} \frac{-2r=0}{q} & \frac{-2n=-a}{n=\frac{1}{2}a} & \frac{-tf=-b}{q} \\ \hline r=0, q=s & & t=b \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} n^2+tp & = & \frac{1}{4}aa \\ \hline \frac{1}{4}aa+bp & = & \frac{1}{4}aa \\ \hline bp & = & 0 \\ \hline p & = & 0 \end{array}$$

Tab. V.
Fig. 47.
Tab. IV.
Fig. 49.

Weil demnach $LH=0$, so fällt DH auf DL . Weil $KA=0$; so fällt K in A . Solchergehalt wird mit dem Parameter b eine Parabel AMR beschrieben, auf der Axe AB in A ein

ein Perpendicular $AL = \frac{1}{2}a$ aufgerichtet, und LQ mit AB, QM aber mit LA parallel gezogen; so ist $LQ = x$, $QM = y$. Denn weil $PM = y - \frac{1}{2}a$; so ist

$$y^2 - ay + \frac{1}{4}aa = bx \quad (\S. 217.).$$

folgende $y^2 - ay - bx + \frac{1}{4}aa = 0$

Es sey $y^2 - ay - bx - cc = 0$; so ist vermöge der ersten Gleichung

$$\begin{array}{ccc} \frac{-2r=0}{q} & \frac{-2n=-a}{n=\frac{1}{2}a} & \frac{-tf=-b}{q} \\ r=0, q=f & & t=b \end{array}$$

$$\begin{array}{c} n^2 + tp = -cc \\ \frac{\frac{1}{4}aa + bp = -cc}{bp = -cc - \frac{1}{4}aa} \\ p = -cc - \frac{1}{4}aa \\ b \end{array}$$

Beschreibet mit dem Parameter b eine Parabel AMR und richtet in A auf die Axe AN eine Perpendicularlinie AH auf. Macher $AE = \frac{1}{2}a$, $AF = c$; so ist $EF = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + cc)}$. Macher $EF = AI = AG$ und $AH = b$; zieht die Linie HI und mit ihr GK parallel; so ist $AK = (cc + \frac{1}{4}aa) : b$. Wenn nun endlich EQ mit der Axe AN und DK, ingleichen QM mit EA
(Wolfs Mathes. Tom. IV.) Tttt pa

Tab. VI.
Fig. 50.

parallel gezogen werden; so ist $DQ = x$
 und $QM = y$. Denn $AP = EQ = AK +$
 $KP = cc + \frac{1}{4}aa + x$ und $PM = y - \frac{1}{2}a$, folgendes

weil $PM^2 = t \cdot AP$ (§. 217.).

$$y^2 - ay + \frac{1}{4}aa = cc + \frac{1}{4}aa + bx$$

das ist, $y^2 - ay - bx - cc = 0$.

Die 132. Aufgabe.

36. Einen Ort an einer Ellipsi zu be-
 schreiben.

Auflösung.

Tab. VI.
 Fig. 51.

Es sey in C der Mittelpunct der Aye, CK
 $= p$, $KD = PN = n$, $DH = q$, $LH = r$, $DI = s$,
 $AC = CB = m$, der Parameter $= t$, $DQ = x$,
 $QM = y$; so ist (§. 184. Geom.).

$$DH : LH = DQ : QN$$

$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$

$$q : f = x : \frac{fx}{q}$$

$$\text{Daher } CP = DN - KC = \frac{fx}{q} - p \text{ und } PM =$$

$$QM - QN - PN = y - \frac{rx}{q} - n. \quad \text{Da nun in}$$

der Ellipsi (§. 239.).

$$t : 2m = PM^2 : AP \cdot PB$$

$$\text{und } PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$$

$$AP = m + \frac{fx}{q} - p \quad \text{und} \quad PB = m - \frac{fx}{q} + p$$

$$\text{also } AP \cdot PB = m^2 - p^2 + \frac{2pfx}{q} - \frac{f^2x^2}{q^2} :$$

$$\text{so ist } y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 =$$

$$\frac{tm^2 - tp^2}{2m}$$

$$+ \frac{2tpfx}{2mq} - \frac{tf^2x^2}{2mq^2}, \text{ folgende}$$

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$

$$\begin{array}{r} + \frac{tf^2x^2}{2mq^2} - \frac{2tpfx}{2mq} + \frac{tp^2}{2m} \\ - \frac{tm^2}{2m} \end{array}$$

Wenn ihr die vorgegebene Gleichungen, wie vorhin in der Parabel, mit dieser allgemeinen vergleicht; so werdet ihr in jedem Falle den Ort an der Ellipsi beschreiben können.

$$\text{Z. E. Es sey } y^2 + \frac{cx^2}{b} + \frac{cdx}{b} - \frac{a^2c}{b} = 0;$$

so ist

$$\begin{array}{r}
 \frac{-2r=0}{q} \quad \frac{tf^2=c}{2mq^2} \quad \frac{-2n=0}{n=0} \quad \frac{-2tpf=cd}{2mq} \quad \frac{cd}{b} \\
 r=a, q=f \quad \frac{t=c}{2m} \quad \frac{b}{b} \quad \frac{-2p=d}{p=-\frac{1}{3}d} \\
 \frac{tp^2-tm^2=-a^2c}{2m \quad 2m \quad b} \\
 \frac{cp^2-cm^2=-a^2c}{b \quad b \quad b} \\
 \frac{p^2-m^2=-a^2}{\frac{1}{4}dd \mp aa=m^2} \\
 \sqrt{(\frac{1}{4}dd \mp aa)}=m
 \end{array}$$

Tab. VI.
Fig. 52.

Richtet demnach auf der Linie AB in C die Linie C = a perpendicular auf, und machet KC = $\frac{1}{2}d$; so ist KE = $\sqrt{(\frac{1}{4}dd \mp aa)}$. Machet CA = CB = KE; so ist AB die Aye der Ellipsis. Machet ferner CH = b und Cl = c; ziehet die Linie HI und mit ihr AG parallel; so ist GC der halbe Parameter. Machet endlich CO = CG und beschreibet über AO einen halben Circul; so ist CL die halbe kleine Aye, und ihr könnet die Ellipsis ALB (§. 257.) beschreiben, in welcher KP = x und PM = y. Denn CP = $x \mp \frac{1}{2}d$, AP = $\sqrt{(\frac{1}{4}dd \mp aa)} \mp x \mp \frac{1}{2}d$, PB = $\sqrt{(\frac{1}{4}dd \mp aa)} - x - \frac{1}{2}d$, und daher AP. PB = $aa - xx - dx$. Da nun c.b = PM²: AP. PB = y²: aa - xx - dx (§. 239.); so ist

$$y^2 =$$

$$y^2 = \frac{a^2 c}{b} - \frac{c x^2}{b} - \frac{c d x}{b}$$

folgendes $y^2 + \frac{c x^2}{b} + \frac{c d x}{b} - \frac{a^2 c}{b} = 0$

Zusatz.

362. Wenn man $t = 2m$ setzt, so kommet die Gleichung für alle Werter in Circul

$$\frac{y^2}{q} - \frac{2rx}{q^2} + \frac{r^2 x^2}{q^2} - \frac{2ny}{q} + \frac{2nr}{q} + \frac{n^2}{q} = 0$$

Die 133. Aufgabe.

363. Einen Ort an einer Hyperbel zu beschreiben.

Auflösung.

Es sey die Zwerchaxe $AB = 2m$, in C der Tab. VI. Mittelpunkt, $CK = p$, $KD = PN = n$, $DH = q$, Fig. 53. $LH = r$, $DL = f$, $DQ = x$, $QM = y$, der Parameter $= t$; so ist (§. 184. Geom.).

$$DH : HL = DQ : QN$$

$$qr : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$

$$q : f = x : \frac{fx}{q}$$

$$\text{Also ist } CP = DN (=KP) - CK = \frac{fx}{q} - p \text{ und}$$

$$PM = QM - QN - PN = y - \frac{rx}{q} - n.$$

$$\text{Nun ist } t : 2m = PM^2 : AP \cdot PB (\S. 260.), \text{ und}$$

$$PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2 x^2}{q^2} - \frac{2ny}{q} + \frac{2nrx}{q} + n^2$$

$$AP \cdot PB = (CP - CA)(CP + CA) = CP^2 - CA^2 \\ = \frac{f^2 x^2}{q^2} - \frac{2pfx}{q} + p^2 - m^2$$

Derowegen

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2 x^2}{q^2} - \frac{2ny}{q} + \frac{2nrx}{q} + n^2 \\ = t \frac{f^2 x^2}{q^2} - \frac{2tpfx}{q} + tp^2 - tm^2, \text{ folgendes}$$

$$\frac{2mq^2}{y^2} - \frac{2mq}{2rxy} + \frac{2m}{r^2 x^2} - \frac{2m}{2ny} + \frac{2m}{2nrx} + \frac{2m}{n^2} = 0 \\ - \frac{q}{t \frac{f^2 x^2}{q^2}} + \frac{q^2}{2tpfx} + \frac{q}{tm^2} \\ \frac{2mq^2}{2mq^2} - \frac{2mq}{2mq} - \frac{2m}{2mq} - \frac{tp^2}{2m}$$

Wels

Welche Gleichung eben so wie die vorigen
gebraucher wird (§. 360. 361.).

Die 134. Aufgabe.

364. Einen Ort an einer Hyperbel
zwischen ihren Asymptoten zu beschrei-
ben.

Auflösung.

Es seyn SA und AR die Asymptoten einer Tab. VI:
Hyperbel. Ziehet DL mit der einen AR pa. Fig. 54.
rallel, und nach Belieben die Linie DH; hin-
gegen KD, QM, LH, IR mit der anderen AS
parallel. Es sey ferner $KD = PN = n$, KA
 $= p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = f$, $DQ = x$,
 $QM = y$. $RI = m$, $AR = DL = s$; so ist
(§. 184. Geom.).

$$DH : HL = DQ : QN$$

$$q : r = x : rx$$

$$DH : DL = DQ : DN$$

$$q : f = x : \frac{qx}{q}$$

$$\text{Derowegen ist } AP = DN - AK = \frac{qx}{q} - p$$

$$\text{und } PM = QM - PN - NQ = y - n - \frac{q}{rx}, \text{ folgendes, weil } AR. RI = AP. PM$$

$$\frac{q}{rx} \quad (\S. 281.).$$

$$\begin{array}{r}
 mf = \frac{f y x}{q} - \frac{f r x^2}{q^2} - p y - \frac{f n x}{q} + \frac{p r x}{q} + p n \\
 \hline
 q m f = \frac{f y x}{q} - \frac{f r x^2}{q^2} - q p y - \frac{f n x}{q} + \frac{p r x}{q} + p n q \\
 \hline
 q m = \frac{y x}{q} - \frac{r x^2}{q} - \frac{q p y}{f} - \frac{n x}{f} + \frac{p r x}{f} + \frac{p n q}{f} \\
 \hline
 y x - \frac{r x^2}{q} - \frac{q p y}{f} + \frac{p r x}{f} + \frac{p n q}{f} = 0 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad - n y - m q
 \end{array}$$

Tab. VI.
Fig. 55.

Wenn alles wie vorhin bleibt, nur daß TM mit DH parallel gezogen und $QM = DT = x$, hingegen $TM = QD = y$ angenommen wird; so findet man wie vorhin.

$$\begin{array}{r}
 x y - \frac{r y^2}{q} - \frac{p q x}{f} + \frac{p r y}{f} + \frac{p n q}{f} = 0 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad - n y - m q
 \end{array}$$

Welche beyde Gleichungen eben wie die vorigen gebraucht werden.

Anmerkung.

365. Wenn man die gefundenen allgemeinen Gleichungen für die geometrischen Orter gegeneinander hält; so wird man folgende Regeln wahrnehmen, das durch man urtheilen kan, ob eine gegebene Gleichung ein Ort an einer Parabel, oder Ellipsi, oder Hyperbel, oder einem Circul sey. Nämlich wenn xy in einer Gleichung vorhanden, und 1. nur ein Quadrat entweder von x , oder von y durch andere Grössen multipliciret vorkommet; so ist der Ort an einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten. 2. Wenn das Quadrat

drat von x^2 oder y^2 durch das Quadrat der halben Gröſſe multipliciret iſt, durch welche man xy multipliciret befindet; ſo iſt der Ort an einer Parabel. 3. Wenn x^2 und y^2 beyde das Mehrzeichen $+$ haben; ſo iſt der Ort an einer Ellipſi oder einem Circul: und zwar ſiehet man, daß er an einem Circul ſey, wenn man $x:2m = 1$ findet. 4. Endlich wenn x^2 und y^2 verſchiedene Zeichen haben; ſo iſt der Ort an einer Hyperbel, die um ihre Aſe beſchrieben worden: welche beyde letztere Regeln 5. auch gelten, obgleich xy fehlet. Hingegen iſt 6. in dieſem letzteren Falle in dem Orte an der Parabel auch x^2 nicht vorhanden.

Die 135. Aufgabe.

366. Eine cubiſche und biquadratiſche Gleichung geometriſch auszuführen.

Auſlösung.

1. Wenn in der Gleichung nur eine unbekandte Gröſſe vorhanden als y , ſo nimmet man noch eine x dazu, und bringet die vorgegebene Gleichung auf geometriſche Derter.
2. Wenn man zwey von dieſen Dertern gebührend beſchreibet, daß nemlich die Linien x und y beyderſeits aufeinander fallen; ſo giebet der Durchſchnitt beyder Derter den verlangten Werth von y .

3. E. Die vorgegebene Gleichung ſey $y^3 + aby = a^2c$; ſo iſt $a:y = y^2 + ab:ac$

Sehet $a:y = y:x$

ſo iſt I. $ax = y^2$

Et t t t 5

da

daher $x = y^2 : a$
 ingeleichen $y : x = y^2 \mp ab : ac$
 $= ax \mp ab : ac$
 $= x \mp b : c$

II. $x^2 \mp bx = cy$

$$ax = y^2$$

$$ax = y^2$$

$$x^2 \mp bx = cy$$

$$x^2 \mp bx = cy$$

III. $ax - x^2 - bx = y^2 - cy$ IV. $ax \mp x^2 \mp bx = y^2$
 $\mp cy$

Ferner $x^2 \mp bx = cy$

$$y^3 \mp aby = a^2 c$$

das ist $x^2 \mp by^2 = cy$

$$axy \mp aby = a^2 c$$

a

V. $y^2 \mp ax^2 = acy$
 $\frac{b}{b}$

IV. $xy \mp by = ac$

Solchergehalt findet man

I. $y^2 - ax = 0$ an der Parabel.

II. $x^2 \mp bx - cy = 0$ an der äusseren Parabel.

III. $y^2 \mp x^2 - cy \mp bx = 0$ an dem Circul.
 $- ax$

IV. $y^2 - x^2 \mp cy - ax = 0$ an der Hyperbel.
 $- bx$

V. $y^2 \mp ax^2 - acy = 0$ an der Ellipsi.
 $\frac{b}{b}$

VI. $xy \mp by - ac = 0$ an der Hyperbel zwis-
 schen ihren Asymptoten.

Weil

Weil sich der Circul am leichtesten beschreiben lässt; so kan man ihn mit einem von den übrigen fünf Vertern beschreiben und dadurch den Werth von y finden.

Beschreibet demnach mit dem Parameter Tab. VII. a eine Parabel (§. 220.); so ist in ihr eine jede Abscisse $DP = x$, eine jede Semiordinate aber $PM = y$ (§. 217.). Fig. 56.

Für den Circul ist (§. 362.).

$$\frac{2r = 0}{q} \quad \frac{-2n = -c}{n = \frac{1}{2}c} \quad \frac{-2p = b - a}{p = a - b}$$

$$r = 0, q = f \quad \quad \quad 2$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

Das ist $\frac{1}{4}c^2 + (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2 = m^2$

$$\sqrt{\frac{1}{4}c^2 + (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2} = m$$

Derowegen traget auf eine gerade Linie A Fig. 57. B aus C in $K \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ und richtet in K die Linie $KD = \frac{1}{2}c$ perpendicular auf; so ist CD der Radius des Circuls DAMB. Wenn ihr selbigen beschreiben; so ziehet DP mit AB parallel, und ihr habet $DP = x, PM = y$.

Nun siehet man leicht, wie der Circul mit der Parabel zu vereinigen, damit die Linien DP und PM auf einander fallen. Richtet nemlich in D die Linie $DK = \frac{1}{2}c$ perpendicular auf; ziehet KQ mit DP parallel, und machet $KC = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Endlich beschreibet mit CD durch Fig. 56. 57.

durch den Scheitelpunct D den Circul; so ist $PM=y$.

Denn $DP=KQ=y^2$ (§. 222.) und daher

$$CQ = KQ - KC = \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}b. \quad \text{Ferner}$$

ist $QM=PM-DK=y-\frac{1}{2}c$, folgendes

$$QC^2 = \frac{y^4}{a^2} - \frac{y^2}{a} \mp \frac{1}{4}a^2 \mp \frac{by^2}{a} - ab \mp \frac{1}{4}bb$$

$$QM^2 = y^2 - cy \mp \frac{1}{4}cc$$

$$CM^2 = \frac{y^4}{a^2} \mp \frac{by^2}{a} - cy \mp \frac{1}{4}c^2 \mp \frac{1}{4}a^2 - ab \mp \frac{1}{4}b^2$$

$$CM^2 = DC^2 = \frac{1}{4}c^2 \mp \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab \mp \frac{1}{4}b^2 \text{ subtr.}$$

$$\frac{y^4}{a^2} \mp \frac{by^2}{a} - cy = 0$$

$$\frac{y^3}{a^2} \mp aby - a^2c = 0 \quad y : a^2$$

Auf eben solche Art kan man die Werter an der Ellipsi und der Hyperbel beschreiben und den Circul darauf tragen, damit man den Werth von y findet: welches in folgenden Aufgaben durch wahre Exempel soll erkläret werden.

Es sey die vorgegebene Gleichung $y \mp 2by^3 \mp a^2cy = a^3d$. Weil $y^4 \mp 2by^3 = a^3d - a^2cy^3$; so ist

a^2

$$a^2 : y^2 = y^3 \mp 2by : ad - cy$$

Setzet $a : y = b \mp y : x$

so ist I. $ax = by \mp y^2$

$$ax - by = y^2$$

daher $a^2 : ax - by = ax \mp by : ad - cy$

II. $a^3 d - a^2 c = a^2 x^2 - b^2 y^2$

Setzet ferner für y^2 seinen Werth $ax - by$; so ist

$$a^3 d - a^2 c y = a^2 x^2 - ab^2 x \mp b^3 y$$

folgendes III. $ad - cy - b^3 y = x^2 - b^2 x$

$$y^2 \mp by = ax$$

IV. $y^2 \mp by \mp ad - cy - b^3 y = x^2 \mp ax - b^2 x$

V. $y^2 \mp by - ad \mp cy \mp b^3 y = ax - x^2 \mp b^2 x$

Solchergeſtalt findet man

I. $y^2 \mp by - ax = 0$ an der Parabel.

II. $y^2 - \frac{a^2 x^2}{b^2} - \frac{a^2 c y}{b^2} \mp \frac{a^3 d}{b^2} = 0$ an der Hyperbel.

III. $x^2 - \frac{b^2 x}{a} \mp cy - ad = 0$ an der äußeren Parabel.

$$\mp \frac{b^3 y}{a^2}$$

IV.

$$\text{IV. } y^2 - x^2 - \frac{b^2 y}{a^2} \pm \frac{b^2 x}{a} \pm aa = 0 \text{ an der gleichseitigen Hyperbel.}$$

$$\pm by - ax - cy$$

$$\text{V. } y^2 \pm x^2 \pm \frac{b^2 y}{a^2} - \frac{b^2 x}{a} - ad = 0 \text{ an dem Circul.}$$

$$\pm by - ax \pm cy$$

Wenn man nun alle diese Orter (§. 360. 362. 363. beschreibt, und die an den Kegelschnitten mit dem an dem Circul, wie vorhin verknüpft; so hat man der gegebenen Gleichung auf vielerley Art ein Gnügen gethan.

Anmerkung.

367. Ich halte es für rathsamer, daß ich die vornehmsten Fälle, so vorkommen können, durch wahre Exempel erläutere.

Die 136. Aufgabe.

368. Zwischen zwey gegebenen Linien zwey mittlere Proportionallinien zu finden.

Auflösung.

Tab. VII.
Fig. 58.

Es sey die kleine $= a$ von den gesuchten
die grosse $= b$ die kleine $= y$
die grosse $= x$

so ist

$$\frac{a:y=y:x}{\text{I. } ax = y^2}$$

$$\frac{y:x=x:b}{\text{II. } by = x^2} \quad a:y$$

$$a:y=x:b$$

$$y^2=ax$$

$$\text{III. } ab=xy$$

$$\text{IV. } by-y^2=x^2-ax$$

$$ax=y^2$$

$$x^2=by$$

$$x^2=by$$

$$\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}by$$

$$\text{V. } x^2+ax=y^2+by$$

$$ax=y^2$$

$$\text{VI. } \frac{1}{2}x+ax=\frac{1}{2}by+y^2$$

$$\text{VII. } ax-\frac{1}{2}x^2=y^2-\frac{1}{2}by$$

Solchergehalt bekommt man folgende
Orter:

I. $y^2-ax=0$ an der Parabel.

II. $x^2-by=0$ an der äußeren Parabel.

III. $xy-ab=0$ an der Hyperbel zwischen den
Asymptoten.

IV. $y^2+x^2-by-ax=0$ an dem Circul.

V. $y^2-x^2+by-ax=0$ an der gleichseitigen
Hyperbel.

VI. $y^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}by-ax=0$ an der ungleich-
seitigen Hyperbel.

VII. $y^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}by-ax=0$ an der Ellipsi.

I. Wenn man demnach mit dem Paramet. Tab. VII.
ter a eine Parabel DCM beschreibt; so ist der Fig. 59.
erste Ort beschrieben und $DQ=x, QM=y$.

Für den Circul ist (§. 362.).

$$\frac{-2r=0, -2n=-b, -2p=-a, n^2+p^2=m^2}{q \quad n=\frac{1}{2}b \quad p=\frac{1}{2}a, \sqrt{(\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}a^2)}=m}$$

$$r=0, q=f$$

Tab. VII.

Fig. 60.

Traget also auf eine gerade Linie BG aus C in $K \frac{1}{2}a$, richtet in K das Perpendicular $KD = \frac{1}{2}b$ auf; so ist $CD = \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2)}$ der Radius des Circuls DBMG und darinnen $QD = x$, $QM = y$.

Tab. VII.

Fig. 59.

Weil nun der Punct D in den Scheitel Punct der Parabel fällt; so richtet auf der Axe DQ die Linie $DK = \frac{1}{2}b$ perpendicular auf, ziehet aus K die Linie KG mit DQ parallel, machet $KC = \frac{1}{2}a$, und beschreibet aus C durch D den Circul DBMG; so ist $DQ = x$ und $QM = y$ in dem gegebenen Falle.

Wenn man in der Gleichung $xy = ab$ vor x seinen Werth $y^2 : a$ aus der Gleichung $ax = y^2$ setzt: so bekommt man $y^3 = a^2b$, oder $y^3 - a^2b = 0$. Und diese Gleichung dienet füglich zu erweisen, daß die Linie y recht gefunden worden. Denn weil $DK = \frac{1}{2}b$ und $KC = \frac{1}{2}a$; so ist $DC^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb$ (§. 172. Geom.). Wiederum weil $QM = y$ und der Parameter von der Parabel $= a$; so ist $DQ = KP = y^2 : a$ (§. 222.) und daher $CP = y^2 : a - \frac{1}{2}a$, hingegen $PM = y - \frac{1}{2}a$, folgendes

$$CP = \frac{y^4 - y^2 + \frac{1}{4}aa}{a^2}$$

$$PM^2 = \frac{y^2 - by + \frac{1}{4}bb}{a^2}$$

$$CM^2 = \frac{y^4 - by^2 + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb}{a^2}$$

CM²

$$CM^2 = CD^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$$

$$\frac{y^4 - by = 0}{a^2}$$

$$a^2$$

$$y^3 - a^2b = 0$$

$$y^3 - a^2b = 0$$

II. Für die Ellipse ist (§. 361.).

$$\frac{-2r = 0}{q} \quad \frac{t = \frac{1}{2}}{2m}$$

$$\frac{-2n = \frac{1}{2}b}{n = \frac{1}{4}b}$$

$$r = 0 \quad q = f \quad \frac{t; 2m = 1; 2}{p = a}$$

$$\frac{-2tp = -a}{2m}$$

$$n^2 - tm^2 + tp^2 = 0$$

$$p = a$$

$$\frac{\frac{1}{16}b^2 - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}a^2 = 0}{\frac{1}{15}b + \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}m^2}$$

$$\frac{\frac{1}{8}b + a^2 = m^2}{\sqrt{(\frac{1}{8}b^2 + a^2)} = m = t}$$

Demnach ist (§. 247.) die halbe kleine Axe
 $= \sqrt{(\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{2}a^2)}$.

Machet $BC = a$ und richtet $AB = \frac{1}{4}b$ darauf Tab. VII.
 perpendicular auf; so ist $AC = \sqrt{(\frac{1}{16}b^2 + a^2)}$. Fig. 61.
 Richtet ferner auf AC die Linie $AD = \frac{1}{4}b$ per-
 pendicular auf; so ist $DC = \sqrt{(\frac{1}{8}b^2 + a^2)}$, das
 ist, die halbe grosse Axe.

(Wolfs Mathes. Tom. IV.) Uuuu Gleich

Tab. VII.
Fig. 62.

Gleichergestalt richtet auf $EF = \frac{1}{4}b$, $EG = \frac{1}{2}a$ perpendicular auf; so ist $GF = \sqrt{(\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{4}a^2)}$. Richtet ferner $GH = \frac{1}{2}a$ auf GF perpendicular auf; so ist $FH = \sqrt{(\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{2}a^2)}$, das ist, die halbe kleine Aye.

Tab. VII.
Fig. 63.

Traget nun auf die Linie AB aus A in E und aus E in B die halbe grosse Aye: ziehet durch E die Linie HI auf AB perpendicular, und machet EH und EI der halben kleinen Aye gleich; so könnet ihr (§. 257.) die Ellipsin AHBI beschreiben. Machet ferner $EL = a$ und ziehet $LD = KL = \frac{1}{4}b$ auf AB perpendicular, hingegen KG und DF mit AB parallel. Endlich traget auf KG aus K in C $\frac{1}{2}a$ und beschreibet aus C durch D einen Circul; so ist abermahl $DQ = x$ und $QM = y$. Denn weil $PM = y - \frac{1}{4}b$; so ist $PM^2 = y^2 - \frac{1}{2}by + \frac{1}{16}b^2$. Wiederum weil $EP = x - a$, $AE = \sqrt{(\frac{1}{8}b^2 + a^2)} = m$, folgendes $AP = m + x - a$ und $PB = m - x + a$; so ist $AP \cdot PB = m^2 + 2ax - x^2 - \frac{1}{8}b^2 + 2ax - x^2$. Derowegen da $AP \cdot PB = PM^2 = 2m : t = 2 : 1$ (§. 239.); so ist

$$\frac{2y^2 - by + \frac{1}{8}b^2 = \frac{1}{8}b^2 + 2ax - x^2}{y^2 - \frac{1}{2}by = ax - \frac{1}{2}x^2}$$

Im Circul wird gefunden $y^2 - by = ax - x^2$. Wenn ihr diese beyde Gleichungen von einander abziehet; so bleibt übrig $-\frac{1}{2}by = -\frac{1}{2}x^2$. Demnach ist $by = x^2$, folgendes $y : x = x : b$. Wenn ihr ferner für x^2 in der Gleichung

Gleichung für den Circul *by* sehet; so bekommet ihr $y^2 = ax$ folgendes $a : y = y : x$. Und solchergestalt sind die Linien DQ und QM richtig gefunden worden.

III. Für die gleichseitige Hyperbel ist (§. 363.).

$$\begin{array}{l} \frac{2r=0}{q}, \frac{-t=-1}{2m} \quad -2n=b \quad 2p=-a \\ \hline n=-\frac{1}{2}b \quad p=-\frac{1}{2}a \\ r=0, q=f, t=2m \\ n^2 + m^2 - p^2 = 0 \\ \hline m^2 = p^2 - n^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2 \\ \hline m = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2\right)} \end{array}$$

Weil $\frac{1}{4}b^2$ von $\frac{1}{4}a^2$ abgezogen werden muß; Tab. VII. so müßet ihr hier für b die kleine und für a Fig. 60. die grosse Linie annehmen, und solches auch bei dem Circul in acht nehmen, daß nemlich die Linien CK und KD mit einander verwechselt werden. Wenn ihr dieses in acht nehmet; so könnet ihr die verlangte Linien vermittelst der Hyperbel solchergestalt finden. Ueber $AB = \frac{1}{2}b$ beschreibet einen halben Circul. Darein traget $BC = \frac{1}{2}a$; so ist $AC = \sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2\right)}$ oder wenn a die grosse, b die kleine heissen sollte, $\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2\right)}$, das ist, die halbe Axe. Tab. VII. Fig. 64.

Tab. VII.
Fig. 65.
40.

Traget nun auf eine gerade Linie aus G in A und B die halbe Aye, richtet in A die Linie $AI = AG$ perpendicular auf, und beschreibet aus dem Mittelpuncte G durch I einen halben Circul FIf; so sind in F und f die Brennpuncte (§. 265.) und ihr könnet die Hyperbel (§. 271.) beschreiben. Wenn dieses geschehen, so machet $EG = \frac{1}{2}b$, richtet in E die Perpendicular-Linie EK auf, und machet $ED = DK = \frac{1}{2}a$. Zieheth durch D und K die Linien DQ und KP mit der Aye AL parallel. Traget aus K in C $\frac{1}{2}b$, und beschreibet aus C durch D einen Circul. Endlich ziehet aus M die halbe Ordinate LM; so ist $DQ = x$, $QM = y$.

Denn $LM = y \mp \frac{1}{2}a$, $EA = GE - AG = \frac{1}{2}b - \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2)}$ oder $EA = \frac{1}{2}b - m$ und daher $AL = EA \mp EL = x \mp \frac{1}{2}b - m$, $BL = x \mp \frac{1}{2}b \mp m$. Also ist $LM^2 = y^2 \mp ay \mp \frac{1}{4}a^2$ und $AL \cdot LB = x^2 \mp bx \mp \frac{1}{4}b^2 - m^2 = x \mp bx \mp \frac{1}{2}a^2$. Also ist

$$y^2 \mp ay \mp \frac{1}{4}a^2 = x^2 \mp bx \mp \frac{1}{4}a^2 \quad (\S. 290.)$$

$$y^2 \mp ay = x^2 \mp bx$$

$$\text{Im Circul } y^2 - ay = bx - x^2 \text{ Subtr.}$$

$$\text{Demnach } 2ay = 2x^2$$

$$ay = x^2$$

$$\text{folgendes } y : x = x : a$$

Setzet ferner in der Gleichung für den Circul ay für x^2 ; so bekommet ihr

$$y^2 - ay = bx - ay$$

Das ist $y^2 = bx$

folgendes $b:y = y:x$

IV. Auf eben diese Art kan man durch die ungleichseitige Hyperbel der Aufgabe ein Gnügen thun. Wollet ihr aber

V. Die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten gebrauchen; so richtet HD auf DI perpendicular auf, machet $DE = a$ und $EL = b$; theilet EL in zwey gleiche Theile in N oder machet $DK = \frac{1}{2}b$ und ziehet KN mit DE parallel. Traget aus K in C $\frac{1}{2}a$ und beschreibet aus C durch D den Circul DELM. Endlich beschreibet auch durch L die Hyperbel TLMS, und aus M, wo sie den Circul durchschneidet, ziehet QM mit DH oder auch PM mit DQ parallel; so ist $DQ = PM = x$, $DP = QM = y$. Denn vermöge der Hyperbel ist (§. 281.).

Tab. VII
Fig. 66.
60.

$$DE:DP = PM:EL$$

$$a : y = x : b$$

daher
und

$$y - a : a = b - x : x$$

$$y - a : b - x = a : x \text{ (§. 142.)}$$

Vermöge des Circuls ist $y^2 - ay = bx - x^2$,
und daher

$$y - a : b - x = x : y$$

daher $a : x = x : y$

Es ist aber auch $a : x = y : b$

Derowegen $x : y = y : b$.

Zusatz.

369. Wenn die Seite eines Würfels a ist, die Seite des doppelten Würfels $= y$; so ist $2a^3 = y^3$, oder, wenn $2a = b$, $a^3 b = y^3$. Also muß man zwischen der Seite des Würfels und der doppelten Seite zwey mittlere Proportionallinien suchen; so ist die erste davon die Seite des doppelten Würfels.

Die 137. Aufgabe.

Tab. VII.
Fig. 66.

370. Eine gerade Linie AB, die nach Belieben in C getheilet worden, noch ferner in D dergestalt zu theilen, daß $CD : DB = AC^2 : CD^2$.

Auflösung.

Es sey $AC = a$, $CB = b$, $CD = y$; so ist $DB = b - y$, folgendes, weil $CD : DB = AC^2 : CD^2$,

$$y : b - y = a^2 : y^2$$

Setzet $a : y = y : x$

so ist I. $y^2 = ax$

und

$$y : b - y = a^2 : ax$$

$$= a : x \text{ (S. 142.)}$$

$$\text{II. } xy = ab - ay$$

Ferner $y^2 : by - y^2 = a : x$ (§. 142.)

$$ax : by - y^2 = a : x$$

$$x : by - y = 1 : x$$

$$\text{III. } x^2 = by - y^2$$

$$ax = y^2$$

$$\text{VI. } x^2 \mp ax = by$$

$$ax = y^2$$

$$\text{V. } x^2 \mp 2ax = y^2 \mp by$$

und $x^2 = by - y^2$

$$ax = y^2$$

$$\text{VI. } ax - x^2 = 2y^2 - by$$

Also bekommt man Gleichungen an folgenden Orten, nemlich

I. $y^2 - ax = 0$ an der Parabel.

II. $xy \mp ay - ab = 0$ an der Hyperbel zwischen den Asymptoten.

III. $y^2 \mp x^2 - by = 0$ an dem Circul.

IV. $x^2 \mp ax - by = 0$ an der äusseren Parabel.

V. $y^2 - x^2 \mp by - 2ax = 0$ an der gleichseitigen Hyperbel.

VI. $y^2 \mp \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}ax = 0$ an der Ellipsi.

Tab. VIII. Beschreibet demnach mit dem Parameter
Fig. 68. a eine Parabel; so ist $DQ=x$, $QM=y$.

Für den Circul ist (§. 362.).

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{2r=0}{q} & \frac{-2n=-b}{n=\frac{1}{2}b} & \frac{-2p=0}{p=0} \\
 \hline
 r=0 \quad q=f & & \\
 & \frac{n^2 - m^2 \mp p^2 = 0}{n^2 = m^2} & \\
 & \frac{\frac{1}{4}b^2 = m^2}{\frac{1}{2}b = m} &
 \end{array}$$

Tab. VIII. Wenn ihr demnach mit $AC=\frac{1}{2}b$ einen
Fig. 69. Circul beschreibet, und CD auf AB perpendicular aufrichtet; DL aber mit AB parallel zieht; so ist ein jedes $DQ=x$ und ein jedes $QM=y$. Denn $PM=y-\frac{1}{2}b$, $AP=\frac{1}{2}b \mp x$, $PB=\frac{1}{2}b-x$. Daher $PM^2=y^2-by \mp \frac{1}{4}b^2$ und $AP \cdot PB = \frac{1}{4}b^2 - x^2$, folgendes

$$\begin{array}{rcl}
 y^2 - by \mp \frac{1}{4}b^2 & = & \frac{1}{4}b^2 - x^2 \\
 \hline
 y^2 - by & = & -x^2 \\
 \hline
 y^2 \mp x^2 - by & = & 0
 \end{array}$$

Tab. VIII. Damit ihr nun x und y in unserem Falle
Fig. 68. findet; so setzet den Circul und die Parabel zusammen, dergestalt, daß der Punct D in die

die Scheitel der Parabel, und DL auf ihre Aye fällt. Nämlich richtet in D auf die Aye DR ein Perpendicular $DC = \frac{1}{2}b$ auf, und beschreibet aus C durch D den Circul; so ist $DQ = x$ und $QM = y$ in unserem Falle.

Denn $DQ = CS = y^2 : a$ und $SM = y - \frac{1}{2}b$, $CM = \frac{1}{2}b$. Derowegen weil $CM^2 = CS^2 + SM^2$, und $CM^2 = \frac{1}{4}b^2$, $CS^2 = y^4 : a^2$, $SM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$; so ist

$$\frac{\frac{1}{4}b^2}{a^2} = y^4 + y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$$

$$\frac{y^4 + y^2 - by}{a^2} = 0$$

$$\frac{y^4 + a^2 y^2 - a^2 b}{a^2} = 0$$

$$y^3 + a^2 - a^2 by = 0$$

daher $b - y : y = y^2 : a^2$

Weil die Gleichung der gegenwärtigen Aufgabe gar wenig unterschieden ist von derjenigen, die wir oben durch alle Kegelschnitte construirt (§. 368.); so wollen wir die übrigen Kegelschnitte übergehen.

Die 138. Aufgabe.

371. Einen rechtwinkllichten Triang. Tab. VIII. gel zu beschreiben, davon das eine Stü- Fig. 70.
cke CB von der größten Seite gegeben wird, welches der Perpendicul CD ab-
Uuuuu s schnei-

schneidet, der aus dem rechten Winkel D gefällt wird, und zwar von der Beschaffenheit, daß die Summe der Quadrate von dem andern Stücke AC und dem Perpendicular CD nebst einem Rectangulo aus dem Perpendicular CD in eine gegebene Linie FG gleich sey dem Rectangulo aus dem Stücke BC in das andere Stücke AC, und eine gegebene Linie HI.

Auflösung.

Es sey $BC = a$, $FG = b$, $HI = c$, $AC = x$, $CD = y$; so ist

$$CB : DC = DC : AC$$

$$a : y = y : x$$

$$\text{I. } ax = y^2$$

$$AC^2 + CD^2 + CD \cdot FG = BC \cdot (AC + HI)$$

$$x^2 + y^2 + by = ax + ac$$

$$\text{II. } y^2 + by = ax + ac - x^2$$

$$\text{daher } ax + by = ax + ac - x^2$$

$$\text{III. } by = ac - x^2$$

$$\frac{1}{2}by = \frac{1}{2}ac - \frac{1}{2}x^2$$

$$y^2 + by = ax + ac - x^2$$

$$\text{IV. } y^2 + \frac{3}{2}by = ax + \frac{3}{2}ac - \frac{3}{2}x^2$$

$$y^2 = ax$$

$$by = ac - x^2$$

$$V. y^2 - by = ax - ac \mp x^2$$

Wir haben demnach Gleichungen für folgende Orter:

I. $y^2 - ax = 0$ an der Parabel.

II. $y^2 \mp x^2 \mp by - ax - ac = 0$ an dem Circul.

III. $x^2 \mp by - ac = 0$ an der äusseren Parabel.

IV. $y^2 \mp \frac{3}{2}x^2 \mp \frac{3}{2}by - ax - \frac{3}{2}ac = 0$ an der Ellipsi.

V. $y^2 - x^2 - by - ax \mp ac = 0$ an der Hyperbel.

Wenn man in dem Orte an der äusseren Parabel $x^2 \mp by - ac = 0$ für x^2 seinen Werth $y^4 : a^2$ sehet; so bekommet man

$$\frac{y^4 \mp by - ac}{a^2} = 0$$

$$\text{daher } y^4 \mp a^2 by - a^3 c = 0$$

Voraus zu ersehen, daß man eine biquadratische Gleichung zu construiren hat.

I. Wenn man mit dem Parameter a eine Parabel beschreibet; so ist der Ort an der Parabel vorhanden.

II. Für den Ort an dem Circul ist

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{2r=0}{q} & \frac{-2n=b}{n=-\frac{1}{2}b} & \frac{-2p=-a}{p=\frac{1}{2}a} \\
 \hline
 r=c, q=f & & \\
 \hline
 n^2 + p^2 - m^2 = -ac & & \\
 \hline
 n^2 + p^2 + ac = m^2 & & \\
 \hline
 \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2 + ac = m^2 & & \\
 \hline
 \sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2 + ac\right)} = m & &
 \end{array}$$

Tab. VIII.
Fig. 71.

Machet demnach $RI = \frac{1}{2}b$ und richtet in I perpendicular auf $HI = \frac{1}{2}a$; so ist $HR = \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb\right)}$. Verlängert RH in L bis $RL = a$, und in O, bis $RO = c$. Beschreibet über OL einen halben Circul; so ist der Perpendicular $R = \sqrt{ac}$ (210. Geom.) folgendes $CH = \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb + ac\right)}$ der Radius des Circuls. Wenn ihr also aus C mit CH den Circul beschreiben und durch C die Linie AB mit OL parallel gezogen; so machet $CK = \frac{1}{2}a$. Richtet in K das Perpendicular $KD = \frac{1}{2}b$ auf, und ziehet die Linie DQ mit AB parallel; so ist der Ort an dem Circul beschrieben, und der Punct D der Ursprung von x , hingegen y wird bis an die Linie DQ gezogen.

Wenn ihr nun ferner damit den Ort in der Parabel verknüpfen, und dadurch x und y in dem gegebenen Falle determiniren wollet; so nehmet DQ für die Aye an und beschreibet darum mit dem Parameter a die Parabel.

Wo

Wo sie den Circul durchschneidet, nemlich aus dem Puncte M, lasset einen Perpendicular QM auf die Linie DQ fallen; so ist $DQ = x$, $QM = y$. Machet ihr nun $QS = a$ und ziehet die Linien DM und SM; so ist DMS der verlangte Triangel.

$$\text{Denn } DQ = KP = \frac{y^2}{a} \text{ und daher } CP = \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a.$$

Ferner $PM = PQ + QM = \frac{1}{2}b + y$. Des
rowegen

$$CP^2 = \frac{y^4}{a^2} - y^2 + \frac{1}{4}a^2$$

$$PM^2 = y^2 + by + \frac{1}{4}bb$$

$$CM^2 = \frac{y^2}{a^2} + by + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$$

$$CH^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + ac$$

$$\frac{y^4 + by - ac}{a^2} = 0$$

$$y^4 + a^2by - a^3c = 0$$

welches die biquadratische Gleichung ist, die man construiren sollen.

Wie diese Gleichung durch die übrige Regelschnitte construirt wird, ist aus der 136. Aufgabe (§. 368.) abzunehmen.

Die

Die 139. Aufgabe.

372. Eine allgemeine Regel zu finden, alle cubische und biquadratische Gleichungen zu construiren.

Auflösung.

Tab. VIII.
Fig. 72.

Es sey MAN eine Parabel und ihre Ase a O, mit welcher AP parallel, darauf DH perpendicular gezogen ist. Aus H als dem Mittelpuncte beschreibet durch A den Circul AMN. Nun sey $AD = b$, $DH = d$, $AQ = c$; so ist $AH^2 = dd + bb$. Es sey ferner $PM = x$, der Parameter der Parabel $= a$; so ist $OM = x + c$ und $KM = x + d$. Da nun (§. 233.).

$$a : OM + AQ = PM : AP (= QO)$$

$$a : x + 2c = x : \frac{x^2 + 2cx}{a}$$

$$\text{folgendes } DP = HK = \frac{x^2 + 2cx - b}{a};$$

$$\text{so ist } HK^2 = \frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + bb.$$

$$\text{Und weil } KM^2 = x^2 + 2dx + dd: \text{ so ist}$$

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + bb + x^2 + 2dx + dd = bb + dd, \text{ das ist}$$

x^4

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{4bcx}{a} = 0$$

$$- \frac{2bx^2}{a} + 2dx$$

$$+ x^2$$

$$x^3 + 4cx^2 + 4c^2x - 4abc = 0$$

$$- 2abc + 2a^2d$$

$$+ a^2x$$

Hieraus ist klar, daß, wenn das andere Glied das Mehr-Zeichen + hat, die wahren Wurzeln zur Rechten fallen. Vergleichet demnach mit dieser Gleichung folgende $x^3 + px^2 + qx + r = 0$; so findet ihr

$$\frac{c = \frac{1}{4}p}{4c^3 - 2ab + a^2 = q} \quad \frac{4c^2 2ab + a^2 = -q}{4c^2 + a^2 - q = 2ab} \quad \frac{4c^2 2ab + a^2 = -q}{4c^2 + a^2 + q = 2ab}$$

$$\frac{\frac{1}{16}p^2 + a^2 - q = 2ab}{\frac{1}{16}p^2 + a^2 + q = 2ab}$$

$$\frac{p^2 + \frac{1}{2}a - q = b}{8a} \quad \frac{p^2 + \frac{1}{2}a^2 + q = b}{8a} \quad \frac{p^2 + \frac{1}{2}a^2 + q = b}{2a}$$

$$\frac{2a^2d - 4abc = r}{2a^2d - 4abc + r}$$

$$\frac{2a^2d - 4abc = -r}{2a^2d - 4abc - r}$$

$$d =$$

$$\frac{d}{a} = \frac{2bc + r}{2a^2}$$

das ist,

$$\frac{d}{a} = \frac{2bc - r}{2a^2}$$

das ist,

$$\frac{d}{16a^2} = \frac{\frac{1}{4}p + p^3}{4a^2} + \frac{pq + r}{2a^2}, \quad \frac{d}{16a^2} = \frac{\frac{1}{4}p + p^3}{4a^2} + \frac{pq - r}{2a^2}$$

Setzet nun $PN = x$, und das übrige bleibe wie vorhin; so ist $NR = PN - RP = PN - DH = x - d$, $NO = x - c$, $PM = x - 2c$, $NR^2 = x^2 - 2dx + d^2$ und, weil (§. 233.)

$$a : ON + AQ = PM : AP$$

$$a : x = x - 2c : \frac{x^2 - 2xc}{a}$$

auch daher $DP = HR = \frac{x^2 - 2cx - b}{a}$, demnach

$$HR^2 = \frac{x^4 - 4cx^3 + 4c^2x^2 - 2bx^2 + 4bcx + b^2}{a^2}$$

folgende, da $HN^2 = HR^2 + NR^2$ (§. 172. Geom.),

$$\frac{x^4 - 4cx^3 + 4c^2x^2 - 2bx^2 + 4bcx + b^2}{a^2} + \frac{x^4 - 4cx^3 + 4c^2x^2 - 2bx^2 + 4bcx + b^2 + x^2}{a^2} - 2dx + dd = bb + dd$$

$$\frac{x^4 - 4cx^3 + 4c^2x^2 + 4bcx}{a^2} = 0$$

$$-2bx^2 - 2dx$$

$$+ x^2$$

$$\frac{x}{a^2} = x^3$$

$$\begin{aligned} x^3 - 4cx^2 + 4c^2x + 4abc &= 0 \\ - 2abx - 2a^2d \\ + a^2x \end{aligned}$$

Hieraus erhellet, daß, wenn das andere Glied das Minderzeichen — hat, die wahren Wurzeln zur Linken fallen. Man vergleiche demnach mit der gefundenen Gleichung folgende $x^3 - px^2 + qx + r = 0$; so ist

$$\begin{array}{rcl} \frac{-p - 4c}{\frac{1}{4}p} = \frac{4c^2 - 2ab + a^2 - q}{16p^2 + a^2 - q - 2ab} & \frac{4c^2 - 2ab + a^2 - q}{16p^2 + a^2 + q - 2ab} & \\ \frac{p^2 + \frac{1}{2}a - q = b}{8a} & \frac{p^2 + \frac{1}{2}a + q = b}{8a} & \\ \frac{4abc - 2a^2d = r}{4abc - r = 2a^2d} & \frac{4abc - 2a^2d = -r}{4abc + r = 2a^2d} & \\ \frac{2bc - r = d}{a} & \frac{2bc + r = d}{a} & \\ \frac{\frac{1}{4}p + p^3 + pq - r = d}{16a} & \frac{\frac{1}{4}p + p^3 + pq + r = d}{16a^2} & \end{array}$$

Also ist in allen vollständigen cubischen Gleichungen

$$\begin{aligned} AQ &= \frac{1}{4}p \\ DA &= \frac{1}{2}a + \frac{p^2 + q}{8a} \end{aligned}$$

$$DH = \frac{\frac{1}{4}p + p^3 + pq + r}{16a^2 \quad 4a^2 \quad 2a^2}$$

Nemlich q hat allezeit in der Regel—, wenn es in der Gleichung $\frac{1}{4}p$ hat, und hingegen $\frac{1}{4}p$, wenn hier—ist. Hingegen ist beständig $\frac{1}{4}p$, ausser wenn in der Gleichung p und r verschiedene Zeichen haben.

Wenn einige Glieder in der Gleichung fehlen; so müssen auch aus der Gleichung alle weggelassen werden, darinnen die dazu gehörige Buchstaben zu finden. Z. E. Wenn das andere Glied fehlet, so ist $\frac{1}{4}p = 0$, und daher $DA = \frac{1}{2}a \frac{q}{2a^2}$ und $DH = r$.

Wenn ihr das Quadrat von dem Radio des Circuls HM oder HN setzet $bb + dd + af$; so lasset sich die Gleichung auf keine cubische bringen, sondern sie bleibt biquadratisch. Wenn ihr nun damit die Gleichung $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + f = 0$ vergleicht; so bleibt alles, wie vorhin: nur wird gefunden $f = a^3 f$ und daher $f: a^3 = f$.

Solchergestalt werden die biquadratischen Gleichungen durch eben diese Regel construiert; nur daß der Radius des Circuls ($= \sqrt{bb + dd + af}$) anders gefunden wird, wie bereits in einem Exempel in der vorhergehenden Aufgabe (S. 731.) gezeigt worden.

An

Anmerkung.

373. Diese Regel nennet man insgemein die **Barroviſche Central-Regel**, weil ſie **Thomas Barrow**, ein Engelländer, gefunden. Ich halte es vor dienlich, ihren Gebrauch durch folgende Aufgaben zu erläutern.

Die 140. Aufgabe.

374. In einem rechtwinklichten Tri-
angel ABC wird gegeben das Stücker von Fig. 73.
der Hypotenuse BD, und das von der
Grundlinie EC, nebst dem Perpendicular A
B: man ſoll die Seiten BC und AC finden.

Auflösung.

$$\begin{array}{ll} \text{Es ſey } AB = a & DC = x \\ BD = b & AE = y \\ EC = c \text{ ſo iſt } BC = b + x & AC = c + y \end{array}$$

$$CD : DB = CE : EA$$

$$x : b = c : y$$

$$xy = bc$$

$$y = bc : x$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\begin{array}{l} b^2 + 2bx + x^2 = a^2 + c^2 + 2cy + y^2 \\ = a^2 + c^2 + 2bc^2 + b^2c^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} x & x^2 \end{array}$$

$$b^2x^2 + 2bx^3 + x^4 = a^2x^2 + c^2x^2 + 2bc^2x + b^2c^2$$

$$\text{das iſt, } x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2bc^2x - b^2c^2 = 0$$

$$-a^4x^2$$

$$-c^2x^2$$

$$x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2bc^2x - b^2c^2 = 0$$

Neh

Nehmet a für den Parameter an, und beschreibet eine Parabel. Weil

$p = 2b$, $q = b^2 - a^2 - c^2$, $r = -2bc^2$, $f = -b^2c^2$; so ist in der Bakerischen Central-Regel.

Tab. VIII. Fig. 71. $AQ = \frac{1}{2}b$ $DA = \frac{\frac{1}{2}a \mp \frac{8b^3 - b^2 \mp \frac{1}{2}a \mp c^2}{8a \quad 2a \quad 2a}}{2a}$
 $= a \mp c^2$

$DH = \frac{\frac{1}{2}b \mp \frac{8b^3 - 2b^3 \mp 2a^2b \mp 2bc^2 - 2bc^2}{16a^2 \quad 4a^2 \quad 4a^2 \quad 4a^2 \quad 2a^2}}{2a^2}$
 $= b - \frac{bc^2}{2a^2}$

Tab. VIII. Fig. 74. Beschreibet demnach mit dem Parameter a eine Parabel, machet $aQ = \frac{1}{2}b$, und in der Linie PQ , welche mit der Aye parallel gezogen, $AD = a \mp \frac{c^2}{2a}$ die Perpendicularlinie

$DH = b - \frac{bc^2}{2a^2}$. Wie die Linien $c^2 : 2a$ und b

$c^2 : 2a^2$ gefunden werden, ist aus den oben gefundenen Werthen von dergleichen Linien klar: nemlich $c^2 : 2a$ ist die halbe dritte Proportionallinie zu a und c , hingegen $bc^2 : 2a^2$ ist die vierdte zu a, b und $c^2 : 2a$. Durch H und A ziehet die Linie CB und machet $AB = a$, $AC = b^2c^2 : a^3$, welches die vierdte Proportional

tionallinie zu a, b und $bc^2 : a^2$ ist. Ueber CB beschreibet einen halben Circul, und richtet aus A den Perpendicular AE auf. Endlich beschreibet aus H mit HE einen Circul, welcher die Parabel in M durchschneidet; so ist $PM = x$.

$$\text{Denn } AD^2 = a^2 + c^2 + c^4$$

$$DH^2 = b^2 - \frac{b^2 c^2}{a} + \frac{b^2 c^4}{4a^2}$$

$$AH^2 = a^2 + b^2 + c^2 + c^4 - \frac{b^2 c^2}{a} + \frac{b^2 c^4}{4a^2}$$

$$\text{und } EH^2 = a^2 + b^2 + c^2 + c^4 + \frac{a^2 c^4}{4a^2}$$

Ferner ist (§. 233.)

$$a : OM + aQ = MP : PA$$

$$a : x + b = x : x^2 + bx$$

$$\text{daher } DP = HR = \frac{x^2 + bx}{a} - \frac{a - c^2}{2a}$$

$$\text{und weil } RM = x + b - bc^2, \text{ so ist}$$

$$RM^2 = x^2 + 2bx + bb - \frac{bc^2 x}{a^2} - \frac{b^2 c^2}{a^2} + \frac{b^2 c^4}{4a^2}$$

¶¶¶¶ 3

HR²

$$\begin{array}{r}
 \text{HR}^2 = \underbrace{x^4}_{a^2} + \underbrace{2bx^3}_{a^2} + \underbrace{b^2x^2}_{a^2} - 2x^2 - 2bx + \underbrace{a^2 - c^2x}_a \\
 \quad \quad \quad \underbrace{-bc^2x}_{a^2} + \underbrace{c^2 + c^4}_{4a^2}
 \end{array}$$

Wenn man nun von der Summe dieser beyden Quadrate das Quadrat von EH abziehet; so bleibet

$$\begin{array}{r}
 \underbrace{x^4}_{a^2} + \underbrace{2bx^2}_{a^2} + \underbrace{b^2x^2}_{a^2} - \underbrace{2bc^2x}_{a^2} - \underbrace{b^2c^2}_{a^2} = 0 \\
 \quad \quad \quad -x^2 \\
 \quad \quad \quad -c^2x^2 \\
 \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad a^2
 \end{array}$$

übrig, und demnach ist

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2bc^2x - b^2c^2 = 0 \\
 \quad \quad \quad -a^2x^2 \\
 \quad \quad \quad -c^2x^2
 \end{array}$$

Ende des ersten Theiles.



Der

Der andere Theil
Von den
Anfangs-Gründen
der

Differential- Rechnung.

Die 1. Erklärung.

^{1.}
Die Differential-Rechnung ist eine Wissenschaft aus einer gegebenen endlichen Grösse eine unendlich kleine zu finden, deren unendliche zusammen genommen ihr gleich werden.

Anmerkung.

2. Der Herr Geheimde Rath von Leibniz hat diese Rechnung gefunden. Es ist aber der tiefsinnige Geometra *Isaac Newton* in Engelland auf eben dergleichen Gedanken kommen, wie wohl er eine andere Manier hat, die unendlich kleinen Grössen zu bezeichnen, und auch die Rechnung selbst mit einem andern Namen nennet, nemlich *Methodum Fluxionum*.

Die 2. Erklärung.

3. Eine unendlich kleine Grösse ist diejenige, welche so ein geringer Theil von der andern ist, daß er mit ihr nicht verglichen werden kan.

Der 1. Zusatz.

4. Dannenhero ist sie in Ansehung derjenigen

nigen Grösse, mit welcher sie nicht verglichen werden kan, für nichts zu halten.

Der 2. Zusatz.

5. Folgendes wenn eine unendlich kleine Grösse zu einer anderen addiret, oder von ihr subtrahiret wird, so ist in dem ersten Falle die Summe, in dem anderen die Differenz der gegebenen gleich zu achten, das ist, eine unendlich kleine Grösse kan eine endliche weder vermehren noch vermindern.

Die 1. Anmerkung.

6. Mercket aber wohl, daß eine unendlich kleine Grösse nur in Ansehung einer anderen für nichts zu achten; in sich aber nicht nichts ist. Denn bildet euch ein, ihr wollet die Höhe eines Berges messen, und indem ihr über der Arbeit begriffen wäret, jagte der Wind ein Körnlein Sand von der Spitze weg. So wäre der Berg um den Diameter eines Sandkörnleins niedriger worden. Allein da die Ausmessung der Höhe eines Berges so beschaffen ist, daß die Höhe einerley gefunden wird, ob das Sandkörnlein liegen bleibet, oder von dem Winde weggejaget wird: so kan man das Sandkörnlein in Ansehung eines grossen Berges für nichts und also seine Grösse in Ansehung der Höhe des Berges für unendlich kleine halten. Dieses hat man schon längst überall in acht genommen, wo man die Geometrie bey körperlichen Dingen in der Natur anbringeret. Also setzen wir in der Astronomie, der Diameter der Erde sey in Ansehung der Weite von der Sonne und noch mehr der Fixsterne für einen Punct oder unendlich kleine zu halten, weil die erste Bewegung der Sterne sich eben so verhalten würde, wenn die Erde wirklich ein untheilbarer Punct wäre. So halten wir in den Mondfinsternissen die Erde für eine
voll.

vollkommene Kugel, und also die Höhen der Berge in Ansehung des Diameters der Erde für unendlich kleine oder für nichts; weil der Schatten der Erde sich auf dem Monden nicht anders darstellen würde, wenn die Berge nicht da wären und die Erde die völlige Gestalt einer Kugel hätte. Da man nun auch in der Geometrie grossen Vortheil davon hat, wenn man die Grössen in unendlich kleine Theile in Gedanken theilet, das ist, in so kleine, die in Ansehung ihrer für nichts zu halten sind, indem man daraus die endlichen Grössen öfters determiniren, und ihre verborgene Eigenschaften auf die allerleichteste Manier finden kan: wer will es den Geometris verdencken, daß sie dergleichen vornehmen?

Die 2. Anmerkung.

7. Ihr wiisset aus der gemeinen Geometrie, daß eine Linie beschrieben wird, wenn ein Punct sich durch einen gewissen Raum bewegt; eine Fläche, wenn eine Linie ein Körper, wenn eine Fläche sich bewegt. Also erwachsen die Grössen, indem unendlich viel kleine Theile nach einander anwachsen. Und in dieser Absicht nennet sie *Newton* Fluxionen oder Fluxiones.

Die 3. Erklärung.

8. Wenn die unendlich kleinen Grössen als der Unterscheid zweyer endlichen angesehen werden, nennet man sie Differentialgrössen.

Die 4. Erklärung.

9. Differentiiren heisset die Differentialgrösse von einer gegebenen endlichen finden.

Die 5. Erklärung.

10. Die Grössen, welche immer wachsen, oder abnehmen, indem andere unver-

verändern bleiben, heißen veränderliche; die anderen aber unveränderliche Grössen. Also sind in einer Parabel die Abscissen und Semiordinaten veränderliche Grössen, der Parameter aber ist eine unveränderliche. Denn indem jene beyden beständig wachsen, bleibet dieser unverändert (§. 217. P. I.).

Zusatz.

11. Da nun die Differentialgrössen die unendlich kleinen Theile sind, welche nach und nach anwachsen, indem sie erzeugt werden (§. 7. 8.); so haben die unveränderlichen Grössen keine Differentialgrösse.

Der 1. willkührliche Satz.

12. Nennet die veränderlichen Grössen mit den letzten Buchstaben des Alphabets, x, y, z ; die unveränderlichen aber mit den ersten, a, b, c .

Der 2. willkührliche Satz.

13. Die Differentialgrösse von x nennet dx , die von y nennet dy und so weiter.

Der 1. Zusatz.

14. Also ist da , oder db , oder $dc = 0$ (§. 11.).

Der 2. Zusatz.

15. Und die Differentialgrösse von $x + y - a$ ist $dx + dy$; die von $x - y + a$ aber

aber $dx - dy$. Demnach ist es leicht die Gröſſen, welche zu einander addiret, oder von einander ſubtrahiret ſind, zu differentiiren.

Die 1. Aufgabe.

16. Zwey Gröſſen die einander multipliciren, als xy zu differentiiren.

Auſlösung.

1. Multipliciret die Differentialgröſſe der einen veränderlichen Gröſſe in die andere veränderliche Gröſſe.
2. Die beyden Producte addiret zuſammen, ſo kommet die Differentialgröſſe von xy heraus $xdy + ydx$.

Beweis.

Laſſet x und y um ihre halbe Differentialgröſſe vermehret und vermindert werden, ſo kommet im erſten Falle $x - \frac{1}{2}dx$ und $y - \frac{1}{2}dy$, im anderen Falle $y + \frac{1}{2}dy$ und $x + \frac{1}{2}dx$. Multipliciret beyde durch einander in beyden Fällen, ſo bekommet ihr $xy - \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{4}dxdy$ und $xy + \frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{4}dxdy$. Wenn ihr beyde Producte von einander abziehet, ſo bleibet für die Differentialgröſſe des Rectanguli xy übrig $xdy + ydx$.
W. Z. E.

Der 1. Zuſatz.

17. Wenn viel Gröſſen einander multi-
- plic

pliciren, so dürfet ihr nur zwey oder meh-
rere nach einander als eine ansehen, und ihr
könnet sie nach der gegebenen Regel diffe-
rentiiren. Z. E. Es sey xyv zu differenti-
ren, so ist die Differentialgröße $xydv +$
 $xvdy + yvdx$. Denn es sey $xy = t$, so ist xyv
 $= tv$, folgendes $d(xyv) = t dv + v dt$. Nun
ist $dt = xdy + ydx$. Derowegen wenn
ihr für t und dt die gehörigen Werthe sehet,
so findet ihr $t dv + v dt = xydv + vx dy +$
 $vy dx$.

Der 2. Zusatz.

18. Dannenhero findet ihr ferner die Dif-
ferentialgröße einer Potenz, wenn ihr ihren
Exponenten um 1. vermindert, und alsdenn
die erniedrigte Potenz in ihren unveränder-
lichen Exponenten, und die Differentialgröße
se der Wurzel multipliciret. Nämlich $d(x^2) = 2x dx$, $d(x^3) = 3x^2 dx$ und überhaupt
 $d(x^m) = mx^{m-1} dx$.

Der 3. Zusatz.

19. Die Differentialgröße von ay ist ady
 $+ yda$. Nun ist $da = 0$ (§. 14.). Derow-
egen ist $d(ay) = ady$.

Der 4. Zusatz.

20. Weil $\sqrt{x} = x^{1/2}$ und überhaupt $\sqrt[m]{x^n} = x^{n/m}$ (§. 42. Part. 1.), so ist die Dif-
ferentialgröße von einer Irrationalgröße
($n:m$)

$$(n; m) x^{n:m-1} dx = (n; m) x^{(n-m):m} dx = (n; m) \sqrt[m]{x^{m-n}} dx.$$

Der 5. Zusatz.

21. Wiederum weil $1:x = x^{-1}$, $1:x^2 = x^{-2}$ und überhaupt $1:x^m = x^{-m}$, so ist die Differentialgröſſe von $1:x$, und $1:x^2$, in gleichen $1:x^m = -x^{-2} dx$, $-2x^{-3} dx$ und $-mx^{-m-1} dx$.

Anmerkung.

22. Daß $1:x = x^{-1}$, $1:x^2 = x^{-2}$, $1:x^3 = x^{-3}$ u. ſ. w. könnet ihr bald begreifen, wenn ihr nur bedenket, es gehen die Exponenten in einer arithmetiſchen Verhältniß fort, indem die Dignitäten in einer geometriſchen fortſchreiten. Nun ſeyn die Dignitäten x^2 , x , 1 , $1:x$, $1:x^2$, $1:x^3$, ſo ſind die Exponenten 2, 1, 0, — 1, — 2, — 3. Und daher iſt eben $x^0 = 1$.

Der 6. Zusatz.

23. Endlich weil $1:\sqrt{x} = 1:x^{1/2} = x^{-1/2}$, $1:\sqrt{x^3} = 1:x^{3/2} = x^{-3/2}$ und überhaupt $1:\sqrt[m]{x^n} = 1:x^{n:m} = x^{-n:m}$; ſo ſind die Differentialgröſſen von dergleichen Gröſſen — $\frac{1}{2}x^{-3/2} dx$, $-\frac{3}{2}x^{-5/2} dx$ und überhaupt — $(n;m)x^{-n:m-1} dx = -(n;m)x^{(-n-m):m} dx = -ndx$

$$\frac{1}{m} \sqrt[m]{x^{n+m}}$$

Die

Die 2. Aufgabe.

24. Zwey Grössen, die einander dividiren, $x:y$ zu differentiiiren.

Auflösung.

Es sey $x:y = v$

so ist $x = vy$

$$dx = vdy + ydv \quad (\S. 16.).$$

$$dx - vdy = ydv$$

das ist, $dx:y - xdy:y^2 = dv$

oder $(ydx - xdy):y^2 = dv$

Regel.

(1) Multipliciret die Differentialgröſſe des Zehlers in den Nenner, und (2) des Nenners in den Zehler. (3) Ziehet das letzte Product von dem ersten ab. (4) Das übrige dividiret durch das Quadrat des Nenners.

Zusaß.

25. Wenn im Zehler und Nenner viel veränderliche Grössen enthalten sind, so könnet ihr sie gleichfals nach den gegebenen Regeln differentiiiren, wenn ihr zwey als eine ansehet. Denn es sey $xy:vz$ zu differentiiiren. Setzet $xy = z$ und $vz = f$; so ist $d(xy:vz) = (zdf - fdz):f^2$. Nun ist $dz = xdy$

$xdy + ydx$ und $df = vdz + zdv$ (§. 16.). Des
 rowegen ist $tdt - tdf = vxzdy + vzydx - vx$
 $yzd - xyzdv$, folgendes $d(xy: vz) = (vxzdy + vz$
 $yzd - xyzdv - xjvdz): v^2z^2$.

Die 1. Anmerkung.

26. Wie wir die Regel in der Division gefunden,
 hätten ihr auch alle Regeln finden können, die in dem
 4. 5. und 6. Zusätze der vorhergehenden Aufgabe auf
 eine andere Art hergeleitet worden: Denn setzt

$$\begin{array}{l} \sqrt[m]{x^n} = v \\ \text{so ist } x^n = v^m \\ \hline nx^{n-1}dx = mv^{m-1}dv \text{ (§. 18.).} \\ \hline nx^{n-1}dx : mv^{m-1} = dv \end{array}$$

Nun ist $v^{m-1} = v^m : v = x^n : \sqrt[m]{x^n}$, folgendes
 $nx^{n-1}dx : mv^{m-1} = nx^{n-1}dx \sqrt[m]{x^n} : mx^n =$
 $(n:m)x^{n-1}dx \sqrt[m]{x^n} = (n:m)x^{n-1}x^{n:m}dx =$
 $(n:m)x^{n:m-2}dx$, wie ihr es (§. 20.) ge-
 funden.

Die 2. Anmerkung.

27. Damit ihr den Nutzen der Differentialrech-
 nung in der höheren Geometrie sehet, so muß ich zei-
 gen, wie die Eigenschaften der krummen Linien da-
 durch erfunden werden.

Die

Von den Tangentibus der krummen Linien oder den geraden Linien, die sie berühren.

Die 6. Erklärung.

Tab. IX.
Fig. 75.

28. Weil der Punct, so die krumme Linie beschreibt, in seiner Bewegung seine Direction beständig ändert (S. 28. Geom.); so kan man sich die krummen Linien vorstellen, als wenn sie aus unendlich kleinen geraden Linien zusammen gesetzt, und daher ein Polygon von unzähllich unendlich kleinen Seiten wären. Wenn ihr nun setzet, daß eine von diesen Seiten Mm in eine endliche gerade TM verlängert wird; so ist selbige der Tangens der krummen Linie.

Zusatz.

29. Derowegen zeigt der Tangens die Direction, welche der Punct, so die krumme Linie beschrieben, an jedem Theile derselben gehabt.

Die 7. Erklärung.

Tab. IX.
Fig. 76.

30. Der SUBTANGENS ist die Linie PT , welche zwischen dem Tangente TM und der Semiordinate PM enthalten ist.

Die 8. Erklärung.

Tab. IX.
Fig. 75.

31. Wenn ihr in dem Puncte der Berührung M eine Perpendicular = Linie MH aufrichtet, bis sie die Axe in H erreicht, so heisset sie die Normal = Linie der

der Theil der Axc aber PH, welcher zwischen ihr und der Semiordinate PM liegt, die Subnormal-Linie.

Die 3. Aufgabe.

32. In einer jeden gegebenen algebraischen Linie den zu einem gegebenen Punkte gehörigen Subtangente zu finden.

Auflösung.

Setzet die Semiordinate pm der anderen PM unendlich nahe, und ziehet MR mit der Axc AH parallel, so ist $MR = Pp$ (§. 22. Geom.) die Differential der Abscisse AP , mR die Differential der Semiordinate PM (§. 8.). Weil nun PM mit pm parallel ist, so ist der Winkel MmR dem Winkel TMP gleich (§. 97. Geom.). folgendes, da bey R und P rechte Winkel sind, $mR : MR = PM : PT$, (§. 183. Geom.). Setzet nun $PM = y$, $PA = x$, so ist $MR = dx$, $mR = dy$ (§. 13.), folgendes $dy : dx = y : PT$, und demnach $PT = y dx : dy$. Wenn ihr nun den Werth von dx aus der Equation substitutiret, welche die Natur einer krummen Linie insbesondere erkläret; so verschwindet dx und dy , und kommet der Subtangens TP in lauter endlichen Grössen heraus.

Der I. Zusatz.

33. Es sey $ax = y^2$, so ist $adx = 2y dy$, $dx = 2y dy : a$, folgendes $PT = y dx : dy = 2y^2 dy : a dy$.
(Wolfs Mathes. Tom. IV.)

$ady = 2y^2 : a = 2ax : a = 2x$. Derowegen ist in der Parabel der Subtangens TP zu der Abscisse AP wie 2 zu 1.

Der 2. Zusatz.

34. Es sey für unendliche Parabeln $a^{m-1}x = y$, so ist

$$a^{m-1}dx = my^{m-1}dy \text{ (§. 18.)}$$

$$dx = my^{m-1}dy : a^{m-1}$$

$$PT = ydx : dy = my^m dy : a^{m-1} dy = my^m : a^{m-1} = ma^{m-1}x : a^{m-1} = mx$$

Wenn also $m=3$, so ist $PT=3x$, das ist, in der Parabel von dem andern Geschlechte ist $PT:AP=3:1$ &c.

Der 3. Zusatz.

35. Es sey $a^n x^r = y^m$, so ist

$$ra^n x^{r-1}dx = my^{m-1}dy \text{ (§. 18.)}$$

$$dx = my^{m-1}dy : ra^n x^{r-1}$$

$$PT = ydx : dy = my^m dy : ra^n x^{r-1} dy = my^m : ra^n x^{r-1} = ma^n x^r : ra^n x^{r-1} = mx : r$$

Setzet z. E. $a^3 x^2 = y^5$, so ist $PT = \frac{5}{2}x$, das ist, $PT:AP = 5:2$.

Der 4. Zusatz.

36. In dem Circul ist $ax - xx = yy$, und demnach

adx

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : (a - 2x)$$

PT = ydx : dy = 2y²dy : (a - 2x)dy = 2y² : (a - 2x) = (ax - xx) : ($\frac{1}{2}$ a - x). Solange Gestalt ist $\frac{1}{2}$ a - x : a - x = x : PT.

Weil PT = (ax - xx) : ($\frac{1}{2}$ a - x); so ist AT = (ax - xx) : ($\frac{1}{2}$ a - x) - x = (ax - xx - $\frac{1}{2}$ ax + xx) : ($\frac{1}{2}$ a - x) = $\frac{1}{2}$ ax : ($\frac{1}{2}$ a - x), folgendes a - 2x : a - x : AT.

Der 5. Zusatz.

37. Es sey für unendliche Circul (§. 259. Tab. IX. P. I.). Fig. 75.

$$ax^m - x^{m+1} = y^{m+1}$$

so ist $max^{m-1}dx - (m+1)x^m dx = (m+1)y^m dy$

$$dx = (m+1)y^m dy : (max^{m-1} - (m+1)x^m)$$

PT = ydx : dy = (m+1)y^{m+1} : (max^{m-1} - (m+1)x^m) = (m+1)(ax^m - x^{m+1}) : (max^{m-1} - (m+1)x^m) = (m+1)(ax - x^2) : (ma - mx - x).

Demnach ist AT = (m+1)(ax - x^2) : (ma - (m+1)x) - x = (max + ax - mx^2 - x^2 - max + mx^2 + x^2) : (ma - (m+1)x) = ax : (ma - (m+1)x).

Es sey ein Circul von dem anderen Geschlechte, so ist m = 2, also AT = ax : (2a - 3x) und PT = (3ax - 3x^2) : (2a - 3x).

Der 6. Zusatz.

38. In der Ellipsi ist $ay^2 = abx - bx^2$ (§. 239. P. I.) und daher

$$2aydy = abdx - 2bxdx$$

$$dx = 2aydy : (ab - 2bx)$$

PT = ydx : dy = $2ay^2 dy : (ab - 2bx) dy = 2ay^2 : (ab - 2bx) = (2abx - 2bx^2) : (ab - 2bx) = (2ax - 2x^2) : (a - 2x)$. Daher ist AT = $(2ax - 2x^2) : (a - 2x) - x = (2ax - 2x^2 - ax + 2x^2) : (a - 2x) = ax : (a - 2x)$ wie im Circul (§. 36.).

Der 7. Zusatz.

39. Für unendliche Ellipses ist (§. 258. P. I.) $ay^{m+n} = bx^m(a-x)^n$ und daher

$$(m+n) ay^{m+n-1} dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1} dx$$

$$(m+n) ay^{m+n-1} dy : (mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1}) = dx$$

PT = ydx : dy = $(m+n) ay^{m+n} : (mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1}) = (mbx^m(a-x)^n + nbx^m(a-x)^n) : mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m(a-x)^{n-1}$ = (wenn ihr mit bx^{m-1} und $(a-x)^{n-1}$ dividiret) $(m+n)(ax - xx) : (ma - mx - nx)$.

Derowegen ist AT = $(m+n)(ax - xx) : (ma - mx - nx) - x = (max - mx^2 + nax - nx^2 - max)$

$$(max \mp mx^2 \mp nx^2) : (ma - mx - nx) = nax : (ma - mx - nx).$$

Es sey z. E. eine Ellipsis von dem anderen Geschlechte, so ist $m=2$, $n=1$ (S. 258. P. I.)
 $PT = (3ax - 3xx) : (2a - 3x)$, $AT = ax : (2a - 3x)$.

Der 8. Zusatz.

40. Für eine Hyperbel ist $ay^2 = abx \mp bxx$ (S. 260. P. I.) und daher findet ihr wie (S. 38.) $PT = (2ax \mp 2xx) : (a \mp 2x)$ und $AT = ax : (a \mp 2x)$.

Der 9. Zusatz.

41. Für unendliche Hyberbeln ist $ay^{m+n} = bx^m (a \mp x)^n$ (S. 286. P. I.). Derowegen findet ihr wie S. 39. $PT = (m \mp n)(ax \mp xx) : (ma \mp mx \mp nx)$ und $AT = nax : (ma \mp mx \mp nx)$.

Der 10. Zusatz.

42. Für eine Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist $xy = aa$ (S. 284. P. I.).

Daher $xdy \mp ydx = 0$ (S. 14. 16.).

$$ydx = -xdy$$

$$PT = yx : dy = -xdy : dy = -x.$$

Also ist der Subtangens der Abscisse gleich,
 muß aber, weil $-x$ ist, ihrem Ursprun-
 ge entgegen gesetzt werden, das ist, wenn
 3 der

der Punct, wovon die Abscissen gerechnet werden, zur Linken der Semiordinate ist, so wird der Subtangens auf der Aye zu ihrer Rechten genommen.

Der 11. Zusatz.

43. Für unendliche Hyperbeln zwischen ihren Asymptoten ist $a^{m+n} = y^m x^n$ (S. 285. P.I.).

$$\begin{aligned} \text{Daher } 0 &= mx^n y^{m-1} dy + nx^{n-1} y^m dx \\ &\quad - mx^n y^{m-1} dy : nx^{n-1} y^m = dx \\ \text{PT} &= y dx : dy = -mx^n y^m : nx^{n-1} y^m = -\frac{mx}{n} \end{aligned}$$

Es sey eine Hyperbel von dem anderen Geschlechte, so ist $m=2, n=1, \text{PT} = -2x$.

Der 12. Zusatz.

Endlich weil für alle Algebraische Linien (S. 214. P.I.).

$$\begin{aligned} ay^m + bx^n + cy^r x^s + f &= 0, \text{ so ist} \\ \frac{may^{m-1} dy + nbx^{n-1} dx + rcy^{r-1} x^s dy + fcy^{r-1} x^s dx}{fcy^{r-1} x^s dx} &= 0 \\ \frac{nbx^{n-1} dx + fcy^{r-1} x^s dx}{rcy^{r-1} x^s dx} &= -\frac{may^{m-1} dy}{rcy^{r-1} x^s dx} \\ dy &= \frac{(-may^{m-1} dy - rcy^{r-1} x^s dx) : (nbx^{n-1} + fcy^{r-1} x^s)}{\text{PT}} \end{aligned}$$

$PT = ydx : dy = (-may^m - rcy^r x^s) : (nb x^{n-1} + scy^r x^{s-1})$, nach welcher Regel aller Algebraischen Linien Subtangentes gefunden werden, wenn ihr für die undeterminirte Buchstaben a, c, b und die Exponenten m, n, r, s ihren Werth aus ihrer Gleichung sehet. Z. E. Weil für die Parabel vom ersten Geschlechte

$$\begin{array}{l} ax = y^2, \text{ oder } y^2 - ax = 0, \text{ so ist} \\ \underline{ay^m = y^2} \quad \underline{bx^n = -ax} \quad \underline{cy^r x^s = 0} \quad \underline{f = 0} \\ \underline{a = 1, m = 2, b = -a, n = 1, c = 0, r = 0, s = 0} \quad \underline{f = 0} \end{array}$$

$$\text{daher } PT = (-2 \cdot 1 y^2 - 0 \cdot 0 y^0 x^0) : (-1 \cdot a x^{1-1} + 0 \cdot 0 y^0 x^{0-1}) = -2y^2 : -a = 2ax : a = 2x.$$

$$\begin{array}{l} \text{Wiederum es sey } y^3 - x^3 - axy = 0, \text{ so ist} \\ \underline{ay^m = y^3, bx^n = -x^3, cy^r x^s = -axy} \quad \underline{f = 0} \\ \underline{a = 1, m = 3, b = -1, n = 3, c = -a, r = 1, s = 1} \quad \underline{f = 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{daher } PT = (-3 \cdot 1 y^3 - 1 \cdot -axy) : (3 \cdot -1 x^{3-1} + 1 \cdot -ayx^{1-1}) = (-3y^3 + axy) : (-3x^2 - ay) \\ AT = (3y^3 - axy) : (3x^2 + ay) = \text{folgendes} \\ (3y^3 - axy) : (3x^2 + ay) - x = (3y^3 - axy - 3x^3 - axy) : (3x^2 + ay) = (3axy - 2ax^3) : (3x^2 + ay) = axy : (3x^2 + ay). \text{ Denn} \\ \text{da } y^3 - x^3 = axy, \text{ so ist } 3y^3 - 3y - 3x^3 = axy. \end{array}$$

Der 13. Zusatz.

44. Weil $PT = ydx : dy$, $PM = y$; so
ist $TM = \sqrt{(y^2 dx^2 : dy^2 + y^2)} = \sqrt{(y^2 dx^2 + y^2 dy^2) : dy^2} = y \sqrt{(dx^2 + dy^2) : dy}$.

Die 4. Aufgabe.

Tab. IX.
Fig. 75.

45. Die Subnormallinie PH in einer
Algebraischen Linie zu finden.

Auflösung.

Weil der Triangel TMH bey M rechtwink-
elicht ist, so ist $TP : PM = PM : PH$ (S. 210.
Geom.). $(ydx : dy) : y = y : PH$.

Derwegen $PH = y^2 dy : ydx = ydy : dx$.
Wenn ihr demnach aus der Gleichung für
eine besondere Linie den Werth von dy durch
 x exprimiret; so bekommet ihr die Subnor-
mallinie, wie vorhin den Subtangente, in
lauter endlichen Grössen.

Der 1. Zusatz.

Es sey $ax = y^2$,

so ist $adx = 2ydy$

$\frac{1}{2}adx = ydy$

$PH = ydy : dx = adx : 2dx = \frac{1}{2}a$.

Demnach ist in der Parabel die Subnor-
mallinie beständig dem halben Parameter
gleich,

gleich, folgendes die Normallinie $MH = \sqrt{(yy + \frac{1}{4}aa)} = \sqrt{(ax + \frac{1}{4}aa)}$.

Der 2. Zusatz.

48. Es sey $ax - xx = y^2$

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$\frac{1}{2}adx - xdx = ydy$$

$$PH = ydy : dx = \frac{1}{2}a - x$$

Daher ist klar, daß alle Normallinien in dem Circul durch den Mittelpunct gehen, oder, daß alle Radii des Circuls auf der Peripherie perpendicular stehen, und demnach der Tangens des Circuls mit dem Radio einen rechten Winkel machet.

Der 3. Zusatz.

49. Weil $PH = ydy : dx$, und $PM = y$; so ist $HM = \sqrt{(y^2 + y^2 dy^2 : dx^2)} = \sqrt{(y^2 dx^2 + y^2 dy^2 : dx^2)} = y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx$.

Die 5. Aufgabe.

50. Die Asymptoten einer Algebraischen Linie zu determiniren.

Auflösung.

1. Wenn die Abscisse AP unendlich groß Tab. IX. wird, so ist der Tangens TM die Asymptote, als welche die krumme Linie nicht
 y n n n n 5 eher

eher als in einer unendlichen Weite, das ist, niemahls berühren kan (§. 278. P. I.). Daher werden die unveränderlichen Gröſſen in Anſehung der Abſciſſe x unendlich Kleine. Wenn ihr demnach in dem Werthe von AT diejenigen Gröſſen weglaſſet, die nicht mit x multipliciret ſind; ſo findet ihr die Weite des Punctes C , daraus die Aſymptote CD gezogen wird, von dem Scheitelpuncte A .

3. E. In der Hyperbel iſt $AT = ax : (a + 2x)$ und demnach a in Anſehung x unendlich Kleine, folgendes $ax : 2x = \frac{1}{2}a = AC$, wie ſchon oben (§. 372. 278. P. I.) auf andere Art erwieſen worden.

2. Laſſet nun ferner auch in der Gleichung für die krumme Linie die unveränderlichen Gröſſen, die durch keine andere multipliciret ſind, weg; ſo könnet ihr dadurch den Werth von AE finden, und folgendes die Aſymptote ziehen.

3. E. In der Hyperbel iſt $ay^2 = bx (a + x)$. Da nun a in Anſehung x unendlich Kleine iſt, ſo habet ihr

$$\frac{ay^2 = bx^2}{\text{folgendes } y\sqrt{a} = x\sqrt{b}}$$

$$\frac{dy \sqrt{a} = dx \sqrt{b}}{dx : dy = \sqrt{a} : \sqrt{b}}$$

Nun ist $dx : dy = AC : AE$ (§. 183. Geom.)
das ist $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \frac{1}{2}a : AE$.

Demnach ist $AE = \frac{1}{2}a \sqrt{b} : \sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{4}aab}$;
 $\sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$, wie abermahl oben (§. 272.
278. P.I.) schon auf andere Art erwiesen
worden.

Anders.

Weil $TP : PM = TA : AG$; so ist im
Asymptotischen Falle, da TP zu CP , TA zu
 CA und AG zu AE wird, $CP : PM = CA :$
 AE . Nun ist $TP = 2x(a+x) : (a+2x)$
und also $CP = 2x^2 : 2x = x$, weil im asymp-
tischen Falle $a=0$. Daher ist $x : x \sqrt{b}$

$$= \frac{1}{2}a : AE, \text{ folgendes } AE = \frac{\frac{1}{2}a \sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{1}{4}ab}.$$

Zusatz.

§ 1. In unendlichen Hyperbeln ist (§. 41.)
überhaupt $AT = max : (ma + mx + nx)$.
Daher $AC = max : (mx + nx) = na : (m+n)$.
Und weil ferner (§. 286. P.I.)

$$ay^{m+n} = bx^m (a+x)^n$$

$$\text{so ist } ay^{m+n} = bx^{m+n}$$

oder, wenn ihr $m+n=r$ sehet

$$ay^r = bx^r$$

$$ya^{1:r} = xb^{1:r}$$

$$dya^{1:r} = dx b^{1:r}$$

$$dx:dy = a^{1:r}:b^{1:r} = AC:AE$$

$$a^{1:r}:b^{1:r} = na:AE$$

r

Derwegen ist $AE = nab^{1:r}:ra^{1:r}$

$$= \frac{na^{1-1:r} b^{1:r}}{r} = (n:r) \sqrt[r]{a^{1-1} b}$$

Die 6. Aufgabe.

§ 2. Den Subtangente AH in einer Spirallinie zu finden.

Auflösung.

Tab. IX.
Fig. 78.

Es sey der halbe Diameter des Circuls $AB=a$, die Peripherie $=b$, der Bogen $BD=x$, $AG=y$, und AC dem Radio AD unendlich nahe; so ist $CD=dx$, $EF=dy$. Weil nun EG ein Bogen ist, der mit AG beschrieben worden; so ist

AD

$$AD:AG = CD:EG$$

$$a : y = dx : ydx : a$$

Weil EG mit FA einen rechten Winkel machet (§. 48.) und AH gleichfalls auf EA perpendicular ausgerichtet worden; so ist (§. 184. Geom.)

$$FE:EG = GA:AH$$

$$\frac{dy}{a} : \frac{ydx}{ady} = y : \frac{y^2 dx}{ady}$$

Nun ist für die Archimedische Spirallinie $ax = by$ (§. 312. P. I.).

$$\text{daher } adx = bdy$$

$$\frac{dx}{dx} = \frac{bdy}{a}$$

$$AH = y^2 dx : a dy = by^2 : a^2 = axy : a^2 = xy : a.$$

Der 1. Zusatz.

§3. Also könnet ihr den Subtangente nicht finden, ihr müßet vorher den Circusbogen x in eine gerade Linie verwandeln können.

Der 2. Zusatz.

§4. Für unendliche Spiral-Linien ist

$$a^m x^n = b^n y^m \text{ (§. 312. P. I.)}$$

$$na^m x^{n-1} dx = mb^n y^{m-1} dy$$

$$dx = mb^n y^{m-1} dy : na^m x^{n-1}$$

$$AH = y^2 dx : a dy = mb^n y^{m+1} : na^{m+1} x^{n-1} =$$

$$ma^m x^n y : na^{m+1} x^{n-1} = mxy : na.$$

Der 3. Zusatz.

Tab. IX.
Fig. 78.

§ 5. Setzet, daß der Bogen BC sich zu FC verhalten solle wie die Abscisse in einer Algebraischen Linie zu ihrer Semiordinate. Solchergestalt ist $BC = x$, $CD = dx$, $FC = y$, $EF = dy$.

Nun ist

$$AD : AG = CD : EG$$

$$r : r - y = dx : \frac{rdx - ydx}{r}$$

$$FE : EG = GA : AH$$

$$\frac{dy : rdx - ydx}{r} = \frac{r - y : (r - y)^2 dx}{r dy}$$

Wenn ihr nun für dx in dem Werthe von AH seinen Werth aus der Gleichung einer Algebraischen Linie setzet; so habet ihr den Subtangente AH.

Z. E. In der Parabel ist $ax = y^2$, und also $dx = 2y dy : a$. Derwegen wenn der Bogen BC die Abscisse einer Parabel, FC die Semiordinate und a ihren Parameter vorstellet; so

so ist $AH = 2(r-y)^2 y dy : r dy = (2r^2 y - 4r y^2 + 2y^3) : ra = (2r^2 y - 4arx + 2axy) : ra =$
 $\frac{2xy - 4x + 2ry}{r} : a.$

Anmerkung.

56. Ihr könnet BC für die Abscisse und FC für die Semiordinate einer jeden Algebraischen Linie annehmen, und aus der allgemeinen Gleichung für alle krumme Linien einen allgemeinen Werth für AH finden.

Die 7. Aufgabe.

57. Den Subtangente AT in der Con-Tab. IX, choide des Nicomedis zu finden. Fig. 79.

Auflösung.

Es sey $AP = x$, $PM = y$, $Pp = MR = dx$ und $Rm = dy$. Daher ist $PT = y dx : dy$. Es sey ferner $AB = QM = a$, $CM = z$, $BC = b$; so ist $PB = a - x$, $PC = a + b - x$. Damit man den Werth von dx aus der Natur der krummen Linie finden möge; so setzet

$$a - x = v$$

$$a + b - x = t$$

$$\text{so ist } -dx = dv$$

$$-dx = dt$$

Ferner (§. 184. Geom.)

$$PB : MQ = PC : MC$$

$$v : a = t : z$$

$$at = vz$$

$$adt = z dv + v dz.$$

Ende

Endlich (S. 172. Geom.) $CM^2 = PC^2 + PM^2$,
das ist

$$z^2 = t^2 + y^2$$

$$2zdz = 2tdt + 2ydy$$

$$zdz = tdt + ydy$$

Setzet aus den vorhergehenden Gleichungen
für dv und dt ihren Werth in den beyden letz-
teren; so habet ihr

$$-adx = -zdx + vdz$$

$$zdz = -tdx + ydy$$

$$zdx - adx = vdz$$

$$dz = -tdx + ydy$$

$$zdx - adx = dz$$

z

v

daher

$$zdx - adx = -tdx + ydy$$

v

z

$$z^2dx - azdx = -vtdx + vydy$$

$$z^2dx - azdx + vtdx = vydy$$

dx

=

vydy

$$z^2 - az + vt$$

Daher ist $PT = ydx$; $dy = vy^2 : (z^2 - az + vt)$
und die Subnormallinien ydy ; $dx = (z^2 -$
 $az + vt); v = t + (z^2 - az); v.$

Die

Da $v:z-a=z:(z^2-az)$; so ist $(z^2-az):v$

die vierdte Proportionallinie zu PB, QC und CM. Wenn man nun PC verlängert, bis der verlängerte Theil ihr gleich wird; so hat man die Subnormallinie, und kan demnach die Normallinie und den Tangentem auf eine leichte Weise ziehen.

Die 8. Aufgabe.

58. Den Subtangentem PT in der Cycloidi Tab. IX. de zu finden. Fig. 80.

Auflösung.

Es sey APB der Circul, der die Cycloidem beschreibt, KP der Tangens des Circuls, qm der anderen Linie QM unendlich nahe, und MR mit dem unendlich kleinen Bogen Pp parallel, den ihr für eine gerade Linie halten können. Da nun $MS=PO$, und der Winkel bey R so groß wie der bey p (§. 97. Geom.), folgendes, weil bey S und O rechte Winkel sind, $RMS=pPO$ (§. 105. Geom.); so ist auch $MR=Pp$ (§. 71. Geom.). Es sey $AP=x$, $PM=y$, so ist $Pp=MR=dx$, $Rm=ay$. Nun ist Rm mit PM parallel, und daher $MmR=TMP$ (§. 97. Geom.). Und weil MR mit TP parallel ist, so ist $mRM=MPT$ (§. cit.), folgendes (§. 183. Geom.).

(Wolfs Mathes. Tom. IV.)

§§§§

mR

$$mR : MR = PM : PT$$

$$dy : dx = y : \frac{y dx}{dy}$$

Nun ist in der Cycloide (§. 310. P. I.) $y = x$
und daher $dy = dx$, folgender $y dx : dy = y$.

Der 1. Zusatz.

59. Wenn ihr also den Tangentem des Circuls PK (§. 47.) ziehet; so ist es auch leicht den Tangentem der Cycloidis TM zu ziehen.

Der 2. Zusatz.

Tab. IX.
Fig. 80.

60. Lasset AP eine andere algebraische krumme Linie seyn, derer Tangentem ihr ziehen könnet, ihre Bogen aber AP die Abscissen der Transcendentischen Linie AMC; so könnet ihr auf gleiche Weise ihre Tangentes ziehen. Es sey z. E.

$$by = ay$$

$$\text{so ist } bdx = ady$$

$$dx = ady : b$$

$$PT = y dx : dy = ay dy : b dy = ay : b.$$

Die 9. Aufgabe.

Tab. IX.
Fig. 81.

61. Den Subtangentem TP zu der Logarithmischen Linie zu finden.

Auf.

Auflösung.

Es sey AH die Ape, PM die Ordinate.
 Setzet $AP = x$, $PM = y$, so ist $Pp = RM$
 $= dx$, $mR = dy$, und weil die Aehnlichkeit
 der Triangel mRM und PMT wie oben (§. 32.),
 erwiesen werden kan; so ist (§. 184.
Geom.).

$$mR : RM = PM : PT$$

$$dy : dx = y : ydx$$

$$dy$$

Setzet eine andere Abscisse $= v$, die zugehörige
 Semiordinate $= z$; so ist der Subtangens
 $= z dv : dz$. Weil die Abscissen in einer
 arithmetischen Progreßion fortgehen, so ist dx
 $= dv$ (§. 69. *Aritbm.*). Hingegen weil die
 Semiordinaten in einer geometrischen fort-
 schreiten (§. 360. *P. I.*).

$$y : y + dy = z : z + dz$$

Daher $y : dy = z : dz$ (§. 142. *P. I.*).

Nun ist $dx = dv$

Daher $y dx : dy = z dv : dz$ (§. cit.).

Also sind in der Logarithmischen Linie alle
 Subtangentes einander gleich, oder der Sub-
 tangens ist eine unveränderliche Linie.

Von den größten und kleinsten Applicaten der krummen Linien.

Die 9. Erklärung.

62. Wenn die Semiordinaten bis zu einem gewissen Ziele immer mit den Abscissen wachsen, hernach aber wieder abnehmen, unerachtet diese noch beständig zunehmen; so nennet man die Grösste diejenige, wo der Wachsthum aufhöret. Ingleichen wenn sie bis auf ein gewisses Ziel immer abnehmen, indem die Abscissen zunehmen, und hernach mit diesen fort wachsen, so heisset diejenige die Kleinste, wo die Vergeringerung aufhöret. Die Methode einen Werth der Abscisse in lauter unveränderlichen Grössen zu finden, dem die grösste oder kleinste Applycate oder Semiordinate zukommet, nennet man die Methode von den Grössten und Kleinsten. (Methodum de maximis & minimis).

Anmerkung.

63. Man kan hierdurch auch viel andere Fragen auflösen, da das grösste oder kleinste unter Dingen von einer Art gesucht wird, wie es die folgenden Exempel zeigen werden.

Die 10. Aufgabe.

64. Die grösste oder kleinste Applycate

cate in einer algebraischen Linie zu determiniren.

Auflösung.

Es ist klar, daß der Tangens in dem Punkte G, wo die größte oder kleinste Applicata ist, mit der Aye parallel läuft, und daher der Subtangens unendlich groß ist. Wenn nun in allen algebraischen Linien der Subtangens $ydx:dy$ (§. 32.) unendlich groß wird; so ist dy in Ansehung des Zehlers ydx unendlich kleine, weil er dy unendlich mahl in sich begreifen muß, und darum $dy = 0$ (§. 4.). Suchet derowegen aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie die Differentialgröße der Applicata und setzet sie $= 0$; so könnet ihr aus dieser Gleichung den Werth von x durch gehörige Redaction finden.

In einigen Linien fällt der Tangens in Tab. IX. die Applicata CG, und alsdenn ist der Sub- Fig. 83. tangens $ydx:dy = 0$. Wenn nun dieser Bruch unendlich kleine seyn soll, so muß dy unendlich groß seyn in Ansehung des Zehlers ydx . Dannenhero wenn $dy = 0$ keinen möglichen Werth für die Abscisse zur größten Applicata giebet; so setzet $= dy \infty$, das ist, einem unendlichen Werthe, und suchet aus dieser Gleichung die Abscisse x .

Der 1. Zusatz.

65. Im Circul ist

$$\begin{aligned}
 ax - xx &= y^2 \\
 \hline
 adx - 2x dx &= 2y dy \\
 \hline
 (adx - 2x dx) : 2y &= dy = 0 \\
 \hline
 a - 2x &= 0 \\
 \hline
 &= 2 \\
 \hline
 \frac{1}{2}a &= x
 \end{aligned}$$

Die Abscisse, welche in dem Circul der größten Applicata zugehört, ist dem halben Diameter gleich.

Der 2. Zusatz.

66. Für unendliche Circul ist

$$\begin{aligned}
 max^{m-1} dx - (m+1)x^m dx &= (m+1)y^m dy = 0 \\
 \hline
 max^{m-1} &= (m+1)x^m \\
 \hline
 &= x^{m-1} \\
 \hline
 ma &= (m+1)x \\
 \hline
 ma : (m+1) &= x
 \end{aligned}$$

Es sey $m = 3$, so ist es ein Circul von dem dritten Geschlechte und $x = \frac{3}{4}a$.

Der 3. Zusatz.

67. Für unendliche Ellipses ist

(m+1)

$$(m+n) ay^{m+n-1} dy = mbx^{m-1} (a-x)^n dx - nbx^m (a-x)^{n-1} dx.$$

$$dy = mbx^{m-1} (a-x)^n dx - nbx^m (a-x)^{n-1} dx$$

$$: (m+n) ay^{m+n-1} = 0$$

$$nbx^m (a-x)^{n-1} = mbx^{m-1} (a-x)^n$$

$$x^{m-1} (a-x)^{n-1}$$

$$nbx = mba - mbx$$

$$nbx + mbx = mba$$

$$x = ma : (m+n)$$

Es sey $m=1, n=1$, so ist es eine Ellipsis von dem ersten Geschlechte und $x=\frac{1}{2}a$, wie im Circul. Hingegen sey $m=2, n=1$, so ist es eine Ellipsis von dem anderen Geschlechte und $x=\frac{2}{3}a$.

Der 4. Zusatz.

68. Es sey $x^3 + y^3 = axy$

so ist $3x^2 dx + 3y^2 dy = ax dy + ay dx$

$$3x^2 dx - ay dx = ax dy - 3y^2 dy$$

$$(3x^2 dx - ay dx) : (ax - 3y^2) = dy = 0$$

$$3x^2 = ay$$

$$3x^2 : a = y$$

$$x^3 + 27x^6 : a^2 = 3ax^3 : a = 3x^3$$

$$27x^6 = 2a^3x^3$$

$$27x^3 = 2a^3$$

$$3x = a\sqrt[3]{2}$$

$$x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$$

Der 5. Zusatz.

69. Es sey $y - a = a^{1/3} (a - x)^{2/3}$

$$dy = -2dx a^{1/3} : 3(a - x)^{1/3} = 0$$

$$-2a^{1/3} = 0$$

Weil ihr keinen Werth von x findet, wenn ihr $dy = 0$ sehet, so nehmet

$$dy = -2dx a^{1/3} : 3(a - x)^{1/3} = \infty$$

Also ist $3(a - x)^{1/3}$ in Ansehung seines Zehlers $2dx a^{1/3}$ unendlich kleine. Darum habet ihr

$$3(a - x)^{1/3} = 0$$

$$a - x = 0$$

$$a = x.$$

Die 11. Aufgabe.

Tab. IX.
Fig. 75.

70. Aus dem gegebenen Puncte H in der Aye einer krummen Linie an die Peripherie

ripherie eine gerade Linie LM zu ziehen, welche die kleinste unter allen ist, die sich aus diesem Puncte ziehen lassen.

Auflösung.

Es sey $AP = x$ $PM = y$, $AH = c$, so ist $PH = c - x$, und, weil $PM^2 + PH^2 = MH^2$ (S. 172. Geom.); $c^2 - 2cx + xx + yy = MH^2$. Nehmet MH an als die Applicata einer krummen Linie und setzet

$$c^2 - 2cx + xx + yy = z^2$$

$$\text{so ist } 2xdx - 2cdx + 2ydy = 2zdz$$

$$(2xdx - 2cdx + 2ydy) : 2z = dz = 0$$

$$xdx - cdx + ydy = 0$$

Wenn ihr nun aus der Gleichung für eine krumme Linie den Werth von ydy setzet; so könnet ihr daraus AP determiniren, der die Applicata PM zugehöret, dahin die kürzeste Linie HM gezogen wird.

Der I. Zusatz.

71. Es sey für eine Parabel

$$ax = yy$$

$$\text{so ist } adx = 2ydy$$

$$\frac{1}{2}adx = ydy$$

$$xdx - cdx \mp ydy = xdx - cdx \mp \frac{1}{2}adx = 0$$

$$x - c \mp \frac{1}{2}a = 0$$

$$x = c - \frac{1}{2}a.$$

Der 2. Zusatz.

72. Es sey für eine Ellipsin

$$ay^2 = abx - bx^2$$

so ist $2aydy = abdx - 2bxdx$

$$ydy = \frac{1}{2}bdx - bxdx : a$$

$$xdx - cdx \mp ydy = xdx - cdx \mp \frac{1}{2}bdx - bxdx : a = 0$$

$$x - c \mp \frac{1}{2}b - bx : a = 0$$

$$ax - ac \mp \frac{1}{2}ab - bx = 0$$

$$ax - bx = ac - \frac{1}{2}ab$$

$$x = (ac - \frac{1}{2}ab) : (a - b)$$

Der 3. Zusatz.

73. Auf gleiche Weise findet ihr für die Hyperbel, daß $x = (ac \mp \frac{1}{2}ab) : (a \mp b)$.

Die

Die 12. Aufgabe.

74. Eine Linie AB dergestalt in D zu Tab. VIII. schneiden, daß das Product aus dem Fig. 67. Quadrate des einen Theiles AD in den anderen DB das größte sey unter allen, die auf dergleichen Art formiret werden können.

Auflösung.

Es sey $AB = a$, $AD = x$, so ist $AD^2 \cdot DB = axx - x^3$. Setzet demnach, es sey eine krumme Linie, in welcher

$$axx - x^3 = aay$$

so ist $2axdx - 3x^2dx = aady$

$$(2axdx - 3x^2dx) : aa = dy = a$$

$$2ax = 3x^2$$

$$\frac{2}{3}a = x.$$

Die 13. Aufgabe.

75. Eine Linie AB dergestalt in D zu Tab. VIII. schneiden, daß das Product aus einer Fig. 67. gegebenen Dignität des einen Theiles AD in eine gegebene Dignität des anderen Theiles DB das größte unter allen sey, die auf dergleichen Art formiret werden.

Auflösung.

Es sey $AB = a$, $AD = x$; so ist $x^m(a-x)^n$ das größte von seiner Art. Setzet demnach

$$x^m$$

$$x^m (a-x)^n = a^{m+n-1} y$$

$$\text{so ist } mx^{m-1}(a-x)^n dx - nx^m(a-x)^{n-1} dx = a^{m+n-1} dy$$

$$(mx^{m-1}(a-x)^n dx - nx^m(a-x)^{n-1} dx) : a^{m+n-1} = dy = 0$$

$$mx^{m-1}(a-x)^n = nx^m(a-x)^{n-1}$$

$$m(a-x)^n = nx(a-x)^{n-1}$$

$$ma - mx = nx$$

$$ma : (m+n) = x$$

Die 14. Aufgabe.

76. Unter allen Parallelepipedis, die einem gegebenen Würffel gleich sind, und deren eine Seite gegeben wird, dasjenige zu finden, das die geringste Fläche hat.

Auflösung.

Es sey b die eine Seite, x die andere, der gegebene Würffel $= a^3$, so ist die dritte $= a^3 : bx$.

Folgendes die Fläche des Parallelepipedi $2bx + 2a^3 : x + 2a^3 : b$. Setzt demnach es sey in einer krummen Linie.

$$2bx + 2a^3 : x + 2a^3 : b = ay$$

so

so ist $2b dx - 2a^3 dx : x^2 = a dy = 0$

$$\underline{2b - 2a^3 x^2 = 0}$$

$$\underline{bx^2 = a^3}$$

$$\underline{x^2 = a^3 : b}$$

$$\underline{x = \sqrt{(a^3 : b)}}$$

Also sind die drey Seiten b , $\sqrt{(a^3 : b)}$ und $a^3 : b \sqrt{(a^3 : b)} = \sqrt{(a^6 : b^2 a^3 : b)} = \sqrt{(a^6 : \sqrt{a^3 b})} = \sqrt{(a^3 : b)}$.

Die 15. Aufgabe.

77. Unter allen Parallelepipedis, die einem gegebenen Würffel gleich sind, dasjenige zu finden, so die kleinste Fläche hat.

Auflösung.

Es sey der gegebene Würffel $= a^3$, die eine Seite $= x$, so sind die beyden anderen Seiten (§. 76.) $\sqrt{(a^3 : x)}$, und daher ist die Fläche des Parallelepipedi $= 2a^3 : x + 4 \sqrt{a^3 x}$. Da nun dieses die kleinste von ihrer Art ist, so setzet die Gleichung für eine krumme Linie,

$$\underline{2a^3 : x + 4 \sqrt{a^3 x} = ay}$$

so ist $\underline{-2a^3 dx : x^2 + 2a^3 dx : \sqrt{a^3 x} = a dy}$

$$\underline{-2a^2 dx : x^2 + 2a^2 dx : \sqrt{a^3 x} = 0}$$

$$a^2 : \sqrt{a^3 x} = a^2 : x^2$$

$$x^2 = \sqrt{a^3 x}$$

$$x^4 = a^3 x$$

$$x^3 = a^2$$

$$x = a$$

Also hat der Würffel selbst die kleinste Fläche.

Die 16. Aufgabe.

Tab. X.
Fig. 84.

78. Unter allen Kegeln, die innerhalb einer Kugel beschrieben werden können, denjenigen zu determiniren, der die größte Fläche hat.

Auflösung.

Es ist klar, daß, wenn sich ein halber Circul um seinen Diameter AB wendet, derselbe eine Kugel, die Triangel aber ANP, AFE &c. Kegel beschreiben. Die Fläche des Kegels kommt heraus, wenn ihr die Seite des Kegels FA durch die halbe Peripherie, die mit dem Radio FE beschrieben worden, multipliciret. Weil ihr nun die größte von ihrer Art suchet, so setzet $AE = x$, $AE = a$, und es ist $FE = \sqrt{(ax - xx)}$ (§. 210. Geom.) die halbe Peripherie $m \sqrt{(ax - xx)}$, $AF = \sqrt{ax}$. Deswegen habet ihr die Gleichung für eine krumme Linie.

$m \sqrt{}$

$$m\sqrt{(ax-xx)}\sqrt{ax}=ay$$

$$m\sqrt{(a^2x^2-ax^3)}=ay$$

$$2ma^2x dx - 3max^2 dx : 2\sqrt{(a^2x^2-ax^3)} = a dy$$

$$2ax - 3x^2 = 0$$

$$2a = 3x$$

$$\frac{2}{3}a = x$$

Ende des anderen Theiles.



Der

Der dritte Theil

Von den

Anfangs = Gründen

der

Integral-Rechnung.

Die 1. Erklärung.

79.
Die Integral-Rechnung ist eine Wissenschaft aus einer gegebenen unendlich kleinen Grösse diejenige endliche zu finden, durch deren Differenzirung sie entsteht.

Zusatz.

80. Derwegen habet ihr eine gewisse Probe ob ihr die rechte Grösse gefunden, wenn ihr die gefundene Integral nach den oben gegebenen Regeln differentiiret, und die gegebene Differential wieder heraus kommet.

Die 2. Erklärung.

81. Integriren oder summiren heisset die Grösse finden, aus welcher durch Differenzirung die gegebene unendlich kleine entstanden.

Die 1. Aufgabe.

82. Eine gegebene Differential zu integriren oder summiren.

Aufs.

Auflösung.

Gleichwie man die Differentiale der veränderlichen Größen durch d andeutet; so pflegt man die Integrale derselben als die Summe unendlicher unendlich kleiner Größen durch $\int$ anzudeuten. Daher heisset $\int y dx$ so viel als die Integral von $y dx$.

Wenn ihr nun die Integral finden wollet, so vergleicht die gegebene Differential mit denen, so ihr oben (§. 13. & seqq.) gefunden: so werdet ihr bald wahrnehmen, wie die Veränderung vorzunehmen sey. Es ist aber

- I. $\int dx = x + a$
- II. $\int dx + dy = x + y + a$ oder $x + y$
- III. $\int (x dy + y dx) = xy$
- IV. $\int m x^{m-1} dx = x^m$
- V. $\int (n:m) x^{n-m:m} dx = x^{n:m}$
- VI. $\int (y dx - x dy): y^2 = x:y$

Von diesen Formeln seyd ihr gewiß, daß sie sich alle integriren lassen, und zwar setzet ihr in dem andern und ersten Falle nur an statt dx oder dy die veränderliche GröÙe x oder y selbst. In dem dritten multipliciret ihr die beyden veränderlichen GröÙen x, y durch einander, dadurch ihre Differentiale dy und dx multipliciret sind. In dem vierdten und fünften (welcher der gewöhnlichste ist) addiret ihr zu dem Exponenten der Dignität der ver-
(Wolfs Mathes. Tom. IV.) A a a a a a n

änderlichen Grösse x , und durch den vermehrten und die Differential der veränderlichen Grösse dividiret ihr die gegebene Differential. Endlich in dem sechsten Falle nehmet ihr die veränderliche Grösse mit dem Zeichen — für den Zehler und die Wurzel von dem Quadrate des Nenners für den Nenner an.

Die 1. Anmerkung.

83. Es können zwar noch viel andere Fälle vorkommen, die hier nicht berührt werden: allein ihr werdet es besser aus Exempeln, als durch weitläufige Regeln lernen.

Die 2. Anmerkung.

84. Mercket aber, daß einige Grössen sind, die sich nicht integriren lassen. Denn wie man in der gemeinen Algebra zwar alle Grössen zu einer verlangten Dignität erheben, nicht aber aus jeder Dignität eine verlangte Wurzel ausziehen kan; eben so kan man in der höheren Analyti zwar eine jede veränderliche Grösse differentiiren, allein nicht eine jede Differential summiren. Gleich wie man aber in der gemeinen Algebra die Wurzel durch Näherung suchet, eben so pflegt man in der höheren die Integral durch Näherung zu suchen, wo man sie nicht vollkommen haben kan. Allein zur Zeit hat man noch keine Regel, daraus man schliessen könnte, ob die Summation statt findet oder nicht, und können wohl einige Differentiale zum Summiren geschickt seyn, die wir zur Zeit noch nicht summiren können.

Von den Quadraturen der krummen Linien.

Die 3. Erklärung.

85. Die Differential oder das Element einer

einer ebenen Fläche, die in eine Krümme und Tab. IX.
zwey gerade Linien eingeschlossen, als Fig. 75.
AMP, ist das Rectangulum aus der Semi-
ordinate PM in die Differential der Ab-
scisse Pp.

Der 1. Zusatz.

86. Derowegen wenn die Semiordinate
 $PM = y$, $AP = x$, so ist $Pp = dx$ und das
Rectangulum $PMRp = ydx$.

Der 2. Zusatz.

87. Weil die Semiordinaten PM und p
m einander unendlich nahe sind, so ist ihre
Differenz mR in Ansehung ihrer nichts (S.
4.), und daher das Rectangulum PMRp
dem Trapezio PMmp gleich (S. 5.). Da ihr
nun die Figur in unendliche solche Trapezia
resolviren könnet; so ist $\int ydx$ der Inhalt der
Fläche AMP.

Der 3. Zusatz.

88. Derowegen wenn ihr aus der Glei-
chung für eine Krümme Linie den Werth von
 y sehet, und ihr könnet die Differential der
Fläche integriren, so habet ihr die Quadra-
tur der Fläche gefunden.

Die 2. Aufgabe.

89. Den Inhalt eines Triangels zu
finden.

A a a a a 2

Auf-

Auflösung.

Tab. IX.
Fig. 75.

Wenn ihr die krumme Linie AM als eine gerade ansehet, so ist AMP ein Triangel, und daher auch sein Element ydx . Setzet nun die Höhe des Triangels, davon x ein Theil ist $= a$, die Grundlinie, welche mit PM oder y parallel ist $= b$; so ist (§. 184. Geom.) $a:b = x:y$ folgendes

$$\begin{array}{r} ay = bx \\ \hline y = bx : a \\ \hline ydx = bxdx : a \\ \hline \int ydx = bx^2 : 2a \text{ (§. 82.).} \end{array}$$

Wenn ihr nun den ganzen Triangel verlangt, so setzet für den Theil der Höhe x , die ganze Höhe a und ihr findet den Inhalt ba^2 :
 $2a = \frac{1}{2}ab$.

Anmerkung.

90. Dieses Exempel habe ich nur zu dem Ende gegeben, damit ihr sehet, daß durch die Integral Rechnung, deren Gründe den Anfängern zuerst zweifelhaft scheinen, weil man den Triangel MmR für nichts ansieheth, eben das gefunden wird, was in der gemeinen Geometrie aus anderen Gründen erwiesen worden.

Die 3. Aufgabe.

91. Die Parabel zu quadriren.

Auflösung.

In der Parabel ist $ax = y^2$

$$\frac{a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y}{dx}$$

$$y dx = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\begin{aligned} \int y dx &= \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{ax^3} = \frac{2}{3} \sqrt{x^2 y^2} \\ &= \frac{2}{3} xy. \end{aligned}$$

Zusatz.

92. Also verhält sich der Raum in der Parabel AMP zu dem Rectangulo aus der Semiordinate PM in die Abscisse AP, wie $\frac{2}{3}xy$ zu xy , das ist, wie 2 zu 3.

Die 4. Aufgabe.

93. Unendliche Parabeln auf einmahl zu quadriren.

Auflösung.

Für unendliche Parabeln und noch andere Linien ist

$$a^m x^n = y^r$$

$$a^{m:r} x^{n:r} = y$$

$$y dx = a^{m:r} x^{n:r} dx$$

$$\int y dx = \frac{r}{n+r} a^{m:r} x^{n+r:r} = \frac{r}{n+r} yx$$

3. E. Es sey eine Parabel von dem an
 A a a a a 3 des

deren Geschlechte, so ist $a^2x = y^3$, daher $r = 3$,
 $x = 1$, folgendes $\int y dx = \frac{2}{4}xy$.

Die 5. Aufgabe.

Tab. IX.
Fig. 75.

94. Das Stücker von der Parabel PMNS
zu quadriren.

Auflösung.

Es sey die unveränderliche Linie $AP = b$,
 $PS = x$, $SN = y$, der Parameter $= a$; so ist
 $AS = b + x$ und (§. 217. P. I.).

$$\begin{aligned} ab + ax &= y^2 \\ \hline \sqrt{ab + ax} &= y \\ \hline dx \sqrt{ab + ax} &= y dx \end{aligned}$$

Damit man dieses Element integrieren kan;
 so setzet

$$\begin{aligned} \sqrt{ab + ax} &= y \\ \hline \text{so ist } ab + ax &= v^2 \\ \hline adx &= 2v dv \\ \hline dx &= 2v dv : a \\ \hline dx \sqrt{ab + ax} &= 2v^2 dv : a \\ \hline \int y dx &= \frac{2}{3}v^3 : a = \frac{2}{3}(b + x) \sqrt{ab + ax}. \end{aligned}$$

Weil

Weil x in $P=0$ wird und auch der Raum $PSNM$ nichts werden muß, wenn $x=0$; hingegen wenn ihr in der gefundenen Summe $x=0$ sehet, $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ übrig bleibt; so ist klar, daß ihr von dem gefundenen Werthe $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ noch abziehen müßet, damit ihr den Inhalt von dem Raume $PMNS = \frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)} - \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ bekommet. Nämlich $\frac{1}{2}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}$ ist der ganze Parabolische Raum ANS , und $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ das Stücker AMP ; folgendes der Unterscheid $PMNS$.

Es könnte auch AS von beständiger Grösse angenommen und x von S angerechnet werden. Wenn nun $AS=b$, $SP=x$, so ist $PA=b-x$, folgendes (weil $PM=y$)

$$\begin{aligned} ab - ax &= y^2 \\ \sqrt{ab - ax} &= y \\ dx \sqrt{ab - ax} &= y dx. \end{aligned}$$

Sehet wie vorherin

$$\begin{aligned} ab - ax &= v^2 \\ \text{so ist } -a dx &= 2v dv \\ dx &= -2v dv : a \\ dx \sqrt{ab - ax} &= -2v^2 dv : a \\ \int y dx &= -\frac{2}{3}v^3 : a = -\frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)} \end{aligned}$$

Setzet ferner, wie vorhin, $x=0$; so bleibet $-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ übrig, und demnach müßet ihr $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ addiren, damit der Inhalt des Raumes PMNS herauskommet. Nämlich $ANS = \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ und $APM = \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$; folgender PMNS $= \frac{2}{3}b\sqrt{ab} - \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$.

Zusatz.

95. Wenn also die Gleichung für eine krumme Linie gegeben wird, und man nicht weiß, wo x in der Aye seinen Anfang hat: so erhellet aus der Auflösung, daß man nur $x=0$ setzen darf, um zu finden, ob noch etwas zu addiren, oder zu subtrahiren übrig verbleibet.

Die 6. Aufgabe.

96. Eine Linie zu quadriren, in welcher $xy^3 = a^4$.

Auflösung.

Weil $xy^3 = a^4$

so ist $y^3 = a^4 : x = a^4 x^{-1}$

$$y = a^{4:3} x^{-1:3}$$

$$y dx = a^{4:3} x^{-1:3} dx$$

$$\int y dx = \frac{3}{2} a^{4:3} x^{2:3} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{a^4 x^2}.$$

Die 7. Aufgabe.

97. Die krumme Linie des Cartesii (Tom.

(Tom. 3. Epist. p. 219.) zu quadriren, in welcher $b^2 : x^2 = b - x : y$.

Auflösung.

$$\text{Weil } b^2 y = bx^2 - x^3$$

$$\text{so ist } y = (bx^2 - x^3) : b^2$$

$$y dx = (bx^2 dx - x^3 dx) : b^2$$

$$\int y dx = x^3 : 3b - x^4 : 4b^2$$

Die 8. Aufgabe.

98. Die krumme Linie zu quadriren, deren Gleichung ist $x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4 = a^4y$.

Auflösung.

$$\text{Weil } y = x^5 : a^4 + x^4 : a^3 + x^3 : a^2 + x^2 : a + a$$

$$\text{so ist } y dx = (x^5 : a^4 + x^4 : a^3 + x^3 : a^2 + x^2 : a + a)$$

$$dx, \int y dx = x^6 : 6a^4 + x^5 : 5a^3 + x^4 : 4a^2 + x^3 : 3a + ax.$$

Die 9. Aufgabe.

99. Eine krumme Linie zu quadriren, in welcher $y^2 = x^4 + a^2x^2$.

Auflösung.

$$\text{Weil } y^2 = x^4 + a^2x^2$$

$$\text{so ist } y = \sqrt{(x^4 + a^2x^2)} = x \sqrt{(x^2 + a^2)}$$

$$y dx = x dx \sqrt{(x^2 + a^2)}$$

Uaaaaa s

Das

Damit dieses Element zum integriren geschickt werde, setzet

$$\underline{x^2 + a^2 = v^2}$$

$$\text{so ist } \underline{2x dx = 2v dv}$$

$$\underline{x dx \sqrt{(a^2 + x^2)} = v^2 dv}$$

$$\int x dx \sqrt{(x^2 + a^2)} = \frac{1}{3} v^3 = \frac{1}{3} (x^2 + a^2) \sqrt{(x^2 + a^2)}.$$

Setzet nun $x=0$, so bleibt $\frac{1}{3} a^3$ übrig.
Solchergehalt ist $\int y dx = \frac{1}{3} (x^2 + a^2) \sqrt{(x^2 + a^2)} - \frac{1}{3} a^3$ (§. 94.).

Die 10. Aufgabe.

100. Eine krumme Linie zu quadriren, in welcher $y^2 = x^3 + ax^2$.

Auflösung.

$$\text{Weil } y^2 = x^3 + ax^2$$

$$\text{so ist } \underline{y = x \sqrt{(x + a)}}$$

$$\underline{y dx = x dx \sqrt{(x + a)}}$$

Damit dieses Element zum integriren geschickt werde, setzet

$$\underline{x + a = v^2}$$

$$\text{so ist } \underline{x = v^2 - a}$$

$$dx = 2v dv$$

$$x dx \sqrt{(x+a)} = 2v^4 dv - 2av^2 dv$$

$$\begin{aligned} \int x dx \sqrt{(x+a)} &= \frac{2}{3}v^5 - \frac{2}{3}av^3 = \left(\frac{2}{3}(xx + 2ax + \right. \\ &aa) - \frac{2}{3}(ax + aa)\bigg) \sqrt{(x+a)} = \left(\frac{6}{15}(xx + 2ax + \right. \\ &aa) - \frac{10}{15}(ax + aa)\bigg) \sqrt{(x+a)} = (6x^2 + 2ax - \\ &4aa) \sqrt{(x+a)} : 15 + \frac{4}{15}a^2 \sqrt{a} \text{ (§. 94.).} \end{aligned}$$

Die II. Aufgabe.

101. Eine krumme Linie zu quadriren,
in welcher $y^2 = x^2 : (x+a)$.

Auflösung.

Weil $y^2 = x^2 : (x+a)$

so ist $y = x : \sqrt{(x+a)}$

$$y dx = x dx : \sqrt{(x+a)}$$

Setzet $\sqrt{(x+a)} = v$

so ist $x+a = v^2$

$$x = v^2 - a$$

$$dx = 2v dv$$

$$\begin{aligned} x dx : \sqrt{(x+a)} &= (2v^3 dv - 2av dv) : v \\ &= 2v^2 dv - 2a dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x dx : \sqrt{(x+a)} &= \frac{2}{3}v^3 - 2av = \left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}a - 2\right) \sqrt{(x+a)} \\ &= \left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}a\right) \sqrt{(x+a)} = \sqrt{(4x^3 - 12ax + 16a^2)} \end{aligned}$$

†

$$\pm 16a^3 : 9) = \frac{2}{3} \sqrt{(x^3 - 3axx \pm 4a^2 - \frac{4}{3}a \sqrt{a}} \\ (\S. 94.).$$

Die 12. Aufgabe.

102. Die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten zu quadriren.

Auflösung.

Für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist

$$a^2 = by \pm xy \quad (\S. 287. P. I.)$$

$$\text{Daher } a^2 : (b \pm x) = y$$

$$y dx = a^2 dx : (b \pm x)$$

Damit dieses Element zum integriren geschickt werde, so dividiret in der That

$$b \pm x) \left\{ \begin{array}{l} \frac{a^2}{b} - \frac{a^2 x}{b^2} + \frac{a^2 x^2}{b^3} - \frac{a^2 x^3}{b^4} \&c. \end{array} \right.$$

$$\frac{a^2 \pm a^2 x : b}{-a^2 x : b}$$

$$b \pm x) -a^2 x : b - a^2 x^2 : b^2$$

$$+ a^2 x^2 : b^2$$

$$b \pm x) + a^2 x^2 : b^2 + a^2 x^3 : b^3$$

$$- a^2 x^3 : b^3$$

$$b \pm x)$$

$$\text{Denn ist } a^2 dx : (b \pm x) = \frac{a^2 dx}{b} - \frac{a^2 x dx}{b^2} +$$

a^2

$$\frac{a^2 x^2 dx}{b^3} - \frac{a^2 x^3 dx}{b^4} \text{ u. s. w. unendlich fort.}$$

Folgende habet ihr $\int y dx = \frac{a^2 x}{b} - \frac{a^2 x^2}{2b^2} \mp$

$$\frac{a^2 x^3}{3b^3} - \frac{a^2 x^4}{4b^4} \text{ u. s. w. unendlich fort, das ist,}$$

wenn ihr $a=b=1$ setzet, $x - \frac{1}{2}x^2 \mp \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \&c.$

Anmerkung.

103. Diese Quadratur der Hyperbel hat zuerst *Nic. Mercator* in seiner *Logarithmotechnia* gegeben, welcher die unendlichen Reihen zu Quadrirung der Figuren zuerst gebrauchet, die man nicht genau quadriren kan.

Die 13. Aufgabe.

104. Den Circul zu quadriren.

Auflösung.

Die Gleichung für den Circul ist

$$y^2 = a^2 - x^2 \quad (\text{S. 198, P. I.})$$

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y dx = dx \sqrt{a^2 - x^2}$$

Zieheth aus $\sqrt{a^2 - x^2}$ die Wurzel, so findet ihr (S. 97, P. I.) $y dx = a dx - \frac{x^2 dx}{2a}$

$$\frac{x^4 dx}{8a^3} - \frac{x^6 dx}{16a^5} - \frac{5x^8 dx}{128a^7} \text{ u. s. w. unendlich fort,}$$

dessen

dessen Integrale $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} -$

Tab. X.
Fig. 84.

$5x^9$ u. s. w. unendlich fort den Theil des
 $\frac{1152a^7}{\text{Circuls BNP ausdrucket.}}$

Wenn ihr für x den halben Diameter a sehet, so kommet der Werth des Quadrants $a^2 - a^2 - a^2 - a^2 - 5a^2$ u. s. w. Ges

$\frac{6}{40} \frac{112}{1152}$
set $a = \frac{1}{2}$, so ist $a^2 = \frac{1}{4}$, und demnach der ganze Circul $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{1}{1152}$ u. s. w. unendlich fort.

Anders.

Tab. II.
Fig. 15.

Es sey CB der Tangens des halben Bogens $GB = x$, der halbe Diameter $BA = a$, so ist BD der Tangens des ganzen Bogens $BG = 2aax : (aa - xx)$ (§. 190. P. I.), folgender $DA = (a^3 + ax^2) : (aa - xx)$ (J. cit.). Nun ist (§. 184. Geom.) $DA : DB = GA : GH$ und $AD : AB = AG : AH$: darum findet ihr $GH = 2a^2x : (a^2 + x^2)$ und $AH = (a^3 + ax^2) : (aa + xx)$ endlich $BH = AB - AH = 2ax^2 : (aa + xx)$. Wenn ihr der beyden Differential-Größen von GH und BH, nemlich $(2a^4 dx - 2a^2 x^2 dx) : (a^2 + x^2)^2$ und $4a^2 x dx : (a^2 + x^2)^2$, Quadrate $(4a^2 dx^2 - 8a^6$

$8a^6x^2dx^2 + 4a^4x^4dx^2) : (a^2 + x^2)^4$ und $16a^6x^2dx^2 : (a^2 + x^2)^4$ zusammen sehet, und aus der Summe $(4a^8dx^2 + 8a^6x^2dx^2 + 4a^4x^4dx^2) : (a^2 + x^2)^4$ die Quadratwurzel $(2a^4dx + 2a^2x^2dx) : (a^2 + x^2)^2 = 2a^2dx : (a^2 + x^2)$ ausziehet; so habet ihr die Differential des Bogens GB. Multipliciret diese in den halben Radium oder $\frac{1}{2}a$; so kommet das Element des Sectoris BGA (§. 171. Geom.) heraus $a^3dx : (a^2 + x^2)$. Setzet $a=1$; so ist das Element $dx : (1 + x^2)$. Nun findet ihr durch die gemeine Division wie in der vorhergehenden Aufgabe (§. 102.) $1 : (1 + x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}$ u. s. w. unendlich fort, und folgendes $\int dx : (1 + x^2) = x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - x^{11}$

u. s. w. unendlich fort. Diese unendliche Reihe ist für den Ausschnitt BAG, dessen halben Bogens Tangens $BC = x$ ist. Nun ist der Tangens des halben Quadrantens dem Radio gleich. Derowegen wenn ihr $x=1$ sehet, so ist $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ u. s. w. unendlich fort der Inhalt des Quadrantens. Nehmet ihr endlich den Diameter des Circuls 1 an; so ist eben selbige unendliche Reihe der Inhalt des ganzen Circuls.

Anmerckung.

105. Die erste Reihe für den Circul hat der Herr Newton; die andere der Herr von Leibniz gefunden, und ist auch schon vorher Jacob Gregorius darauf kommen, ob er sie gleich nicht in Schriften publiciret.

Die

Die 14. Aufgabe.

Tab. III.
Fig. 27.

106. Die Ellipfin zu quadriren.

Auflösung.

Es sey $AC=a$, $DC=b$, $PC=x$, $PM=y$;
 so ist $AP=a-x$, $PB=a+x$, und aus der
 Natur der Ellipsis

$$AP \cdot PB : AC^2 = PM^2 : CD^2 \quad (\S. 25 \text{ I. P. I.})$$

$$aa-xx : aa = yy : bb$$

$$aayy = bb(aa-xx)$$

$$y = b \sqrt{(aa-xx)} : a$$

$$ydx = bdx \sqrt{(aa-xx)} : a$$

$$\text{Nun ist } \sqrt{(aa-xx)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$$

u. f. w. unendlich fort (§. 97. P. I.)

$$\text{Derowegen ist } bdx \sqrt{(aa-xx)} : a = bdx - \frac{bx^2 dx}{2a^2} - \frac{bx^4 dx}{8a^4} - \frac{bx^6 dx}{16a^6} - \frac{5bx^8 dx}{128a^8}$$

$$\text{u. f. w. unendlich fort. Folgendes ist } \int ydx = \frac{bx}{1} - \frac{bx^3}{3} - \frac{bx^5}{5} - \frac{bx^7}{7} - \frac{5bx^9}{9} \text{ u. f. w. unendlich fort.}$$

Wenn ihr für x die halbe Aye a setzt,
 so bekommt ihr für den Quadranten der El-

Ellipsis $ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab - \frac{1}{112}ab - \frac{1}{1152}ab$ u. s. w. unendlich fort, und also für die ganze Ellipsis eben dieselbe Reihe, wenn ihr a für die ganze grosse und b für die ganze kleine Aye annehmet.

Der 1. Zusatz.

107. Wenn ihr $\sqrt{ab} = 1$ setzet, so kommet die Reihe für den Circul $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{1}{1152}$ u. s. w. heraus (§. 104.). Derowegen ist die Ellipsis einem Circul gleich, dessen Diameter die mittlere Proportionallinie ist zwischen seiner kleinen und grossen Aye, und also verhält sich die Ellipsis zu dem Circul, der mit der grossen Aye beschrieben wird, wie die kleine Aye zu der grossen.

Der 2. Zusatz.

108. Daher dependiret die Quadratur der Ellipsis von der Quadratur des Circuls.

Die 1. Anmerkung.

109. Die Quadratur des Circuls, der Ellipsis und Hyperbel hat noch niemand durch einen endlichen Werth gegeben.

Die 2. Anmerkung.

110. Aus der gefundenen Quadratur der Ellipsis lästet sich nun ferner der Lehrsatz erweisen, den wir in der Astronomie (§. 419.) angenommen, daß nemlich der Sector des Circuls KAP sich zu dem Sektore CAP verhalte wie der Circul zu der Ellipsi. Denn es ist klar, daß CLP sich zu KLP verhalte, wie $b \int dx \sqrt{(a^2 - x^2)}$ zu $\int dx \sqrt{(a^2 - x^2)}$ (§. 104. Tab. X. Fig. 85.

(Wolffs Mathes. Tom. IV.) Bbb bbb 106.)

160.), folgendes wie b zu a (§. 144. P. I.), oder RE zu DR. Die Triangel aber CAL und KAL verhalten sich wie CL zu KL (§. 176. Geom.) oder wie RE zu DR, folgendes so wohl sie als die Abschnitte PLC und PLK wie die Ellipsis zu dem Circul (§. 107.). Folgendes ist $KAL \div KLP$ zu $CAL \div CLP$ wie der Circul zu der Ellipsi (§. 144. P. I.).

Die 3. Anmerkung.

111. Daß aber $LC:LK = RE:DR$ läßt sich leicht erweisen. Denn vermöge der gegenwärtigen Aufgabe ist $LC = bV(aa - xx):a$ und $LK = V(aa - xx)$. Daher $LC:LK = bV(aa - xx):aV(aa - xx) = b:a = RE:DR$.

Die 15. Aufgabe.

Tab. IX.
Fig. 81.

112. Den Raum HPMI zwischen der logarithmischen Linie MI und ihrer Arc PH zu finden.

Auflösung.

Es sey $PM = y$, $Pp = x$, der Subtangens $= a$ (§. 61.), so ist $ydx:dy = a$

$$\frac{ydx = ady}{\int ydx = ay}$$

Der 1. Zusatz.

113. Setzet $QS = z$, so ist $HQIS = az$, folgendes $PQSM = ay - az = a(y - x)$ das ist, dem Rectangulo aus dem Subtangente in die Differenz der Semiordinaten PM und QS.

Der

Der 2. Zusatz.

114. Derowegen verhalten sich die Räume zwischen zweyen Semiordinaten wie ihre Differenzen.

Die 16. Aufgabe.

115. Die Spirallinie zu quadriren.

Auflösung.

Es sey alles, wie in der 6. Aufgabe (§. Tab. IX. 52.), so ist $EG = ydx : a$, folgendes der klei. Fig. 78. ne Sector EAG oder das Element der Fläche $y^2 dx : 2a$. Nun ist für die Spirallinie (§. 312. P. I.).

$$\begin{array}{r} ax = by \\ \hline a^2 x^2 : b^2 = y^2 \\ \hline y^2 dx : 2a = ax^2 dx : 2bb \\ \hline \int y^2 dx : 2a = ax^3 : 6bb. \end{array}$$

Wenn ihr für x die ganze Peripherie b setzt, so kommet für den Raum, den die ganze Spirallinie einschliesst, $\frac{1}{6}ab$.

Der 1. Zusatz.

116. Da nun der umschriebene Circul $\frac{1}{2}ab$ ist, so verhält sich die Spiralsfläche zu ihm wie $\frac{1}{6}ab$ zu $\frac{1}{2}ab$, das ist, wie 1 zu 3 (§. 144. P. I.).

Der 2. Zusatz.

117. Für unendliche Spirallinien ist

$$a^m x^n = b^n y^m \quad (\S. 312. P. I.)$$

$$ax^{n:m} : b^{n:m} = y$$

$$a^2 x^{2n:m} : b^{2n:m} = y^2$$

$$f y^2 dx : 2n = m a x^{2n+m:m} : (4n+2m) b^{2n:m}$$

Wenn ihr nun für x die ganze Peripherie b sehet, so bekommt ihr $mab^{2n+m:m} : (4n+2m)$
 $b^{2n:m} = mab : (4n+2m).$

Der 3. Zusatz.

118. Dannenhero verhält sich überhaupt die Spiralfäche zu dem umschriebenen Circul wie $mab : (4n+2m)$ zu $\frac{1}{2}ab$, das ist, wie $2m$ zu $4n+2m$, oder wie m zu $2n+m$.

Der 4. Zusatz.

Tab. IX.
Fig. 78.

119. Sehet, daß der Bogen BC sich zu EC verhalten solle, wie die Abscisse in einer algebraischen Linie zu ihrer Semiordinate.

Und es sey der Bogen $BC = x$, $AE = y$, $AC = r$; so ist $EC = r - y$, $CD = dx$ und

$$AC : CD = AE : EG$$

$$r \quad dx \quad y \quad y dx : r$$

folgendes das Element oder der Sector AEG
 $\frac{1}{2}y^2$

$\frac{1}{2}y^2 dx : r$. Setzet nun es sey BC die Abscisse, EC die Semiordinate einer Parabel, so ist

$$ax = r^2 - 2ry + yy$$

$$dx = (2ydy - 2r dy) : a$$

$$\frac{1}{2}y^2 dx : r = (y^3 dy - ry^2 dy) : ar$$

$$\int \frac{1}{2}y^2 dx : r = y^4 : 4ar - y^3 : 3a$$

Der 5. Zusatz.

120. Ihr könnet auch den Raum BFC fin, Tab. IX. den, wenn ihr das Element GDCE suchet, Fig. 78. welches ihr findet, wenn ihr $CD + EG$ mit $\frac{1}{2}FC$ multipliciret (S. 157. Geom.), weil ihr es als ein Trapezium ansehen könnet, dessen bases CD und EG parallel sind. Nun ist $CD + EG = dx + ydx : r$ und $\frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}y$. Derowegen das verlangte Element $(r^2 dx - y^2 dx) : 2r$. Nehmet nun wie in dem vorigen Exempel (S. 119.) $dx = (2ydy - 2r dy) : a$, so ist das besondere Element $(ry^2 dy + r^2 y dy - y^3 dy - r^3 dy) : ar$, dessen Integrale $y^3 : 3a + ry^2 : 2a - y^4 : 4ar - r^2 y : a$ den verlangten Raum giebet.

Die 17. Aufgabe.

121. Die Fläche eines jeden Körpers Tab. IX. zu finden, der erzeugt wird, indem Fig. 75. eine krumme Linie sich um ihre Ase beweget.

Auflösung.

Setzet die Verhältniß des halben Diameters zu der Peripherie $= r:c$, die Abscisse $AP=x$, die Semiordinate $PM=y$, so ist $Pp=dx$, $mR=dy$, $Mm=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (§. 172. *Geom.*) und die Peripherie, welche mit PM beschrieben wird, $=cy:r$. Daher das Element der Fläche $cy\sqrt{(dx^2+dy^2)}:r$. Wenn ihr nun für dx^2 oder dy^2 seinen Werth aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie setzet, und das Element hernach integriret; so kommet der Inhalt eines Stückes von der verlangten Fläche heraus.

Der I. Zusatz.

Tab. IX.
Fig. 75.

122. Es sey AMP ein Triangel, dessen Höhe $=a$, die Grundlinie $=r$, so ist $ay=rx$ (§. 184. *Geom.* & §. 137. *P. I. Algebr.*) und Dannenhero

$$\frac{ady:r=dx}{a^2dy^2:r^2=dx^2}$$

$$\frac{cy\sqrt{(dx^2+dy^2)}:r=cy\sqrt{(a^2dy^2+r^2dy^2)}:r^2}{cy\sqrt{(dx^2+dy^2)}:r=cydy\sqrt{(a^2+r^2)}:r^2}$$

$$\int cy\sqrt{(dx^2+dy^2)}:r=cy^2\sqrt{(a^2+r^2)}:2r^2$$

Setzet für y die Grundlinie r : so kommet die Fläche des Coni heraus $\frac{1}{2}c\sqrt{(r^2+a^2)}$. Da nun

nun $\sqrt{(r^2 + a^2)}$ seine Seite ist: so sehet ihr, daß die Kegelfläche einem Triangel gleich sey, dessen Grundlinie die Peripherie der Grundfläche des Kegels und die Höhe seiner Seite gleich ist.

Der 2. Zusatz.

123. Wenn ihr für die beschreibende Linie einen halben Circul annehmet, so findet ihr die Kugelfläche. Da nun im Circul

$$2rx - xx = y^2$$

$$\text{so ist } 2r dx - 2x dx = 2y dy$$

$$(r dx - x dx) : y = dy$$

$$(r^2 dx^2 - 2r x dx^2 + x^2 dx^2) : y^2 = dy^2$$

$$\begin{aligned} cy \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r &= cy \sqrt{(dx^2 + (r^2 dx^2 - 2r x dx^2 + x^2 dx^2) : (2rx - xx))} : r = cy \sqrt{((2r x dx^2 - x^2 + r^2 dx^2 - 2r x dx^2 + x^2 dx^2) : (2rx - xx))} : r = cy \sqrt{(r^2 dx^2 : y^2)} : r = cy r dx : ry = c dx. \end{aligned}$$

$$\int c dx = cx$$

Setzet für x , den Diameter $2r$, so ist die ganze Kugelfläche $2cr$.

Der 3. Zusatz.

124. Da nun die Fläche des größten Circuls $\frac{1}{2} cr$; so ist die Fläche der Kugel viermal

Bbb bbb 4

mahl

mahl so groß als ihr größter Circul. Hingegen jedes Stücke der Kugelfläche verhält sich zu der ganzen wie cx zu $2cr$, das ist, wie x zu $2r$, oder die Höhe des Stückes der Kugel zu dem ganzen Diameter.

Der 4. Zusatz.

125. Es sey die beschreibende Linie eine Parabel, so findet ihr die Fläche eines Parabolischen Austerkegels. Da nun in der Parabel

$$adx = 2ydy$$

$$\text{so ist } dx^2 = 4y^2 dy^2 : a^2$$

$$cy \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r = cy \sqrt{(4y^2 dy^2 + a^2 dy^2 : a^2)} : r = cydy \sqrt{(4yy + aa)} : ar$$

$$\text{Setzet } \sqrt{(4yy + aa)} = v$$

$$\text{so ist } 4yy + aa = v^2$$

$$8ydy = 2v dv$$

$$cydy \sqrt{(4yy + aa)} : ar = cv^2 dv : 4ar$$

$$\int cv^2 dv : 4ar = cv^3 : 12ar = (4cyy + caa) \sqrt{(4yy + aa)} : 12ar - ca^2 : 12r (\S. 93.).$$

Setzet r für y , so habet ihr die Fläche des ganzen Austerkegels $(4crr + caa) \sqrt{(4rr + aa)} : 12ar - ca^2 : 12r.$

Von

Von der Rectification der krummen Linien.

Die 4. Erklärung.

126. Eine krumme Linie rectificiren heisset so viel als die Länge derselben finden.

Der 1. Zusatz.

127. Wenn die beyden Semiordinaten PM und pm einander unendlich nahe sind, so ist der Bogen Mm das Element des Bogens AM, das ist, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Tab. IX. Fig. 75.

Der 2. Zusatz.

128. Derowegen wenn ihr vor dx^2 oder dy^2 den Werth aus der Natur der krummen Linie sehet, und das besondere Element integriret; so habet ihr die krumme Linie oder ihren Bogen AM rectificiret.

Der 3. Zusatz.

129. Ihr könnet auch das Element Mm finden, wenn ihr sehet $PM:TM=dy:Mm$.

Die 18. Aufgabe.

130. Die Parabel zu rectificiren.

Auflösung.

In der Parabel ist $ax=y^2$

Bbb bbb 5

adx

$$adx = 2ydy$$

$$a^2 dx^2 = 4y^2 dy^2$$

$$dx^2 = 4y^2 dy^2 : a^2$$

$$\sqrt{(dx^2 \mp dy^2)} = \sqrt{(dy^2 \mp 4y^2 dy^2 : a^2)}$$

Das ist $= dy \sqrt{(aa \mp 4y^2) : a}$

Damit ihr nun dieses Element integrieren
könnet, so ziehet (§. 95. P. I.) die Wurzel aus
 $\sqrt{(aa \mp 4y^2)}$. Es ist nemlich

$$n=2, m=1, P=a^2 \quad Q=4y^2 : a^2$$

$$Pm:n = \mp a = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} a \cdot 4y^2 : a^2 = \mp 2y^2 : a = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{2} y^2 : a \cdot 4y^2 : a^2 = -2y^4 : a^3 = C$$

$$\frac{m-n}{3n} QC = -\frac{3}{6} - 2y^4 : a^3 \cdot ay^2 : a^2 = \mp 4y^6 : a^5 = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} \cdot 4y^6 : a^5 \cdot 4y^2 : a^2 = 10y^8 : a^7$$

u. s. w. unendlich fort.

$$\text{Demnach ist } \sqrt{(aa \mp 4y^2)} = a \mp \frac{2y^2}{a} -$$

$$\frac{2y^4}{a^3} \mp \frac{4y^6}{a^5} - \frac{10y^8}{a^7} \&c. \text{ und daher } dy \sqrt{(aa \mp 4y^2)}$$

∓ 4

$$\begin{aligned} &+ 4y^2) : a = dy + \frac{2y^2 dy}{a^2} - \frac{2y^4 dy}{a^4} + \frac{4y^6 dy}{a^6} \\ &- \frac{10y^8 dy}{a^8} \&c. \quad \text{Deren Integral } y + \frac{2y^3}{3a^2} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8} \&c. \quad \text{Die Länge des Bo} \\ &\text{gens exprimiret.} \end{aligned}$$

Die 19. Aufgabe.

131. Die Parabel zu rectificiren, in welcher $ax^2 = y^3$.

Auflösung.

Weil $ax^2 = y^3$

so ist $2ax dx = 3y^2 dy$

$$4a^2 x^2 dx^2 = 9y^4 dy^2$$

$$dx^2 = 9y^4 dy^2 : 4a^2 x^2 = 9y dy^2 : 4a$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(dx^2 + dy^2)} &= \sqrt{((9y dy^2 + 4a dy^2) : 4a)} = \\ &dy \sqrt{((9y + 4a) : 4a)} \end{aligned}$$

Setzet $\sqrt{((9y + 4a) : 4a)} = v$

so ist $9y + 4a = 4av^2$

$$9dy = 8av dv$$

$$\frac{dy \sqrt{(9y+4a, : 4a)} = \frac{8}{5} av^2 dv}{}$$

$$\int dy \sqrt{(9y+4a, : 4a)} = \frac{8}{27} av^3 =$$

$$\frac{8}{27} (9y+4, : 4) \sqrt{(9y+4, : 4)} = \frac{2}{27} (9y+4)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(9y+4)} = \frac{1}{27} (9y+4) \sqrt{(9y+4)} - \frac{8}{27} (\S. 93.),$$

wenn $y=0$.

Die 20. Aufgabe.

132. Unendliche Parabeln zu rectificiren.

Auflösung.

Für unendliche Parabeln ist

$$\frac{y^n = a^{n-1} x = x, \text{ wenn } a=1.}{}$$

$$\frac{ny^{n-1} dy = dx}{}$$

$$\frac{n^2 y^{2n-2} dy^2 = dx^2}{}$$

$$\frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(n^2 y^{2n-2} dy^2 + dy^2)} = dy}{\sqrt{(n^2 y^{2n-2} + 1)}}.$$

Zieheth nun aus $\sqrt{(1 + n^2 y^{2n-2})}$ die Wurzel ($\S. 95. P. I.$), und sethet der Kürze halber $2n-2=r$, so ist in dem Newtonischen Lehrsatz $m=1$, $n=2$, $P=1$, $Q=n^2 y^r$

$$Pm:n = 1 = A$$

$$mAQ = \frac{1}{2} n^2 y^r = B$$

—
n

$$\frac{m-2n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} n^2 y^r \cdot n^2 y^r = -\frac{1}{8} n^4 y^{2r} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{8} \cdot -\frac{1}{8} n^4 y^{2r} \cdot n^2 y^r = \frac{1}{16} n^6 y^{3r} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{16} n^6 y^{3r} \cdot n^2 y^r = -\frac{5}{128} n^8 y^{4r} =$$

E &c.

Demnach ist $dy \sqrt{(1 \pm n^2 y^{2n-2})} = dy$
 $\pm \frac{1}{2} n^2 y^r dy - \frac{1}{8} n^4 y^{2r} dy \pm \frac{1}{16} n^6 y^{3r} dy - \frac{5}{128}$
 $n^8 y^{4r} dy$ u. s. w. unendlich fort, dessen In-
 tegral $y \pm \frac{n^2 y^{r+1}}{2(r+1)} - \frac{n^4 y^{2r+1}}{8(2r+1)} \pm \frac{n^6 y^{3r+1}}{16(3r+1)} -$
 $\frac{5 n^8 y^{4r+1}}{128(4r+1)}$ u. s. w. unendlich fort, die Länge

unendlicher Parabeln ausdrucket. Wollet
 ihr für r seinen Werth $2n-2$ in die Stelle
 setzen, so bekommet ihr $y \pm \frac{n^2 y^{2n-1}}{2(2n-1)} - \frac{n^4 y^{4n-3}}{8(4n-3)} \pm \frac{n^6 y^{6n-5}}{16(6n-5)} - \frac{5 n^8 y^{8n-7}}{128(8n-7)}$ &c.

Es sey z. B. $n=2$, so bekommet ihr $y \pm \frac{4y^3}{3 \cdot 2} - \frac{16y^5}{8 \cdot 5} \pm \frac{4 \cdot 16y^7}{16 \cdot 7}$, &c. das ist, $y \pm \frac{2y^3}{3} - \frac{2y^5}{5} + \frac{4y^7}{7}$ &c. für die Apollonische Parabel,

welche

welche Reihe mit der oben gefundenen übereinkommet, wenn ihr $a=1$ setzt.

Die 21. Aufgabe.

133. Aus dem gegebenen Tangente eines Circulbogens den Bogen zu finden.

Auflösung.

Tab. IX.
Fig. 76.

Es sey der Tangens $KB=x$, $BC=1$, so ist $SK=dx$, $KC=\sqrt{(1+x^2)}$, $SL=xdx$: $\sqrt{(1+x^2)}$, wenn nemlich KC und SC einander unendlich nahe sind. Da nun bey L und B rechte Winkel sind (§. 48.) und $BKC=KSL$, weil KCL unendlich kleine ist (§. 101. *Geom.*); so ist $KC:BC=SK:LL$ (§. 163. *Geom.*) das ist:

$$\sqrt{(1+x^2)}:1=dx:\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

Ferner $KC:KL=NC:Nn$ (§. 163. *Geom.*)

$$\frac{\sqrt{(1+x^2)}:dx}{\sqrt{(1+x^2)}}=\frac{1:dx}{1+x^2}$$

Wenn ihr nun dx durch $1+x^2$ würcklich dividiret, so bekommet ihr für das Element Nn des Bogens BN $dx - x^2 dx + x^4 dx - x^6 dx + x^8 dx - x^{10} dx$ u. s. w. unendlich fort, dessen Integral $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ u. s. w. unendlich fort, den

den Bogen BN exprimiret, dessen Tangens $BK = x$.

Der 1. Zusatz.

134. Der Tangens des Bogens von 45° ist dem Radio BC gleich, und also wird $x = 1$, folgendes der Bogen von 45° oder der halbe Quadrant $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \&c.$ Gehet ihr aber den ganzen Diameter ein, so ist der Quadrant $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \&c.$

Der 2. Zusatz.

135. Derowegen verhält sich das Quadrat des Diameters zu der Circulfläche wie der Diameter zu dem Quadranten von der Peripherie (§. 104.).

Anmerkung.

136. Ihr hättet auf eben diese Art den Circul quadriren können (§. 104.).

Die 22. Aufgabe.

137. Aus dem gegebenen Bogen eines Circuls, der kleiner ist als ein Quadrant, den Tangentem zu finden.

Auflösung.

Wenn der Tangens x ist, so ist der Bogen $v = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \&c.$ (§. 133.).

Gehet $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \&c.$ weil nun
 $-v + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \&c. = 0$ und
 x^3

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 = a^3 v^3 + 3a^2 b v^5 + 3a b^2 v^7 & \& c. & \\
 & + 3a^2 c v^7 & \& c. & \\
 x^5 = & + a^5 v^5 + 5a^4 b v^7 & \& c. & \\
 x^7 = & + a^7 v^7 & \& c. &
 \end{array} \left. \begin{array}{l} (\S. 91. \\ P.I.) \end{array} \right\}$$

so ist

$$\begin{array}{rcl}
 -v = -v & & \\
 x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 & \& c. & \\
 -\frac{1}{3}x^3 = -\frac{1}{3}a^3 v^3 - a^2 b v^5 - ab^2 v^7 & \& c. & \\
 & - a^2 c v^7 & \& c. & \\
 + \frac{1}{5}x^5 = & + \frac{1}{5}a^5 v^5 + a^4 b v^7 & \& c. & \\
 -\frac{1}{3}x^7 = & - \frac{1}{7}a^7 v^7 & \& c. &
 \end{array}$$

demnach

$$\begin{array}{rcl}
 a - 1 = 0 & b - \frac{1}{3} = 0 & c - a^2 b + \frac{1}{5}a^5 = 0 \\
 \hline
 a = 1 & b = \frac{1}{3} & c = b - \frac{1}{5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \\
 & & = \frac{5}{15} - \frac{3}{15} = \frac{2}{15} \\
 a^2 - ab^2 - a^2 c + a^4 b - \frac{1}{7}a^7 = 0 & & \\
 \hline
 d = b^2 + c + \frac{1}{7} - b = \frac{1}{9} + \frac{2}{15} + \frac{1}{7} - \frac{1}{3} \\
 = \frac{2}{15} + \frac{1}{7} - \frac{2}{9} = 126 + 135 - 210 = 51 \\
 & & \hline
 & & 945 \qquad 945 \\
 & & \hline
 & & = 17 \\
 & & \hline
 & & 315
 \end{array}$$

Setzet nun diese gefundene Werthe für a ,
 b , c , d &c. in die angenommene Reihe für
den

den Tangentem; so bekommet ihr $x = v \mp \frac{1}{3} v^3 \mp 2 v^5 \mp 17 v^7 \&c.$

$$\frac{15}{315}$$

Die 23. Aufgabe.

138. Aus dem gegebenen Sinu eines Bogens den Bogen, der kleiner als ein Quadrant ist, zu finden.

Auflösung.

Wenn der halbe Diameter des Circuls r , der Sinus des Bogens, oder die Semitordinat y , der Sinus versus oder die Abscisse x ist; so ist die Equation des Circuls

$$2rx - xx = yy$$

$$\text{daher } 2r dx - 2x dx = 2y dy$$

$$dx = y dy : (r - x)$$

$$dx^2 = y^2 dy^2 : (r^2 - 2rx + xx)$$

$$\text{das ist } = y^2 dy^2 : (r^2 - y^2)$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(y^2 dy^2 + r^2 dy^2 - y^2 dy^2)} :$$

$$\sqrt{(r^2 - y^2)} = r dy : \sqrt{(r^2 - y^2)}.$$

Damit dieses Element des Bogens zum integriren geschickt werde, so ziehet aus 1: $(r^2 - y^2)$ die Wurzel in der That (S. 95. P. I.). Es ist aber $m = -1$, $n = 2$, $P = r^2$, $Q = -y^2 : r^2$

$$p_{m:n} = r^{-1} = 1 : r = A$$

$$\frac{m}{n} A Q = - \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{r} - \frac{y^2}{r^2} = + \frac{y^2}{2r^3} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} B Q = - \frac{\frac{3}{4} \cdot y^2}{2r^3} - \frac{y^2}{r^2} = + \frac{3y^4}{8r^5} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} C Q = - \frac{\frac{5}{6} \cdot 3y^4}{8r^5} - \frac{y^2}{r^2} = + \frac{5y^6}{16r^7} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} D Q = - \frac{\frac{7}{8} \cdot 5y^6}{16r^7} - \frac{y^2}{r^2} = + \frac{35y^8}{128r^9} = E$$

u. s. w. unendlich fort.

$$\text{Also ist } r dy (r^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} = dy + \frac{y^2 dy}{2r^2} + \frac{3y^4 dy}{8r^4}$$

$$+ \frac{5y^6 dy}{16r^6} + \frac{35y^8 dy}{128r^8} \&c. \text{ dessen Integral } y +$$

$$\frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35y^9}{1152r^8} \&c. \text{ den ver-$$

langten Bogen durch seinen Sinum ausdrückt. Wenn ihr besser sehen wollet, wie die Reihe unendlich fortgeht, so nennet das erste Glied A, das andere B, das dritte C u. s. w. so findet ihr $y + 1. 1. y^2 A + 3. 3y^2 B +$

$$\frac{5. 5y^2 C}{6. 7r^2} + \frac{7. 7y^2 D}{8. 9r^2} + \frac{2. 3r^2}{10. 11r^2} \frac{4. 5r^2}{11. 12r^2} E \&c.$$

Zusatz.

Zusatz.

139. Weil der Bogen $v = y \mp y^3 \mp 3y^5$

$$\frac{+ 5y^7}{112r^6} \mp \frac{35y^9}{1152r^8} \&c. \text{ so findet ihr, wie in } \frac{6r^2 40r^4}{6r^2 120r^4}$$

der 22. Aufgabe (S. 137.) $y = v - v^3 \mp v^5$

$$\begin{array}{r} - \frac{v^7}{5040r^6} \mp \frac{v^9}{362880r^8} \&c. = \frac{v - v^3}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3r^2} \\ + \frac{v^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5r^4} - \frac{v^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7r^6} \\ + \frac{v^9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8r^8} \&c. \end{array}$$

das ist, wenn ihr das erste Glied A, das andere B, das dritte C &c. sehet, $y = v - v^3 A$

$$\frac{+ v^2 B}{4 \cdot 5r^2} - \frac{v^2 C}{6 \cdot 7r^2} \mp \frac{v^2 D \&c.}{8 \cdot 9r^2}$$

Die 24. Aufgabe.

140. Aus dem gegebenen Sinu verso den Bogen des Circuls zu finden.

Auflösung.

Wenn der Diameter des Circuls $2r$, die Abscisse oder der Sinus versus $= x$ ist, so ist für den Circul

Eeeee 2

2rx

$$2rx - xx = yy$$

$$2r dx - 2x dx = 2y dy$$

$$(r dx - x dx) : y = dy$$

$$(r^2 dx^2 - 2r x dx^2 + x^2 dx^2) : y^2 = dy^2$$

$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + (r^2 dx^2 - 2r x dx^2 + x^2 dx^2) : (2rx - xx))} = \sqrt{((2r x dx^2 - x^2 dx^2 + r^2 dx^2 - 2r x dx^2 + x^2 dx^2) : (2rx - xx))}$
 $= r dx : \sqrt{(2rx - xx)} = r dx (2rx - x^2)^{-1/2}$,
 oder wenn ihr $2r = 1$ setzet, $\frac{1}{2} dx (x - x^2)^{-1/2}$. Damit dieses Element zum integrieren geschickt werde, so ziehet aus $(x - x^2)^{-1}$ die Wurzel in der That, (S. 95. P. I.).

Es ist aber $m = -1, n = 2, P = x, Q = -x$, und demnach

$$P^{m:n} = x^{-1/2} = A$$

$$m A Q = -\frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} \cdot -x = \frac{1}{2} x^{1/2} = B$$

$$\frac{n}{m-n} B Q = \frac{2}{-1-2} \cdot \frac{1}{2} x^{3/2} \cdot -x = \frac{1}{3} x^{5/2} = C$$

$$\frac{2n}{m-2n} C Q = \frac{4}{-1-4} \cdot \frac{1}{3} x^{7/2} \cdot -x = \frac{4}{15} x^{9/2} = D$$

$$\frac{3n}{m-3n} D Q = \frac{6}{-1-6} \cdot \frac{4}{15} x^{11/2} \cdot -x = \frac{8}{105} x^{13/2} = E$$

$$\frac{4n}{m-4n} E Q = \frac{8}{-1-8} \cdot \frac{8}{105} x^{15/2} \cdot -x = \frac{64}{1575} x^{17/2} = F$$

&c.

Daher

Daher ist $\frac{1}{2}dx : \sqrt{(x-xx)} = \frac{1}{2}x^{-1:2} dx \mp \frac{1}{4}$
 $x^{1:2} dx \mp \frac{1.3}{4.4} x^{3:2} dx \mp \frac{1.3.5}{4.4.6} x^{5:2} dx \mp \frac{1.3}{4.4}$

$\frac{5.7}{6.8} x^{7:2} dx \&c.$ und folgendes der Bogen

$AP = x^{1:2} \mp \frac{1}{4} x^{3:2} \mp \frac{1.3}{2.4.5} x^{5:2}$

$\mp \frac{1.3.5}{2.4.6.7.} x^{7:2} \mp \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} x^{9:2} \&c.$ oder

$\sqrt{x(1 \mp \frac{1}{2}x \mp \frac{1.3}{2.4}x^2 \mp \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^3 \mp$

$\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^4 \&c.)$

$\frac{2.4.6.8.9}{2.4.6.8.9}.$

Zusatz.

141. Wollet ihr den Sinum versum durch den Bogen ausdrücken, so werdet ihr auf die Art, wie oben (§. 137.) finden $x = \frac{v^2}{1.2}$

$\frac{v^4}{1.2.3.4.} \mp \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6.} \&c. =$ (wenn ihr das

erste Glied A, das andere B u. s. w. sehet)

$\frac{v^2}{1.2} - \frac{v^2}{3.4} A \mp \frac{v^2}{5.6} B - \frac{v^2}{7.8} C \&c.$

Von der Cubatur der Körper.

Die 5. Erklärung.

142. Cubiren heisset den Inhalt eines Körpers finden.

Der 1. Zusatz.

143. Wenn ein Körper erzeugt wird, indem eine Figur sich um ihre Ase herum bewegt, so beschreibt jede Semiordinate einen Circul, und dannenhero ist das Element desselben das Product aus einem Circul, der mit der Semiordinate beschrieben wird, in die Differential der Abscisse. Wenn ihr demnach die Verhältniß des Radii zu der Peripherie sehet $r:p$, so ist die Peripherie des gedachten Circuls $py:r$ und der Inhalt $py^2:2r$ (§. 162. Geom.), folgendes das Element $py^2 dx:2r$.

Der 2. Zusatz.

144. Wenn ihr demnach den Werth von y^2 durch x aus der Gleichung für die gegebene Figur sehet und das Element integriret; so habet ihr den verlangten Inhalt des Körpers.

Die 25. Aufgabe.

145. Den Conum zu cubiren.

Auflösung.

Weil der Conus von einem Triangel beschrieben wird (§. 35. Geom.), so habet ihr
(wenn

(wenn die Höhe des Triangels a , die Grundlinie r ist)

$$rx = ay$$

$$r^2 x^2 : a^2 = y^2$$

$$py^2 dx : 2r = prx^2 dx : 2a^2$$

$$\frac{spy^2 dy : 2r = prx^3 : 6a^2}{}$$

Wenn ihr den ganzen Kegel verlanget, so setet a für x , und ihr findet seinen Inhalt $pra^3 : 6a^2 = \frac{1}{6}pra = \frac{1}{2}pr \frac{1}{3}a$, das ist, wenn ihr die Grundfläche $\frac{1}{2}pr$ durch den dritten Theil der Höhe $\frac{1}{3}a$ multipliciret.

Die 26. Aufgabe.

146. Die Kugel zu cubiren.

Auflösung.

Die Kugel wird von einem halben Circul beschrieben (§. 27. Geom.), in welchem (S. 198. P. I.)

$$2rx - xx = yy$$

Daher ist $py^2 dx : 2r = pxdx - px^2 dx : 2r$

$$\frac{spy^2 dx : 2r = \frac{1}{2}px^2 - px^3 : 6r}{}$$

Wenn ihr die ganze Kugel verlanget, so setet $2r$ oder den Diameter für x oder die Höhe

he des Kugelstückes, und ihr bekommt
für ihren Inhalt $2pr^2 - 8pr^2 : 6 = 4pr^2 :$
 $6 = \frac{2}{3}pr.$

Zusatz.

147. Der Inhalt eines umschriebenen Cy-
linders, dessen Höhe nemlich dem Diamo-
ter, die Grundfläche dem größten Circul
der Kugel gleichet, ist pr^2 , und demnach ver-
hält er sich zur Kugel wie pr^2 zu $\frac{2}{3}pr^2$, das ist,
wie 3 zu 2.

Die 27. Aufgabe.

148. Einen parabolischen Aſterkegel
zu cubiren.

Auflösung.

In der Parabel ist

$$y^2 = ax$$

$$\text{Daher } py^2 dx : 2r = apx dx : 2r$$

$$\int py^2 dx : 2r = \int apx dx : 4r = py^2 x : 4r$$

Wenn die Höhe des ganzen Kegels b und der
halbe Diameter in der Grundfläche r ist; so
ist der Inhalt desselben $bpr^2 : 4r = \frac{1}{2}bpr.$

Zusatz.

149. Da nun der umschriebene Cylinder
 $\frac{1}{2}bpr$ ist, so verhält sich dieser zu dem parabo-
lischen Aſterkegel wie $\frac{1}{2}bpr$ zu $\frac{1}{4}bpr$, das ist,
wie 2 zu 1.

Die

Die 28. Aufgabe.

150. Unendliche parabolische Asterkegel auf einmahl zu cubiren.

Auflösung.

Es sey der Parameter = 1, so ist für unendliche Parabeln

$$y^m = x$$

$$y = x^{1:m}$$

$$y^2 = x^{2:m}$$

$$\frac{spy^2 dx : 2r = px^{2:m} dx : 2r}{}$$

$$\frac{spy^2 dx : 2r = mx^{2+m:m} : (4 \mp 2m) r = mpx}{y^2 : (2m \mp 4) r}$$

Die 29. Aufgabe.

151. Eine elliptische Asterkegel zu cubiren.

Auflösung.

Es sey der kleine Diameter in der Ellipsi 2r, der groſſe = 2a, so ist

$$yy = rr - r^2 x^2 : a^2 \text{ (S. 253. P. I.)}$$

$$\frac{py^2 dx : 2r = \frac{1}{2} pr dx - pr x^2 dx : 2a^2}{}$$

$$\frac{spy^2 dx : 2r = \frac{1}{2} pr x - pr x^3 : 6a^2}{}$$

Setzet für x die ganze grosse Aye $2a$, so
 kommet der Inhalt des ganzen Körpers apr
 $-\frac{2}{6}apr = \frac{4}{6}apr = \frac{2}{3}apr$.

Der 1. Zusatz.

152. Der umschriebene Cylinder ist apr
 (§. 221. Geom.) und demnach verhält er sich
 zu der elliptischen Asterkugel wie apr zu $\frac{2}{3}apr$,
 das ist, wie 1 zu $\frac{2}{3}$, oder 3 zu 2.

Der 2. Zusatz.

153. Die Kugel, deren Diameter dem
 grossen Diameter der Ellipsis gleichet, ist $2a^3p:3r$ (§. 147.). Demnach verhält sie sich
 zu der elliptischen Asterkugel wie $2a^3p:3r$ zu
 $\frac{2}{3}apr$, das ist, wie a^2 zu r^2 , oder wie das Qua-
 drat der grossen Aye zu dem Quadrate der
 Kleinen.

Der 3. Zusatz.

154. Die Kugel, deren Diameter dem
 Kleinen Diameter der Ellipsis gleichet, ist $\frac{2}{3}pr^2$
 (§. 147.). Derowegen verhält sie sich zu
 der elliptischen Asterkugel wie $\frac{2}{3}pr^2$ zu $\frac{2}{3}apr$,
 das ist, wie r zu a , oder die kleine Aye zu der
 grossen.

Die 30. Aufgabe.

155. Einen hyperbolischen Asterkegel
 zu cubiren.

Auflösung.

Es sey die Zwerchaye $= 2a$, die kleine Aye
 $= 2r$,

$= 2r$, die Abscisse $= x$, die Semiordinate $= y$, so ist (§. 269. P. I.)

$$rr : aa = y^2 : 2ax + xx$$

$$y^2 = (2ar^2x + r^2x^2) : a^2$$

$$py^2 dx : 2r = prx dx : a + prx^2 dx : 2a^2$$

$$spy^2 dx : 2r = prx^2 : 2a + prx^3 : 6a^2$$

Setzt für x die ganze Höhe des Austerkegels b , so kommet sein Inhalt $prb^2 : 2a + prb^3 : 6a^2$.

Die 31. Aufgabe.

156. Den Inhalt des Körpers zu fin= Tab. IX. den, der erzeugt wird, in dem der Raum Fig. 81. zwischen der Logarithmischen Linie MI und der geraden Linie PH sich um PH herum beweget.

Auflösung.

In der Logarithmischen Linie, deren Subtangens $= a$, ist

$$y dx = a dy \quad (\S. 112.)$$

$$dx = a dy : y$$

$$py^2 dx : 2r = apy^2 dy : 2ry = apy dy : 2r$$

$$spy^2 dx : 2r = apy^2 : 4r$$

Neh.

Nehmet r für die letzte Semiordinate AB an, so ist der Inhalt des ganzen Körpers $\frac{1}{4}apr$, der durch die Bewegung des unendlichen Raumes IBAH beschrieben wird.

Die 32. Aufgabe.

157. Den Inhalt eines Körpers zu finden, der beschrieben wird, indem sich eine halbe Parabel ANS um ihre Semiordinate bewege.

Auflösung.

Tab. IX.
Fig. 75.

In diesem Falle ist das Element gleich dem Producte aus einem Circul, der mit MT der Differenz zwischen der Abscisse AP und AS beschrieben wird, in die Differential der Semiordinate. Setzet nun $AS = r$, $MS = b$, $AP = x$, so ist $PS = MT = r - x$. Wenn nun die Verhältniß des Radii zur Peripherie $r:p$, so findet ihr die Peripherie, so mit MT beschrieben worden $(rp - px):r$, folgendes den Circul $(r:p - 2rpx + px^2):2r$. Dannenhero ist das Element $(r^2 p dy - 2rpx dy + px^2 dy):2r$. Nun ist in der Parabel, wenn der Parameter $= 1$, $y^2 = x$ (§. 217. P. I.) und $y^4 = x^2$. Daher das Element $\frac{1}{2}r p dy - p y^3 dy + p y^4 dy:2r$, dessen Integral $\frac{1}{2}r p y - \frac{1}{3}p y^3 + p y^4:10r$ das Stücke des Körpers exprimiret, welches von MNT beschrieben worden.

Wenn

Wenn ihr für y^2 seinen Werth x sehet, so
 habet ihr für eben dasselbe Stücke $\frac{1}{2} rpy - \frac{1}{2}$
 $pxy + px^2y : 10r$. Sehet nun ferner r für x
 und b für y ; so bekommet ihr für den ganzen
 Körper $\frac{1}{2} rpb - \frac{1}{3} prb + pr^2b : 10r = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10})$
 $bpr = (30 - 20 + 6) bpr = \frac{16}{5} bpr$.

60

Anmerkung.

158. Auf gleiche Weise könnet ihr den Inhalt der
 Körper finden, wenn ihr sehet, daß sich eine Fläche um
 eine andere Linie, als z. E. um den Tangentem oder
 die Subnormal. Linie bewegt.

Von der verkehrten Methode der
 Tangentium.

Die 9. Erklärung.

159. Die verkehrte Methode der TAN-
 GENTIUM (Methodus Tangentium inversa)
 ist diejenige, welche zeigt, wie man aus
 dem gegebenen Subtangente, Tangente, der
 Normallinie oder Subnormallinie u.
 die Gleichung finden kan, welche die Na-
 tur der Linie erkläret.

Zusatz.

160. Sehet nemlich die gegebenen Linien
 ihrem Werthe gleich, darinnen die Differen-
 tialgrößen anzutreffen sind, so bekommet ihr
 die Differentialgleichung für die gesuchte Li-
 nie. Wenn ihr nun selbige integriret, so be-
 kommet ihr die gesuchte Gleichung.

Die

Die 33. Aufgabe.

161. Eine krumme Linie zu finden, deren Subtangens $= 2yy : a$.

Auflösung.

Weil der Subtangens in einer jeden algebraischen Linie $= ydx : dy$, so ist

$$2y^2 a = ydx : dy$$

$$2y^2 dy = aydx$$

$$\frac{2y^2 dy}{y} = \frac{aydx}{y}$$

$$2ydy = adx$$

$$y^2 = ax$$

Welche Gleichung zeigt, daß die verlangte Linie eine Parabel sey.

Anmerkung.

162. Hätte man gesagt, daß der Subtangens sollte $2x$ seyn, (ich setze aber beständig, wie vorhin, daß x allezeit die Abscisse, y die Semiordinate bedeute); so bekämet ihr $ydx = 2x dy$. Wollet ihr nun diese Gleichung zum integriren geschickt machen, so sehet ihr, daß, wenn ihr x durch y exprimiren wollet, ihr y durch eine beständige Grösse dividiren müßet, und dannenhero für $2x$ annehmen $2y^2 : a$.

Die 34. Aufgabe.

163. Eine krumme Linie zu finden, deren Subnormallinie beständig von einer Grösse ist, z. E. $= a$.

Auf

Auflösung.

Die Subnormallinie ist $y dy : dx$ (§. 46.).
Dennach

$$y dy : dx = a$$

$$y dy = a dx$$

$$\frac{1}{2} y^2 = ax$$

$$y^2 = 2ax$$

Also ist die verlangte Linie eine Parabel,
deren Parameter der doppelten Subnormal-
Linie gleich ist.

Die 35. Aufgabe.

164. Eine krumme Linie zu finden, de-
ren Subtangens die mittlere Proportional-
Linie ist zwischen x und y .

Auflösung.

Es ist $y dx : dy = \sqrt{xy}$

$$y dx = dy \sqrt{xy} = x^{1/2} y^{1/2} dy$$

$$dx = y^{-1/2} x^{1/2} dy$$

$$x^{-1/2} dx = y^{-1/2} dy$$

$$2x^{1/2} = 2y^{1/2}$$

$\sqrt{x}$

$$\frac{\sqrt{x} = \sqrt{y}}{x = y}$$

Also ist die verlangte Figur ein gleichschenkeliger rechtwinkliger Triangel. Ihr könnt aber auch sehen

$$\sqrt{x} + \sqrt{a} = \sqrt{y}$$

so ist $x + 2\sqrt{ax} + a = y$

$$2\sqrt{ax} = y - x - a$$

$$4ax = y^2 - 2yx + xx + 2ax - 2ay + aa$$

$$y^2 - 2yx + x^2 - 2ax - 2ay + aa = 0$$

welches eine Gleichung an dem Circul ist, darinnen der Ursprung von x und y auf besondere Weise (§. 362. P. I.) zu determiniren.

Ihr könnt auch sehen, daß $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{y}$.

Die 36. Aufgabe.

165. Eine krumme Linie zu finden, deren Subnormallinie $= r - x$.

Auflösung.

Es ist $ydy : dx = r - x$,

$$ydy = rdx - xdx$$

$$\frac{\frac{1}{2}y^2 = rx - \frac{1}{2}x^2}{y^2 = 2rx - xx}$$

Also ist die verlangte Linie ein Circul, dessen
Diameter = $2r$.

Die 37. Aufgabe.

166. Eine Linie zu finden, deren Sub-
normallinie = $\sqrt{ax}$.

Auflösung.

Es ist $ydy:dx = \sqrt{ax} = a^{1/2} x^{1/2}$

$$ydy = a^{1/2} x^{1/2} dx$$

$$\frac{\frac{1}{2}y^2 = \frac{2}{3}\sqrt{ax^3}}{2}$$

$$y^2 = \frac{4}{3}\sqrt{ax^3} = \frac{2}{3}\sqrt{4ax^3}$$

Also ist das Quadrat der Semiordinate in
dieser Linie jederzeit einem parabolischen
Raume gleich (§. 91.), und also die qua-
dratrix parabolæ, weil durch ihre Semiordi-
naten die Parabel quadriret wird, deren
Parameter $4a$.

Die 38. Aufgabe.

167. Eine krumme Linie zu construiren,
deren Subtangens einer unveränderlichen
Linie gleich ist.

(Wolfs Mathes. Tom. IV.) Dddddd Auf.

Auflösung.

Es ist

$$y dx : dy = a.$$

$$dx = a y^{-1} dy$$

$$\int dx = \int a y^{-1} dy$$

Wenn ihr $a y^{-1} dy$ (§. 82.) integrieren wollet, so käme heraus $a y^0 : 0 = a : 0$, das ist, eine unendliche grosse Grösse. Und also gehet die Integration algebraisch nicht an. Da nun aber bekannt ist (§. 61.), daß die angenommene Eigenschaft der Logarithmischen Linie zugehört, in dieser aber die Abscissen x die Logarithmi der Semiordinaten sind (§. 307. P. I.); so muß auch $a y^{-1} dy (= x)$ der Logarithmus der Semiordinate seyn, und dannenhero könnet ihr jederzeit für die Integral von $a y^{-1} dy$ oder ady : y den Logarithmum von y oder ly setzen. Es muß aber der Logarithmus in einer Logarithmischen Linie genommen werden, deren Subtangens a ist.

Der 1. Zusatz.

168. Da nun die Differential eines Logarithmi $= a dy$: y , so könnet ihr jetzt auch diejenigen Grössen differentiiren, in welchen Logarithmi zu finden. Es sey z. E. ly^n , so ist die Differential $nly^{n-1}ady$: y .

Der 2. Zusatz.

169. Es sey die Differential eines Logarithmi $= dy$: $(1+y)$; so ist der Logarithmus der Zahl $1+y = \int dy$: $(1+y)$. Nun ist $1 : (1+y)$

$\pm y) = 1 - y \pm y^2 - y^3 \pm y^4$ u. s. w. wie ihr es findet, wenn ihr in der That dividiret, und daher $dy : (1 \pm y) = dy - y dy \pm y^2 dy - y^3 dy \pm y^4 dy$ &c. Derowegen ist $\int dy : (1 \pm y)$ oder der Logarithmus von der Zahl $1 \pm y = y - \frac{1}{2}y^2 \pm \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 \pm \frac{1}{5}y^5$ &c.

Der 3. Zusatz.

170. Weil nun $l = y - \frac{1}{2}y^2 \pm \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 \pm \frac{1}{5}y^5$ &c. so findet ihr (§. 137.); $y = \frac{l}{1}$

$$\begin{array}{ccccccc} l^2 & \pm & l^3 & \pm & l^4 & \pm & l^5 & \&c. \\ \hline 1.2 & & 1.2.3 & & 1.2.3.4 & & 1.2.3.4.5 & \end{array}$$

Der 4. Zusatz.

171. Ihr sehet zugleich (§. 169.), wie die Differentiale der logarithmischen Grössen integrirt werden, wenn man a für den Subtangente der logarithmischen Linie annimmt. Es ist z. E. $\int l y^n dy : y = l y^{n+1} : (n+1) a$, $\int l y dy \sqrt{(aa \pm l y^2)} : a y = (aa \pm l y^2)^{3/2} \cdot 3 a$ u. s. w.

Anmerkung.

172. Wenn man die Differentialgleichung nicht integriren kan, so suchet man dieselbe auf die Quadratur oder Rectification des Circuls, oder Parabel, Hyperbel und Ellipsis zu reduciren, weil diese Linien bekandt sind, und ist vergnügter, wenn man sagen kan, daß die Construction der verlangten Linie von der Quadratur oder Rectification einer von den gemeldeten Linien dependire: wovon ich noch einige Exempel hieher setzen muß. Ihr habet euch aber zu dem

dem Ende alle Elemente der Flächen und Längen in den Kegelschnitten bekandt zu machen, damit ihr um so viel leichter wahrnehmet, auf was für eine Quadratur oder Rectification sich jeder vorkommender Fall reduciren lasse.

Die 39. Aufgabe.

173. Eine krumme Linie zu construiren, in welcher $dz = qdu$.

Auflösung.

Es bedeutet q eine Grösse, die aus veränderlichen und unveränderlichen in Gestalt eines Bruches zusammen gesetzt ist. Beschreibet in unendlichen Fällen die unter der gegebenen Gleichung begriffen sind, eine krumme Linie, deren Abscissen $= v$, die Semiordinaten $= aq$; so ist das Element dieser Linie $aqdu$. Wenn ihr nun dieses durch a dividiret, so bekommt ihr qdu . Derowegen richtet auf eben der Aye für die Abscissen u andere Semiordinaten auf, die $= sqdu$, das ist, dem Raume gleich sind, der zwischen dieser krummen Linie und ihren Coordinaten enthalten, wenn man ihn durch eine unveränderliche Grösse a dividiret, so bekommt ihr die Linie, deren Differential-Gleichung $dz = qdu$.

Der I. Zusatz.

174. Es sey $ydx = ady$ oder $dx = ady : y$, so sind die Semiordinaten der Linie von deren Quadratur die Construction dependiret, $aa : y$. Da nun die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel zwischen ihren Asymptoten (S. 283.

P. I.) $aa = zy$: so erkennet ihr daraus die Art der Linie.

Der 2. Zusatz.

175. Wenn in der verlangten Linie der Tab. VI. Subtangens $= y \sqrt{(aa + yy)} : a$, so ist $dx = \frac{dy \sqrt{(aa + yy)}}{a}$. Also sind die Semiordinaten der Linie, von deren Quadratur die Construction dependiret, $\sqrt{(aa + yy)}$. Wor- aus ihr abermahl erkennet, daß es eine gleich- seitige Hyperbel sey, denn es sey $AC = CB = a$, $CQ = PM = y$, $QM = CP = x$; so ist $AP = x - a$, $BP = a + x$, folgend $AP \cdot PB = x^2 - a^2$ und $y^2 = x^2 - a^2$ (§. 290. P. I.), und daher $x = \sqrt{(y^2 + a^2)} = QM$.

Ende des dritten Theiles.



Der vierdte Theil

von den

Anfangs = Gründen

der

Exponential- und Differentio-Differen- tial = Rechnung.

Die 1. Erklärung.

176.

Die Exponential = Rechnung besteht im Differentiiren und Integriren solcher Gröſſen, die einen veränderlichen Exponenten haben, als x^x , a^x , und Exponentialgröſſen genennet werden.

Die 1. Aufgabe.

177. Eine Exponentialgröſſe zu differentiiren.

Auſlösung.

Die ganze Kunst kommt darauf an, daß man die Exponentialgröſſen auf Logarithmiſche reduciret, und ſie (§. 168.) differentiiret. Geſet nemlich

$$x^y = z$$

so ist $y/x = lz$

$$lxdy + ydx : x = dz : z \quad (\S. 168.)$$

$$z(lxdy + ydx : x) = dz$$

$$\text{das ist } x^y (lxdy + ydx : x) = dz$$

$$\text{oder } x^y lxdy + yx^{y-1} dx = dz$$

Setzt abermahl

$$\frac{v}{x} = z$$

so ist $xy lv = lz$

$$(x^y lxdy + yx^{y-1} dx) lv + x^y dv : v = dz : z$$

$$z(x^y lxdy + yx^{y-1} dx) lv + zx^y dv : v = dz$$

$$x^y x^y lvdy + v^y yx^{y-1} lvdx + v^y v^{-1} x^y dv = dz$$

Auf gleiche Weise verfahret ihr in andern Fällen.

Die 2. Erklärung.

178. Eine Exponential-Linie wird genennet eine krumme Linie, welche durch eine Exponential-Gleichung erkläret wird, als wenn $x^x = y$.

Dddddd 4

Zusatz.

Zusatz.

179. Wenn ihr die Exponential-Gleichung differentiiret (S. 177.) und den Werth von dx in dem Differential-Werthe des Subtangents und der Subnormal-Linie substituirt; so findet ihr wie in den algebraischen Linien ihren Subtangens und ihre Subnormal-Linie. Es sey z. E.

$$x^x = y \text{ so ist}$$

$$y l x dx + y dx = dy$$

$$dx = dy : (y l x + y)$$

$$y dx : dx = y dy : (y l x + y) dy = 1 : (1 + l x)$$

Für die Subnormal-Linie ist

$$y dy : dx = (y^2 l x dx + y^2 dx) : dx = y^2 l x + y^2 = y^2 (l x + 1).$$

Die 2. Aufgabe.

180. Die Differential einer logarithmischen GröÙe zu integrieren.

Auflösung.

Ihr sollet z. E. $x l x dx$ integrieren. Set

$$x = 1 + y$$

So

So ist $lx = (1 + y)$

$$\underline{dx = dy}$$

$$x l x dx = l(1 + y)(1 + y) dy.$$

Nun ist $l(1 + y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 \&c.$ Derwegen $l(1 + y)(1 + y) dy = (1 + y) dy (y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 \&c.) =$ (wenn man in der That multipliciret).

$$y dy - \frac{1}{2}y^2 dy + \frac{1}{3}y^3 dy - \frac{1}{4}y^4 dy + \frac{1}{5}y^5 dy \&c. \\ + y^2 dy - \frac{1}{2}y^3 dy + \frac{1}{3}y^4 dy - \frac{1}{4}y^5 dy \&c.$$

$$\text{Das ist, } y dy + \frac{1}{2}y^2 dy - \frac{1}{6}y^3 dy + \frac{1}{12}y^4 dy - \frac{1}{20}y^5 dy \&c.$$

$$\text{folgende die verlangte Integral } \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{66}y^5 - \frac{1}{120}y^6 \&c. = \frac{1}{1.2.} y^2 +$$

$$\frac{1}{1.2.3} y^3 - \frac{1}{2.3.4} y^4 + \frac{1}{3.4.5} y^5 - \frac{1}{4.5.6} y^6 \&c. \text{ in welcher Reihe } y = x - 1.$$

Auf gleiche Manier können ihr in anderen Fällen verfahren,

Die 3. Aufgabe.

181. Eine Exponential = Gröſſe zu integrieren.

Auflösung.

Ihr ſollet z. E. $(1 + y)^{1+y} dy$ integrieren.

Sehet

$$(1 + y)^{1+y} = 1 + v$$

$$\text{ſo iſt } (1 + y) l(1 + y) = l(1 + v)$$

folgendes (§. 169.)

$$y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{12}y^4 - \frac{1}{20}y^5 \&c. = v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5 \&c.$$

Sehet ferner

$$v = y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5 \&c.$$

$$\text{ſo iſt } v^2 = + y^2 + 2ky^3 + k^2y^4 + 2kmy^5 \&c. \\ + 2my^4 + 2ny^5 \&c.$$

$$v^3 = + y^3 + 3ky^4 + 3k^2y^5 \&c. \\ + 3my^5$$

$$v^4 = + y^4 + 4ky^5 \&c.$$

$$v^5 = y^5 \&c. (\S. \\ 91. P. I.)$$

Daher

$$v = y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5 \&c. \\ - \frac{1}{2}v^2 = - \frac{1}{2}y^2 - ky^3 - \frac{1}{2}k^2y^4 - kmy^5 \&c. \\ - my^4 - ny^5 \\ + \frac{1}{3}v^3 = + \frac{1}{3}y^3 + ky^4 + k^2y^5 \&c. \\ + my^5$$

$$- \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}v^4 &= & -\frac{1}{4}y^4 - ky^5 \&c. \\ +\frac{1}{2}x^5 &= & +\frac{1}{5}y^5 \&c. \\ -y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{12}y^4 + \frac{1}{20}y^5 \&c. &= 0 \end{aligned}$$

Man bekommt demnach

$$\begin{array}{ccc} \frac{1-1=0}{1=1} & \frac{k-\frac{1}{2}=0}{k=1} & \frac{m-k+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=0}{m=1-\frac{3}{6}=\frac{1}{2}} \end{array}$$

$$n - \frac{1}{2}k^2 - m + k - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = 0$$

$$n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = 0$$

$$n = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$p - km - n + k^2 + m - k + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = 0$$

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{20}$$

$$p = \frac{1}{3} - \frac{1}{20} = \frac{4}{60} - \frac{1}{60} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$$

Demnach ist $(1+y)^{1+y} = 1+v = 1+y+\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{120}y^5 \&c.$ folgendes $(1+y)^{1+y} dy = dy + ydy + \frac{1}{2}y^2 dy + \frac{1}{6}y^3 dy + \frac{1}{24}y^4 dy + \frac{1}{120}y^5 dy \&c.$ Und daher $\int (1+y)^{1+y} dy = y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{120}y^5 + \frac{1}{720}y^6 \&c.$

Zusatz.

182. Wenn ihr die Differential einer Exponential-Größe integrieren könnet, so kön-

Können ihr auch die Exponential-Linien quadriren.

Die 3. Erklärung.

183. Differentio-differentiiren heisset so viel als die Differential von einer Differential-Größe finden.

Zusatz.

184. Wenn die Differential dx ist, so nennet ihre Differential oder die Differentio-Differential von x , ddx ; die Differential von ddx aber $dddx$ u. s. w.

Die 4. Aufgabe.

185. Eine jede gegebene Differential-Größe von neuem zu differentiiren.

Auflösung.

Es geschieheth nach den Regeln (§. 13. & seqq.) nach welchen die veränderlichen Größen differentiiret werden, nur daß man eine Differential-Größe meistens als eine unveränderliche annimmt und daher auch die andere Differential vor nichts hält (§. 4.).

3. E. Die andere Differential von $x dx$ findet ihr $dx^2 + x ddx$ (§. 16.); $d(1: dx) = -ddx: dx^2$ (§. 24.); $d(y dy: dx) = (dy^2 + y ddy): dx$, wenn ihr dx unveränderlich annehmet, hin

hingegen $= (dy^2 dx - y dy ddx) : dx^2 = dy^2 : dx - y dy ddx : dx^2$ (S. 24.), wenn ihr dy unveränderlich annehmet; $d\sqrt{(dx^2 \mp dy^2)} = dy ddy : \sqrt{(dx^2 \mp dy^2)}$ wenn dx unveränderlich; hingegen $dx ddx : \sqrt{(dx^2 \mp dy^2)}$, wenn dy unveränderlich (S. 20.) u. s. w.

Anmerkung.

186. Wenn die Rechnung auf gewisse Fälle applicirt wird, so ist nicht schwer zu sehen, welche Differential ihr für unveränderlich annehmen können.

Die 4. Erklärung.

187. Wenn eine krumme Linie AFK Tab. X. anfangs die hohle, hernach die erhabene Seite gegen die Axc AE kehret, und immer in einem mit der Axc fortgeht, so heisset der Punct F, wo die Wendung geschieht, der Wendungspunct; hingegen der Wiederkehrpunct, wenn sie wieder zurücke gegen die Axc kehret. Im Lateinischen nennet man diese Punkte: Puncta flexus contrarii.

Der I. Zusatz.

188. Wenn die krumme Linie einen Wendungspunct hat, so ist klar, daß die Linie AT zunimmt mit der Abscisse AP, bis diese in E kommt, denn so bald sich die Linie wendet, so nimmt die Linie AT wieder ab, und die Abscisse nimmt wie vorhin zu. Derowegen
könn

Könnnet ihr AL die größte Linie von ihrer Art ansehen.

Der 2. Zusatz.

189. Hingegen wenn die krumme Linie einen Wiederkehrungs-Punct hat, so wächst anfangs die Linie AT zugleich mit der Abscisse bis in L: nach diesem wenn die Linie sich wendet, nimmt die Linie AT zu, hingegen die Abscissen gehen wieder zurücke und nehmen ab, und dannenhero muß in diesem Falle die Linie AE die größte von ihrer Art werden.

Der 3. Zusatz.

Tab. X.
Fig. 86.

190. Da nun $AL = (ydx : dy) - x$ (§. 36.), so ist, wenn ihr dx für unveränderlich annehmet (§. 185.),

$$(dy^2 dx - y dx ddy) : dy^2 - dx = 0$$

$$dy^2 dx - y dx ddy - dy^2 dx = 0$$

$$- y ddy = 0$$

$$\frac{- y ddy}{y} = 0$$

$$ddy = 0, \text{ oder } ddy = \infty \text{ (§. 64.).}$$

Der 4. Zusatz.

Tab. X.
Fig. 87.
88.

191. Wenn die Semiordinaten BM aus einem Puncte B gezogen sind, so ziehet Bm und BM unendlich nahe, und Br auf Bm perpendicular

pendicular: dann ist klar, daß an der hohen Seite Br grösser ist als BO, hingegen an der erhabenen kleiner wird. Derowegen ist in dem Wendungs-Puncte $\tau O = 0$. Beschreibet nun aus dem Mittelpuncte B den Bogen TH und MR, so sind die Triangel mMR, MBT und THO einander ähnlich, (§. 183. Geom.), weil nemlich bey R, H (§. 48.) und B rechte Winkel sind, und über dieses $HOT = MTB$ und $MmR = MTB$, indem beyde von MTB nur um einen unendlichen kleinen Winkel HBT und MBm unterschieden sind (§. 101. Geom.), und die Abschnitte des Circuls sind, weil die Winkel MBm und HBT mit HBM einen rechten Winkel machen, auch einander ähnlich. Demnach ist (§. 183. Geom.),

$$mR : MR = BM : BT$$

$$\frac{dy}{dx} : y = y \frac{dx}{dy} : dy$$

$$BM : BT = MR : TH$$

$$y : y \frac{dx}{dy} = dx : dx^2$$

$$BM : BT = TH : HO$$

$$\text{daher } MR : TH = TH : NO$$

$$\frac{dx : dx^2}{dy} = \frac{dx^2 : dx^3}{dy^2}$$

Also ist die Differential von BT oder τH wenn ihr dx für unveränderlich annehmet,

$$= (d$$

$= (xdy^2 - ydxddy) : dy^2$ (§. 185.) dannenhero $OH + tH = Ot = dx^3 + dxdy^2 - ydxddy) : dy^2$. Da nun die Linie tO im Wendungs-Puncte nichts wird, so ist

$$(dx^3 + dxdy^2 - ydxddy) : dy^2 = 0$$

$$dx^3 + dy^2 - ydd = 0 \text{ oder } = \infty$$

Die 5. Aufgabe.

192. Den Wendungs-Punct in einer Linie zu finden, da die Semiordinaten mit einander parallel sind.

Auflösung.

Tab. X.
Fig. 86.

Weil in diesem Falle $ddy = 0$, so suchet diesen Werth aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie durch x , und ihr werdet daraus den Werth von AE , das ist, der Abscisse finden, welcher die aus dem Wendungs-Puncte F gezogene Semiordinate EF , zugehört.

Der 1. Zusatz.

193. Es sey $axx = xxy + aay$

$$ax^2$$

$$= y$$

$$x^2 + a^2$$

$$2a^3x dx$$

$$= dy$$

$$(x^2 + a^2)^2$$

Wenn

Wenn ihr nun dx für unveränderlich annehmet, so ist

$$(2a^3 dx^2 (xx + aa)^2 - 8a^3 x^4 dx^2 - 8a^5 x^2 dx^2) : (x^2 + a^2)^4 = ddy = 0.$$

und wenn ihr mit $(xx + aa) dx^2 : (x^2 + a^2)$ dividiret

$$\begin{array}{r} 2a^3 x + 2a^5 - 8a^3 x^2 = 0 \\ \text{Das ist } 2a^5 - 6a^3 x = 0 \end{array}$$

$$\text{folgendes } \frac{a^2 - 3x^2 = 0}{\text{und } \sqrt{\frac{1}{3}a^2} = x}$$

Setzet ihr diesen Werth in die Stelle von x in der Gleichung

$$\text{so ist } y = axx : (xx + aa)$$

$$\begin{array}{l} y = \frac{1}{3}a^3 : (\frac{1}{3}aa + aa) = \frac{1}{3}a^3 : (\frac{4}{3}aa) \\ = a^3 : 4aa = \frac{1}{4}a \end{array}$$

Solchergehalt könnet ihr den Wendungspunct finden, auch wenn die krumme Linie nicht beschrieben ist.

Der 2. Zusatz.

194. Es sey

$$\underline{y - a = (x - a)^{3/5}}$$

(Wolfs Mathes. Tom. IV.)

EEEE

so

$$\text{so ist } dy = \frac{3}{5} (x-a)^{-2\frac{1}{5}} dx$$

$$ddy = -\frac{6}{5} (x-a)^{-7\frac{1}{5}} dx^2 = 0$$

Wenn nemlich dx unveränderlich angenommen wird: folgendes

$$-\frac{6}{5} (x-a)^{-7\frac{1}{5}} = 0$$

$$-6 = 0$$

Weil ihr keinen Werth von x findet, so sehet

$$-\frac{6}{5} (x-a)^{-7\frac{1}{5}} dx^2 = \infty$$

$$\text{das ist } -6 dx^2 : 2\frac{1}{5} \sqrt[5]{(x-a)^7} = \infty$$

$$\text{folgendes } 2\frac{1}{5} \sqrt[5]{(x-a)^7} = 0$$

$$x-a=0$$

$$x=a$$

Der 3. Zusatz.

195. In der Parabel ist

$$x = y^2$$

$$x^{1\frac{1}{2}} = y$$

$$\frac{1}{2} x^{-1\frac{1}{2}} dx = dy$$

$$\frac{-\frac{1}{4}x^{-3:2}dx^2 = ddy = 0}{I}$$

$$\frac{4\sqrt{x^3} = 0}{I = 0}$$

Setzet ferner

$$\frac{-dx^2}{4\sqrt{x^3}} = \infty$$

so ist $\sqrt{x^3} = 0$

Da ihr nun keinen Werth von x findet, ihe möget $ddy = 0$ oder $ddy = \infty$ setzen; so hat die Parabel keinen Wendungspunct.

Die 6. Aufgabe.

196. Den Wendungspunct in einer krummen Linie zu finden, deren Semior- dinaten alle aus einem Puncte gezogen werden.

Auflösung.

Weil in diesem Falle $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$ (§. 191.); so dürffet ihr nur aus der gegebenen Gleichung für die Linie den Werth von dy durch dx exprimiren, und ihr werdet wie vorhin den Werth von x in unveränderlichen Größen finden können.

Zusatz.

197. Es sey in der Conchoide des Nicome- Tab. IX. die $BA = a$, $BC = b$, $Cq = z$, $CM = y$, so ist (§. Fig. 79. 296. P. I.).

EEEEEE 2

$z + a$

$$z \mp a = y$$

$$\frac{dz}{dz} = \frac{dy}{dy}$$

Ferner ist $Bq = \sqrt{(zz - bb)}$ und weil bey r und B rechte Winkel sind, die Winkel S und q aber, deren Unterscheid qCS unendlich klein ist, einander gleich seyn, (§. 183. Geom.).

$$Bq : BC = St : tq$$

$$\sqrt{(zz - bb)} : b = dz : bdz : \sqrt{(zz - bb)}$$

und weil die Ausschnitte Cqr und CMr ähnlich sind,

$$Cq : qr = CM : Mr$$

$$z : bdz = z \mp a : Mr$$

$$\sqrt{(zz - bb)}$$

Demnach ist $Mr = (z \mp a) bdz : z \sqrt{(zz - bb)}$
 $= dx$, folgendes

$$(z \mp a) bdz = z dx \sqrt{(zz - bb)}$$

$$\frac{dz}{dz} = \frac{dy}{dy} = \frac{z dx \sqrt{(zz - bb)}}{(bz \mp ab)}.$$

Wenn man demnach dx für unveränderlich annimmt, so ist $ddy = (bz \mp ab) \sqrt{(z^2 - b^2)} dz$
 $z dx : (bz \mp ab)^2 \mp (bz^3 \mp abz^2) dz dx : (bz \mp ab)^2$
 $\sqrt{(z^2 - b^2)} - bz dz dx \sqrt{(z^2 - b^2)} : (bz \mp ab)^2 =$
 $abd z dx \sqrt{(z^2 - b^2)} : (bz \mp ab)^2 \mp (bz^3 \mp abz^2)$
 $dz dx : (bz \mp ab)^2 \sqrt{(z^2 - b^2)} = (2abz^2 - ab^3 \mp$
 $bz^3) dz dx : (ab \mp bz)^2 \sqrt{(z^2 - b^2)} = (\text{wenn man}$
 $\text{für } dz \text{ seinen Werth setzt}), (2abz^3 - ab^3 z \mp$
 $bz^4) dx^2 : (ab \mp bz)^3.$

Geſet

Setzet nun in der Gleichung $ydy = dx^2 + dy^2$ (§. 191.) die gehörigen Werthe an ihre Stelle, so habet ihr

$$(ab + bz) \cdot (2az^3 - ab^2z + z^4) dx^2 + (ab + bz)^3 = dx^2 + (z^4 - b^2z^2) dx^2 + (ab + bz)^2$$

$$2az^3 - ab^2z + z^4 = (ab + bz)^2 + z^4 - b^4z^3 = a^2b^2 + 2ab^2z + z^4$$

$$2az - 3ab^2z - a^2b^2 = 0$$

$$z^3 - \frac{3}{2}b^2z - \frac{1}{2}ab^2 = 0$$

Suchet endlich aus dieser Gleichung die Wurzel (§. 366. 372. P.I.). Wenn ihr diese mit a vermehret, so habet ihr die verlangte Linie CM ($= z + a$), welche den Wendungspunct determiniret.

Die 5. Erklärung.

198. Wenn eine krumme Linie BDF mit einem Faden überleget ist, so immer gleichviel gedehnet wird und die gerade Linie BA anfangs die krumme in B berühret, hernach aber immer nach und nach von der krummen abgezogen wird, so beschreibet der äussere Punct A eine andere krumme Linie AHR, und nennet man die krumme Linie BDF die Evolute der Linie AHR, die Theile des Fadens DH, RF &c. aber die RADIOS der Evolute.

Der 1. Zusatz.

199. Wenn der Punct A in B fällt und $AB = 0$, so ist DH oder der Radius der Evolute dem Bogen BD, sonst aber dem Unterschiede zwischen dem Bogen LB und der Linie AB gleich.

Der 2. Zusatz.

Tab. X.
Fig. 89.

200. Ihr könnet jeden unendlich kleinen Bogen der Linie AHR als einen Circusbogen ansehen, der mit dem Radio DH, oder FR &c. aus dem Mittelpuncte D oder F &c. beschrieben worden, und demnach stehen die Radii der Evolute alle auf der Linie AHR perpendicular (§. 48.).

Der 3. Zusatz.

201. Weil nur so lange ein Circusbogen beschrieben wird, als der Radius der Evolute DH mit einem unendlich kleinen Bogen in der Evolute BDF eine gerade Linie macht; so müssen alle Radii die Evolute BDF berühren (§. 28.).

Die 7. Aufgabe.

Tab. X.
Fig. 90.

202. Die Länge des Radii der Evolute MC zu finden, wenn die Semiordinaten PM der Linie AMD auf der Axe AB perpendicular stehen.

Auflösung.

Es sey die Semiordinate pm der anderen P M unendlich nahe, ingleichen der Radius Cm dem Radio CM. Zieheth CE mit der Axe AB parallel, bis sie die verlängerte Semiordinate in

in E erreicht. Weil bey R und E rechte Winkel sind, und $RMm = EMC$, indem EMG und CMm (§. 200.) rechte Winkel seyn, so ist (§. 183. Geom.).

$$MR : Mm = ME : MC$$

$$dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = z : z \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

$$dx$$

Da nun der Mittelpunkt in C ist, daraus der kleine Bogen Mm mit dem Radio CM beschrieben wird, und dieser unverändert bleibet, indem ME um mR zunimmt; so muß die Differential des Radii CM in Ansehung der Differential mR der Linie ME nichts seyn. Nun ist die Differential des Radii CM , wenn ihr dx für unveränderlich (das ist in allen Puncten der Linie von gleicher Grösse) annehmet, $dz dx \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx^2 + z dy ddy dx : dx^2 \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = (dz dx^2 + dz dy^2 + z dy ddy) : dx \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Derwegen habet ihr

$$(dz dx^2 + dz dy^2 + z dy ddy) : dx \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 0$$

$$dz dx^2 + dz dy^2 = - z dy ddy$$

$$dy ddy$$

$$(dz dx^2 + dz dy^2) : - dy ddy = z$$

das ist, weil $dz = dy$

$$(dx^2 + dy^2) : - ddy = z.$$

Wenn ihr nun die Werthe von dy^2 und ddy durch x aus der Gleichung für die krumme Linie exprimiret, so werdet ihr den Werth von z durch x finden.

Der 1. Zusatz.

203. In der Parabel ist

$$ax = y^2$$

$$\text{daher } adx = 2ydy$$

$$adx : 2y = dy$$

$$a^2 dx^2 : 4y^2 = dy^2$$

$$\text{das ist } adx^2 : 4x = dy^2$$

Und wenn ihr dx für unveränderlich annehmet

$$- adx^2 : 4x \sqrt{ax} = ddy.$$

Tab. X.
Fig. 90.

Folgende $(dx^2 \mp dy^2) : - ddy = (4x dx^2 \mp a dx^2) x \sqrt{ax} : ax dx^2 = (a \mp 4x) \sqrt{ax} : a = \sqrt{ax} \mp 4x \sqrt{ax} : a = z = y \mp 4xy : a = PM \mp PE.$ Es ist aber $PM = y$ und daher $PE = 4xy : a.$

Der 2. Zusatz.

204. Es sey für unendliche Parabeln

$$y^m = x$$

$$\text{so ist } my^{m-1} dy = dx.$$

Wenn ihr nun dx für unveränderlich annehmet, so ist

(m

$$(mm-m)y^{m-2}dy^2 + my^{m-1}ddy = 0$$

$$(mm-m)y^{m-2}dy^2 = -my^{m-1}ddy$$

$$(m-1)y^{-1}dy^2 = -ddy$$

das ist $(m-1)dy^2 : y = -ddy$. Demnach
ist $(dx^2 + dy^2) : -ddy = (ydx^2 + ydy^2) : (m-1)dy^2$.

Nun ist $dx^2 = m^2y^{2m-2}dy^2$. Derowegen
wenn ihr diesen Werth in die Stelle von dx^2
setzet, bekommet ihr

$$(m^2y^{2m-1}dy^2 + ydy^2) : (m-1)dy^2 = z$$

$$(m^2y^{2m-1} + y) : (m-1) = z.$$

Setzet z. E. $m=2$, so ist $4x\sqrt{x} + \sqrt{x} = z$.
welche Gleichung mit der vorigen überein-
kommt, wenn $a=1$.

Anmerkung.

205. Wenn euch das Differentiiren beschwerlich
fallen will; so brauchet den Vortheil, dadurch wir
oben (S. 24. seqq.) die Regeln zu differentiiren,
zu finden, angewiesen.

Ende des vierdten Theiles.



Anhang

zu

der Algebra

darinnen

Ihr Nutzen in verschiedenen
Wissenschaften durch Exempel
gezeigt wird.

Die 1. Erklärung.

1.

Die Geschwindigkeit mit welcher sich
ein Körper bewegt, ist die Ver-
hältniß des Raumes zu der Zeit.

Zusatz.

2. Es sey der Raum $= r$, die Zeit $= t$, die
Geschwindigkeit $= c$, so ist die Geschwindig-
keit $= r : t$ und $r = tc$.

Die 2. Erklärung.

3. Die Materie eines Körpers ist dieje-
nige, welche mit ihm wieget und bewegt
wird.

Zusatz.

4. Daher ist sie seiner Schwere jederzeit
proportional.

Die 3. Erklärung.

5. Die Größe der Bewegung erwächst,
wenn die Materie des Körpers durch
die

die Geschwindigkeit der Bewegung multipliciret wird.

Zusatz.

6. Es sey die Geschwindigkeit des Körpers $= c$, seine Materie $= m$; so ist die Grösse der Bewegung $= mc$.

Die I. Aufgabe.

7. Die Lehrsätze zu finden, nach welchen die Bewegungen zweyer Körper, die sich die ganze Zeit ihrer Bewegung mit einerley Geschwindigkeit bewegen, verglichen werden.

Auflösung.

Es sey der eine Körper A, seine Geschwindigkeit C, seine Materie M, die Zeit seiner Bewegung T, der Raum, den er durchlauffen R, die Grösse der Bewegung Q. Der andere Körper a, seine Geschwindigkeit c, seine Materie m, die Zeit seiner Bewegung t, der Raum, den er durchlauffen r, die Grösse seiner Bewegung q. So ist $C = R : T$ und $c = r : t$ (§. 2.). $Q = CM$ und $q = cm$ (§. 6.). Solchergestalt habet ihr

$$\text{I. } C : c = R : r$$

$$\text{II. } Q : q = CM : cm$$

Setzet $C = c$, so ist $R : T = r : t$ folgendes

$$\text{III. } R : r = T : t.$$

Setzet

Setzet $Q = q$, so ist $CM = cm$. Folgendes

$$\text{IV. } C : c = m : M$$

Setzet ferner $T = t$, so ist

$$\text{V. } R = r.$$

Setzet $C = c$, so ist

$$\text{VI. } M = m.$$

Wiederum weil $C : c = (R : T) : (r : t)$ so ist C

$Tr = ctR$, folgendes

$$\text{VII. } T : t = cR : Cr.$$

$$\text{VIII. } R : r = TC : tc.$$

Setzet $T = t$, so ist $Cr = cR$. Folgendes

$$\text{IX. } C : c = R : r.$$

Setzet $R = r$, so ist $CT = ct$. Folgendes

$$\text{X. } C : c = t : T.$$

Weil $Q : q = CM : cm$, so ist $Qcm = qCM$, folgendes

$$\text{XI. } C : c = Qm : qM.$$

$$\text{XII. } M : m = Qc : qC.$$

Setzet $C = c$, so ist $Qm = qm$. Folgendes

$$\text{XIII. } Q : q = C : c$$

Endlich weil

$$C : c = (R : T) : (r : t)$$

$$Q : q = CM : cm$$

$$\text{so ist } CQ : cq = tRCM : Trcm$$

$$CQTrcm = cqtRCM$$

Cc

$$QTrm = qtRM$$

dannhero ist

$$\text{XIV. } Q : q = tRM : Trm$$

$$\text{XV. } T : t = qRM : Qrm$$

XVI.

$$\text{XVI. } R:r = QTm:qtM$$

$$\text{XVII. } M:m = QTr:qtR.$$

Anmerkung.

3. Es ist nicht nöthig zu erinnern, wie die gesunden Lehrsätze ausgesprochen werden, weil solches denen zur Gnüge bekannt seyn muß, die das vorhergehende verstanden. Aber wohl ist nöthig, daß ich ermahne, man solle sich diese Lehrsätze wohl bekannt machen, weil man sie in Auflösung anderer Aufgaben gar öfters vonnöthen hat. Mercket aber zugleich, wie man so viel Lehrsätze durch die Algebra gleichsam spielende heraus bringen kan, die sonst durch viele Umwege zu erweisen und noch schwerer zu erfinden wären.

Die 2. Aufgabe.

9. Die Gesetze zu finden, nach welchen die schweren Körper in einem Raume, da ihnen kein Widerstand geschieht, herunter fallen.

Auflösung.

I. Es ist aus der Erfahrung klar, daß, wenn ein schwerer Körper herunter fällt, seine Bewegung um so viel geschwinder wird, je länger er fällt. Daraus denn folgt, daß die Schwere dem Körper nach und nach einen neuen Druck geben muß, da die Wirkung des ersten noch nicht vergangen, in dem kein Widerstand vorhanden. Da nun in den Höhen, in welchen wir es versuchen können, die Schwere der Körper einerley gefunden wird; so können wir annehmen, daß die Schwere in jedem Augenblicke einen

nen gleichkräftigen Druck dem Körper gebe. Es sey also der Augenblick t , die Geschwindigkeit, welche der Körper in einem erlanget c ; so ist nach Verfließung $2t$, die Geschwindigkeit $2c$, nach Verfließung $3t$ ist sie $3c$ u. s. w. Nun verhalten sich die Räume, welche die Körper durchlaufen, wie die Producte aus den Zeiten in die Geschwindigkeiten (§. 2. VIII.). Daher ist der Raum, durch welchen der Körper im ersten Augenblicke gefallen, tc ; zu dem Ende des anderen Augenblickes ist sein Raum, den er durchgelaufe $4tc$; zu Ende des dritten $9tc$; zu Ende des vierdten $16tc$; zu Ende des fünften $25tc$; &c. Demnach verhalten sich die Räume gegeneinander wie $1tc$: $4tc$: $9tc$: $16tc$: $25tc$ &c. das ist, wie 1 : 4 : 9 : 16 : 25 : &c. oder die Quadrat der Zeiten.

II. Zieheth nun die Höhe, durch welche der Körper im ersten Augenblicke gefallen von der Höhe ab, durch welche er in zweyen gefallen; so bleibet für den anderen Augenblick 3 übrig, eben so findet ihr für den dritten 5, für den vierdten 7, für den fünften 9 &c. Solchergestalt wird die Bewegung der schweren Körper nach den ungeraden Zahlen geschwinder gemacht.

III. Da nun $R:r = T^2:t^2$ so ist $\sqrt{R}:\sqrt{r} = T:t$. Ihr könnet also die Zeiten durch die Wurzeln des Raumes andeuten.

IV.

IV. Wenn ihr demnach in einer Parabel die Abscissen für R annehmet, so sind die Semiordinaten $\sqrt{R}$.

V. Wiederum weil $R:r = C^2:c^2$; so ist $\sqrt{R:r} = C:c$. Ihr könnet also die Geschwindigkeit durch die Wurzeln des Raumes ausdrücken.

VI. Dannenhero wenn die Abscissen in einer Parabel R sind, so sind die Semiordinaten $\sqrt{R}$ und also $= C$.

Zusatz.

10. Wenn in dem Triangel AEI die Abscissen $AB, AC \&c. = T$, die Semiordinaten $BF, CG \&c. = C$ angenommen werden; so sind die Triangel $= \frac{1}{2} TC = R$. Wenn ihr nun setzet, daß alle Ordinaten BF, CG, DH, EI einander gleich sind: so werden die Triangel Rectangula, deren Inhalt $= TC$. Da nun TC den Raum vorstellet, welchen der Körper in der Zeit T mit der Geschwindigkeit C durchlaufen würde, die er zu Ende der Zeit hat, wenn er sie gleich anfangs hätte und stets dieselbe unverändert behielte; so ist klar, daß dieser Raum sich zu jenem verhält wie TC zu $\frac{1}{2} TC$, das ist, wie 1 zu $\frac{1}{2}$, oder wie 2 zu 1.

Tab. XI.
Fig. 91.

Die 3. Aufgabe.

11. Aus der gegebenen Zeit, in welcher ein Körper durch eine gewisse Höhe gefallen ist, zu finden, wie er in jedem Theile derselben Zeit gefallen.

Auf.

Auflösung.

Es sey der erste Theil der Zeit 1, die Zahl der Theile m , der Raum in dem ersten Theile x , so ist der Raum in dem letzten $2mx - 2x + x$ (§. 9. & 69 Arithm.) $= 2mx - x$ und die Summe in allen Theilen der Zeit $m^2 x$ (§. 113. P. I. Algeb.).
 Setzet nun den ganzen Raum a , so ist

$$m^2 x = a$$

$$x = a : m^2.$$

Es sey z. E. $a = 125$, $m = 5$ Secunden, so ist $x = 125 : 25 = 5$. Also ist der Körper in der ersten Secunde 5, in der anderen 15, in der dritten 25, in der vierdten 35, in der fünften 45' gefallen.

Die 4. Aufgabe.

Tab. IX.
Fig. 92.

12. Es wird eine Kugel aus C nach der Linie DC wider die Wand AB geworfen, man soll den Winkel EDG finden, welchen die Linie ED, nach welcher sie zurücke prallet, mit AB machet. Wir wollen CDF den Einfallswinkel, EDG aber den Reflexionswinkel nennen.

Auflösung.

Lasset aus C und E die Perpendicularen CF und EG fallen. Es sey $CF = a$, $EG = b$, $FG = c$, $DF = x$; so ist $DG = c - x$, $CD^2 = aa + xx$, $DE^2 = bb + cc - 2cx + xx$. Da nun die Natur immer den kürzesten Weg gehet, so muß die Kugel in D dergestalt zurücke prallen, daß sie bis E den kürzesten Weg nimmet, welchen

chen sie aus C durch das zurücke prallen von der Fläche AB nehmen kan. Und demnach ist CD + DE die kleinste Grösse von ihrer Art. Bildet euch demnach eine krumme Linie ein, deren Gleichung

$$\sqrt{(aa + xx)} + \sqrt{(bb + cc - 2cx + xx)} = y$$

$$\text{so ist } xdx : \sqrt{(aa + xx)} + (xdx - cdx) : \sqrt{(bb + cc - 2cx + xx)} = dy = 0 \quad (\S. 20. P. II.)$$

$$x\sqrt{(bb + cc - 2cx + xx)} + (x - c)\sqrt{(aa + xx)} = 0$$

$$x\sqrt{(bb + cc - 2cx + xx)} = (c - x)\sqrt{(aa + xx)}$$

das ist FD. ED = DG. CD.

Folgendes FD : CD = DG : DE und daher der Reflexions-Winckel EDG dem Einfallswinckel CDF gleich (§. 52. 182. Geom.).

Zusatz.

13. Hieraus sehet ihr zugleich, daß, wenn ein Strahl des Lichtes CD auf einen Spiegel fället, er dergestalt in E reflectiret wird, daß der Reflexions-Winckel EDG dem Einfallswinckel CDF gleich ist.

Die 5. Aufgabe.

14. Aus der gegebenen Weite eines Tab. XI. strahlenden Punctes A von dem Mittel, Fig. 93. Puncte B eines sphärischen Spiegels DEF den Punct zu finden, wo der reflectirte Strahl DC mit der Aye vereinigt wird.

Auflösung.

Es sey AB = a, BD = BE = r, BC = x, so
(Wolfs Mathes. Tom. IV.) Sff fff ist

ist $CE = r - x$. Weil das Auge, welches den strahlenden Punct A im Spiegel siehet, in der Aye AE steht, so muß der Punct D, wovon der Strahl, der in das Auge fällt, reflectiret wird, der Aye AE überaus nahe seyn. Und dannenhero ist $DC = CE = r - x$, die Winkel m, n, p und q sind unendlich kleine, und daher ist $DB:AB = m:n$ und $DC:CB = q:p$, folgendes auch $DB \mp AB:AB = m \mp n:n$. Da nun $q = m \mp n$ (§. 101. *Geom.*) und $p = n$ (§. 13.); so ist $DB \mp AB:AB = q:p$. Derowegen ist (§. 28. *Arithm.*).

$$DE \mp AB:AB = DC:BC$$

$$\text{das ist, } AE:AB = EC:BC$$

$$a \mp r:a = r - x:x$$

$$ax \mp rx = ar - ax$$

$$2ax \mp rx = ar$$

$$x = ar:(r \mp 2a)$$

$$r - x = r - ar:(r \mp 2a) = (r^2 \mp ar):(r \mp 2a),$$

das ist, $EC = AE$. $BE:(BE \mp 2AB)$, oder, wenn ihr $AE = r \mp a = d$ sehet, $= dr:(2d - r)$.

Der I. Zusatz.

15. Wenn d grösser ist als r , so ist auch $2d:(2d - r)$ grösser als 1 (§. 78. *Arithm.*) und daher $\frac{1}{2}r$. $2d:(2d - r) = dr:(2d - r)$ grösser als $\frac{1}{2}r$, das ist, wenn der strahlende Punct A vor dem Hohlspiegel weiter weg ist als der Semidiameter des Spiegels BE austräget, so ist die

Weite

Weite des Bildes EC grösser als der vierdte Theil des Diameters.

Der 2. Zusatz.

16. Wenn d grösser als r , so ist auch $2d-r$ grösser als d , und daher $d:(2d-r)$ weniger als 1 (§. 78. *Arithm*), folgendes $dr:(2d-r)$ weniger r , das ist, die Weite des Bildes von dem Hohlspiegel ist geringer als der halbe Diameter.

Der 3. Zusatz.

17. Wenn $a=r$, so ist $dr:(2d-r)=rr:(2r-r)=r$, das ist, wenn der strahlende Punct um den halben Diameter des Spiegels vom ihm weg ist, oder in seinem Mittelpuncte steht, so wird auch sein Bild daselbst gesehen.

Der 4. Zusatz.

18. Wenn $d=\frac{1}{2}r$, so ist $2d=r$ und $rd:(2d-r)=dr:0$, das ist, die Weite des Bildes von dem Hohlspiegel wird unendlich groß, weil der Nenner in Ansehung des Zehlers zu nichts wird, das ist, die Strahlen werden mit der Axe parallel, denn in diesem Falle können sie niemals mit ihr zusammen kommen.

Der 5. Zusatz.

19. Wenn d kleiner ist als r und $2d$ grösser als r (oder d grösser als $\frac{1}{2}r$); so ist $2d:(2d-r)$ grösser als 1. Denn setzet $2d=r+m$, so ist $2d-r=m$, und daher $2d:(2d-r)=1+r:m$. Und demnach $\frac{1}{2}r:2d:(2d-r)$ grösser als $\frac{1}{2}r$. Derowegen wird das Bild ausser dem Hohl-

Spiegel gesehen, wenn die Sache zwischen dem Mittelpuncte und dem Brennpuncte liegt, der (§. 21.) um $\frac{1}{2}r$ vom Spiegel weg ist.

Der 6. Zusatz.

20. Wenn d kleiner ist als $\frac{1}{2}r$, so hat der Nenner $2d - r$ das Zeichen —. Denn setzt $2d = r - m$, so ist $2d - r = -m$. Und also hat der ganze Bruch $dr : (2d - r)$ das Zeichen —. Derwegen muß der Ort des Bildes hinter dem Hohlspiegel seyn, wenn die Sache zwischen dem Brennpuncte und dem Spiegel liegt.

Der 7. Zusatz.

21. Wenn d unendlich groß wird, das ist, wenn die Strahlen mit der Ase parallel einfallen, so ist r in Ansehung $2d$ für nichts zu halten, und demnach ist $dr : (2d - r) = dr : 2d = \frac{1}{2}r$.

Der 8. Zusatz.

22. Wenn der Spiegel erhaben ist, so ist $d = a - r$, und daher bekommt ihr an statt $(r \mp ar) : (2a \mp r)$ die Linie $EC = (ar - rr) : (2a - r) = dr : (2d \mp r)$. Denn weil $2a - 2r = 2d$, so ist $2a - r = 2d \mp r$. Weil nun hier d allezeit größer ist als r (denn sonst müste die Sache innerhalb dem Spiegel stehen), und $d : (2d \mp r)$ weniger als 1; so ist auch $dr : (2d \mp r)$ weniger als r . Derwegen wird das Bild zwischen dem Mittelpuncte des Spiegels und seiner Fläche gesehen, die Sache mag so weit weg seyn als sie will.

Der

Der 9. Zusatz.

23. Setzet *d* unendlich groß, so ist *r* in Ansehung *2d* unendlich kleine, und dannenhero $dr : (2d + r) = dr : 2d = \frac{1}{2}r$. Derowegen wird das Bild niemahls weiter hinter einem erhabenen Spiegel gesehen, als den vierdten Theil des Diameters, wenn es gleich unendlich weit wegstehet.

Anmerckung.

24. Es ist nicht nöthig zu erinnern, daß wenn *d* und *r* durch Zahlen gegeben werden, auch die Weite des Bildes von der Spiegel Fläche in Zahlen heraus komme, und ihr auch daher die Verhältniß der Weite zum Diameter des Spiegels finden können.

Der 10. Zusatz.

25. Wenn *r* unendlich groß wird, so ist der Spiegel platt, und alsdenn ist *2d* in Ansehung *r* unendlich kleine. Derowegen wird in diesem Falle $dr : (2d + r) = dr : r = d$, das ist, in einem platten Spiegel ist das Bild so weit hinter ihm, als die Sache vor ihm.

Der 11. Zusatz.

26. Setzet die Weite des strahlenden Punctes in einem Hohlspiegel werde *nd*, so ist die Weite des Bildes $ndr : (2nd - r)$. Derowegen wenn die Weiten des strahlenden Punctes von dem Hohlspiegel sich gegeneinander verhalten wie *d* zu *nd*, so verhalten sich die Weiten des Bildes von demselben wie $dr : (2d - r)$ zu $ndr : (2nd - r)$, das ist, wie $1 : (2d - r)$ zu $n : (2nd - r)$, oder wie $2nd - r$ zu $2nd - nr$.

S f f f f f 3

Wenn

Wenn nun n eine ganze Zahl und d grösser als r ist; so ist $2nd - rn$ kleiner als $2nd - r$. Derowegen wenn der strahlende Punct ausser dem Mittelpuncte des Spiegels ist, so gehet das Bild näher zu dem Spiegel, wenn der strahlende Punct weiter davon weggeheth. Hingegen wenn n eine gebrochene Zahl ist, so ist $2nd - rn$ grösser als $2nd - r$. Derowegen wenn der strahlende Punct von dem Hohlspiegel weiter weg ist als der Mittelpunct desselben, so gehet das Bild vom Spiegel weg, wenn der strahlende Punct sich demselben nähert.

Der 12. Zusatz.

27. Wenn d kleiner ist als $\frac{1}{2}r$, und nd gleichfalls kleiner als $\frac{1}{2}r$, so verhalten sich die Weiten des Bildes von dem Spiegel wie $r - 2nd$ zu $rn - 2nd$. Wenn nun n eine ganze Zahl ist, so ist $rn - 2nd$ grösser als $r - nd$, das ist, wenn der strahlende Punct vom Spiegel weggeheth, so gehet auch das Bild davon weg. Hingegen wenn n eine gebrochene Zahl ist, so ist $r - 2nd$ grösser als $rn - 2nd$, das ist, wenn der strahlende Punct dem Spiegel näher kommet, so kommet ihm auch das Bild näher.

Der 13. Zusatz.

28. Es werde gleichfalls bey einem erhabenen Spiegel die Weite des strahlenden Punctes nd , so wird die Weite des Bildes von dem Spiegel $ndr : (2nd + r)$, das ist, wenn die Weiten des strahlenden Punctes sich verhalten wie d zu

d zu nd ; so verhalten sich die Weiten des Bildes von dem erhabenen Spiegel wie dr : $(2d + r)$ zu ndr : $(2nd + r)$, das ist, wie 1 : $(2d + r)$ zu n : $(2nd + r)$ oder wie $2nd + r$ zu $2nd + nr$. Wenn nun n eine ganze Zahl ist, so ist $2nd + nr$ grösser als $2nd + r$. Derowegen wenn der strahlende Punct von dem Spiegel weggeheth, so geheth auch das Bild zurücke. Hingegen wenn n eine gebrochene Zahl ist, so ist $2nd + nr$ kleiner als $2nd + r$. Derowegen wenn der strahlende Punct dem Spiegel näher kommet, so kommet ihm auch das Bild näher.

Die 6. Aufgabe.

29. Das Gesetze der Natur zu finden, nach welchem die Strahlen des Lichtes gebrochen werden, wenn sie aus einem durchsichtigen Körper in einen anderen dichteren fahren.

Auflösung.

Es werde der Strahl AB in B gebrochen, und fahre in G . Setzet die Geschwindigkeit, mit welcher sich der ungebrochene Strahl AB bewegt, verhalte sich zu der Geschwindigkeit des gebrochenen BG wie n zu m . Derowegen ist die Zeit, in welcher die Linie AB durchlaufen wird, zu der Zeit, in welcher das Licht durch die Linie BG kommet wie nBA zu mBG (§. 7.). Lasset nun von A und G die Perpendicularlinien AD und GC fallen, und es sey $AD = a$, $CG = b$, $CD = c$, $CB = x$, so ist $BD = c - x$, folgendes $BG = \sqrt{(xx + bb)}$, $AB = \sqrt{(aa + cc - 2cx + xx)}$ und nBA $\pm$

Tab. XI.
Fig. 94.

$mGB = n\sqrt{(aa \mp cc - 2cx \mp xx)} \mp m\sqrt{(xx \mp bb)}$. Weil nun das Licht aus A in G in der geschwindesten Zeit kommen muß, indem die Natur immer den kürzesten Weg gehet; so ist $n\sqrt{(aa \mp cc - 2cx \mp xx)} \mp m\sqrt{(xx \mp bb)}$ die kürzeste Zeit, in welcher das Licht durch die Refraction aus A in G gelangen kan. Bildet euch demnach eine krumme Linie ein, in welcher $n\sqrt{(aa \mp cc - 2cx \mp xx)} \mp m\sqrt{(xx \mp bb)} = y$ so ist (§. 20. P. II.)

$$n(xdx - cdx) : \sqrt{(aa \mp cc - 2cx \mp x^2)} \mp mx dx : \sqrt{(x^2 \mp b^2)} = dy = 0$$

$$mx : \sqrt{(x^2 \mp b^2)} = n(c - x) : \sqrt{(aa \mp cc - 2cx \mp x^2)}$$

das ist, $m CB : BG = n DB : AB$

$$m CB. AB = n BD. BG.$$

Setzet $BG = AB$, so ist

$$m CB = n BD$$

folgendes $m : n = BD : BC$

Wenn ihr nun BG und AB für den Sinum Totum annehmet, so ist BD der Sinus des Winkels BAD oder ABK, hingegen BC der Sinus des Winkels BG oder GBF (§. 97. *Geom.* & §. 3. *Trigon.*). Und demnach hat der Sinus des Inclinationswinkels ABK zu dem Sinu des gebrochenen Winkels FBG beständig einerley Verhältniß.

Die 7. Aufgabe.

30. Den Punct f zu finden, wo die Strah-

Strahlen des Lichtes nach geschehener Refraction in dem Glase KL mit der Aye AF vereinigt werden.

Auflösung.

Setzet der Strahl AD sey dem Strahle A unendlich nahe, so ist der Winkel A unendlich kleine, und die Linie DI, so mit der Aye einen rechten Winkel in I machet, stehet auch auf AD perpendicular. Eben so machet GH so wohl in G als H einen rechten Winkel. Es sey nun $AD=AB=AI=y$, $Bc=a$, $EC=b$, $BE=f$, $DF=IF=BF=x$, $HF=EF=GF=v$, $Hf=Ef=Gf=z$, $cP=r$; $CM=z$, die Verhältniß der Refraction aus der Luft ins Glas 3:2, so ist $Ac=y+a$, $FC=v+b$, $Fc=x-a$. Weil nun 3:2= $cP:cQ$ (§. 29.), so ist $cQ=2r:3$. Eben so weil 2:3= $CM:CN$ (§. 29.), ist $CN=3z:2$. Weil ID mit cP parallel, so ist (§. 184. Geom.)

$$Ac:cP=AI:ID$$

$$y+a:r=y:ry:(y+a)$$

Eben so, weil wegen der rechten Winkel bey D und Q die Linien ID und cQ parallel sind, ist (§. 184. Geom.).

$$FI:ID=Fc:cQ$$

$$x:ry:(y+a)=x-a:\frac{2}{3}r$$

$$\frac{2}{3}rx=(rxy-ary):(y+a)$$

$$2rxy + 2arx = 3rxy - 3ary$$

$$3ary = rxy - 2arx$$

$$3ay : (y - 2a) = x$$

Wiederum weil wegen der rechten Winkel bey M und H die Linien CM und GH parallel sind, so ist (§. 184. Geom.).

$$FC : CM = FG : GH$$

$$b + v : t = v : tv : (b + v)$$

Und endlich weil wegen der rechten Winkel bey N und H die Linien CN und GH parallel sind, so ist (§. 184. Geom.).

$$fC : CN = fG : GH$$

$$b + z : \frac{3}{2}t = z : tv : (b + v)$$

$$\frac{3}{2}tz = (btv + tvz) : (b + v)$$

$$3btz + 3tvz = 2btv + 2tvz$$

$$3bz = 2bv - vz$$

$$3bz : (2b - z) = v = x - f$$

$$f + 3bz : (2b - z) = x = 3ay : (y - 2a)$$

$$2bfsy - fzy + 2afz - 4abf + 3bzy - 6abz = 6a$$

$$by - 3ary$$

$$3azy + 3bzy + 2afz - fzy - 6abz = 6aby + 4ab$$

$$f - (2bfsy$$

$$z = 6aby + 4abf - 2bfsy$$

$$= Ef$$

$$3ay + 3by + 2af - fsy - 6ab$$

Wenn ihr die Dicke des Glases nicht regardiret, und also, $= 0$ sehet, so verlieren sich alle Glieder, die durch multipliciret sind, und ihr bekommet

$$Ef = z = 6aby; (3ay + 3by - 6ab) = 2aby;$$

$$(ay + by - 2ab).$$

Anmerkung.

31. Unerachtet die gesundene Regel hauptsächlich dienet, den Ort des Bildes zu finden, wenn das Glas auf beyden Seiten erhaben ist und zwar die Radii der erhabenen Flächen nicht von einerley Grösse sind; so könnet ihr doch daraus gar leichte auch Regeln für alle übrige Fälle herleiten, wie aus folgenden Zusätzen erhellet.

Der 1. Zusage.

32. Wenn das Glas auf beyden Seiten gleich erhaben ist, so ist $cB = CE$, das ist, $a = b$ und daher $z = 2a^2y; (2ay - 2a^2) = ay; (y - a)$.

Der 2. Zusage.

33. Wenn cB oder a unendlich groß wird, so ist die Seite KBL , die gegen den strahlenden Punct A gekehret ist, platt, und die Glieder, die durch a nicht multipliciret sind, werden in Ansehung der anderen unendlich kleine oder nichts. Daher ist $z = 2aby; (ay - 2ab) = 2by; (y - 2b)$.

Der 3. Zusage.

34. Hingegen wenn b unendlich groß wird, so ist das Glas auf der hinteren Seite KEL platt und die Glieder, darinnen b nicht vorhanden,

den, werden in Ansehung der anderen unendlich kleine. Solchergehalt ist $z = 2aby : (by - 2ab) = 2ay : (y - 2a)$.

Der 4. Zusatz.

35. Also ist es ein Thun, ob ihr die erhabene oder platte Fläche eines Glases, so auf einer Seite erhaben, auf der anderen platt ist, gegen den strahlenden Punct kehret.

Der 5. Zusatz.

36. Wenn so wohl a als b unendlich groß werden, so wird das Glas auf beyden Seiten platt, und $ay + by$ werden in Ansehung $2ab$ unendlich kleine. Daher ist $z = 2aby : -2ab = -y$. Also kommen die Strahlen nirgends zusammen, als in dem Puncte, wo sie ausfließen.

Der 6. Zusatz.

37. Wenn y unendlich groß wird, so fallen die Strahlen mit der Axe parallel ein, und daher ist $2ab$ in Ansehung der übrigen Glieder unendlich kleine, folgendes $z = 2aby : (ay + by) = 2ab : (a + b)$ für ein Glas, welches auf beyden Seiten auf verschiedene Art erhaben ist.

Der 7. Zusatz.

38. Wenn das Glas beyderseits auf gleiche Art erhaben ist, so ist $z = 2aa : 2a = a$.

Der 8. Zusatz.

39. Wenn a unendlich groß wird, so ist die Seite KBL gegen den strahlenden Punct zu platt, und b in Ansehung a unendlich kleine. Derowegen ist $z = 2ab : a = 2b$. Hingegen wenn b unendlich groß wird, so ist die vom strah-

strahlenden Puncte A weggekehrte Seite KEL
platt, und a in Ansehung b unendlich kleine.
Derowegen ist $z = 2ab$; $b = 2a$.

Der 9. Zusatz.

40. Wenn ihr für $\mp b$ in der Regel — b se-
het, so wird das Glas auf der Seite KBL ge-
gen den strahlenden Punct A zu hohl, und $z =$
 $-2aby$: $(ay - by \mp ab)$.

Der 10. Zusatz.

41. Setzet — a für $\mp a$, so wird das Glas
auf der vom strahlenden Puncte weggekehrten
Seite hohl und $z = -2aby$: $(by \mp 2ab - ay)$.

Der 11. Zusatz.

42. Wenn ihr für a und b zugleich — a und
— b setzet, so wird das Glas auf beyden Seiten
hohl, und $z = 2aby$: $(-ay - by - 2ab)$.

Der 12. Zusatz.

43. Wenn a unendlich groß wird und ihr
— b für b setzet, so ist das Glas auf der Seite
gegen den strahlenden Punct platt, auf der an-
deren aber hohl, und die Gröſſen, so durch a
nicht multipliciret sind, werden in Ansehung
der anderen unendlich kleine. Daher ist $z =$
 $-2by$: $(y \mp 2b)$.

Der 13. Zusatz.

44. Wenn b unendlich groß wird und ihr
— a für a setzet, so ist das Glas auf der Seite
gegen den strahlenden Punct zu hohl, auf der
anderen erhaben, und die Gröſſen, so durch b
nicht multipliciret sind, werden in Ansehung
der

der anderen unendlich kleine. Daher ist $z = -2ay : (y \mp 2a)$.

Der 14. Zusatz.

45. Wenn y unendlich groß wird, so fallen die Strahlen parallel ein und daher wird (§. 40.) $z = -2aby : (ay - by) = -2ab : (a - b)$, (§. 41.) $z = -2aby : (-ay \mp by) = -2ab : (b - a) =$ (wenn $a = b$) $-2a^2$, (§. 42.) $z = 2aby : (-ay - by) = 2ab : (-a - b) =$ (wenn $a = b$) $= a$, (§. 43.) $z = -2by : y = -2b$, (§. 44.) $z = -2ay : y = -2a$.

Der 15. Zusatz.

46. Weil in den Hohlgläsern die Weite des Punctes, wo die gebrochene Strahlen mit der Axe vereinigt werden, das Zeichen $-$ hat, so ist klar, daß derselbe auf der Seite gegen den strahlenden Punct zu gesucht werden muß, und dannenhero die Strahlen in dergleichen Gläsern von der Axe weggebrochen werden. Ob aber solches viel oder wenig geschehe, kan aus den gefundenen Regeln geurtheilet werden.

Anmerkung.

47. Aus diesen Exempeln könnet ihr sehen, wie die Algebra mit grossem Vortheile in anderen Wissenschaften angebracht wird, und werde ich bey anderer Gelegenheit noch ein mehreres zeigen.

E N D E
der Algebra.

Regle

Register

über

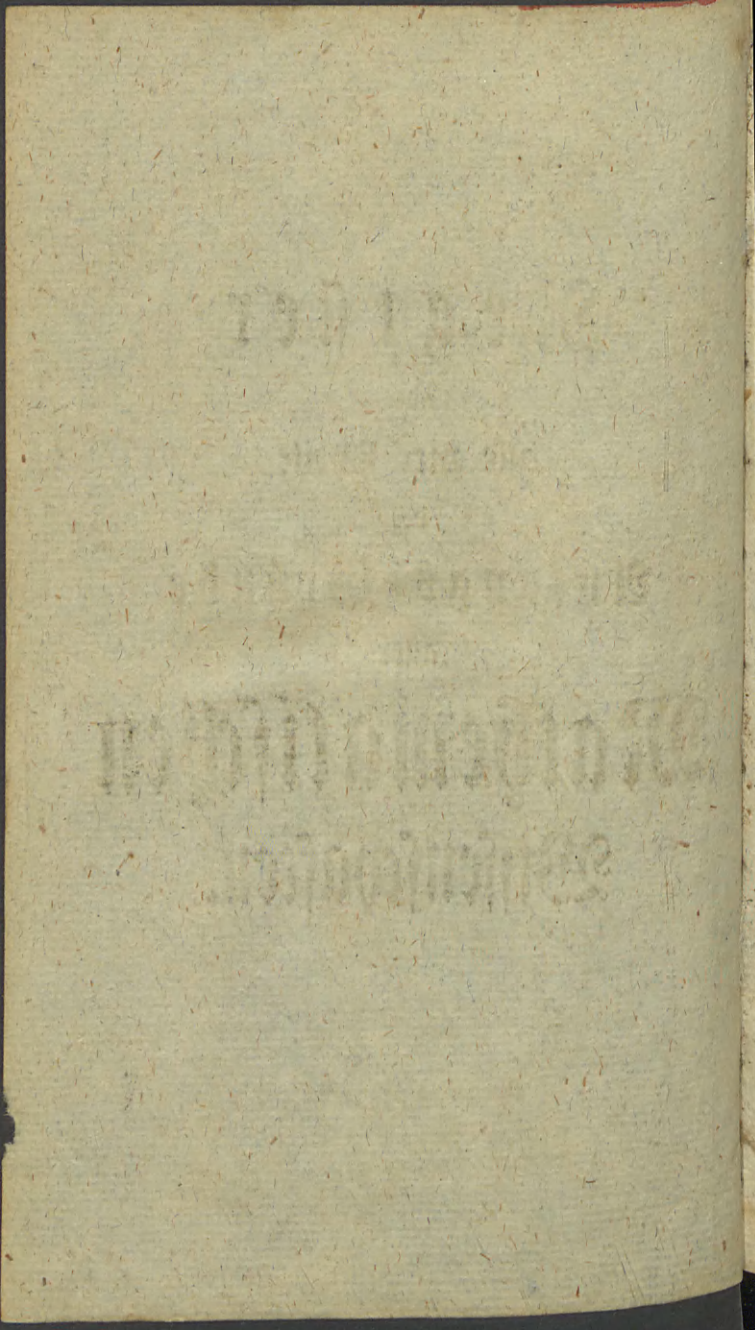
alle vier Theile

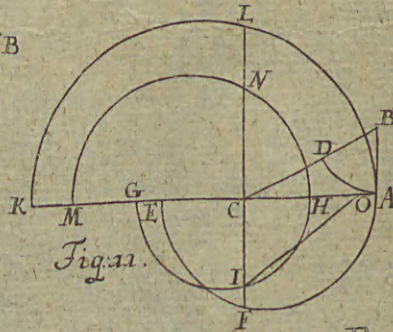
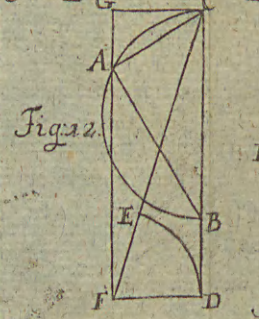
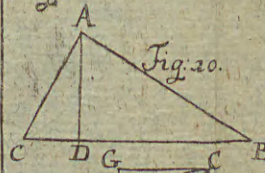
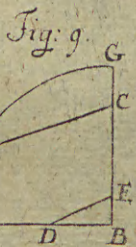
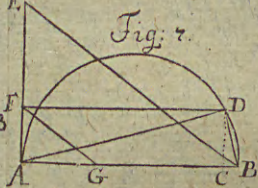
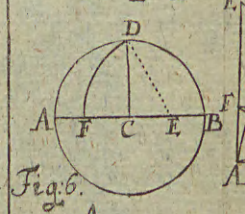
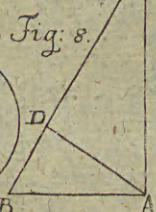
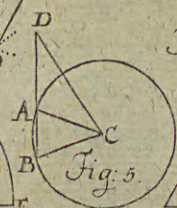
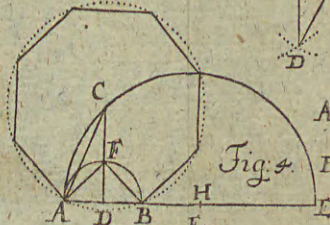
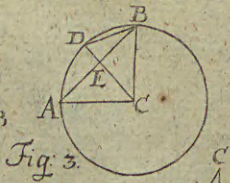
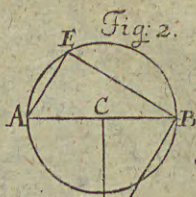
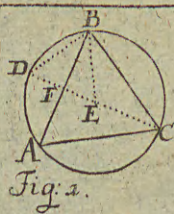
der

Anfangs - Gründe

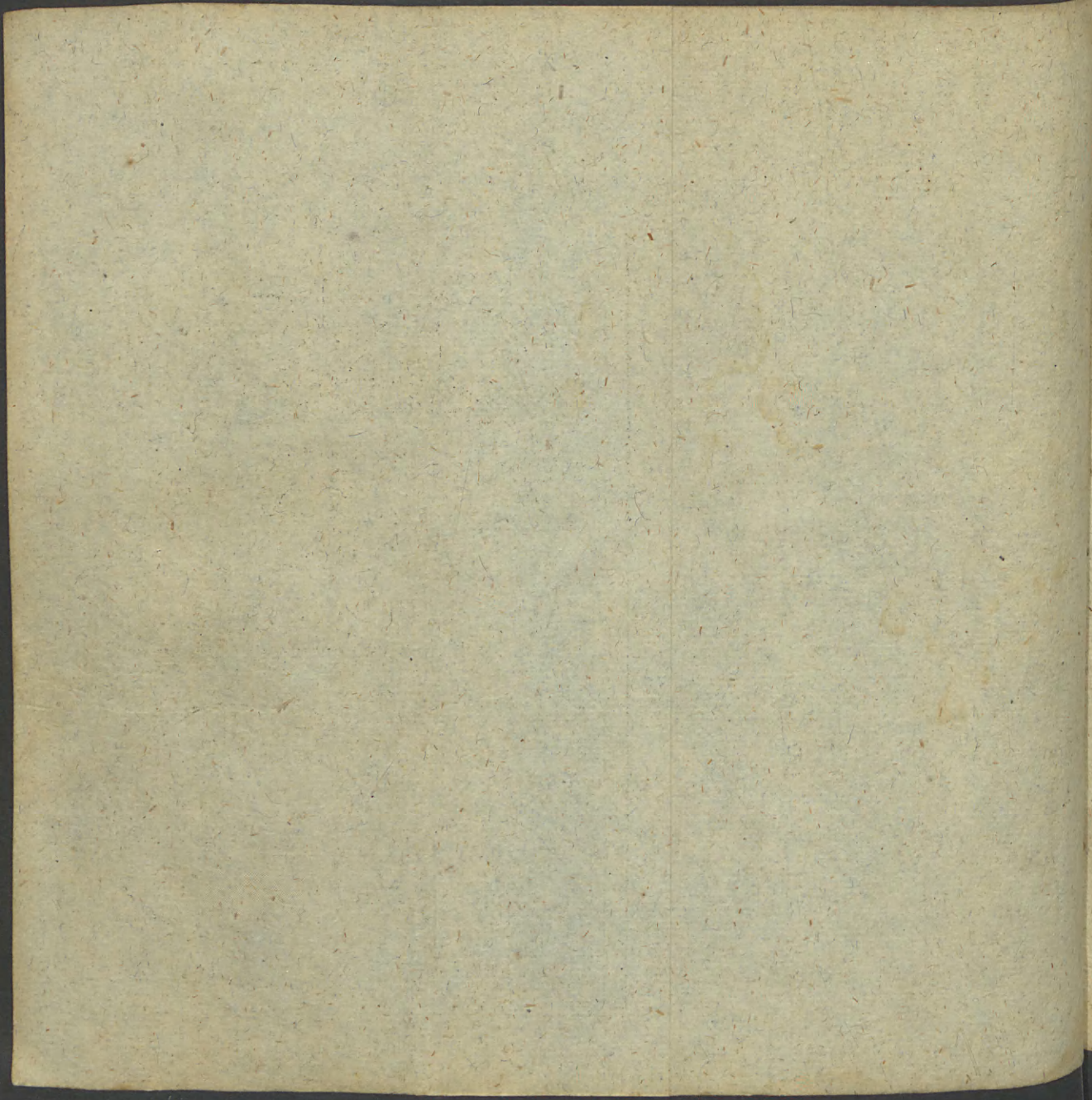
aller

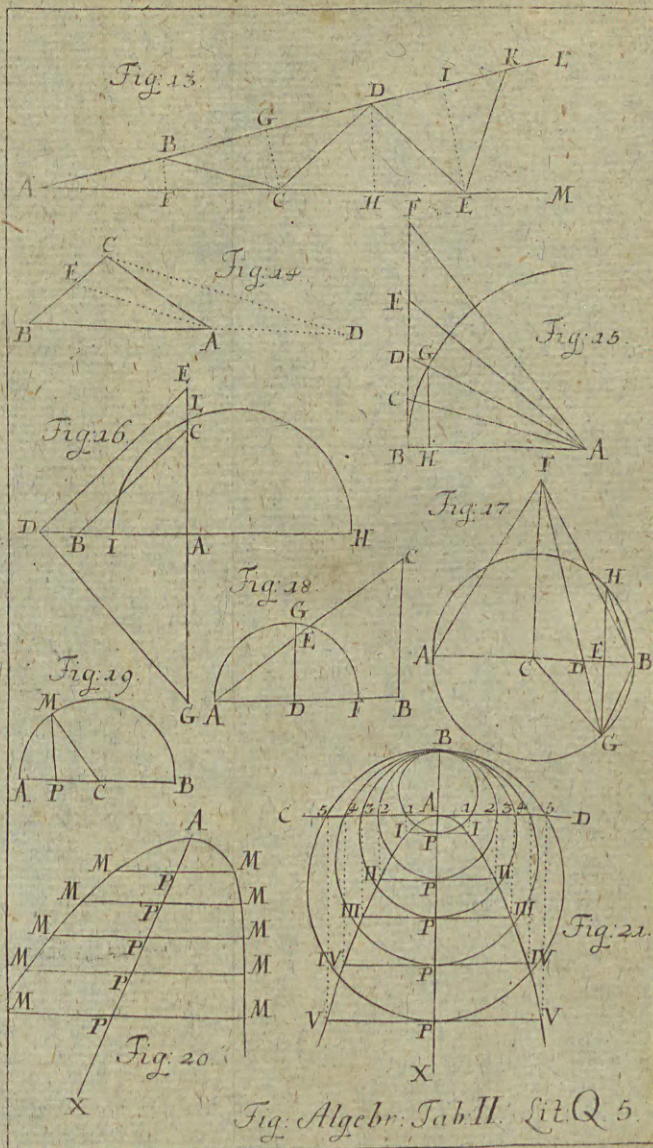
Mathematischen
Wissenschaften.

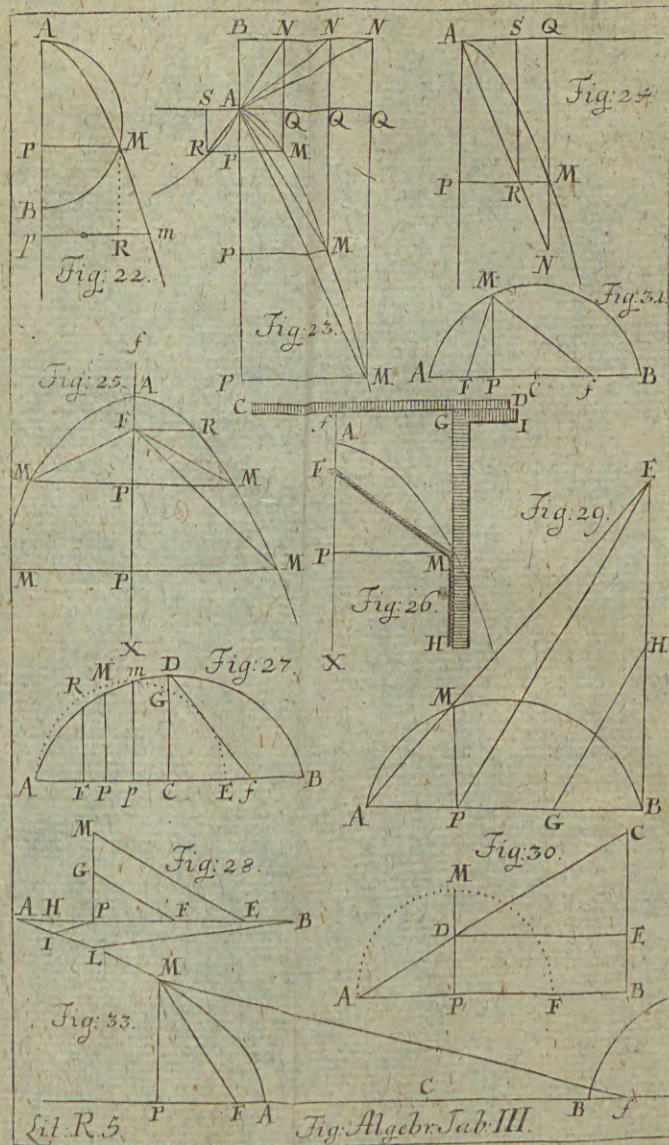


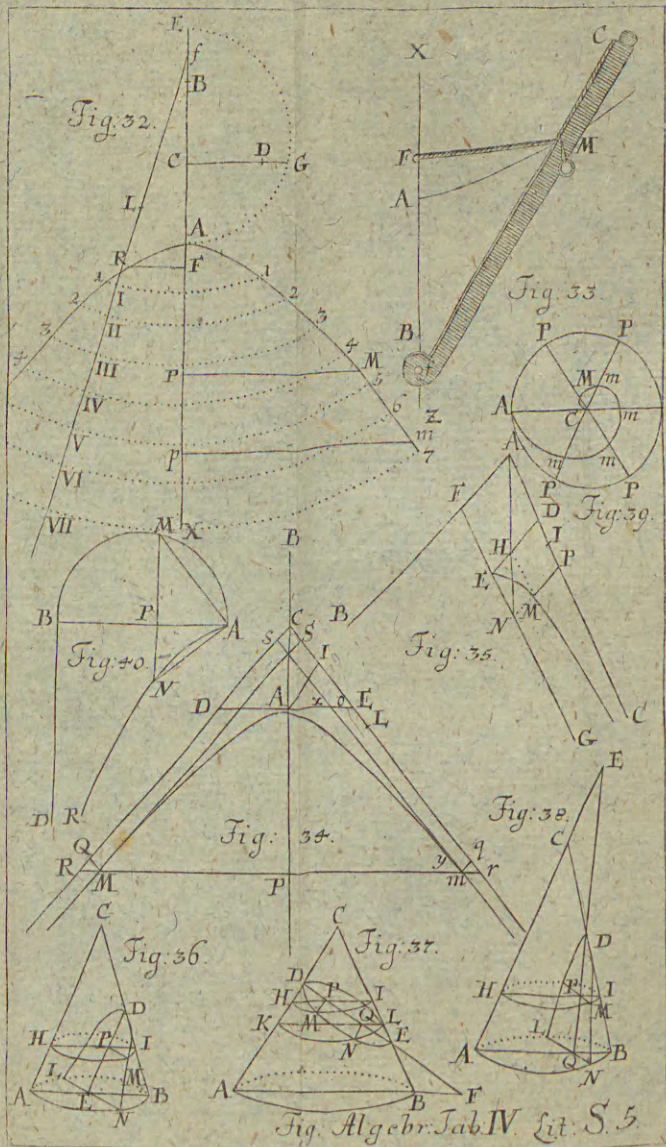


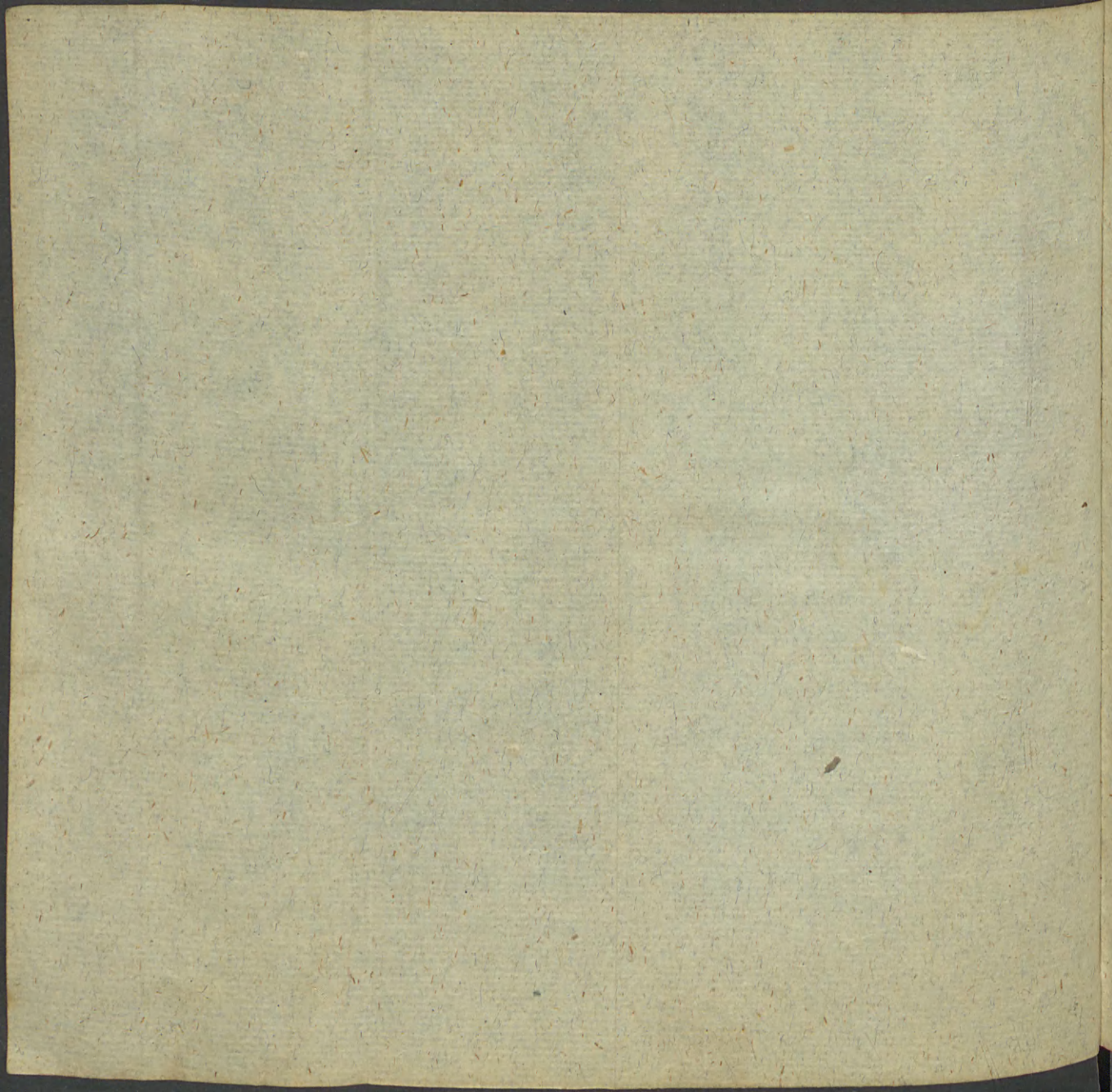
Figur. Algebr. Tab. I. sit. P. 5.

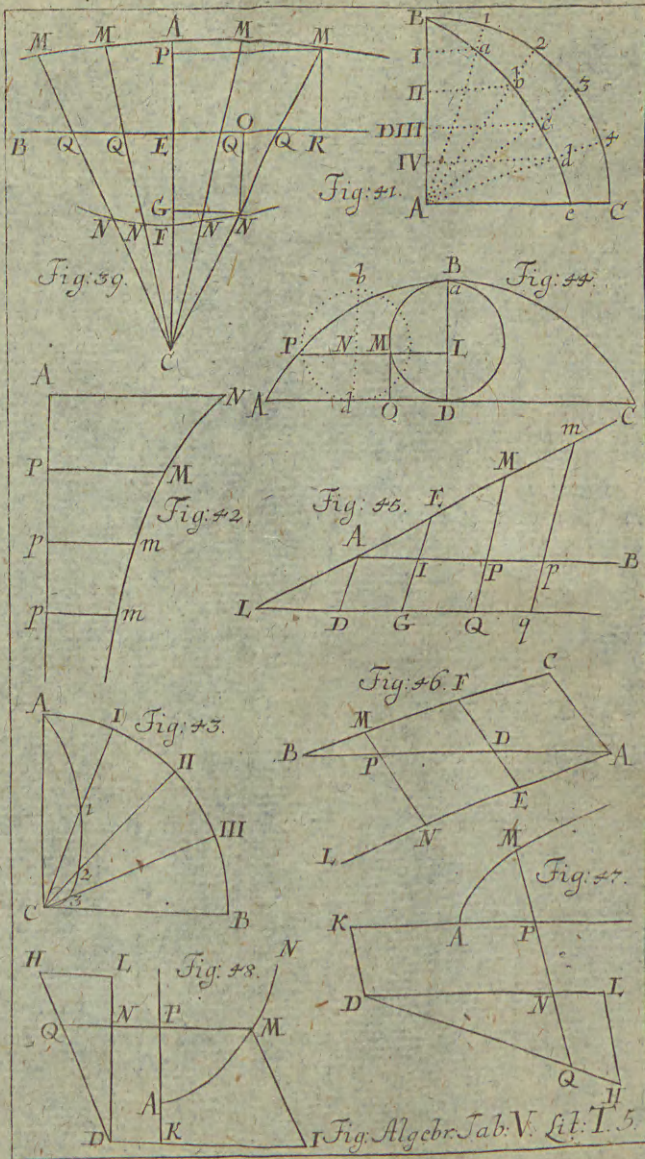


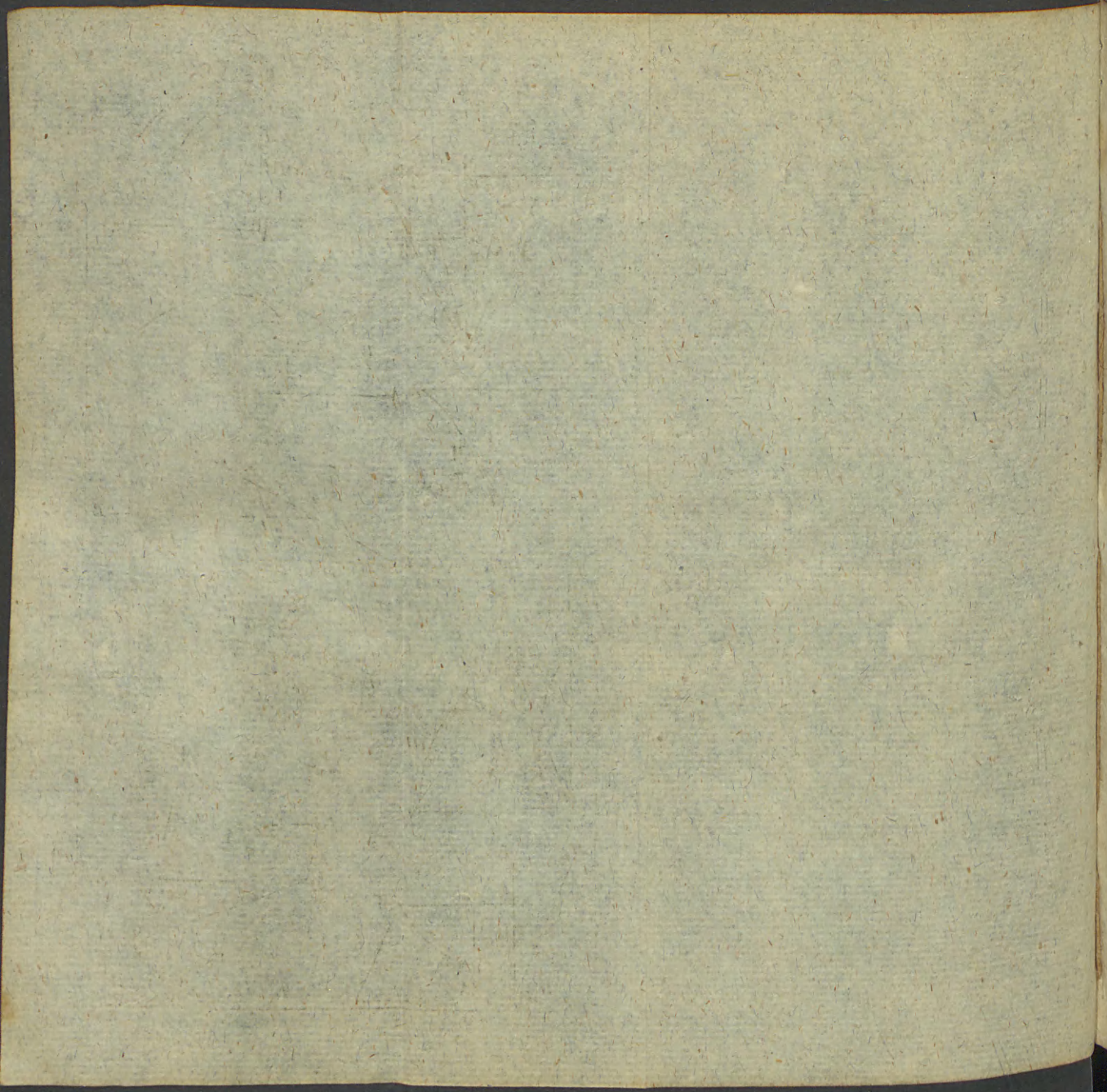


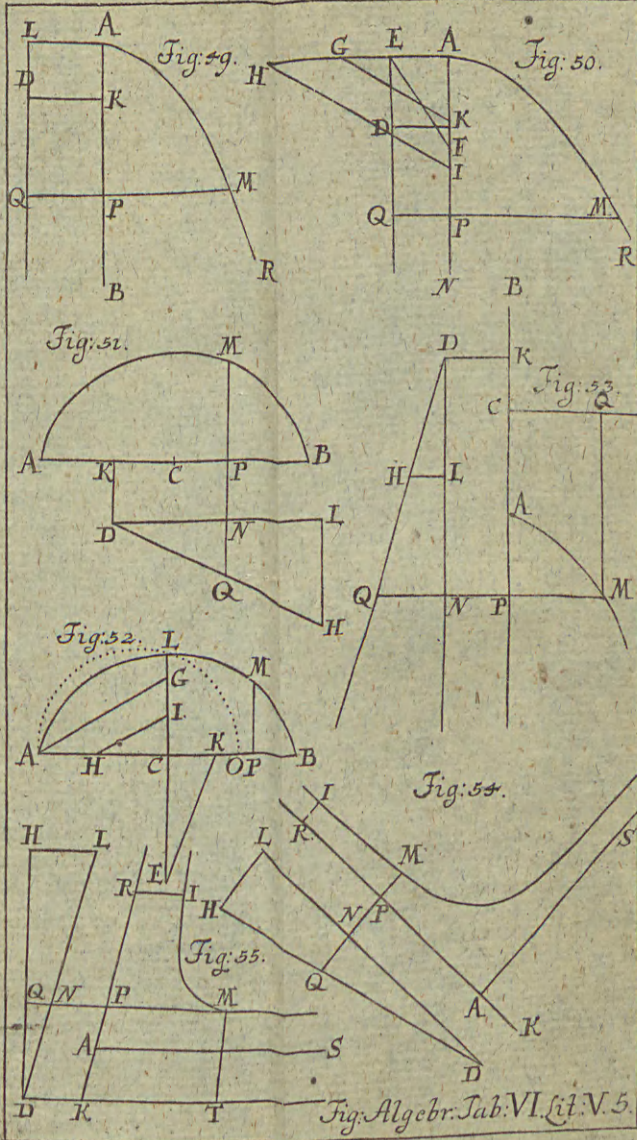


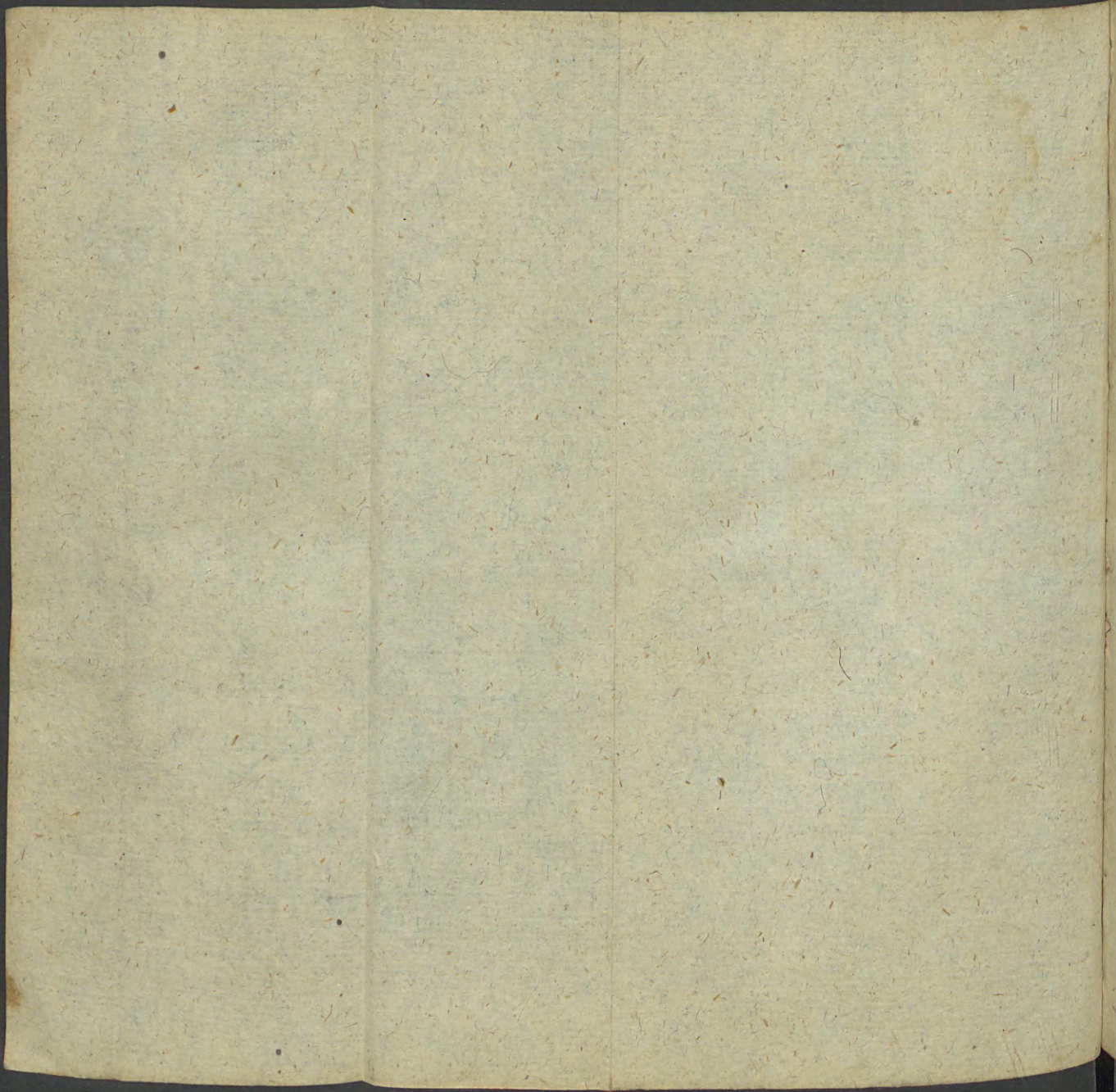


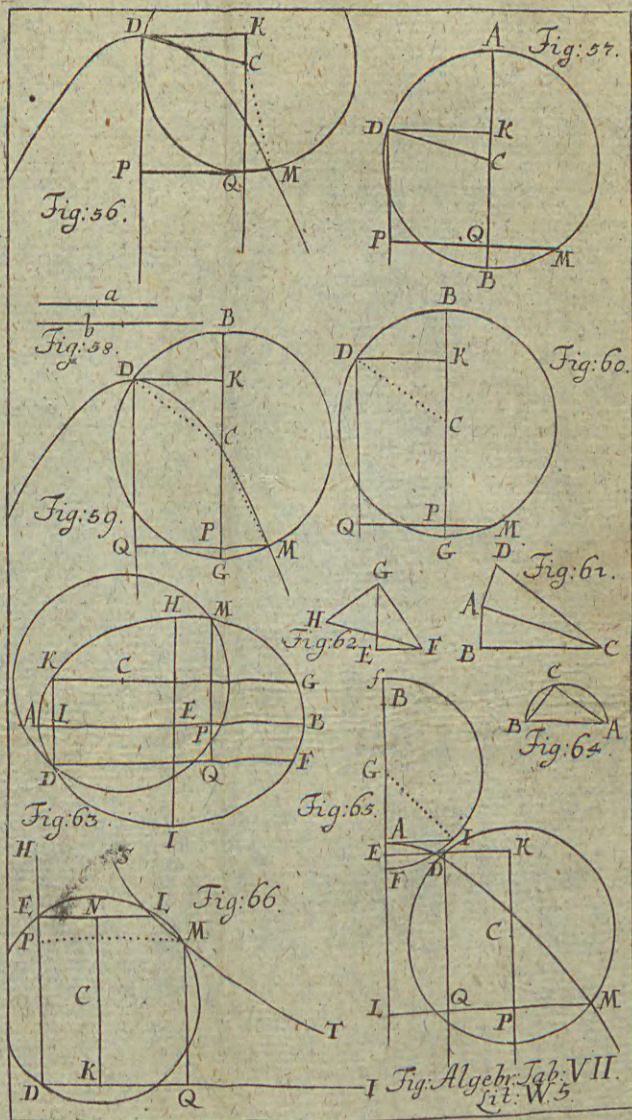


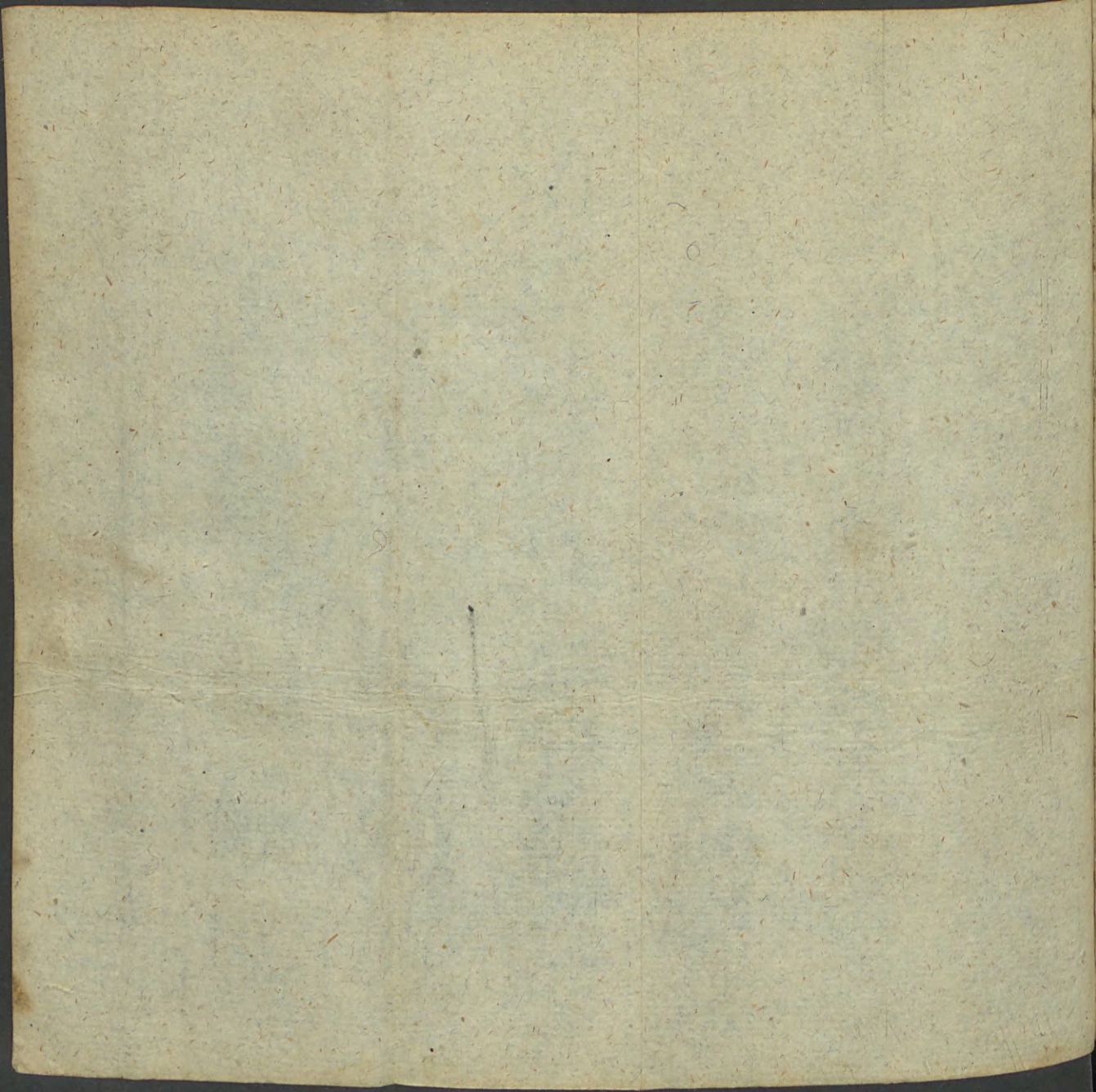












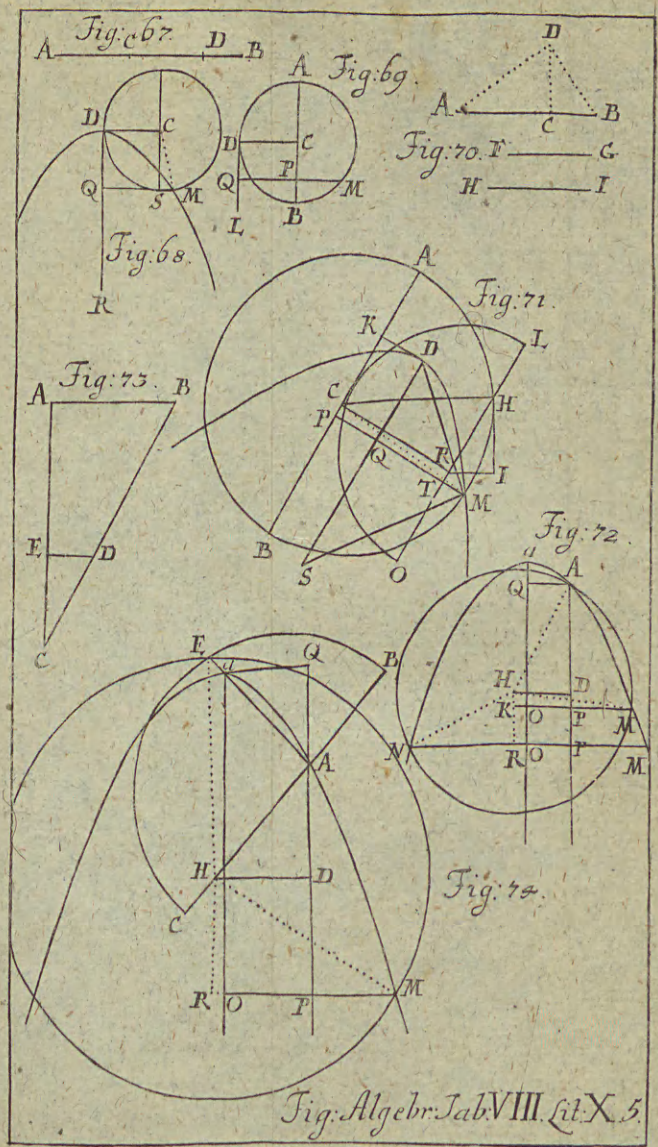
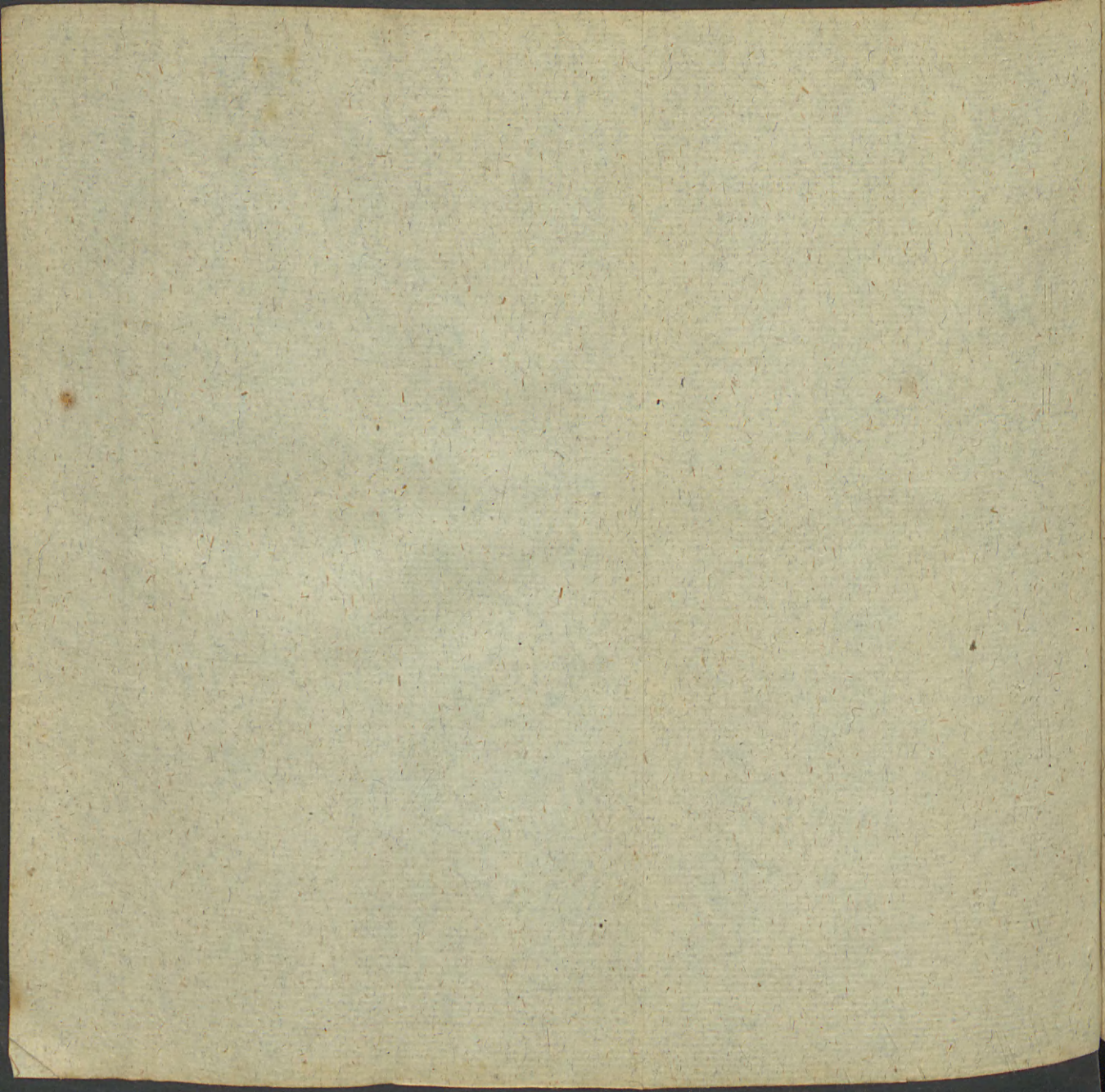
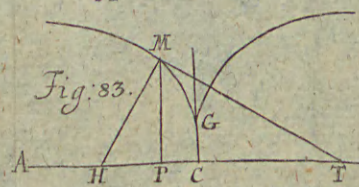
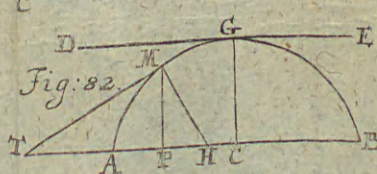
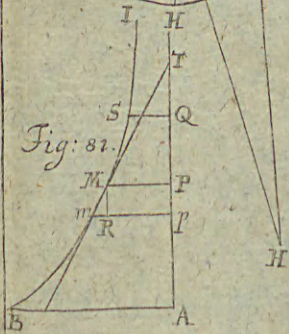
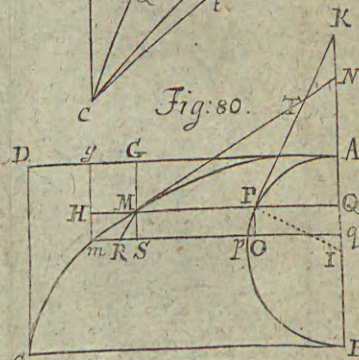
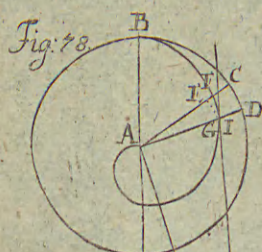
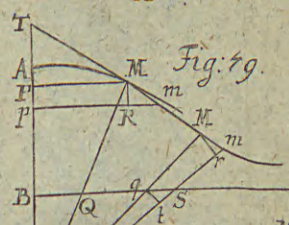
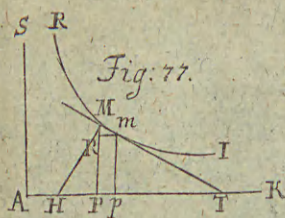
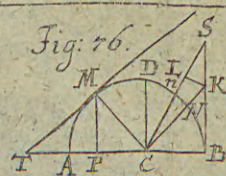
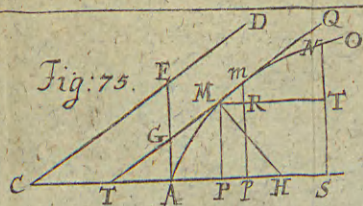
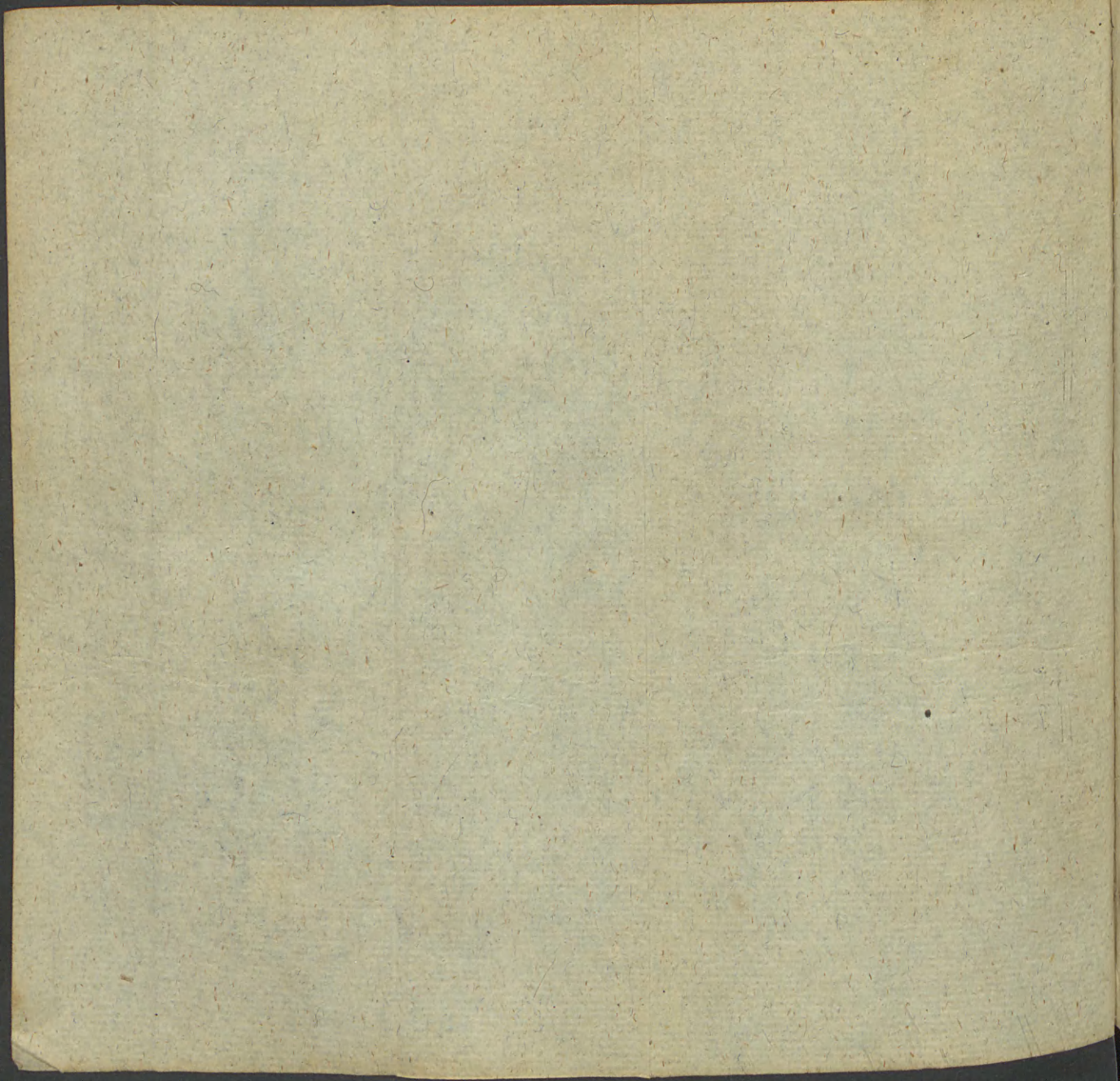


Fig. Algebr. Tab VIII lit X. 5.





Lit. Y. 5.
Fig: Algebr. Tab. IX.



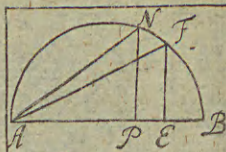


Fig. 84.

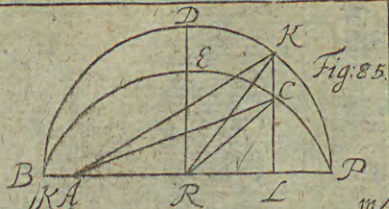


Fig. 85.

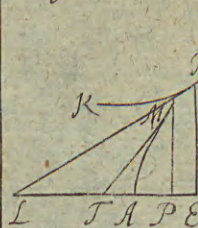


Fig. 86.

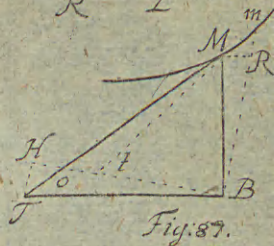


Fig. 87.

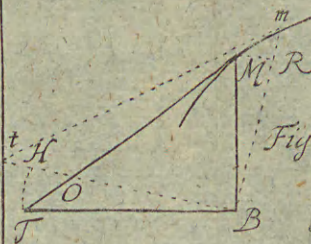


Fig. 88.

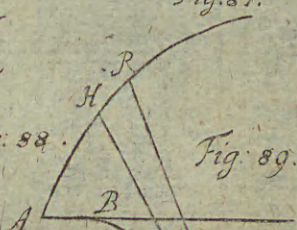


Fig. 89.

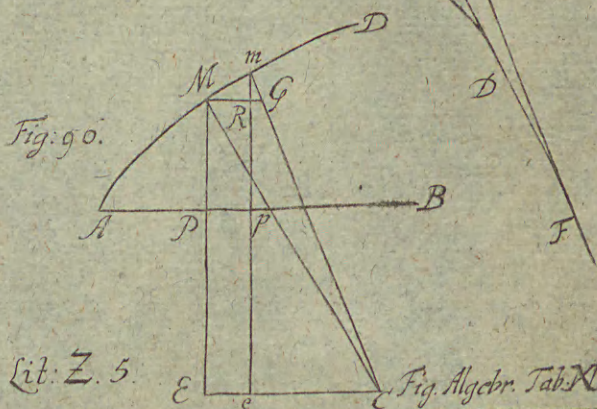
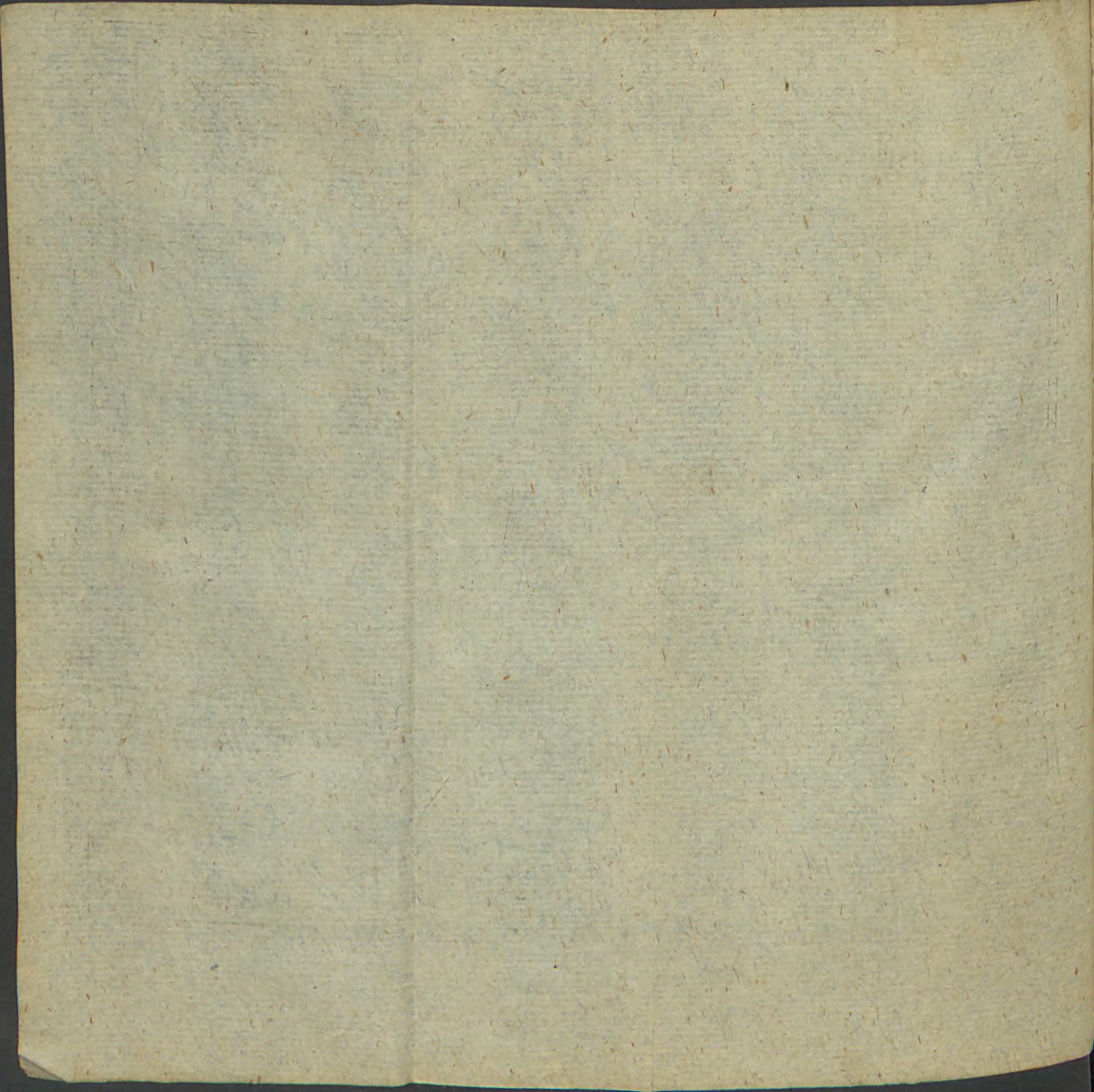
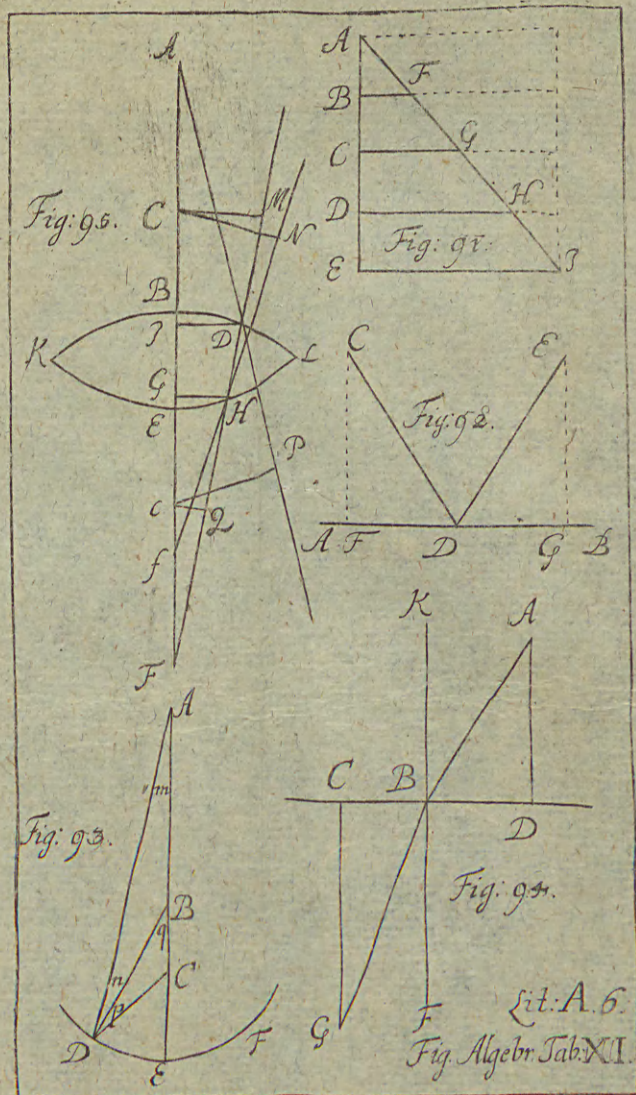


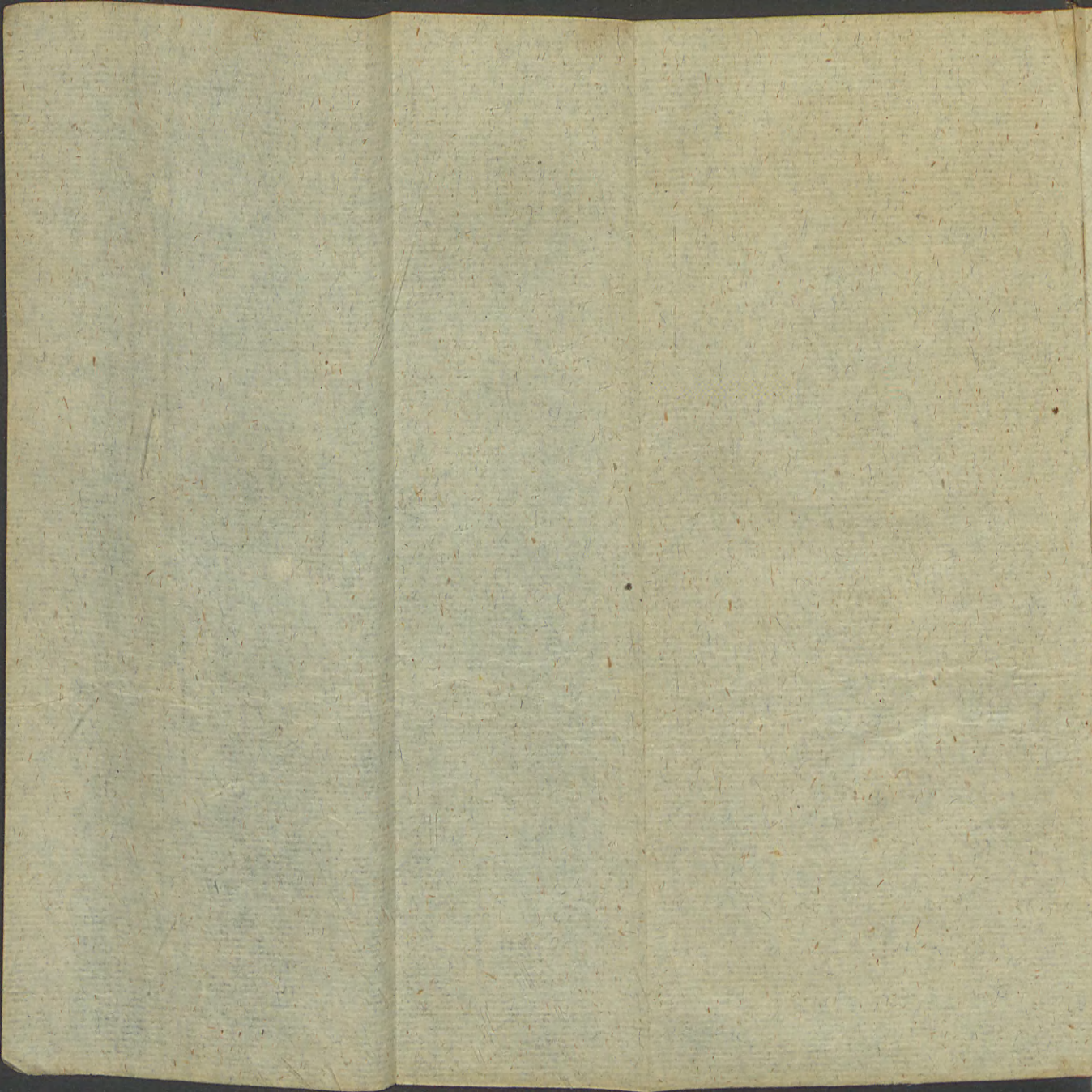
Fig. 90.

Lib. Z. 5.

Fig. Algebr. Tab. X.









Register

über alle vier Theile.

NB. Die Römische Zahl bedeutet den Theil, die dabey gesetzte Ziffern aber die Seiten. Wenn im Anfange keine Römische Zahl stehet, so ist der erste Theil zu verstehen; sonst aber derjenige, welcher vorher stehet.

A^b,	III. 1489. 1491	sein Inhalt zu finden,	
<i>Aban mah,</i>	III. 1487		236
Abdachung,	II. 609	Abgesonderte Theile,	III.
Abend, Erklärung,	III.		1088
1133. wie er zu finden,		Ablauf, Erklstrung,	343.
	1138	Zeichnung,	347. 530.
Abend. Demmerung,	III.	Gebrauch,	350. 348
1211. Ursachen, 1212.		Abscisse,	IV. 1678
wie lange sie währet, 1213.		Abschnitt des Circuls, wie	
wie das Ende auszurech-		er auszurechnen,	297
nen,	1213. 1214	Abweichende Uhr, Erklä-	
Abend: Stern,	III. 1267	rung, III. 1527. Zeich-	
Abend: Uhren, Erklärung,		nung,	1537. & seqq.
III. 1527. Zeichnung,		Acht-Ecke, wie seine Seite	
	1538	zu finden,	IV. 1649
Abgekürzte Pyramide,		Achtel-Carthaune,	II. 533
wie sie perspectivisch zu		<i>Adar,</i>	III. 1489. 1491
zeichnen,	III. 1069	<i>Adar mah,</i>	III. 1487
Abgekürzter Regel, wie		Addiren, Erklärung,	41.
(Wolfs Mathes. Tom. IV.)		Ggg ggg	Ne.

Register

- Regeln für ganze Zahlen, 42. 49. für gebrochene, 79. für Buchstaben, IV. 1556. 1557. für Irrational-Zahlen, 1569. Probe, I. 51. 52. Zeichen, 53. IV. 1553
- Adeler, III. 1190
- Aspecte, Erklärung, III. 1394. Zeichen und Bedeutung, 1594. 1395
- Ähnlichkeit, 118. der Circul, 120. Figuren, 130. 194
- Aequatio centri*, Erklärung, III. 1315. wie sie zu finden, 1323
- Aequation der Uhr*, III. 1470
- Aequatio optica*, III. 1315
- - - *physica*, *ibid.*
- Aequator*, III. 1129. 1434
- Aequinoctial-Uhr*, Erklärung, III. 1527. wie sie zu zeichnen, 1528. seq.
- Aequinoctium*, wie es zu observiren, III. 1304
- Aequatoris-Grade*, wie sie in Zeit zu verwandeln, III. 1163
- Aera*, III. 1493
- Aerometrie*, II. 877
- Aestrich*, wie es zu schlagen, 463
- Aggregat*, 41
- Aiyar*, III. 1489
- Alcor*, III. 1191
- Algebra*, IV. 1549
- Algebraische Aufgaben in Zahlen*, IV. 1571. im menschlichen Leben, 1581. in der gemeinen Geometrie, 1647. in der höheren, 1677
- Algebraische Gleichung*, Nutzen in Erklärung der krummen Linien, IV. 1677
- Algebraische Linie*, Erklärung, IV. 1678. Geschlechter, 1679. allgemeine Gleichung, 1681
- Subtangens, 1813
- Altar, III. 1190
- Alternatio rationum*, IV. 1634
- Altitudo nonagesimi*, III. 1220
- Americanische Gans*, III. 1190
- Amplitudo occidua*, Erklärung, III. 1169. wie sie zu finden, 1170. Nutzen, 1171
- Amplitudo ortiva*, Erklärung, III. 1170. wie sie zu finden, 1170. 1171. Nutzen, 1171
- Amphora*, III. 1143
- Andreas*, III. 1191
- Andromeda*, III. 1190
- Anker in Mauren*, 435
- Angle de Pepaule*, II. 618
- - *diminuë*, *ibid.*
- - *du centre*, *ibid.*
- Angulus acutus*, 123
- - *ad Solem*, III. 1315
- - *obtus*, 123
- An-

über alle vier Theile.

<i>Angulus orientis</i> , III. 1220	Höhe, 359.	Auslauf
- - <i>rectus</i> , 123	fung,	361
- - <i>refractionis</i> , III. 953	<i>Arcitenens</i> , III. 1143	
Anlage der Böschung, II. 609	Arctische Polar: Circul,	III. 1145
Anlauf. Erklärung, 343	<i>Arcturus</i> , III. 1190	
Zeichnung, 347	<i>Arcus inter centra</i> , III. 1399	
Anliegende Theile, III. 1088	<i>Arcus visionis</i> , III. 1208	
Anmerkungen, 30	<i>Ardababesht mah</i> , III. 1487	
<i>Anomalia coequata</i> , III. 1314	<i>Argonavis</i> , III. 1190	
- - <i>orbis</i> , III. 1345	Argument der Inclina-	tion, II. 1338
Antarctische Polar: Cir-	<i>Aries</i> , II. 1143	
cul, III. 1145	<i>Arithmetica infinitorum</i> ,	IV. 1644
<i>Antares</i> , III. 1191	Arithmetische Progres-	sion, IV. 1612
<i>Antichthonos</i> , III. 1433	• : Proportional-Zahlen,	wie sie zu finden, 98
<i>Antipodes</i> , III. 1433	• : Verhältniß, 72	
<i>Antinous</i> , III. 1190	Artillerie, Erklärung, II.	517. Nutzen, 515. 516.
<i>Aphelium</i> , III. 1312. wie	wie sie abzuhandeln, 515	
es zu finden, 1317. seine	Art zu zählen, 46	
Bewegung, 1317	Ascensional-Differenz. Er-	klärung, III. 1161. wie
<i>Apogäum</i> , III. 1312. wie es	sie zu observiren, 1161	
zu finden, 1332	<i>Ascensio obliqua</i> , III. 1161	
Apollonische Parabel, IV. 1683	- - <i>recta</i> , III. 1159	
Approchen. Erklärung, II.	<i>Asini</i> , III. 1191	
726. Beschaffenheit, 737	<i>Astrolabium</i> , 123	
wie sie zu führen, 729. zu	Astronomie. Erklärung,	III. 1125. Nutzen, 1124.
hindern, 731	Astronomisches Fern-	glasß, III. 1037
April, III. 1484	Astronomische Stunden,	III. 1471
<i>Apsidum linea</i> , III. 1312		
1314		
Arabisches Jahr, III. 1490		
<i>Aræostylon</i> , 395		
<i>Arcade</i> , 393		
<i>Architrab</i> , Erklärung, 342		
wesentliche Glieder, 351		

Register

Asymptoten, Erklärung,	IV. 1704.	wie sie zu finden,	1837
Atbyr,	III. 1485		
Attaquen,	II. 721		
Attisches Jahr,	III. 1489		
Aufgabe, 28.	wie sie algebraisch aufzulösen,	IV. 1571. 1573	
Aufgang der Sonne	Wie er zu finden,	III. 1169	
der Sterne.	III. 1132		1200
Auge, woraus es bestehet,	III. 953. 199.	Veränderungen, die bey dem Sehen darinnen vorgehen,	955.
	Beschaffenheit, wenn es in die Ferne und in die Nähe siehet	958	
Aufgemachte Thüre, wie sie ins Perspectiv zu bringen,	III. 1073		
Augen-Gläser,	III. 1033		
Augen-Punct,	III. 1066		
Augustimonat,	III. 1484		
Augustus,	III. 1484		
Aufhebung eines Bruches,	78		
Aufriß, Erklärung,	509		
wie er zu machen,	509		
Ausladung,	340		
Aussage,	22		
Ausschnitt des Circuls,	187		
Ausdehnen,	II. 879		
Aussenwercke, wozu sie dienen,	II. 631.	ihre Ur-	
ten",	632.	ihre Beschaffenheit,	636.
Profil,	680		
Aussere Polygon,	II. 616		
Ausziehung der Wurzeln,	Erklärung, 83.	Regeln, 86. 91.	Probe, 88. 94.
Art der Laffeten, wie sie zu zeichnen,	II. 550		
Axiomata,	17		
Axis mundi,	III. 1129		
Axis in peritrochio, Erklärung,	II. 749.	Eigenschaften,	778
Azimuth, Erklärung,	III. 1169.	wie es zu finden,	1170. 1171
Azimuthal-Quadrant,	III. 1169		

B.

Babylonische Stunden,	III. 1472
Bacsteine,	324
Bär, der kleine und grosse,	III. 1190
Bäurisch Werck,	456
Bahn der Planeten,	III. 1286.
was sie vor einer Linie ist,	1311
Balcon,	449
Band,	344
Banquet,	II. 608
Barometrum,	II. 892
Baroscopium,	II. 892
Bastart-Fenster,	437
Bastey,	II. 613
Bastion,	

über alle vier Theile.

Bastion,	II. 613	Bewegung, Regeln insge-	
Bathscha,	III. 1191	mein, IV. 1915. insbe-	
Batterie, Erklärung, II.		sondere für die schweren	
733. Zeichnung, ibid.		Cörper, 1917. 1919. wie	
Bau-Art der Alten, 337		sie gesehen wird, III. 956.	
Bauholz, wie es beschaf-		981. 982. 984	
fen seyn soll, 318. wie		Bewegung des Mondes,	
es zu fällen, 319. 320.		III. 1139. 1353	
zu trocknen, 320. im		: : der Planeten, III.	
Bauen zu sehen, 321		1284	
Baukunst, 305		: : der Sterne, wie vieler-	
Baumeister, 305		ley sie ist, III. 1140	
Bau-Unkosten, wie sie im		Bewegungskunst, II. 745	
Festungsbaue zu rechnen,		Beweis, 24. 27	
II. 713		Bey einander, wenn die	
Bauzeug, 315		Bilder zweyer Sachen	
Bedeckung der Fernglä-		gesehen werden, III. 979.	
ser, Erklärung, III.		980	
1048. Nutzen, 1049.		Bild im Auge, wie es be-	
wie sie zu finden, 1049		schaffen, III. 955	
Bedingung, 22. 23		Binomische Wurzel, IV.	
Beheman mah, III. 1487		1586	
Begriff, 6. 8		Biquadratische Glei-	
Benennung, IV. 1571		chung, wie sie Geome-	
Bequemlichkeit des Ge-		trisch zu construiren, IV.	
bäudes, 306		1769. 1770	
Berge im Mond, III. 1255		Blätter, wozu sie in der	
1256. ihr Schatten,		Baukunst gebraucht wer-	
1257. ihre Grösse,		den, 354	
1383		Blondells Fortification.	
: : in der Venere, III. 1267		Maximen, II. 663. Aus-	
Berme, Erklärung, II. 627		rechnung der Linien und	
Beständige Defens: Li-		Winkel, 665. Zeichnung,	
nie, Erklärung, II. 616.		670. Profil, 672	
Grösse, 619. 620		Bodenstücke, II. 542. 543	
Bewegliche Feste, III.		Bock in der Artillerie, II.	
1509		551	
		Ggg ggg 3	Bb

Register

- Böschung,** II. 609
Bogen, wie er auszurechnen, 296. wie daraus der Sinus zu finden, IV. 1875. 1877. wie der Tangens zu finden, 1871
Bogen in Arcaden. Wie er beschaffen, 393, 400
Bogen-Schuss, III. 563
Bogenstellung Erklärung, 383. Zeichnung, 408. Einrichtung, 412
Bogen zwischen den Mittelpuncten, III. 1399 1403
Böller, II. 564
Bollwerke. Erklärung, II. 613. Figur, 614. 615
Bollwercks-Winkel. Erklärung, II. 618. Gröfse, 620
Bolzen, II. 550
Bombe, II. 569. 570 571
Bootes, III. 1190
Bouffole, 215. 219
Borten, 342
Brachmonat, III. 1484
Brandröhre in der Bombe, II. 569. Carcasse, II. 575
Brandmauer, 435
Breite des Flusses, wie sie zu messen, 146
„ des Mondes, wie sie zu finden, III. 1369
„ der Planeten, wie sie observiret wird, III. 1283
1286. wie sie zu finden, 1346. 1347
Breite des Sternes. Erklärung, III. 1183. wie sie zu finden, 1184. ob sie veränderlich, 1195
„ eines Ortes. Erklärung, III. 1440. wie sie zu finden, 1440
Brennglas, III. 1019. 1020
Brennpunct. Erklärung, IV. 1685. wie er zu finden in der Parabel, 1685. in der Ellipsi, 1685. in der Hyperbel, 1699. 1700. in den Brenngläsern, III. 1019. 1020. 1021
Brennspiegel, III. 1006. 1007. 1008. 1021
Brill. Zeichnung, II. 672. 680. 681. Profil, 681
Bruch. Erklärung, 76. wie er geschrieben wird, 77. sein Werth, 77. Veränderungen, 78. Rechnung, 79. Logarithmus, 269. 270. wie unendliche zu summiren, IV. 1642. wie sie aus Gleichungen weg zu schaffen, IV. 1738
Brustfelgen, II. 785
Brustlehne, 453
Brustwehr, II. 608. 609
Büchsenmeisterey-Kunst, II. 517.
Buch

über alle vier Theile.

Buchstaben-Rechenkunst,	Catalogi fixarum, III. 1188
IV. 1550	1189
E.	Catoptrick, III. 989
	Centaurus, III. 1190
	Centri-Winkel, II. 618
	Centrum, 121
Calenda, III. 1485	- - gravitatis, II. 754
Calender, wie er zu	- - magnitudis, ibid.
machen, III. 1513. 1514	Cepheus, III. 1190
Caliber, II. 535	Chaldäischer Scrupel, III. 1478
Caliber: Stab. Erklä-	Chamaleon, III. 1190
rung, II. 535. Zubere-	Characteres Chronologici, III. 1493
tung, 538	Chemin Couvert, II. 637
Camera obscura, III. 959	Chojac, III. 1485
Camin, wie er zu bauen,	Chorda, 121
481	Chordad mah, III. 1487
Cancer, III. 1143	Christ-Monat, III. 1484
Canonen-Schwefel, II.	Chronologie, III. 1469
520	Circul. Erklärung, 121
Canun, III. 1489	Eigenschaft, 122. 182.
Capella cum hedis, III.	184. IV. 1672. 1830.
1191	1831. Eintheilung, 121.
Caper, III. 1143	Ausrechnung, 182. 184.
Capital. Erklärung, 341	Beschreibung, 164.
wesentliche Glieder, 351	Quadratur, IV. 1853.
Höhe, 360. Auslau-	Rectification, 1870.
fung, 361	Subtangens, 1801. wie
Capital-Linie, II. 617	er ins Perspectiv zu brin-
Caponieres, II. 639	gen, III. 1068
Carcassen, II. 575	Circul der Länge und
Cardinal Gegenden, III.	Breite, III. 1183
1454	Circul von höheren Ge-
Carthaune, II. 532. 533.	schlechten, IV. 1698.
553	1811
Casleu, III. 1491	Circul-Bogen, 129. 161
Cassiopeja, II. 1190	699 999 4 Circuli
Castelle, II. 699	
Castor, III. 1191	

Register

- Circuli diurni*, III. 1133
Circumvallations: Linien,
 II. 723
Cissois. Erklärung, IV. 1714
 Eigenschaft und Gleichung,
 1715
Citadellen. Erklärung, II.
 699. Beschaffenheit, 700
 Zeichnung, 701
Citationes, 25. seq.
Climata, III. 1450. 1452
*Coæquie*te Anomalie. Erklärung, III. 1314. wie
 sie zu finden, III. 1322.
 1324
Cörper. Wie er perspectivisch zu zeichnen, III.
 1069
Cörper von leichter Art,
 II. 843
 : von schwererer Art,
 II. 844
Cörperlicher Inhalt, wie
 er zu finden, 225
 : Ort, IV. 1756
Colonnata. Erklärung, 393.
 Beschaffenheit, 396. 398
Cometen, was man von
 ihnen observiret, III.
 1389. ihre Natur, 1392.
 ihr Ort, 1391. und
 Schweif, 1392
Commutations: Winkel,
 III. 1344
Compositio rationum, IV.
 1633
Conchilis, IV. 1713
Conchois. Erklärung, IV.
 1713. Gleichung, 1713.
 1714. Asymptote, 1713.
 Subtangens, 1823. Wendungs
 Punct, 1907
Conus. Erklärung, 127.
 Eigenschaften, 127. II.
 846. IV. 1675. 1838.
 Ausrechnung, IV. 1862.
 1878
Conischer Spiegel. Erklärung, III. 990. wie
 sie zu machen, 997. Eigenschaften,
 1000. 1001
Conjunction, III. 1394
Contra-Minen, II. 640
Contravallations: Linien,
 II. 723. 725
Contregarde. Erklärung,
 II. 633. Zeichnung, 662
 Nutzen, 633
Contrescarpe. Erklärung,
 II. 636. wie sie zu er-
 obern, 735. 737
Conversio rationum, IV.
 1634
Corinthische Ordnung.
 Erklärung, 358. Glieder,
 377
Cornea, III. 954
Corollaria, 28. 29
Cortine, II. 615
Cosinus, 262
Crater, III. 1190
Crepusculum matutinum,
 III. 1211
 - - vespertinum, III. 1211
 Creuz:

über alle vier Theile.

Creutzgewölbe,	471. 472	II. 845. IV. 1682. Aus:
Cubatur,	IV. 1878	rechnung, 231. 244. 245.
Cubic:Maass,	226	Reihe, 255
Cubic: Ruth, Schuh,		Cylindrische Spiegel. Er:
Foll, Linie,	227	klärung, III. 990. wie
Cubic: Wurzel. Erklä:		sie zu machen, 997. Ei:
rung, 83. 84. wie sie aus:		genschaften, 999
ziehen, 91. IV. 1593.		
ihr Logarithmus, 271		D.
Cubic: Zahlen. Ihre Dif:		Dach. Erklärung, 418.
ferentien, IV. 1606. 1607		Höhe, 498. Arten,
ihr Logarithmus, 271		499. 471. Materie, 500
Cubiren, IV. 1878.		Dach à la mansarde, 499
Cubische Gleichung, wie		Dampf: Kugel. Erklä:
daraus die Wurzel zu		rung, II. 577. wie sie zu
ziehen, IV. 1735. wie		machen, 580
sie Geometrisch zu con:		Dauerhaftigkeit des Bau:
struiren, 1769		zeuges, wie sie zu beur:
Cubus. Erklärung, 127.		theilen, 316
Eigenschaften, 127. wie		: : des Gebäudes, wie
sein Inhalt auszurech:		sie zu beurtheilen, 308
nen, 225		David, III. 1191
Curtirte Weite. Erklä:		December, 1484
rung, III. 1339. wie sie		Declination eines Ster:
zu finden, 1342		nes. Erklärung, III.
Curtirung, III. 1339		1152. wie sie zu fin:
Crystalline Feuchtigkeit,		den, 1152. ihr Nutzen,
III. 955		1153. seq.
Cyclois. Erklärung, IV.		: : der Ecliptick, III.
1717. Eigenschaften,		1154. 1156
1717. Subtangehs, 1825		Declinirende Uhren, III.
Cyclus indictionum, III.		1527
1503		Decke, 467. 468
- - Luna, III. 1498		Deckel, 341
- - Solis, III. 1495		Defendirende Linie, II.
Cylinder. Erklärung, 126		602
Eigenschaft, 126. 227.		

Register

Defension, wie sie einzu- richten,	II. 601	Differential: Rechnung,	IV. 1799
Defens: Linie,	II. 602	Differentiiren. Erklärung,	
Definitio,	5	IV. 1802. Regeln für	
- - nominalis & realis,	6	die veränderlichen Gröf-	
les Dehors,	II. 631	sen, 1802. für die Expo-	
Delphin,	III. 1190	nential: Grössen, 1894.	
Delphine in der Artillerie,	II. 542	für die Differential: Gröf-	
Demonstrationes,	27	sen,	1900
Demigorge,	II. 617	Differentio: Differentiiren,	IV. 1900
Demilune,	II. 633	Differenz,	42
Descensional: Differenz,	II. 1161	Dignität. Erklärung, IV.	
Deutlich, wenn Sachen ge- sehen werden,	III. 957	1562. Eigenschaften,	
Deutlicher Begriff,	7	1698. 1611. allgemeine	
Diabetes,	II. 931	Regel für dieselben, 1602	
Diagonal,	173	Di mah,	III. 1487
Diameter. Erklärung, 121		Dioptrick,	III. 1014
Verhältniß zur Periphe-		Directions: Linie, II. 752	
rie des Circuls, 183.		: : : : der schweren	
184. 297		Cörper, II. 759. 760	
Diameter der Planeten,		Directus,	III. 1285
wie er zu finden, III.		Distanz Punct, III. 1066	
1377. 1378		Dividendus,	44
: : einer krummen Linie,		Dividiren. Erklärung, 43.	
IV. 1677		44. Regeln für ganze	
: : der Erde, wie er zu		Zahlen, 64. 65. für ge-	
messen, III. 1435. 1436		brochene, 82. für Buch-	
Diastylon,	395	staben, IV. 1561. für Ir-	
Diäsfäulig,	395	rational-Zahlen, 1571.	
Dielen,	461. 462	wie es ohne das Ein mahl	
Differentie ascensionalis,		eines geschieht, I. 68.	
III. 1163		Zeichen, 72. IV. 1555	
Differential: Grösse, IV.		Divisio rationum, IV. 1634	
1801. wie sie zu diffe-		Divisor,	44
rentiiren,	1802	Dodecaëdram. Erklärung,	
		252. Rege, 253. 254	
		Dop:	

über alle vier Theile.

Doppelt, wenn etwas gese-	zu finden, 1315. 1332.
hen wird, III. 987	ihre Grösse, 1347
Doppelte Eccenzierde, 448	Eccentrische Anomalie,
• • Hohlkehle, 347	III. 1314
Dorado, III. 1190	Eccentrischer Circul, III.
Dorische Ordnung. Er-	1314
klärung, 357. Glieder,	• • Ort des Planetens,
367	III. 1343
Drache, III. 1190	Eccenzierde, wie sie zu zeich-
Drachen-Kopf, III. 1353	nen, 447. 448
Drachen Monat, III. 1353	Ecliptick. Erklärung, III.
Drachen Schwanz, III.	1142. 1433. Einthei-
ibid.	lung, 1142. grosse De-
Dreyecke. Erklärung, 123	clination, 1154
Eigenschaften, 129. wie	Egyptisches Jahr, III.
seine Höhe zu finden, IV.	1485
1658. 1659	Eigene Bewegung, III.
Dreyviertel: Carthaune,	1141
II. 533. 553. 562	Einfache Eccenzierde, 447
Drossirung, II. 609	Einfacher Ort, IV. 1756
Druck der flüssigen Cör-	Einfallendes Licht, 438
per, II. 849	Einfalls-Winkel, III. 951
Druckwerck, II. 920	Ein mahl eins, 57. 58. 60.
Dulbeggia, III. 1491	III. 1192
Dulkaadab, III. 1491	Eintheilung des Gebäu-
Dunkel, warum ein Cör-	des, wie sie zu finden, 477
per aussiehet, III. 976	Einziehung, 432
Dunkeler Begriff, 7	Einziehung der Mauern,
Durchmesser, 121	432
Durchschnitt des Gebäu-	Elastische Kraft der Luft,
des, 510	II. 882. 885
• • einer Festung, II. 656	Element einer Fläche, IV.
	1843
E.	Elephant, III. 1192
Ebener Ort, IV. 1756	Ellipsis. Erklärung, IV.
Eccentricität. Erklä-	1689. 1690. Eigenschaf-
rung, III. 1312. wie sie	ten, 1690. 1830. 1831.
	1834.

Register

1834. 1856. 1857. 1858. Gleichung, 1690. Beschreibung, 1695. Quadratur, 1856. 1857. Subtangens, 1812. wie sie aus dem Regel geschnitten wird, 1711. ist die Bahn der Planeten, III. 1310
- Elipses von höheren Geschlechtern*, IV. 1697. 1698. 1812
- Elliptische Aster-Kugel*, IV. 1881
- Elongations-Winkel*, III. 1344
- Elul*, III. 1489. 1491
- Entgegensetzung*, III. 1394
- Entfernung vom Ruhe-Punct*, II. 753
- Erde, ihre Figur*, 1431. 1433. Grösse, 1435. 1436. Bewegung, 1296. Ist ein Punct in Auflösung der Weltkugel, 1147. wie groß sie im Mond gesehen wird, 1385. wie sie daselbst aussiehet, 1386. ihr ab- und zunehmendes Licht, 1385. 1386. wie stark sie den Mond erleuchtet, 1379
- Erdfinsterniß*, III. 1257
- Erdfugel, wie sie zu verfertigen*, III. 1457. ihr Gebrauch, 1459
- Erdreich, wie seine Beschaffenheit zu erforschen*, 421. wie das lockere zu befestigen, 422
- Erfahrungen, was sie sind*, 18. ihre Beschaffenheit, 18. 19. wenn man sie anführen muß, 20. 21
- Erhabener Spiegel. Erklärung*, III. 989. wie er zu machen, 996. Eigenschaften, IV. 1932
- Erhabenes Glas. Erklärung*, III. 1016. Eigenschaft, 1018. 1021 1025. 1029
- Eridanus*, III. 1190
- Erkenntniß der Natur, wie sie beschaffen*, III. 1295
- Erklärung, 5. 6. wie sie bey den Mathematicis beschaffen*, 8
- der Wörter*, 6. 8. 9. 10. 11. 12
- der Sachen*, 6. 12. 13
- Erleuchtung der Kugel*, III. 963
- Epacta. Erklärung*, III. 1500. wie sie zu finden, 1502. 1503
- Epocha*, III. 1493
- Epiphi*, III. 1485
- Equuleus*, III. 1190
- Esphandarmod mah*, III. 1488
- Esplanade*, III. 637

über alle vier Theile.

Eurpäische Stunden, III.	Sarbigte Haut, III.	954
1472	Saschinen, II.	738
Eurythmie. Erklärung,	Februarius, III.	1484
313. Grund, 313. 314.	Seder, wie dadurch Ma-	
Gebrauch, 314	chinen zu bewegen, II.	
Eustylon, 395	832. 833	
Evolute, IV. 1909	Selder: Decke von Holze,	
Exponens rationis, 73	467	
Exponential-Größen. Er-	von Gypse, 469	
klärung, IV. 1894. wie	Seldmessen, 220. 222	
sie zu differentiiren, 1894.	Seldschanzen. Erklärung,	
wie sie zu integriren,	II. 701. Grundrisse,	
1898	702. 703. 704. 705. 706.	
Exponential-Linien, IV.	Profil 701	
1895	Senster. Erklärung, 435.	
Exponential: Rechnung,	Beschaffenheit, 435. 436	
IV. 1894	Höhe und Breite, 436.	
	438. 440. 441. wie sie	
S.	übereinander zu setzen,	
Faces. Erklärung, II. 615.	441. zu bauen, 442. 453.	
Größe, 625	zu zieren, 442. ins Perspe-	
Sackeln der Sonne, III.	ctiv zu bringen, III. 1072.	
1237	wie viel in ein jedes Ge-	
Factores, 43	mach gehören, I. 475. 476	
Factum, 43	Senster-Creuze, 436	
Sässer, wie sie zu visiren,	Sernglass. Erklärung, III.	
248	1031. Erfinder, 1032	
Salkaune, II. 533. 553	Röhren dazu, 1033.	
Salsche Wage, wie sie zu	1034. Gestelle, 1042.	
erkennen, II. 766. zu ge-	wie viel es vergrößert,	
brauchen, 766. zu bes-	1046. warum die groß-	
sern. 768. 769	sen mehr vergrößern,	
Samilie der algebräischen	1047. seq.	
Linien, IV. 1680	Sernglass in der Astrono-	
Sarben, wie sie entstehen,	mie, III. 1037. 1045.	
des Monds in Sin-	auf der Erden, III. 1042.	
sternissen, III. 1250. 1251	1043. 1044	

Register

- Fervardin mah*, III. 1487
Seste, III. 1509
Sester Körper. Erklärung,
 II. 843. wie viel er sich
 eintauchet, 866
Sestigkeit des Gebäudes.
Erläuterung, 306. wie sie zu
 beurtheilen, 308. wie sie
 zu beobachten, 334. 336
Setzung, wie ihre Vollkom-
menheit zu beurtheilen,
 II. 597. wie sie abzustel-
len, 714
Feuer-Ballen, II. 577
Feuer-Kugeln. Erklärung,
 II. 576. Arten, 577.
 wie sie zu binden, 578.
 und zu tauffen, 579
Feuerkugel-Zeug, II. 576
Feuer, wie dadurch Machi-
nen zu bewegen, II. 833.
 834
Feuer-Maure. Erklärung,
 502. wie sie nicht
 rauchet, 503
Feuerwercker-Kunst, II.
 517
Figuren. Eigenschaften,
 130. Aehnlichkeit, 194.
 seq. Grundlegung, 210.
 Ausrechnung, 173. 187
Figuren des springenden
Wassers, II. 926
Fische, III. 1142. 1190
Fisch, der fliegende, III. 1190
 : : *der Süssische*, III. 1190
Sixstern. Erklärung, III.
 1143. *Bewegung*, 1195.
Natur, 1387. *parallaxis*,
 1302. 1303
Fläche der Körper, wie
sie zu finden, IV. 1861.
 1862. wie sie *perspecti-*
visch zu zeichnen, III.
 1066. wie ihre *Abwei-*
chung von Süden, *Nor-*
den und dem Horizont zu
finden, 1525
Flanc, II. 615
Flanque. Erklärung, II.
 615. ihre Lage, 621.
Figur, 621. 622. 623.
Zahl, 622. 623
Flecken in der Sonne, III.
 1233. 1234. 1235. wie
 sie zu *observiren*, 1238
Flecken in der Venere, III.
 1268
 : : *im Jupiter*, III. 1268
 : : *in den Jupiters-*
Wonden, III. 1272
Fliege, III. 1190
Fliegender Fisch, III. 1190
Flüssige Materie. Erklärung,
 II. 843. ihr wa-
 gerechter *Stand*, 846.
 847. ihr *Druck*, 849.
 850
Flug, II. 564
Fluß Eridans, III. 1190
Focus, IV. 1655
Fomahant, III. 1191.
Fons Heronis, II. 939
 For-

über alle vier Theile.

- Fortification.* Erklärung, II. 597. Grund-Regeln, II. 598
- Friess.* Erklärung, 342
Beschaffenheit, 361
Höhe, 361
- Fronton.* Erklärung, 410
Beschaffenheit, 410
Höhe, 411. Zeichnung, 412. 413
- Frühling,* III. 1444
- Fünf. Ecke.* Erklärung, 125. wie seine Seite zu finden, IV. 1653. wie es geometrisch zu beschreiben, 1654
- Fuhrmann,* III. 1190
- Fundamental-Linie,* III. 1066
- Gutter-Mauern* bey Festungen, II. 718
- Fuß der Säule,* 341. des Säulen-Stuhles, 341
- Fuß-Gesimse.* Erklärung, 341. wesentliche Glieder, 351. andere Glieder, 352. Höhe, 358. Auslaufung, 360. 361
- Fuß-Mörser,* II. 565
- Fuß-Riegel,* II. 550
- G.**
- G**allerie, II. 738. 739
- G**alliläisches Fern-Glas, III. 1033
- G**ebäude. Erklärung, 306 wie davon gründlich zu urtheilen, 306. Unterscheid, 306. wie seine Eintheilung zu finden, 459. 476. 478
- G

**G

**G

**G

**G

G392

**G

**G

**G

**G

**G

**G

**G

**G

**G

**G

**G

Geometrische Körper, wie sie zu machen 225

• : Linien, IV. 1677

• : Orter, IV. 1755

• : Progression. Erklärung, 74. Eigenschaften, IV. 1613. wie sie zu********************************

Register

- | | | | |
|------------------------------|------------|----------------------------|----------|
| zu summiren , | 1613. | Geschlechter der algebräi- | |
| | 1614 | schen Linien, IV. | 1679 |
| Geometrische Proportio- | | Geschliffene Gläser, ihre | |
| nal: Zahlen, wie sie zu | | Eigenschaften, III. | 1017 |
| finden, 96. 97. 98. 99 | | & sqq. IV. | 1929 |
| : Verhältniß. Erklä- | | Geschütz: Kunst, II. | 517 |
| rung, 72. Eigenschaf- | | Geschwindigkeit , | IV. |
| ten, 75. IV. | 1636 | | 1914 |
| Gerade Ascension. Er- | | Gesichts: Linien, II. | 614 |
| klärung, III. | 1159. | Gesimse, | 354 |
| wie sie zu observiren, 1159. | | Gesimse, zu Fenstern und | |
| 1180. 1197. auf der | | Thüren, | 443 |
| Himmels: Kugel zu fin- | | Gestelle zu Ferngläsern, | |
| den, 1160. wie ihr Un- | | III. | 1042 |
| terscheid zu finden, 1179 | | Gestirne, 1190. 1191. | |
| Geradeläufig, III. | 1285 | | 1192 |
| Geradelinichte Figur, wie | | Gesundes Auge, wie es be- | |
| sie in Grund zu legen, | | schaffen, III. | 958 |
| 210. auszurechnen, 179. | | Getrieb, II. | 751 |
| 180. zu theilen, 192 | | Geviert: Schein, III. | |
| Geradelinichter Transpor- | | | 1394 |
| teur, wie er zu verserti- | | Gewichte, wie damit Ma- | |
| gen, 298. 299. und zu | | chinen zu bewegen, II. | |
| gebrauchen, 299. 320 | | 830. 831. und Kräfte zu | |
| Gerade Linie. Erklä- | | verstärcken, 832. Unter- | |
| rung, 119. wie sie be- | | scheid in den berühmten | |
| schrieben und gemessen | | Städten, 541 | |
| wird, 120. 134. 135. | | Gewölbe. Erklärung, 471. | |
| ihre Eigenschaften, 129. | | wie es aufzurichten, 473. | |
| 131. und Theilung, 160 | | Wiederlage, 473. 474 | |
| | 168. 199 | Giebfeld, | 411 |
| Gerade Zahlen, ihre Ei- | | Giebelzinne, | 513 |
| genschaften, IV. | 1608. | Gieß: Saß, II. | 928. 929 |
| | 1609. 1610 | Ginbat, III. | 1486 |
| Gesecht: Schein, III. | | Glacis, II. | 637 |
| | 1394 | Gläserne Feuchtigkeit , | |
| Gesellschafts: Rechnung, | | II. | 954 |
| | 104. 105 | Glass: | |

über alle vier Theile.

- Glas, wie man es schleif-
set, III. 1062. 1064.
welches zum Schleiffen
gut ist, 1058. 1060
- Glaß mit Wasser machet
helle, III. 1056
- Gleichheit der Winkel,
129
- Gleichschencklicher Trian-
gel. Erklärung, 124.
Eigenschaften, 155. 156.
Beschreibung, 139. seq.
- Gleichseitige Hyperbel.
Erklärung, IV. 1709.
Nutzen, 1893
- Gleichseitiger Triangel.
Erklärung, 123. Be-
schreibung, 140. Eigen-
schaft, 156
- Gleichung, IV. 1571
- Glieder in der Baukunst.
Erklärung, 343. Regeln
ihrer Zusammensetzung,
347. Proportion, 358
- Glühende Kugel, wie sie in
ein Stück zu laden, II. 558
ihr Gebrauch, 558
- Gnomonick, III. 1523
- Grab Christi, III. 1191
- Graben, seine Nothwen-
digkeit, II. 607. Beschaf-
fenheit, 529. 530. Brei-
te, 628. wie sie zu finden,
710
- Grad, 122
- Grängen, III. 1367
- Granaten, II. 575
(Wolfs Mathes. Tom. IV.)
- Gregorianischer Calen-
der, III. 1515
- Gregorianisches Jahr, III.
1483
- Gregorianische Monate,
III. 1484
- Größe. Erklärung, IV.
1550. 1551. Verände-
rungen, 1552. Zeichen,
1553. wie sie gesehen
wird, III. 956. 977. 978
- Größe der Bewegung, IV.
1914
- Größtes, IV. 1828. 1829
- Gröste Circul einer Kugel.
Erklärung, III. 1083.
Eigenschaften, 1084.
1085. 1086. 1097. 1098
1107. 1119
- Gröste Conjunction, III.
1395
- Grosse Conjunction, III.
1395
- Grosser Radius, II. 617
- Gründe der Rechenkunst,
so willkürlich, 46. 77
- Grund des Gebäudes.
Erklärung, 418. Stär-
ke, 418. Bau, 418
- Grundbau des Gebäu-
des, 419
des Walles, II. 715.
716. im Wasser, 429.
430
- Grundgraben, 425
- Grundlegung der Figu-
ren, 210
- H h h h h h h Grundr

Register

- Grundlinie der Perspectiv, III. 1066
 Grundmauer, 424. 425. 426. 427
 Grundregeln der Fortifica-
 tion, II. 598
 Grundriß eines Gebäudes.
 Erklärung, 507. 508.
 wie er zu machen, 508
 = einer Festung, III. 651
 Grundsätze, 16
 Guldene Zahl. Erklärung,
 III. 1499. wie sie zu fin-
 den, 1500. 1502
 Gypsdecke, 469
- H.
- Haar der Berenices, III.
 1190
 Haase, III. 1190
 Halb-Caponieres, II. 639
 Halbe Carthaune, II. 533.
 553. 562
 Halbe Feldschlange, II.
 533. 553. 562
 Halbe Redoute, II. 706
 Halber Mond. Erklärung,
 II. 633. Nutzen 633.
 Zeichnung, 653. 679
 Halbmesser, 121
 Halbschatten, III. 1408
 Halbes Falconet, II. 533.
 553. 562
 Hamle, III. 1486
 Hand-Saß mit einem
 Spring-Brunnen, II. 925
 Handgranaten, II. 575
 Handmühlen, II. 828. 829
 Hangende Mörser, II. 565
 Harmonische Proportion,
 IV. 1644
 Harte Haut, III. 954
 Haubitz, II. 581
 Hauptgegenden der Welt,
 III. 1133. 1454
 Hauptgesimse. Erklärung,
 340. Höhe, 359. 364
 Hauptlinie, II. 617
 Hauptriegel, II. 550
 Hausthüre, 450. 451
 Haziram, III. 1489
 Hebel. Erklärung, II. 748.
 Eigenschaft, 761. Nu-
 ken, 749
 Heber, II. 930. 931. 933
 Heilige Drey Könige, III.
 1510
 Heimliches Gemach, 480.
 481
 Heliocentrischer Ort, III.
 1343
 Herbst, III. 1444. 1445
 Herbstmonat, III. 1484
 Hercules, III. 1191
 Herd, 491. 492
 Herons-Brunnen, II. 919
 Herzen des Löwens, III.
 1191
 = Scorpions, III. 1191
 Hesperus, III. 1267
 Heumonat, III. 1484
 Hexaëdram 252
 Himmelskugel, III. 1128
 Hexa-

über alle vier Theile.

- Hexagonal-Zahl, IV. 1623
 Hitzige Striche Landes, III. 1443
 Höhen, wie sie zu messen, 208. 292. III. 967. 979.
 wie weit man davon se-
 hen kan, III. 1439
 Höhe des Gemaches, wie
 sie zu finden, 460
 : : des neunzigsten, wie
 sie zu finden, III. 1220.
 1218
 : : der Sonne, wie sie zu
 finden, III. 1171. 1175
 : : des springenden Was-
 sers, II. 924
 : : des Sternes. Erklä-
 rung, III. 1146. wie sie
 zu messen, 1147
 : : des Triangels, wie sie
 zu finden, IV. 1659. 1661
 Hohe Ordnung, 361
 Hohles Glas. Erklärung,
 III. 1017. Eigenschaften,
 1027. 1030. IV. 1933
 Hohl-Kehle. Erklärung,
 343. Zeichnung, 345.
 Grösse, 359
 Hohl-Leisten, 344
 Hohl-Spiegel. Erklärung,
 III. 989. wie er zu ma-
 chen, 1001. Eigenschaft,
 1005. IV. 1933
 Holländische Sortifica-
 tion. Maximen, II. 641.
 Ausrechnung der Win-
 ckel und Linien, 642. 643.
 Grundriß, 651. Profil,
 656. was davon zu hal-
 ten, 657
 Holländisches Fernglas,
 III. 1033
 Holz. Eigenschaften, 315.
 warum es in Gebäuden,
 so viel möglich, zu ver-
 meiden, 316
 Horizont, III. 1131
 Horizontal-Linie, II. 754.
 III. 1066
 Horizontal-Uhr, Erklä-
 rung, III. 1527. Zeich-
 nung, 1530
 Horn-Haut, III. 954
 Hornung, III. 1484
 Hornwerck. Erklärung,
 II. 635. Zeichnung, 655
 Humor aqueus, III. 955
 crystallinus, III. 954.
 Eigenschaften, 955. 957.
 vitreus, 954
 Hund, der grosse und klei-
 ne, III. 1190
 Hyades, III. 1191
 Hydar, III. 1486
 Hydra, III. 1190
 Hydraulick, II. 911
 Hydrostatick, II. 843
 Hydras, III. 1190
 Hyperbel. Erklärung, IV.
 1698. 1699. Beschrei-
 bung, 1700. Asympto-
 ten, 1704. Eigenschaf-
 ten zwischen den Asymp-
 toten, 1705. 1706. Qua-
 drahthh hhh 2 dra-

Register

dratur, 1852. Subtan-	zu observiren, 2341. wie
gens, 1813. 1814. wie	die übrigen auszurechnen,
sie aus dem Regel geschnit-	1341
ten wird, 1712	<i>Inclination</i> der monatli-
<i>Hyperbelen</i> von höhern	chen Gränge III. 1367.
<i>Geschlechten</i> , IV. 1709.	1368
1713	<i>Inclinations</i> Winkel, III.
<i>Hyperbolischer</i> Asterke-	953
gel, IX. 1882	<i>Inclinirte</i> Uhren, III. 1528
<i>Hypothesis</i> , 22	<i>Indianer</i> , III. 1190
3.	<i>Indianische</i> Biene, III.
	1190
<i>Yacatit</i> , III. 1486	<i>Innere</i> Polygon, II. 617
<i>Jährliche</i> Epacten,	<i>Instrument</i> die Mittags-
III. 1501	Linie zu finden, III. 1136.
<i>Jagdhunde</i> , III. 1192	die Soole abzumiegen,
<i>Jahre</i> der Gnaden, III.	867
1507	<i>Insuln</i> im Mond, III. 1256
<i>Jahres</i> Anfang, III. 1485	<i>Integral</i> Rechnung. Er-
<i>Jahr</i> Termin. Erklärung,	klärung, IV. 1840. Re-
III. 1493. verschiedene	geln, 1841
Arten, 1506. 1507	<i>Integriren</i> , IV. 1840
<i>Jahrzahlen</i> , wie sie mit	<i>Intercolumnium</i> , 393
einander zu vergleichen,	<i>Intervallum</i> , III. 1313
III. 1508	<i>Inversio</i> rationum, IV. 1633
<i>Jahrzahl</i> der Märtyrer,	<i>Inwohner</i> der Planeten,
III. 1506	III. 1279
<i>Januarius</i> , III. 1484	<i>Jomada</i> , III. 1491
<i>Icosædram</i> . Erklärung,	<i>Jonische</i> Ordnung. Er-
252. Recke, 254	klärung, 357. Glieder,
<i>Idus</i> , III. 1484. 1485	372. 373
<i>Jenner</i> , III. 1484	<i>Irrational</i> größe, IV. 1565
<i>Jiar</i> , III. 1491	<i>Irrational</i> zahlen. Erklä-
<i>Immerwährender</i> Calen-	rung, IV. 1566. ihre
der, III. 1515	Rechnung, 1566. 1567.
<i>Inclination</i> . Erklärung,	wie sie aus der Gleichung
III. 1338. wie die größte	abzuschaffen, 1729
	<i>Irrer</i>

über alle vier Theile.

Irreguläre Körper,	128	1271. 1272. Flecken,	1272
Irreguläre Figur. Erklä-		Jupiters Trabanten,	III. 1270
rung,	128. Eigenschaft,		
165. Beschreibung,	168.		
Ausrechnung,	180		
• • Festung,	II. 687	K.	
• • Platz, wie er zur Regu-		Kälberzähne,	354. wie sie
larität zu bringen, II. 688		zu zeichnen,	387. wo sie
689. wie er zu fortifici-		nicht zu gebrauchen,	410
ren,	689	Kämpfer. Erklärung,	402.
Italiänische Stunden, III.		Glieder,	402
	1472	Kalk, von was vor Stei-	
Juden Jahr, III. 1491		nen er zu brennen,	330.
Jüdische Stunden, III.		331. Proben, 332. Ver-	
	1472	wahrung,	332. 333
Jüdisches Sonnen Jahr,		Kalte Striche Landes,	
III. 1492		III. 1443. 1444	
Julianischer Periodus, III.		Kammen, wie sie einzuthei-	
1504. sein Nutzen, 1504		len, II. 787. ihre beste	
1505		Figur,	788
Julianisches Jahr, III.		Kammer, wie sie beschaf-	
	1482	fen seyn soll, 461. 462	
Julianische Monate, III.		465. 466	
	1484	Kammer im Mörser, II.	
Julius, III. 1484		564. in der Minc, II. 586	
Jungfrau, III. 1142. 1190		Kammrad. Erklärung, II.	
Julius, III. 1484		751. wie es zu machen, 785	
Jupiter, III. 1141. seine		Kammerstücke, II. 582	
Flecken, 1272. Streifen,		Kapfenster,	501
1268. Bewegung um die		Karnieß. Erklärung, 342	
Are, 1269. und um die		wesentliche Glieder, 351	
Sonne, 1283. Aehnlich-		andere Glieder, 352. 353	
keit mit dem Mond, 1277		Höhe, 360. Auslaufe-	
Jupiters Monden, III.		fung,	361
1270. ihre Bewegung,		Kartetschen, II. 559	
1271. Weite vom Jupi-		Regel. Erklärung, 127	
ter, 1271. Finsternisse,		Eigenschaften, 233. 234.	
		Ausrechnung, 236. 244	
		h h h h h. 3	Re

Register

- | | | | |
|------------------------------------|---------------|-----------------------------------|-----------------|
| Kegeleschnitte, | IV. 1681 | Kranich, | III. 1190 |
| Keble, | II. 617 | Kranz, | 342 |
| Kebleisten, | 344 | Kranz-Leisten, | 344 |
| Keblinie. Erklärung, | II. 617. | Bron:Werck. Erklärung, | II. 635. |
| ihre Größe, | 626 | Zeichnung, | 635 |
| Keil, seine Vermögen, | II. 800. | Krebs, | III. 1142. 1190 |
| Nutzen in der Ar- | | Kriegs-Baukunst, | II. 597 |
| tillerie, | 561 | Kripplein Christi, | III. 1191 |
| Kern-Schuß, | II. 563 | Krone, | III. 1190 |
| Kessel, | II. 564 | Kropf-Felgen, | II. 785 |
| Kirch-Thüre, | 451 | Krumme Linie, | 119 |
| Klappen zu Plumpen, | II. 920 | Küssen-Riegel, | II. 550 |
| Klarer Begriff, | 7 | Kütt, wie er zu machen, | 466. |
| Kleine Aye in der Ellipsis, | II. 1693 | II. 571. welcher zum Glas- | |
| Defenslinie, | II. 616 | schleifen dienlich, | III. 1063 |
| Kleiner Radius, | II. 617 | Kugel. Erklärung, | 126. |
| der kleine Winkel, | II. 618 | Eigenschaften, | 126. 238. 240 |
| ein Kleinstes, | IV. 1828 | 241. 242. IV. 1674. Aus- | |
| Kloben. Erklärung, | II. 751 | rechnung, I. 242. 243. IV. | |
| ihre Vermögen, | 798. 799 | 1879. Erleuchtung, | III. 963. |
| Knall-Pulver, | II. 528 | wie das Licht darin- | |
| Knauf, | 341 | nen gebrochen wird, | III. 1019. |
| Knoten. Erklärung, | III. 1337. | wie einer pfündigen | |
| wie sie zu obser- | | Diameter gefunden wird, | II. 538. |
| viren, 1339. ihre Bewe- | | te zu vergleichen, | 806. |
| gung, | 1340. 1353 | sie zu probiren, | 556 |
| Kohlen zu Pulver, wie sie | | Kugel-Circul, | III. 1085 |
| zu brennen, | II. 521. 522. | Kugel-Lehre, | II. 556 |
| ihre Eigenschaften, | 524 | Kugel-Säcke, wie sie zu | |
| Kraft, | II. 746 | machen, | 577. 578 |
| Kraft, etwas unter den Was- | | | |
| ser zu erhalten, | II. 869 | | |
| Kragsteine Erklärung, | 334 | | |
| Gebrauch, | 335. | | |
| Zeich- | | | |
| nung, 336. wo sie nicht zu | | | |
| brauchen, | 410 | | |

L.

Ladeschaufel, II. 552. 554
Ladung im Mörtel, II. 572.
in Stücken, II. 552
Länge eines Ortes, III. 1441
Länge

über alle vier Theile.

- Länge eines Planetens**, wie sie zu observiren, III. 1283
zu rechnen, 1343
• : eines **Sternes**. Erklär-
rung, III. 1194. wie sie zu
finden, 1184. zunimmt,
1195. auf jede Zeit aus-
zurechnen, 1196
• : des **Tages**, wie sie zu
finden, III. 1165
Länglichste Raute, 124
Länglichstes Vierecke, ibid.
Längster Tag, wie seine
Größe zu finden, III. 1451
Laffeten. Erklärung, 542
Zeichnung, 548
Laffeten der Mörser, wie
sie zu zeichnen, II. 567. 568
Lager im Mörser, II. 564
Landcharten zu machen,
III. 1461.
Last, II. 746
Lauf im Geschütze, II. 545
im Mörser, II. 564
Lebendige Kraft, II. 746
Lebendiger Schwefel. II.
520
Lederne Stücke, II. 535
Leer-Bogen, 473
Lehrsatz. Erklärung, 21.
22. was dabei zu be-
denken, 22. seine Theile,
22. 23. 24
Lens concava, III. 1017
- - **convexa**, III. 1016
Leo, III. 1143
Leucht-Bugeln. Erklä-
rung, II. 577. wie sie zu
machen, II. 580
Leyer, III. 1190
Libra, III. 1143
Licht. Erklärung, III. 949
Eigenschaften, III. 949.
950. 951. 952. 953. 961.
962. 963. warum es von
weiten groß aussiehet,
980. wie es geschwächet,
1028. verstärkt, 1008.
und gebrochen wird, 1014
Licht des Mondes, wie es
ab- und zunimmt, III.
1245. 1246
• : des **Mercurii**, wie es
ab- und zunimmt, 1266
• : der **Veneris**, wie es ab-
und zunimmt, 1265
Ligne de desense fichante,
II. 616
- - **flanquante**, II. 616
Linea absidum, III. 1312
- - **directionis**, II. 753
Linie im Maasse, 119
• : in der **Geometrie**, 117
• : **Geographie**, III. 1431
Linien an der Festung, wie
sie einander flankiren,
II. 619
Locus planus, IV. 1756
- - **solidus**, IV. 1756
Löwe, III. 1142. 1190
• : der **kleine**, III. 1192
Logarithmische Größen,
wie sie zu differentiiren, IV.
1890. zu integriren, 1801
Hh h h h 4 20

Register

- Logarithmische Linie.** Er: klärung, IV. 1716. Ei: genschaften, 1889. Qua: dratur, 1858. Subtan: gens, 1776. Nutzen, 1890. Körper, so daraus erzeu: get wird, 1883
- Logarithmus.** Erklärung, 269. Erfinder, 268. Ei: genschaften, 269. 270. 271. Ausrechnung, 272. & sqq. IV. 1891. wie dar: aus die Zahl zu finden, 1891. wie grosser Zah: len Logarithmi zu finden, I. 278. Differentialgrösse davon, IV. 1890
- Luchs,** III. 1192
- Lucifer,** III. 1267
- Luft.** Erklärung, II. 878. Eigenschaften, 882. 895. schwächet das Licht, III. 963. wie man sie zusam: men drucket, II. 894. 895
- Luft um den Mond,** III. 1257. 1258
- Luft:pumpe,** II. 879
- M.**
- Maaß der Linien,** 119
- Maaß des Winkels,** 122. 157
- des sphärischen Win: kels,** 1084
- Maaß:Staab,** die Ord: nungen zu zeichnen, 281
- Macedonisches Jahr,** III. 1490
- Machine.** Erklärung, II. 747. wie sie auf allerhand Art zu bewegen, 824
- Magabit,** III. 1486
- Mahlerkunst,** ihr Grund, III. 977
- Majazia,** III. 1486
- Majus,** III. 1484
- Marchesvan,** III. 1491
- Mars,** III. 1141. wie er durch Fern: Gläser observiret wird, 1268. seine Streif: sen, 1268. Bewegung um die Aere, 1269. Aehnlich: keit mit dem Mond, 1277. eigene Bewegung, 1284
- Martius,** III. 1484
- Mascaam,** III. 1486
- Materie,** IV. 1914
- Mathematick,** ihr Nutzen, 30. 31
- Mathematische Lehrart.** Erklärung, 5. wie weit sie sich erstrecket, 30. ihr Nutzen, 30
- Maure.** Erklärung, 418. Beschaffenheit, 431. 432. Bau und verschiedene Ur: ten, 433. 434. 455. 456
- Maximen zu erfinden,** wo sie anzutreffen, 37. 38
- May,** III. 1484
- Mechanick,** II. 745
- Mechanisch philosophi: ren,** II. 748
- Mecher,** III. 1485
- Media & extrema ratione secare,**

über alle vier Theile.

<i>secare</i> , IV. 1655. 1656	<i>Mezaninen</i> , 438
<i>Meere in Mond</i> , III. 1255	<i>Milchstrasse</i> , III. 1192.
<i>Meersand</i> , wie er im Bauen zu gebrauchen, 329	1193
<i>Meher mah</i> , III. 1487	<i>Micrometrum</i> , III. 1260.
<i>Mehr</i> , IV. 1554	1261. 1262
<i>Menschen im Mond</i> , III. 1260	<i>Minen</i> . Erklärung, II. 585
<i>in Planeten</i> , III. 1279	Beschaffenheit, 586. 587
<i>Mensis anomalisticus</i> , III. 1354	wie sie anzulegen, 590
<i>Draconticus</i> , III. 1353	<i>Minute</i> , 117. III. 1471
<i>Mercurius</i> , III. 1141. wie er durch Ferngläser observi- ret wird, 1263. 1264. Be- wegung um die Sonne, 1266. 1285. Parallaxis, 1281. Aehnlichkeit mit dem Mond, 1277. 1278	<i>Mira</i> , III. 1388
<i>Mercurius in Sole</i> , III. 1264	<i>Mittag</i> , III. 1133. 1138
<i>Meridianus</i> . Erklärung, III. 1130. 1145. 1434. wie der Unterscheid der Meri- dianorum zu finden, 1249	<i>Mittags-Circul</i> , III. 1434
<i>Merg</i> , III. 1484	<i>Mittagsst: Höhe</i> . Erklä- rung, III. 1146. wie sie zu messen, 1148. und auszurechnen, 1158. Nu- gen, 1157
<i>Mesori</i> , III. 1485	<i>Mittags: Linie</i> . Erklä- rung, III. 1132. wie sie zu finden, 1134
<i>Messen</i> , II. 877	<i>Mittags: Uhren</i> . Erklä- rung, III. 1527. Zeich- nung, 1533
<i>Messkette</i> , 136	<i>Mittelpunct des Circuls</i> . Erklärung, 121. wie er zu finden, 165. 224
<i>Messschnure</i> , 136	<i>der Hyperbel</i> , IV. 1699
<i>Messschlein</i> , sein Ge- brauch, 201	<i>der Grösse</i> , II. 576. 762
<i>Metal</i> , woraus es gemacht wird, II. 534. Verhältniß der Schwere, II. 862	<i>der Schwere</i> . Er- klärung, II. 754. wie er zu finden, 756
<i>Methodus de maximis & minimis</i> , IV. 1828	<i>Mitternacht</i> , III. 1133
<i>tangantium inversa</i> , IV. 1885	<i>Mitternachts: Uhr</i> . Er- klärung, III. 1527. Zeich- nung, 1533
	<i>H h h h h s Mitt:</i>

Register

- Mittlere Anomalie.** Er-
 klärung, III. 1313. ihr
 Maas, 1313. wie sie zu
 finden, 1320
 : : Bewegung, III. 1313
 : : Theil eines sphärischen
 Triangels, III. 1087
Mittlere Zeit, III. 1417
Modul. Erklärung, 359.
 Eintheilung, 359. wie
 er zu finden, 363. für die
 oberen Säulen zu verjün-
 gen, 415. 416
Mörser. Erklärung, II. 564
 Materie, 564. Theile,
 564. Zeichnung, 566.
 Richtung, 572. Ladung,
 572. wie weit er trägt,
 574
Mörser zu Granaten, II. 575
Mörtel, wie er zubereitet
 wird, 430
Mohren-Jahr, III. 1486
Monatliche Equation, III.
 1361
 : : Breite, III. 1369
 : : Eccentricität, III. 1357
 : : Epacten, III. 1500
Monatliches Argument
 der Breite, III. 1367
 : : : der Länge, III.
 1358. 1359
Monatliche Scrupel der
 Länge, III. 1358. 1359
Mond, wie er durch Fern-
 gläser erscheint, III. 1252
 Natur und Beschaffen-
 heit, 1254. 1255. Aehn-
 lichkeit mit der Erde, III.
 1259. Bewegung um die
 Erde, 1349. 1286. Be-
 wegung seiner Knoten,
 1353. wie seine Berge zu
 messen, 1383. Charte
 darüber, 1384. seine
 Grösse, 1378. und Wei-
 te von der Erde, 1370
Mond-Charthen, III. 1384
Mond-Circul, III. 1499.
 Grösse, 1498
Monden-Jahr, III. 1481
Monden-Monat, III. 1480
Mond-Epacten, III. 1500
Mond-Finsterniß. Erklä-
 rung, III. 1248. Ursa-
 chen, 1247. 1248. Um-
 stände, 1247. 1248.
 1249. 1396. Ausrech-
 nung, 1397. wie sie zu
 observiren, 1407
Mordad mah, III. 1487
Morgen, III. 1133. wie diese
 Gegend zu finden, 1138
Morgenröthe, wie lange sie
 währet, 1216
Morgen-Stern, III. 1267
Morgen-Uhren, III. 1527
 Zeichnung, 1535
Motus latitudinis, III. 1354
 - - librationis, III. 1269
 - - reflexionis, III. 1301
Muhammedisches Jahr,
 III. 1490
Muharam, III. 1491
Mul-

über alle vier Theile.

- Muldengewölbe,** 472
Multiplication. Erklä-
 rung, 42. Regeln für
 ganze Zahlen, 59. für
 Brüche, 80. für Buch-
 staben, IV. 1560. für
 Irrational-Zahlen, IV.
 1570. Zeichen, 1554
Mundstücke, II. 542. 543
Muschellinie, IV. 1713
Musteraka, IV. 1488
N.
Nabe, II. 551
Nabonassar'sches
Jahr, III. 1485. wie sein
 Anfang zu finden, III.
 1486
Nacht, III. 1469
Nachtslänge, wie sie zu fin-
 den, III. 1169
Nadir, III. 1130
Nahase, III. 1486
Nahesäulig, 395
Nahme der Verhältniß, 73
Nahmen der Zahlen, 47
Natürlicher Tag, III. 1469
Nebelichte Sterne, III.
 1193
Nebengegenden, III. 1454
Nebensweiler, 402
Nebenstriche, II. 616
Nebenwinkel, 133. III.
 1086
Neigungswinkel, III. 953
Nenner eines Bruches, 77
Nessförmiges Heutlein,
 III. 954
Neu Mond, III. 1246
Niedrige Ordnungen, 362
Nisan, III. 1491. 1492
Nodi. Erklärung, III. 1337.
 Bewegung, 1340. Ort,
 1339. wie sie zu observi-
 ren, 1339
Nodus ascendens, III. 1338
 - - australis, ibid.
 - - borealis, ibid.
 - - descendens, ibid.
Nonæ, III. 1484. 1485
Norden, III. 1454
Nordische Krone, III. 1190
Nord:Pol, III. 1128. 1433
Normal-Linie, IV. 1809
November, III. 1484
Numerus polygonus, IV.
 1623
O.
Oberbaum, 344
Oberschlächtiges Wasser-
rad. Erklärung, 800.
 wie es zu theilen, 816.
 wie das Wasser darauf zu
 leiten, 813. wo es zu ge-
 brauchen, 812
Objectiv Glas, III. 1033
Obliquitas ecliptica, III. 1155
Oblongum, 124
Occasus acronyctus, III. 1207
 - - cosmicus, III. 1207
 - - heliacus, III. 1209
Ochsen-Auge, III. 955
Octædram, 252
Octante, III. 1117
Offo.

Register

- October,** III. 1484
Oefen, wie sie zu verbessern,
 488. wie mit einem zwey
 Zimmer zu heitzen, 489
Ohren-Gewölbe, 472
Olympias, III. 1508
Ophiuchus, III. 1190
Optick. Erklärung, III. 949
 Nutzen, III. 946
Opus rusticum, 456
Opposition, III. 1394
Ordentliche Figur, 125
Ordentlicher Körper, 128
Ordinate, IV. 1678. ihre
 Verhältniß in der Para-
 bel, 1686. und Ellipsi,
 1694
Ordnung. Erklärung, 338.
 Ursprung, 337. 355.
 Theile, 350. 351. Zahl,
 356. wie von ihnen zu ur-
 theilen, 338. 339. wie sie
 zu erfinden, 354. und zu
 zeichnen, 384. 385
Orillon, II. 622
Orion, III. 1190
Ort an dem Circul. Erklä-
 rung, IV. 1756. wie er
 zu construiren, 1765
 " " an der Ellipsi. Erklä-
 rung, IV. 1756. wie er zu
 construiren, 1762
 " " an einer geraden Li-
 nie. Erklärung, IV.
 1756. wie er zu construi-
 ren, 1756
Ort an der Hyperbel. Er-
 klärung, IV. 1756. wie
 er zu construiren, 1765
Ort zwischen den Asym-
 ptoten, IV. 1767
 " " an einer Parabel. Er-
 klärung, IV. 1756. wie
 er zu construiren, 1757
 " " der Sonne, wie er zu
 observiren, III. 1158
 " " des Bildes im Spiegel,
 III. 1005. 1011. IV. 1922
Ort, wo jede Sache gesehen
 wird, III. 993
Ortus acronyctus, III. 1207
 - - cosmicus, ibid.
 - - heliacus, III. 1209
Ost, III. 1454
Oster Fest, wenn es zu fey-
 ren, III. 1510. wie es aus-
 zurechnen, III. 1511
Ouvrage a Cornes, II. 635
 - - couronné, II. 635

p.

Pachon, III. 1485
Pagans Fortification.
 Maximen, II. 658. Rech-
 nung der Winkel und Li-
 nien, 659. Zeichnung, 660
Pagomen, III. 1486
Palitium, III. 1191
Pallisaden, II. 638
Pansterzeug, II. 817
Paopbi, III. 1485
Parabola. Erklärung, IV.
 1681. 1682. Eigenschaft,
 Beschreibung, 1683.
 1689.

über alle vier Theile.

1689. 1757. 1886. 1912. Quadratur, 1844. Rectification, 1865. Subtangens, 1810. wie sie aus dem Regel geschnitten wird, 1710
- Parabeln** von höherem Geschlechte. Erklärung, IV. 1679. Beschreibung, 1684. 1685. Eigenschaften, 1689. Subtangens, 1808. Quadratur, 1845. Rectification, 1868
- Parabolischer Asterkegel**, IV. 1862. 1880
- Parallaxis**. Erklärung, 1224. Eigenschaften, 1224. 1225. 1226
- Parallaxis der Erd. Bahn**. Erklärung, III. 1344. wie sie zu finden, 1345
- **der Fixsterne**, III. 1302. 1303
- **Martis**, III. 1373
- **Mercurii**, III. 1235
- **der Sonne**, III. 1373
- Parallel-Circul**, III. 1373
- Parallelepipedum**. Erklärung, 127. Eigenschaften. 127. 227. 229. 244. IV. 1836. 1837. Ausrechnung, 229. 230. Messe, 254
- Parallel Linien**. Erklärung, 125. Beschreibung, 147. Absteckung auf dem Felde, 153. Eigenschaften, 151. 152. 155
- Parallel-Lineal**, Structur und Gebrauch, 147. 148
- Parallelogramma**. Erklärung, 126. Eigenschaften, 176. 189. 190. Theilung, 190. 222
- Parameter**, IV. 1682. 1690. 1698
- Partial-Finsterniß**. Erklärung, III. 1482. wie ihre Grösse zu finden, 1402
- Particula exfors**, III. 1360. 1361
- Paternoster-Werck**, II. 913
- Pauni**, III. 1485
- Pegasus**, III. 1190
- Pentagonal-Zahl**, IV. 1623
- Perigæum**, III. 1312
- Perihelium**, ibid.
- Periodischer Monat**, III. 1350
- Periodus Juliana**, III. 1504
- Perpendicul an Uhr-Wercken**, II. 837. 838
- Perpendicular Linie**. Erklärung, 123. Beschreibung, 148. 149. 159
- Perseer-Jahr**, III. 1487
- Perseus**, III. 1190
- Perspectiv**, III. 1065
- Perspectivische Risse**, 510
- Petarde**, II. 582. 583
- Petrus**, III. 1191
- pfähle**, wie sie zum Grundbaue beschaffen seyn sollen, 422. 423. was bey dem Einrammen in acht zu

Register

- zu nehmen, 423
Pfan, III. 1190
Pfeil, ibid.
Pfeiler, 334. wie sie ins
 Perspectiv zu bringen,
 III. 1070
Pflaster, was für Figuren
 der Steine sich dazu schi-
 cken, 462
Pflaster: Ziegel, 462
Pfuhl, 344
Phamenoth, III. 1485
Pharmuthi, ibid.
Phoenix, III. 1190
Phosphorus, III. 1267
Pilaster, 334
Pisces, III. 1143
Places d'armes, II. 681
Plaga, III. 1454
Planete: Erklärung, III.
 1143. Bewegung durch
 den Thier-Kreis, 1285.
 1286. 1328. wie die Ec-
 centricität nebst dem A-
 phelio gefunden wird,
 1332. wie ihre Grösse zu
 finden, 1379. Inwohner,
 1279. ihre Natur, 1277.
 1278. Verdeckungen un-
 ter einander, 1280. schein-
 bare Diameter, 1280.
 1282. Weite von der Son-
 ne, 1321. und von der Er-
 de, 1376. 1345. 1281.
 warum sie stille stehen und
 zurücke gehen, 1298. 1299
Planeten: Stunden, III.
 1472
platten. Erklärung, 343
 Grösse, 359
platter Spiegel. Erklä-
rung, III. 989. wie er
 zu machen, 990. 991. Ei-
 genschaften, IV. 1923
plättlein. Erklärung, 343.
 Grösse, 359
Plejades, III. 1191
plumpe, II. 917. 918. 919
plumpstock, II. 918
Polarcircul, III. 1145
Polaruhren. Erklärung, III.
 1527. Zeichnung, 1536
pol der Äugel, III. 1085
Pole der Ecliptick, III.
 1155
polhöhe, wie sie zu finden,
 III. 1149. 1154. 1158
Pollux, III. 1191
Polus antarcticus, III. 1128
 - - arcticus, ibid.
Polygonalzähl. Erklärung,
 IV. 1623. wie sie zu fin-
 den, 1625
Polygone, 125
Polygonwinkel, 165
Polyhedrische Gläser, III.
 1058
Polynomische Wurzel,
 IV. 1586
Polyoptische Gläser, III.
 1058
Postement. Erklärung, 339.
 Beschaffenheit, 353. 405.
 Höhe, 360. Eintheilung,
 363. Gebrauch, 340. 341
 Poste-

über alle vier Theile.

- Postement: Gesemse.** Erklär. 341. wesentliche Glieder, 351. andere Glieder, 351. 352. Höhe, 360
Auslaufung, 361
Postulata, 17
Potagen-Heerd, wie er zu bauen, 492
Potenz. Erklärung, IV. 1562. Grade, 1563. Zeichen, 1563. Bezeichnung, 1563. 1564
Prasepe, III. 1191
Prisma. Erklärung, 126. Eigenschaft, 126. 227. 228. 244. Ausrechnung, 230. Neze, 255
Profil, II. 656. Zeichnung, 656. 657. wie sein superficial: Inhalt zu finden, 707. wie der körperliche zu finden, 711
Progressio arithmetica, 74. Eigenschaften, IV. 1613
 - - **geometrica,** 74. IV. 1613
Proportio continua. Erklärung, 74. Eigenschaften, 94. 95. IV. 1631
Proportion. Erklärung, 73. Zeichen, 72. Eigenschaften, 94. 95. 96. 97. III. 1010. 1111. IV. 1630. 1633
Proportionallinien, wie sie zu finden, 197. IV. 1774
Proportionalzahlen, 96. 98
- Prosthaphæresis,** III. 1315
Pulldach, 500
Pulver, wie es gemacht wird, II. 525. 526. Ursachen der Wirkung, 526. Säge, 526. womit es anzuseuchten, 525. 527. wie es reißend wird, 527. wie man es probiret, 529. 530. 531. wozu es Anlaß gegeben, 518
Pulvermahlen, II. 527
Pulversäge, II. 526
Punct. Erklärung, 117. warum er untheilbar, 117. 118. 121
Puncta flexus contrarii, IV. 1901
Pupilla, III. 954. 960
Puschelkunst, 913
Pycnostylan, 395
Pyramide. Erklärung, 28. Eigenschaft, 128. 232. 233. 234. 244. Ausrechnung, 236. Neze, 255
Pyrobologia, II. 517
Pyrotechnia, ibid.
- Q.
- Quadrat.** Erklärung, 124. Beschreibung, 170. 189. Eigenschaften, 172. Ausmessung, 174. 175. wie es ins Perspectiv zu bringen, III. 1067. 1068
Quadratische Gleichung, Erklärung, IV. 1588. wie

Register

- wie sie aufzulösen, 1588.
 Exempel, 1590. 1591
 Quadrat-Linie, 174
 Quadrat-Maß, 174. 175
 Quadratrix, IV. 1716
 Quadrat Ruthe, 174
 Quadrat Schuhe, ibid.
 Quadratur des Circuls,
 IV. 1853
 : : der krummen Linien,
 IV. 1844
 Quadratus, III. 1394
 Quadrat-Wurzel. Erklä-
 rung, 82. wie sie gesun-
 den wird, 85. IV. 1587.
 ihr Logarithmus, 270
 Quadrat-Zahl. Erklärung,
 83. IV. 1623. wie sie ent-
 steht, 84. 85. IV. 1586.
 1587. 1588. Eigenschaf-
 ten, 1745. ihr Logarith-
 mus. 270. ihre Diffe-
 rentien, IV. 1605
 Quadrat Zoll, 175
 Quartier-Feld: Schlange,
 II. 533. 553, 562
 R.
 Rabe, III. 1190
 Rabia, III. 1401
 Rad an einer Aye, II. 749
 Radelinie, IV. 1717
 Radius des Circuls, 121.
 129. 262
 : : der Evolute, IV. 1909
 Räder der Lauffetten, wie sie
 zu zeichnen, 551
 : : in der Mechanick, wie
 sie zu berechnen, II. 781
 Räderwerck ohne Kam-
 men, II. 790
 Rajob, III. 1491
 Ramadan, ibid.
 Rarsäulig, 395
 Rasen, II. 717
 Ravelin. Erklärung, II.
 632. Nutzen, 632. Zeich-
 nung, 653. 662. 679
 Raute, 124
 Rechen-Kunst. Erklärung,
 37. wie sie abzuhandeln, 37
 Rechnungsarten, ihr Ur-
 sprung, 40. 41. ihre An-
 zahl, 41. Rahmen und
 Erklärungen, 41
 Rechter Winkel, 123. 158
 Rechtwinkllicher Trian-
 gel. Erklärung, 123. Ei-
 genschaften, 150. 187. IV.
 1661. 1663. 1669. 1785.
 1795. wie sein Inhalt zu
 finden, IV. 1656
 Rectangulum. Erklärung,
 124. Beschreibung, 171.
 Eigenschaft, 172. Aus-
 rechnung, 175
 Rectification der krum-
 men Linien, IV. 1865
 Regel, III. 1191
 Degel Detri, 99
 Redoute. Erklärung, II.
 702. Grundriß, 703.
 Profil, 704
 Reduction zur Eclipsid,
 III. 1339. 1342
 Reflexion. Erklärung, III.
 951

über alle vier Theile.

951. Geseze, 951. 952. IV. 1920
Reflexionswinkel, III. 951
Refraction. Erklärung, III. 952. Geseze, IV. 1927. wie ihre Grösse zu observiren, III. 1014. 1015
Refraction der Sonne, III. 1228. 1229. 1230
Refractions Winkel, III. 952
Refringirter Winkel, III. 953
Regel de quinque, 103. 104
Regiments Stücke, II. 513. 553. 562
Reguläre Festung, II. 687
Reguläre Figur. Erklärung, 125. Eigenschaften, 161. 162. 165. 181. Beschreibung, 168. 169. Ausrechnung, 180
Reguläre Körper. Erklärung, 128. Anzahl, 251. Nehe, 253
Reguläres Dreyeck. Wie seine Seite sich zum Diameter des umschriebenen Circuls verhält, IV. 1648
Reguläres Vieleck. Wie es zu beschreiben, 168. 169. Ob Renaldinus es richtig zu beschreiben angewiesen, IV. 1671
Regula composita, 103. 104 (Wolfs Mathes. Tom. IV.)
Regula societatis, 104. 105
Regulus, III. 1491
Reißbret, 382
Reißkohlen, II. 522
Reißchiene, 383. 384
Retrogradus, III. 1285
Rhombus. Erklärung, 124. Beschreibung, 171. Eigenschaften, 175. Ausrechnung, 177
Riemlein, 344
Rinnleisten, 344
Ring um den Mond in der Sonnen Finsterniß, III. 1243. 1244
Ring um den h, III. 1277
Röhre, II. 911
Röhren zu Fern Gläsern, III. 1042
Römer Zins. Zahl. Erklärung, III. 1503. wie sie zu finden, ibid.
Römische Ordnung, 358. 374
Römischer Calender, III. 1484
Rolle, 752
Romanische Treppe, 496
Ros Mühlen, II. 825. 826
Rost zum Grundbaue, 426. 427
Rückgängig, III. 1285
Ruhe Punct, II. 752
Ruhe Kiegel, II. 550
Ruthe. Erklärung, 119. Zeichen, 122
Saall.

Register

S.

- Saal.** Wie er beschaffen seyn soll, 461. 475. 476. 477
- Sächsishe Raute,** III. 1192
- Säule.** Erklärung, 333. 339. Wie sie zu proportioniren, 335. 336. Höhe, 360. wie sie zu verdünnen, 337. 390. wie eine über die andere zu stellen 414. ihr Rang, 414
- Säulen-Laube,** 393
- Säulenstellung,** ibid.
- Säulen-Stuhl,** 339
- Säulen: Weite.** Erklärung, 339. Grösse, 394. 395. 396. was dabey in acht zu nehmen, 395. 396. 397
- Salpeter.** Wie er zu läutern, II. 518. woher er kommet, 519. Eigenschafften, 223. 524. 525
- Sand.** Wie er beschaffen seyn soll, 328. Probe, 328. 329. Arten, 329
- Sappiren,** II. 735. 736
- Satellites Jovis,** II. 1270
- Saturnus,** III. 1141. seine Gestalten, die man durch das Fern-Glas observiret, 1275. 1276. Ähnlichkeit mit dem Mond, 1277. Bewegung um die Sonne, 1284
- Saturnus: Monden,** III. 1273. 1274
- Satz zu Feuer: Kugel-Zeng,** II. 576
- Schafft.** Erklärung, 341. Beschaffenheit, 348. 359. 361. wesentliche Glieder, 351. Höhe, 361
- Schafft: Gesimse.** Erklärung, 341. wesentliche Glieder, 351. andere Glieder, 352. Höhe, 360. Auslauffung, 361
- Schalt: Jahr,** III. 1481. 1482. 1483
- Schalt: Tag,** III. 1481. 1482
- Schantz: Körbe,** II. 719
- Scharivarmah,** III. 1487
- Schatten.** Erklärung, III. 949. Eigenschafften, 949. 965. 966. 967. wie seine Länge zu finden, 966. 967. 968. wie dadurch die Höhen zu messen, 967. seine Figur, 969. 970. 971. wie er perspectivisch zu zeichnen, 1074
- Schatten der Berge im Mond,** III. 1253. 1257
- Scheere.** Erklärung, II. 634. Zeichnung, II. 654
- Scheibe des Klobens,** II. 751
- Scheinbare Grösse.** Erklärung.

über alle vier Theile.

Flärung, III. 978. wie sie zu finden,	979	wie sie zu erkennen,	308
Scheinbare Horizontal Linie:	II. 755	Schönsäulig,	395
Scheinbahrer Diameter der Sterne,	III. 1280	Schöpff Rad,	II. 916
1281		Schöpff Werk,	II. 915
Scheinbahrer Horizont,	III. 1132	Schorstein,	502
Scheinbahre Zeit,	III. 1470	Schranken der Wurzeln in Gleichungen,	IV. 1733.
Scheitel,	IV. 1678	Schraube. Erklärung,	II. 752.
Schemmel: Mörser,	II. 566	ihre Vermögen,	794.
Schiefe Ascension. Erklärung,	III. 1161.	ihre Eintheilung,	794.
wie sie zu finden,	1161. 1162		795
Schiefe der Ecliptick,	III. 1155	Schraube: Mutter,	II. 752
Schiefe Descension,	III. 1161	Schraube ohne Ende,	II. 796
Schiefliegende Fläche,	II. 752. 791. 792. 848	Schrift. Wie sie anzulegen,	III. 1295
Schief: Scharren,	II. 718	Schüsseln zum Glasseisfen,	III. 1060. 1061
Schiff Jafons,	III. 1190	Schätze,	III. 1142. 1190
Schlange,	II. 533. 553. 562. III. 1190	Schüsse eines Stückes. Wie weit sie gehen,	II. 561
Schlangen: Mann,	III. 1190	Schube. Erklärung,	119.
Schluss: Stein. Wie er zu zeichnen,	409	Zeichen,	122
Schnellwage,	II. 769. 770	Schulter Winkel,	II. 618
Schnecke,	357. Zeichnung,	Schwan,	III. 1190
387		Schwanz: Riegel,	II. 550
Schönheit. Erklärung,	307	Schwartz Haut,	III. 954
		Schweere. Erklärung,	II. 755.
		ist unter dem Aequatore kleiner als gegen die Pole,	III. 1301. 1302
		Schweere der Körper in flüssiger	

Register

- flüssiger Materie, II. 851.
865
der Luft, III. 883. 886.
der Metalle und ande-
rer Körper, II. 862
Schwefel. Wie er zu län-
tern, II. 520. 521. wel-
cher zum Pulver am be-
sten, 520. wozu er die-
net, 521. Eigenschafft
ten, 523. 524. 525
Schweiß der Cometen.
Was er sey, III. 1392
Schwung: Räder, II. 837.
838
Sclerotica, III. 954
Scorpion, III. 1142. 1190
Scorpius, III. 1143
Scrupel der Breite, III.
1367. 1368. 1369
der Währe, III. 1421
1422
der Verfinsterung, III.
1401. 1402. 1420
Secans. Erklärung, 262.
Ausrechnung, 268. Lo-
garithmus. 280
Sechsecke. Erklärung,
125. Eigenschafft, 170.
Beschreibung, 170
Secondflanc, II. 616
Sectio divina, IV. 1655
Sector. Eigenschafft, 182.
Ausrechnung, 187
Secunde. 122. III. 1471
Wie sie in Trigonometri-
schen Rechnungen zu fin-
den, I. 284
Secundirende Linie, II.
602
Seele eines Stückes, II.
542. 544. 549
Sehne, 121
im Circul, 161
in der Parabel, IV.
1687
Seite der polygonal-
Zahl, Erklär. IV. 1624.
wie sie zu finden, 1627
Semidiameter, 121
Semiordinate, IV. 1678
Senkrechte Linie, 123
September, III. 1484
Serpentinel, II. 533. 553.
562
Serger, II. 555
Serg: Kolben, ibid.
Sextilis, III. 1394
Schaaban, III. 1491
Schabat, III. 1489
Schavvall, III. 1491
Schebat, ibid.
Sicherpfahl, II. 823
Sichtbare Bewegung
des D von der O, III.
1414. 1415
Breite des C, III. 1417
Finsterniß, III. 1242
Länge des D, III. 1410
Sichtbare Zusammen-
kunft, 1416
Sidera Medicea, III. 1270
Vrbanoctaviana, III. 1274/
Sie-

über alle vier Theile.

- Siebengeſtern**, III. 1191
Siegel-Wachs. Wie es zu machen, III. 1063
Sinus. Erklärung, 261. Eigenschaften, 261. 262. 280. Ausrechnung, 264. Gebrauch, 281. IV. 1875. wie besonders der von 18°, IV. 1655. der von 22° 30', 1650. der von 60°, 1649. und eines vielfachen Bogens zu finden, 1664. wie ihre Logarithmi zu suchen, I. 276. wie aus ihnen die Bogen zu finden, IV. 1873
Sinus artificialis, III. 1100
complementi, 262. 264.
totus, 262
versus, 262, IV. 1875
Sivan, III. 1491
Solstitium. Wie es zu observiren, III. 1305
Sommer, III. 1444
Sonne. Ihre Flecken, III. 1233. Natur, 1234. Figur, 1236. Bewegung um die Aere, 1236. Bewegung durch den Thier-Kreis, 1139. 1140. 1308. ob sie sich um die Erde bewege, 1293. 1295. ihre Eccentricität, 1312. wie sie die Fläche bescheinet, 1524. 1525. ihre Weite von der Erde, 1376. ihre Größe, 1379. 1381
Sonnen-Circul. Erklärung, III. 1495. Größe, 1496. wie er zu finden, 1497
Sonnen-Finsterniß. Erklärung, III. 1242. Umstände und Beschaffenheit, 1239. 1243. 1244. 1245. Ursache, 1241. 1242. 1257. wo sie gesehen wird, 1409. wenn sie sich ereignet, 1410. wie sie ausgerechnet, 1410. und observiret wird, 1425
Sonnen-Jahr, III. 1480. wie seine Größe zu finden, 1308
Sonnen-Monath, III. 1479
Sonnen-Stunden, III. 1164
Sonnen-Uhr, III. 1523
Sonntage. Auf welche Tage im Jahre sie fallen, III. 1498
Sonntags-Buchstaben. Erklärung, III. 1479. wie er zu finden, 1497
Sopha, III. 1491
Sphæra obliqua, III. 1450
parallela, III. 1448
recta, III. 1447
Sphærica, III. 1125
Sphæ

Register

Sphärische Spiegel, III.	Spring : Brunnen, der
990	unterweilen aufhöret, II.
Sphärischer Triangel.	932
Erklärung, III. 1083. Ei-	Stab. Erklärung, 343.
genschafften, 1087. 1089.	Zeichnung, 344. Grösse,
1090	359
Sphärische Trigonome-	Stäblein, 343
trie, III. 1083	Staberzeug, II. 817
Sphärischer Winkel, III.	Stadt Thor, 451
1084	Stärke der Linie, II. 602
Spica virginis, III. 1191	Stamm, 341
Spiegel. Erklärung, III.	Stampffer, II. 555
989. Eigenschafften, IV.	Stangen-Direktel, 121
1921.	Stationarius, III. 1285
Spiegel Gewölbe, 472	Stechheber, III. 929
Spiel-Raum. Erklärung,	Stehende Mörser, II.
II. 535. wie er zu finden,	565
536. sein Nutzen, 536	Steine. Wie ihre Güte
Spindel, II. 752	zu erforschen, 322. wenn
Spiral Linie. Erklärung,	sie sollen gebrochen wer-
IV. 1718. Subtangens,	den, 323. wie man sie
1760. Quadratur, 1859	ölträncket, 467. wie sie
Spiral : Linien von un-	im Grundbaue zu legen,
endlichen Geschlech-	427
ten. Erklärung, IV.	Steinbock, III. 1142. 1190
1718. Subtangens, 1821.	Stein : Carthaunen, II.
1822 Quadratur, 1860.	582
1861	Stein : Galle, 323
Spitziger Winkel, 123.	Steinhauen. Wie es be-
158	schaffen, 472
Spitzwinklichter Trian-	Stein : Klippen im Mond,
gel, 123	III. 1256
Springbrunnen durch den	Stein : Stücke, II. 582
Fall, II. 924. durch He-	Stell Riegel, II. 550
ber, 930. durch die Wär-	Stengel, 354
me, 939. durch die Luft,	Stern. Wie lange er über
936	dem Horizont bleibt, III.
	1198.

über alle vier Theile.

1198. wenn er in Meri-	Stoß: Panster, II. 819
dianum kommet, 1199.	Stoß im Mörser, II. 564
1202. wie er darinnen	Straub: Zeug, II. 817
zu observiren, 1151. wenn	Streiche, II. 615
er auf: und untergehet,	Streichende Defens: Li-
1200. mit welchem Pun-	nie, II. 616
cte der Ecliptick er aufge-	Streich: Winkel, II. 618
het, 1203. 1204. 1206.	Streiffen, 344
wenn er mit der Sonnen	Stuben. Wie sie beschaffen
untergehet, 1207. wenn	seyn sollen, 461. 475. 476
er sich unter die Sonnen-	Stücke. Erklärung, II.
Strahlen verbiраet und	532. Arten, 532. Ma-
wieder herausrücket, 1210.	terie, 534. Theile, 542.
welche niemahls auf: und	543. Beschaffenheit,
die niemahls unterge-	542. Ladung, 553. Rich-
hen, 1212. 1213. ihre	tung, 559. 560. Länge,
scheinbare Grösse, 1194.	544. 545. Zeichnung, 546
ihre Anzahl, 1189. 1193.	Stückgießen, II. 534
Weite von der Erde und	Stück: pulver, II. 526
Natur, 1387. beson-	Stüge. Erklärung, 333.
dere Namen derselben,	Gebrauch, 335. Beschaf-
1190	senheit, 336. 337
Stern im Auge, III. 954	Stumpffer Winkel, 123.
Stern: Rad, II. 751	159
Sternschanze. Erklärung,	Stumpff: windlicher
II. 702. Grund: Riß,	Triangel, 123
705	Stunde. Erklärung, III.
Stiefel im Druckwercke,	1471. Arten, ibid. wie
II. 920	sie mit einander zu ver-
Stußstand eines schweren	gleichen, 1473
Cörpers, II. 755. 756.	Stunde der ersten Bewe-
758. 760	gung, III. 1164
der Planeten, III. 1284	Stufen auf der Treppe.
Stier, III. 1142. 1190	wie sie seyn sollen, 594.
Stinckende Kugeln, II.	495
577	Sturz: Rinne, 344
Stirn: Rad, II. 751. 785	Subnormal: Linie. Er-
	klär: 344

Register

flärung, IV. 1809. wie
 sie zu finden, 1816
Subtangens. Erklärung, IV.
 1808. wie sie zu finden,
 1809
Subtrahiren. Erklärung,
 42. Regeln für ganze
 Zahlen, 42. für gebro-
 chene, 79. für Buchsta-
 ben, IV. 1556 1557. für
 Irrationalzahlen, 1568.
 Zeichen, 1. 57. IV. 1553
Süden, III. 1454
Süder: Pol, III. 1129.
 1433
Südische Krone, III. 1190
Summe, 41
Summiren, IV. 1840
Summirende Zahlen, 41
Syllogismus. Nutzen in der
 Mathematick, 27
Symmetrie, 313
Syne, III. 1486
Synodischer Monath, III.
 1489
*Systema mundi Copernica-
 num*, III. 1302
Tychonicum, III. 1288.
 1291
Systylon, 395

T.

*T**abulae equationum*, III.
 1323
curtationum, III. 1343
inclinationum, III. 1342

*latitudinum & longitu-
 dinum*, III. 1188. 1189
motus latitudinis, III.
 1354
motuum mediorum, III.
 1310
sinuum & tangentium,
 263
Tag. Erklärung, III. 1469.
 Wenn er die ganze Nacht
 durchschimmert, 1213.
 1214. Wie er ab- und zu-
 nimmet, 1445. wie lang
 er währet, III. 1166
Tage: Circul, III. 1133
Tages: Anbruch. Erklä-
 rung, III. 1211. Ursa-
 che, 1212. wie er auß-
 zurechnen, 1213. 1214.
Talud, II. 609
Tamuz, III. 1489. 1491
Tangens. Erklärung, 262.
 Ausrechnung, 267. Ge-
 brauch, 285. 286. 287.
Logarithmus. 279. Ei-
 genschaften, 285. Wie
 daraus der Bogen zu fin-
 den, IV. 1870
*Tangens des vielfachen
 Winkels*. Wie er zu
 finden, IV. 1667
der Krummen Linien.
 Erklärung, IV. 1808.
 Wie er zu finden, 1809
Taufe der Feuer: Kugeln,
 II. 579
Taurus, III. 1143
Tebeth,

über alle vier Theile.

<i>Tebeth,</i>	III. 1492	<i>Toricellianische Röhre,</i>	II. 890
<i>Tekuphæ,</i>	III. 1493	<i>Toucan,</i>	III. 1190
<i>Tenaille simple,</i>	II. 634	<i>Total : Finsterniß,</i>	III. 1402
<i>double,</i>	II. 634	<i>Transcendentische Linie,</i>	IV. 1679
<i>Terreplain,</i>	II. 609	<i>Transporteur,</i>	123
<i>Tetraëdram. Erklärung,</i>	252. Neße, 253	<i>Trapezium. Erklärung,</i>	125.
<i>Theilung der geraden Li-</i>		<i>Wie es zu theilen,</i>	191
<i>nie,</i>	198	<i>Traversen. Erklärung,</i>	II. 638. Nutzen, 638. Zeich-
<i>Theorema,</i>	21	<i>nung,</i>	682
<i>Theorema Pythagoricum,</i>	187. 188	<i>Trenchéen,</i>	II. 726
<i>Theorica,</i>	III. 1125	<i>Treppe. Erklärung,</i>	493.
<i>Thermometra concordantia,</i>	II. 901	<i>Beschaffenheit,</i>	493. 494.
<i>Thermometrum,</i>	II. 896	<i>495. Zeichnung,</i>	496
<i>Thermoscopium,</i>	ibid.	<i>Triangel. Erklärung,</i>	123.
<i>Thefis,</i>	22	<i>Eigenschaften,</i>	138.
<i>Thier-Kreiß,</i>	III. 1144	<i>150. 153. 155. 156. 177.</i>	
<i>Thor an einer Festung,</i>	II. 720	<i>187. 195. 496. 198. III.</i>	
<i>Thoth,</i>	III. 1485	<i>1089. IV. 1667. Be-</i>	
<i>Thüre. Erklärung,</i>	450.	<i>schreibung, I. 140. 141.</i>	
<i>Breite und Höhe. ibid.</i>		<i>Ausrechnung, 178. IV.</i>	
<i>Figur, 451. Wie sie ins</i>		<i>1661. Theilung, I. 223.</i>	
<i>Perspectiv zu bringen,</i>	1071	<i>wie er ins Perspectiv zu</i>	
<i>Thüre, die sprizet, wenn</i>		<i>bringen, III. 1066. 1067</i>	
<i>man durchgehet, II. 925</i>		<i>Triangel. Der südliche, III.</i>	
<i>Thür-Schwellen, 452</i>		<i>1190. der nordische, 190</i>	
<i>Tiefe der Sonne, wenn</i>		<i>Triangular Zahl, IV. 1623</i>	
<i>der Tag anbricht, III.</i>		<i>Triangulum æquatorium,</i>	
<i>1211. wie sie zu finden,</i>	1217	<i>III. 1315</i>	
<i>Tisbrin, III. 1489. 1491</i>		<i>æquilaterum,</i>	124
<i>Todte Krafft, III. 746</i>		<i>æquicrurum,</i>	ibid.
<i>Tonnen-Gewölbe, 471</i>		<i>Scalenum,</i>	ibid.
		<i>Triglyphen,</i>	386
		<i>Trigonometrie. Erklär.</i>	
		<i>IIIIII 5</i>	261.

Register

261. Nutzen, 259. 260
Trigonus, III. 1394
Trillings : Stöcken, II.
 787
Trinomische Wurzel IV.
 1586
Trompeter Gängelein, 449
Tropicus cancri, III. 1144
capricorni, III. 1434
Trilling, 751. 789
Tünchen, 455. 456
Tuscanische Ordnung. Er-
 flärung. 357. Glieder,
 365
Tybi, III. 1485
Tykymt, III. 1486
Tyr, III. 1486
Tysbas, III. 1486

V. U.

Variation, III. 1365. 1366
Vaubanische Fortifi-
cation Marimon, II. 673.
 Ausrechnung der Linien,
 674. Grund-Riß, 676.
 Profil, 680. Werth, 689
Verstärckte Manier,
Marimon, 683
Grund-Riß, 684
Werth, 686
Veadar, III. 1491
Überschlag, 344
Vectis homodromus, II. 775
heterodromus, ibid.
Ventil. II. 918
Venus, III. 1141. ihre

Abschiffheit mit dem
 Mond, 1277. Flecken,
 1268. Berge, 1267. Be-
 wegung um die Aere, III.
 1269, um die Sonne,
 1265. 1284
Venus in Sole, III. 1264
Veränderliche Grösse. Er-
 flärung, IV. 1801. Zei-
 chen, 1802
Verbürstete Circul, 471
Verdeckter Weg, II. 637
Verdruckte Circul, 471
Verdünnung der Säulen,
 337
Vergrößerungs : Gläser,
 III. 1029. 1030. 1052.
 wie viel sie vergrößern,
 1050. 1051
Verhältniß, 73. ihre Ver-
 änderungen, IV. 1633.
 1634. welche in der Bau-
 Kunst zu gebrauchen, I.
 310. 311
Verhältniß der Irratio-
nal Grössen, IV. 1568
Verjüngter Maass : Stab,
 136. 200. 201
Verkleinerungs : Gläser,
 III. 1030. 1031
Verkehrte Regel Detri,
 102
Verkehrter Karnies, 346
Vertical Circul, III. 1145
Vertical-Uhren, III. 1527
Vertical : Winkel, 133.
 III. 1086
 Viel

über alle vier Theile.

Vielecke,	125	Sachen werden,	III. 957
Vieleckichtes Glas,	III. 1057	Unsichtbare Finsterniß,	III. 1242
Viertel des Monds,	III. 1246	Untersaum,	344
Viertel - Feld - Schlange,	II. 533. 551. 562	Unterscheid,	42
Viertel - Feld - Stücke,	ibid.	Unterschlägtiges Wasser:	
Viertel Stab. Erklärung,	343. Zeichnung, 344.	Nad. Erklärung,	II. 801. wo es zu gebrauchen,
Größe,	359	812. wie das Wasser dar:	
Vindemiatrix,	III. 1191	auf zu leiten,	819
Virgo,	III. 1143	Unveränderliche Größe.	
Visir Schuß,	II. 563	Erklärung,	IV. 1801.
Visir Stab.	245. 246	Zeichen,	1802
Unbew. Feste,	1509. 1510	Unvollständiger Begriff,	8
Undeterminirte Aufgabe,	IV. 1743. Exempel da:	Voll Erde,	III. 1386
zu,	ibid.	Vollmond,	III. 1246
Undeutlicher Begriff. Er:		Vollkommenheit einer Fe:	
klärung, 7, wenn man mit		stung,	II. 597
ihm zufrieden seyn kan,	8	eines Gebäudes,	307
Unendlich Kleine Größe,	IV. 1799. 1800	Vollständiger Begriff,	7
Unförmige Sterne,	III. 1192	Vorgebürge im Mond,	III. 1255
Ungerade Zahlen. Ihre		Vorgemächer. Wie sie be:	
Eigenschaften,	IV. 1608.	schaffen seyn sollen,	461
	1609. 1610	Vorstechung,	340
Ungleichseitiger Triangel,	124		
Unordentliche Figur,	125		
Unordentliche Körper,	128		
Unter Balken,	312		
Untergang der Sterne,	III. 1133. 1200		
der Sonne,	III. 1180		
Unsichtbar. Warum einige			

W.

Wende. Wie sie ins
 Perspectiv zu bring:
 gen, III. 1070
 Wärme. Wie sie bald ins
 Zimmer dringet, 488
 Wässerige Feuchtigkeith, III.
 955
 Waffenpläze, II. 681
 Wage. Erklärung, II. 764
 wie

Register

- wie sie zu machen, *ibid.*
 zu probiren, 765
 Waage, III. 1142. 1190
 Wahre Bewegung, III.
 1314
 Wahrer Horizont, III.
 1131
 Wahre Wurzel, IV. 1718
 Wall. Seine Nothwendig-
 keit, II. 606. Höhe, 611.
 612. Figur, 613. 614.
 wie er aufzuführen, 716
 Wallfisch, III. 1190
 Wallgang, II. 609
 Walze, 126
 Wand: Pfeiler, 334
 Wand: Säule, *ibid.*
 Wasser. Wie es zu Bewe-
 gung der Mühlen ge-
 braucht wird, II. 801
 Wasser: Kunst, II. 922. 923
 Wasser: Schlange, III.
 1190
 Wassermann, III. 1142.
 1190
 Wasser: Schraube, II.
 911
 Wasser: Stand, II. 812
 Wasser: wägen, II. 805.
 809
 Wasser Wage, II. 805
 Wehr: Bau, II. 821
 Weinmonat, III. 1484
 Weiten der Orter. Wie
 sie zu messen, 134. 144.
 145. 201. 294. 295. III.
 1435. 1460
 der Planeten von der
 Erde, 1376. 1345.
 1348.
 von der Sonne, III.
 1321. 1347
 der Sterne Erklärung,
 III. 1177. wie sie zu obser-
 viren, 1177. 1178. Du-
 hen, 1180
 Weisäulig, 395
 Welsche *Practica*, 108
 Welt. Wie sie aussiehet,
 III. 1126. 1127
 Welt: Axe, II. 1129
 Welt: Baue, (neue) 1387
 Welt: Gebäude. Wie es
 beschaffen, III. 1296
 Welt: Gegenden, III.
 1454. 1455
 Welt: Kugel, III. 1127
 Welt: Pole, III. 1128
 Wendel: Treppe. Erklä-
 rung, 495. Beschaffen-
 heit, 496. Zeichnung,
 497
 Wendungs: Punct. Er-
 klärung, IV. 1901. wie er
 zu finden, 1904
 Weniger, IV. 1553
 Wesentliche Glieder, 351
 Wetter: Glas. Wie es zu
 machen, II. 897. Beson-
 dere Phenomena, 899.
 900
 Widder, III. 1142. 1190
 Wiederkehrungs: Punct.
 Erklärung, IV. 1901
 Wie

über alle vier Theile.

- Wie ee zu finden, 1904
Wiederlage der Gewöl-
 ber, 474
Widerstand in Bewegung
 der Maschinen, II. 835
Widerstehende Kraft, II.
 844
Winkel. Erklärung, 122.
 Maas, *ibid.* Eigenschaff-
 ten, 130. 131. 153. 154.
 157. Wie er zu messen,
 134. zu beschreiben, 136.
 auf dem Felde abzustie-
 cken, 144. Theilung in
 zwey Theile, 164
Winkel in regulären Viel-
 ecken, 165. in jedem
 Vielecke 166
Winkel, der allzuspitzig.
 Wie er zu fortificiren, II.
 697. der einwärts gebo-
 gen. Wie er zu fortifici-
 ren, 698
Winkel an der Periphe-
 rie, 157. 158
 an der Sonne, III.
 1314. 1344
Winkelhaken, 150. 159
Winkelmesser, 123
Wind, II. 537
Wind-Mühlen, II. 824.
 825
Wind-Raum, II. 535
Windwage. Erklär. II. 879
 Wie sie zu machen, 903.
 und zu gebrauchen, 904
Winter, III. 1444
Wintermonat, III. 1484
Wischer, II. 555
Wischkolben, *ibid.*
Woche, III. 1478
Wolff, III. 1190
Wohlgereimtheit, 313
Würffel, 127
Würffel in der Ban-Kunst.
 Erklärung, 341. Be-
 schaffenheit, 348. 349.
 Höhe, 360. Auslauffung,
 361
Wulst, 344
der wunderbare Stern,
 III. 1388
Wurzel Ihre Arten, 1591.
 IV. 1718. Rechnung mit
 Buchstaben, 1563. wie
 sie aus jeder Dignität
 zu ziehen, 1602. Auszie-
 hung, I. 86. 91.
Wurzel der Gleichung.
 Erklärung, IV. 1718.
 Eigenschaften, 1719.
 1720. Veränderung,
 1721. Schranken, 1733.
 Ausziehung, 1735. Wie
 sie durch Näherung zu fin-
 den, 1738
Wurzel Täflein, 84
Wurzel Zeichen, IV. 1565

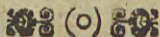
Z.

Nezdegerdisches Jahr,
 III. 1487. 1488. wie sein
 Anfang zu finden, 1488
 3.

Register über alle vier Theile.

3.		Ziegel. Wie sie zu streichen, 324. zu probiren, 327
Zapfen, 386		Ziegel: Erde, 327
Zahl. Erklärung, 38.		Zieh Panster, II. 819
W. schaffenheit, 39. 40.		Zieh Pengel, II. 796
ihre Veränderungen, 40.		Zifern, 47
41. wie sie ausgesprochen wird, 47. 48		Zimmer. Ihre Figur, 458.
Zahl der Winkel in der Polygonal-Zahl, IV. 1625.		Verhältniß der Länge zur Breite, 459. Höhe, 459. 460. wie sie anzu- legen, 478. 479
Zapfen: Stücke, II. 542. 543		Zierrathen des Gebäu- des. Erklärung, 308. wie viel sie nöthig, 309. 310
Zauber-Laterne, III. 1054		Zirkel, 121
Zehenecke. Wie seine Seite zu finden, IV. 1652. 1653.		Zodiacus, III. 1144
Zehlen. Was es heiße, 38		Zoll. Erkl. 119. Zeichen, 122
Zehler eines Bruches, 77		Zonæ frigida, III. 1443
Zeltdach, 500		temperata, III. ibid.
Zeichen der Zahlen, 47		Zona torrida, III. ibid.
der Zeit, III. 1493. 1494		Zündloch im Stücke, II. 547
Zeichnen. Wie solches ge- nan geschehen kan, III. 1078		Zünd-Röhre in der Bont- be, II. 570
Zeichnung der Figuren, 142. was sie nützet, 143		Zusammendrücken, II. 878
Zeiger. Die Mittags: Hö- hen zu finden, III. 1150		Zusammenkunft, III. 1394
Zeit. Wie man sie aus der Höhe der Sonne, 1171.		Zusätze. Erklärung, 28. Un- terscheid. 28. 29
und der Sterne findet, 1220. 1222. 1223.		Zwerg: Aere, IV. 1698
Zenith, III. 1129		Zwey mittlere Proportio- nal: Linien. Wie sie zu finden, IV. 1774
Zeugmeistereykunst, II. 517		Zwillinge, III. 1142. 1190
Verstreuungs: Punct, III. 1028		Zwischen-Tiefe, 354. 396

Ende des Registers.



Vericht an den Buchbinder.

Die Kupffer müssen zu Ende einer jeden Disci-
plin dergestalt gebunden werden, daß man sie
ganz heraus schlagen kan.

Nemlich im ersten Theile.

Pag. 256.	Fig. Geom. Tab. I. bis XXIV.
300.	Trigon. Tab. I. bis IV.
510.	Archit. Tab. I. bis XXX.

Im andern Theile.

Pag. 592.	Fig. Artiller. Tab. I. bis VII.
740.	Archit. mil. Tab. I. bis XIII.
838.	Meehan. Tab. I. bis VI.
872.	Hydrostat. Tab.
906.	Aërometr. Tab.
942.	Hydraul. Tab. I. bis III.

Im dritten Theile.

Pag. 988.	Fig. Optic. Tab.
1013.	Catoptr. Tab.
1064.	Dioptr. Tab. I. II.
1078.	Perspect. Tab. I. II. III.
1120.	Trig. Sphar. Tab.
1426.	Astron. Tab. I. bis VIII.
1464.	Geogr. Tab. I.
1542.	Gnomon. Tab. I. II. III.

Im vierdten Theile.

Pag. 1934.	Fig. Algebr. Tab. I. bis XI.
------------	------------------------------




Kurzer

Unterricht

von den

Vornehmsten

Mathematischen Schriften,

Aufgesetzt

von

Christian Frenherra von Wolff,

Seiner Königl. Majestät in Preussen Geheimen Rathe und
Cangler der Universität Halle, wie auch Professore Juris Naturæ &
Gentium ac Matheseos daselbst, Professore honorario zu St. Petersburg,
der Königl. Academie der Wissenschaften zu Paris, wie auch der
Königl. Groß-Britannischen und der Königl. Preussl.
Societät der Wissenschaften Mitgliede.

Neue, verbesserte und vermehrte Auflage.

Frankfurt und Leipzig, *Walden*

Zu finden in der Kengerischen Buchhandlung.

1750.

10111111

10111111

10111111

10111111

10111111

10111111

10111111

10111111

10111111

10111111

10111111



Vorrede.

Sein Vorhaben ist jetzt nicht, eine vollkommene Historie von den Mathematischen Wissenschaften, ihrem Anfange und Fortgange zu schreiben; auch habe ich mir nicht vorgenommen, alle Mathematische Schriften zu erzehlen, die jemals entweder geschrieben, oder durch den Druck herausgegeben worden: sondern ich begnüge mich, von beyden nur so viel anzuführen, als einer zu wissen nöthig hat, der die Mathematick gründlich erlernen, und die besten Schriften, daraus er sich Rathes erhalten kan, kennen will, damit er nicht mit grossem Zeitverlust über die unrichtigen gerathe, und viele Mühe vergebens anwende. Denn da ich den Schaden, der hieraus erwächset, erfahren, und

A 2

dabey

daben wahrgenommen, daß diejenigen, welche sonst von der Geschichte der Gelehrten zu schreiben pflegen, gar schlechte Nachricht von dem Zustande der Mathematischen Wissenschaften und denen davon vorhandenen Büchern zu geben wissen; so habe ich andere in diesem Stücke gerne glücklicher machen wollen, als ich gewesen bin: als wohin auch nicht allein meine Anfangs-Gründe der Mathematischen Wissenschaften, sondern auch die übrigen bisher von mir verfertigten Schriften nebst einem Theile derselben, die noch folgen sollen, zielen. Es kan aber diese Arbeit auch demjenigen dienlich seyn, welcher Zeit und Gelegenheit haben solte, an eine ausführliche Historie der Mathematischen Wissenschaften zu gedencken. In dieser neuen Auflage sind nebst anderen die Bücher insonderheit noch hinzugesetzt worden, die von Anno 1717. bis 1740. heraus kommen, oder auch von neuem wieder aufgelegt worden.

Kurzer Unterricht

von den

Vornehmsten

Mathematischen Schriften.

Das 1. Capitel.

Von den Arithmetischen Schriften.



§. 1.

Die Arithmetick der Alten war von der Rechenkunst der Neueren gar sehr unterschieden. Denn die Alten machten sehr viele Eintheilungen der Zahlen und erklärten einige Eigenschaften derselben: welches man nach dem heutigen Geschmack für unnütze Grillen halten würde. Doch könnte man diese Lehren gar besonders nützen, wenn man in den Schulen auch den Verstand vollkommen zu machen sich angelegen seyn liesse. Denn sie dienen, ihm ein Geschick zuwege zu bringen, Sachen, die von Bildern abgesondert worden, deutlich zu begreifen.

§. 2. Die Arithmetick der Alten findet man in den beyden Büchern des *Nicomachi*, die er im dritten Jahrhundert nach Erbauung der Stadt Rom geschrieben, und so A. 1538. zu Paris gedruckt worden. Aus ihm hat im sechsten Jahrhunderte nach Christi Geburt *Anitius Manlius Severinus Boëthius* seine *Arithmetica* genommen.

§. 3. Einen kurzen Begriff von der Arithmetick der Alten hat im neunten Jahrhunderte nach Christi Geburt *Psellus* aufgesetzt, den *Guilielmus Xylander* aus dem Griechischen in die lateinische

Sprache übersehet und mit Anmerkungen zu Basel A. 1556. in 8. herausgegeben. In neuen Zeiten hat *Jodocus Willichius* dergleichen Arbeit verrichtet, und sie unter dem Titul: *Arithmeticae libri tres*, zu Straßburg A. 1540. in 8. (8 Bog. drucken lassen.

§. 4. Weitläufiger haben von dieser Arithmetick im zwölften Jahrhunderte nach Christi Geburt *Jordanus* in seinen zwölf Büchern von der Arithmetica und *Jacobus Faber Stapulensis* in seinem Commentario über dieselben gehandelt, welcher letztere schon A. 1480. gedruckt worden.

§. 5. Man theilet aber die Arithmetick ein in *Theoreticam* und *Practicam*. Jene pflege ich die erwegende: diese die ausübende zu nennen, weil jene die Eigenschaften der Zahlen erweget, diese aber durch Hülfe gewisser Regeln auszuüben pfleget, was in der ersteren als möglich befunden worden.

§. 6. Die erstere Art der Arithmetick hat *Euclides* in dem VII. VIII. und IX. Buche seiner *Elementorum* gründlich, obwol nicht vollständig abgehandelt: und werden wir von diesen Büchern in dem folgenden Capitel ein mehreres zu sagen haben.

§. 7. Eine gründliche Theorie, welche zureichet, alle Regeln der ausübenden Rechenkunst, sowol in ganzen Zahlen, als in gemeinen und sechzigtheiligen Brüchen zu erweisen, hat *Barlaam der Mönch* (*Barlaamus Monachus*) in seiner *Logistica* gegeben, welche ein Engelländer, *Johannes Chamberus*, aus dem Griechischen in das Lateinische übersehet, und mit Anmerkungen zu Paris A. 1600. in 4. (1 Alph. 3 Bog.) drucken lassen. Das Buch ist für

für Anfänger zu hoch geschrieben: welchen lächerlich vorkommt, was gar zu gründlich ausgeführt wird.

§. 8. *Frater Lucas de Burgo S. Sepulchri*, ein Minorite und *Magister* (oder, wie wir heute reden, Doctor) *Theologiae*, hat A. 1523. ein Werk in fol. (6 Alph. 10 Bog.) von der Arithmetick und Geometrie in italiänischer Sprache heraus gegeben. Der grössste Theil bestehet aus der Arithmetick, und werden darinnen nicht allein die verschiedene Eintheilungen der Zahlen aus dem *Nicomacho* und die Eigenschaften derselben aus dem *Euclide* erkläret und erwiesen; sondern es wird auch der Algorithmus so wohl in ganzen als gebrochenen Zahlen, zugleich mit den Ausziehungen der Wurzeln, den Regeln der Proportionen und Progreßionen, wie auch der Regel Falsi und Algebra abgehandelt.

§. 9. *Michel Stiesel*, ein gelehrter Dorfprediger, hat A. 1544. in 4. (1 Alph. 13 Bog.) seine *Arithmetica integrum* heraus gegeben, darinnen er vieles von der Ausübung der Rational Irrational- auch Cosischen Zahlen, wiewohl ohne Beweis, bringet, welches man in anderen Büchern vergebens suchet.

§. 10. Ein vollständiges Werk von der *Arithmetica practica* hat A. 1556. *Nicolaus Tartaglia*, ein Venetianer in zweyen Theilen heraus gegeben. In dem ersten erkläret er die Rechenkunst, wie sie in dem menschlichen Leben genuset wird, in dem andern aber zeigt er die Gründe von der Algebra.

§. 11. *Franciscus Maurolycus* hat in seinen libris *Arithmeticae*, davon unten ein mehreres folgen soll, die Lehre von den numeris figuratis erweitert und den Algorithmum mit den Ausziehungen der Wurzeln und anderen Regeln der Rechenkunst scharf erwiesen: allein seine Beweise kan nicht ein jeder fassen.

§. 12. *Gregorius Henischus* hat in seiner *Arithmetica perfecta & demonstrata* (Augustæ Vindelicorum 1609. in 4. 2 Alph. 6 Bogen) alle Rechnungs-Regeln von den gemeinen, den Eofischen und Astronomischen Zahlen erwiesen, und hat dieses besonders für anderen, daß er alle Beweise in förmliche Schlüsse zergliedert.

§. 13. *Andreas Tacquet* hat in seiner *Theoria et Praxi Arithmetices*, die öfters (z. E. zu Amsterdam 1704. in 8. 34. Bog. 8 Taf.) von neuem aufgelegt worden, die *Elementa Arithmetica Euclidis* leichter erwiesen und die Regeln der Rechenkunst gleichfalls mit Beweisen versehen.

§. 14. Unter denen Auctoribus, die *Cursus Mathematicos* geschrieben, und von denen unten geredet werden soll, giebet von den Regeln der Rechenkunst Beweise *Dechales*; hingegen unterlassen dieselbe *Herigonius*, *Shottus* und *Ozonam*, dergleichen auch *Clavius* in seiner *Arithmetica practica* und der Jesuit *Vincentius Leotaudus* in seinen libris *quatuor Institutionum arithmeticarum* und viele andere gethan.

§. 15. *Wallisus* hat in seinen *Operibus Mathematicis* die Buchstaben-Rechenkunst mit der Rechenkunst in Ziffern verknüpft und durch sie die Regeln der Brüche, der Proportion und Ausziehung

hung der Wurzeln erwiesen: daraus *Eduardus Wells* unter dem Titel: *Elementa Arithmeticae* A. 1698. in 8. zu Oxfurt für die Anfänger ein nützliches Büchlein gezogen.

§. 16. Ich übergehe viele andere mit Still-
schweigen, welche bloß die Regeln der Rechenkunst
zum gemeinen Gebrauch im menschlichen Leben er-
klären. Doch führe ich hier zur Dancfbarkeit des
Gemma Frisii *Methodum facilem Arithmeticae pra-*
cticae (*Vitebergæ* 1544. in 8. 11. Bog.) an, weil ich
daraus in meiner Jugend auf der Schule, da mir
die Anführung im Rechnen zu langweilig schien,
und ich kaum recht zu addiren und zu subtrahiren
wusste, im Multipliciren und dividiren aber noch
nicht wohl fortkommen konnte, alle Regeln der Re-
chenkunst, auch selbst die Ausziehung der Quadrats-
und Cubicwurzeln in wenigen Tagen erlernet.

§. 17. Sonsten rühmet man auch des *Adriani*
Metii, der *Mathematicum Professor* zu *Franequer* ge-
wesen, *Arithmetica* *duobus libris comprehensam*
Lugduni Batav. 1704. in 4. Es sind dieselben mit
den 6 Büchern von der Geometrie zugleich ge-
druckt worden, und soll dahero unten ein mehre-
res davon geredet werden. Er hat alles, was
zur *Arithmetica practica* gehöret, ausführlich ab-
gehandelt, aber ohne Beweise.

§. 18. *Samuel Morland* hat A. 1673. zu Lon-
den in 12. ($6\frac{1}{2}$ Bog.) in Englischer Sprache die
Beschreibung zweyer Instrumente heraus gege-
ben, durch deren eines man mit blosser Bewegung
einiger Scheiben das Addiren und Subtrahiren,
durch das andere aber auf gleiche Art das Multi-

pliciren verrichten kan. Vende hat er schon 1666. dem Könige Carl II überreicht. Es ist aber diese Beschreibung eine völlige Rechenkunst mit leichten Beweisen.

§. 19. Bey den Frankosen hatte der berühmte *Pascal* an eine Machine gedacht, dadurch man alles rechnen könnte: aber unvollkommen liegen lassen. Als der Herr von *Leibnitz* in Paris war, sahe er ein Modell davon und nahm daher Anlaß, an etwas vollkommeneres zu gedencken: welches Vorhaben ihm auch glücklich gelungen und so wohl des grossen Staats Ministri des *Colbert*, als auch der Königl. Academie der Wissenschaften Beyfall erhalten, die dadurch bewogen worden, ihn als ein Mitglied anzunehmen. Allein er hat sie doch niemals völlig ins Werck richten können, weil es ihm stets an geschickten Künstlern gefehlet, unerachtet er viel tausend Thaler auf deren Verfertigung gewendet. Zuletzt hat er einen Uhrmacher zu dem Ende in Paris bey dem in der Mechanick sehr erfahrenen Herrn *Teuber* gehalten, unter dessen Aufsicht sie auch würde zu Grande kommen seyn, wenn der Herr von *Leibnitz* nur noch einige Zeit hätte leben sollen. Man findet etwas davon in den *Miscellaneis Berolinens.* p. 394.

§. 20. *Johannns Polemius* ein berühmter Professor zu Padua, hat in seinen *Miscellaneis*, die er zu Venedig A. 709. in 4. (8 Bog 9 Blat) heraus gegeben, gleichfalls eine Machine angegeben, dadurch alle Rechnungsarten ohne einiges Nachsinnen durch bloße Bewegung mit der Hand verrichtet worden: sie ist aber nicht so vollkommen, als die des Herrn von *Leibnitz*.

§. 21. Die Logisticam decimalem oder Rechnung mit zehentheiligen Brüchen, welche *Regiomontanus* zuerst in die tabulas Sinuum eingeführet, nach diesem *Stevinus* in die Geometrie gebracht und so wohl den *Mathematicis*, als Kaufleuten vorgeschlagen, hat eben dieser *Stevinus* in einem kleinen Büchlein zuerst abgehandelt, welches mit unter seinen Wercken zu finden. Ausführlicher hat davon in deutscher Sprache ein Medicus zu Franckfurt am Mayn, *Johannes Hartmannus Bayerus* geschrieben und sein Buch daselbst A. 1619. in 4. (1 Alph. 6 Bog.) heraus gegeben. Am gründlichsten aber ist Anewand compleat Treatise of the Doctrine of fractions vulgar and decimal, welchen *Samuel Cunn* zu London 1714. in 8. ($8\frac{1}{2}$ B.) heraus gegeben, darinnen er viele nützliche Regeln aus seiner eigenen Erfindung hinzugesetzt.

§. 22. Von der Rechnung mit den Logarithmis hat ein besonderes Werck unter dem Titul: Arithmetica logarithmica, ein Engelländer, *Henricus Briggs* geschrieben, wovon unter denen zur Trigonometrie nöthigen Schriften ein mehreres geredet wird.

§. 23. *Johannes Neperus*, ein Schottländischer Baron, hat gewisse Stäblein erfunden, dadurch man die Multiplication und Division, auch die Ausziehung der Wurzeln, sonderlich in grossen Zahlen, erleichtern kan, und sie in seiner Rhabdologia (Edinburgi 1617. in 12. 6. Bog.) beschrieben. Ich erkläre ihre Beschaffenheit und ihren Gebrauch in meinen Elementis Arithmet. §. 113. 115. 119.

§. 24. Nach *Neperus* Exempel hat *Samuel Keyher*, Professor Mathematicum in Kiel, A. 1688. in Kiel Bacillos sexagenales in 4. heraus gegeben, da-
durch

durch er die Logisticam sexagenariam oder Rechnung mit sechzigtheiligen Brüchen, welche in der Astronomie genühet wird, erleichtern wollen.

§. 25. Hingegen schon längst vorher, nemlich A. 1610. hat J. G. Herwardt von Hohenburg ein grosses Werck in fol. (11 Alph. 9 Bog.) drucken lassen, durch dessen Hülfe diejenigen, welche das Einmal eins nicht können, die Multiplication durch blosses Addiren und die Division durch blosses Subtrahiren verrichten möchten. Der Titul ist: *Johannis Gregorii Herwardt ab Hohenburg, V. J. D. ex Assessore Summi Tribunalis Imperatorii & Cancellario Supremo Bavariae Ducis, ejusdem Consilarii intimi, Praesidis Provinciae Schwabae & inclutorum utriusque Bavariae statuum Cancellarii, Tabulae Arithmeticae $\pi\rho\omicron\delta\alpha\varphi\alpha\rho\epsilon\tau\epsilon\omega\varsigma$ universales, quarum subsidio numerus quilibet ex multiplicatione producendus per solam additionem et quotiens quilibet e divisione eliciendus per solam subtractionem etiam ab eo, qui Arithmetices non admodum sit gnarus, exacte & celeriter invenitur.*

§. 26. Allein viel bequemer erhält man dieses durch die Rechnung ohne das Ein mahl eins, welche der sel. Herr Professor Ludolff in Erfurt erfunden und ich so wohl in diesen Anfangs Gründen, als in den lateinischen Elementis Arithmeticae erkläret, auch was die Multiplication betrifft, verbessert.

§. 27. Ein gewisser Holländer K. F. de Rees hat eine allgemeine Regel der Rechenkunst heraus gegeben in holländischer Sprache, nach welcher alle Aufgaben, darinnen etwas eine Verhältniß zu andern

dern Dingen hat, kurz und leicht aufzulösen sind. Sie ist Deutsch übersetzt in Göttingen A. 1739. in 8. (10 Bog.) heraus kommen.

§. 28. Endlich wenn jemand die Anwendung der Arithmetick in allen im menschlichen Leben vorkommenden Fällen, sonderlich auch wie bey Kaufleuten im Handel und Wandel üblich ist, sich besant machen, auch darinnen üben will; dem dienet *Marci Martini* Arithmetischer Wegweiser, der zu Berlin in Verlegung des Autoris A. 1741. in 8. (2 Alph. 1 Bog.) heraus kommen ist.

Das 2. Capitel.

Von den Geometrischen Schriften.

§. 29.

Die Geometrische Schriften handeln entweder von der blossen Theorie, oder erklären die Praxin auf dem Papiere und Felde. Die theoretischen Schriften erläutern entweder die gemeine Geometrie, welche von den geraden Linien und dem Circul und denen Figuren und Cörpern handeln, welche sich durch diese Elemente beschreiben lassen; oder sie gehören zu der höheren Geometrie, welche die Natur und Eigenschaften der krummen Linien untersucht. Die practischen Bücher fügen entweder den Beweis zu den aufgelöseten Aufgaben, oder sie lassen ihn weg.

§. 30. Die vollständigste *Geometria practica*, die ohne Beweis zur Zeit heraus kommen, ist die, welche *Mallet* in fränköscher Sprache beschrieben. Sie bestehet aus 4 Theilen, und ist zu Paris 1702.
in

in groß Octav gedruckt worden (Tom I. 23. Tom. II. 26. Tom. III. 24. Tom. IV. 18 Bog.). Es sind fast so viel saubere Kupfer in dem Buche als Blätter, die zur Sache nicht gehören, und ohne Noth das gar nützliche Buch sehr theuer machen. Das Feldmessen wird so wohl mit den Stäben und der Meßruthe, als mit dem halben Circul, dem geometrischen Quadrate, dem Proportionaleircul, dem Astrolabio, der Boussole, dem Jacobsstabe, dem Meßrutschlein zu verrichten angewiesen.

§. 31. In unserer deutschen Sprache haben wir Daniel Schwenters, weiland Proffessoris Matheseos zu Altorff Geometriae practicae libros IV welche Georg Andreas Böckler mit Anmerckungen vermehret und zu Nürnberg. 1667. in 4. drucken lassen, mit vielen Holzschnitten (4 Alph. 18 Bog.). Die Praxis auf dem Papiere wird gar deutlich und vollständig erkläret: auf dem Felde aber nur der Gebrauch der blossen Stäbe und Schnure und des Meßrutschleins angewiesen. Es fehlet die Stereometrie oder Cörpermessung. Daher kan man Johann Hartmann Bayers neue und schöne Art der vollkommenen Visirkunst, die zu Franckfurt am Mayn 1603. in 4. (1 Alph. 7 Bog.) herauskommen, zu ihrer Ergänzung mit dazu nehmen.

§. 32. Vor ihm hat Bernhard Cantzler zum Gebrauch der Feldmesser einen kurzen und leichten Bericht vom Feldmessen aufgesetzt: welchen hernach Abdias Trew, Mathes. Prof. zu Altorff, mit vielen Anmerckungen vermehret, die zweymahl so viel als das Buch selbst austragen, so, daß eine völlige Geometria practica daraus worden, die den
 Lieb-

Liebhavern dieser Wissenschaft ein Genügen thun kan. Das Buch ist in unserer Sprache mit einem lateinischen Titul: *Summa Geometriae practica*, zu Nürnberg 1673. heraus kommen (in 8. Bog. 33. Tab. 55. und viel Holzschnitte), auch nach diesem wieder von neuem aufgelegt worden.

§. 33. Man rühmet auch die *l'Ecole des Arpenters* oder die Feldmesser Schule, welche *de la Hire* zu Paris 1689. in 8. herausgegeben, ingleichen des *Ozanam* zu Paris 1699. in 8. edirte *Methode facile pour arpenter, ou mesurer toutes sortes de superficies & pour toiser exactement*. Es ist das erste Buch N. 1728. zu Paris in 12. reg. zum dritten mal aufgelegt worden (22 Bog.) Es hält alles in sich, was einem Feldmesser aus der Arithmetick, Geometria practica, dem Wasserwägen, der Trigonometrie, der Bewegung des Wassers und Stereometrie zu wissen nöthig ist. Das andere ist zu Paris N. 1725. 12. reg. (1 Alph. 1 $\frac{1}{2}$ B.) heraus gekommen. Es behält aber das erste den Vorzug, als worinnen mehrere Materien als in diesem zu finden. Mit dem *de la Hire* hat gleiche Absicht *Henry Wilson*, dessen Buch unter dem Titul: *Survering improv'd* zu London 1726 in 8. reg (1 Alph. Tabb. 11.) heraus gekommen und ist in seiner Art sehr vollständig. Es verdienet auch ihr Lob des *Christoph Clavii*, des berühmten Bambergischen Jesuitens, *Geometria practica*, die in dem andern Theile seiner Werke zu finden, auch vorhin besonders gedruckt worden. Zu den Fortifications Büchern pflegen gemeiniglich und öfters sehr vollständige *geometriae practicae* mit angehängt zu werden: wovon an seinem Orte ein mehreres folgen soll.

§. 34. *Erasmus Reinholdus* hat in seinem gründlichen Berichte vom Feldmessen (Frankfurt 1615. in 4. 1 Alph. 17 Bog.) auch das Marckscheiden erläutert: wir haben auch ein besonderes Werk von einem geschickten und in dieser Kunst sehr geübten und erfahrenen Manne, nemlich die Marckscheide-Kunst oder Geometriam Subterraneam des Herrn *Nicolai Voigtels*, Zehendners in der Grafschaft Mansfeld (Eisleben 1688 in fol. 32 Bog. Tabb. 9.): welche A. 1713. vermehrter (2 Alph. 10 Bogen Tabb. 10.) wieder aufgelegt worden. Und der berühmte Professor Matheseos zu Wittenberg, Herr D. *Johann Friedrich Weidler*, hat Institutiones Geometriæ Subterraneæ zu Wittenberg 1726. in 4. (10 Bog. Tab. 1.) heraus gegeben. *Leonhard Christoph Sturm* hat zu Frankfurt A. 1710. in 8. Vier kurze Abhandlungen, 1. von geometrischer Zeichnung der regulären Vielecke, 2. von dem Gebrauch des Proportional-Circuls, 3. von der Trigonometria plana, 4. von der Marckscheide-Kunst heraus gegeben.

§. 35. Von dem Proportional-Circul, dessen Gebrauch *Mallet* in seiner Geometrie pratique gar deutlich beschrieben, und *Jobst Byrge* zuerst erfunden (wie aus dem dritten Tractate von mechanischen Instrumenten des *Levini Hulsii*, der zu Frankfurt am Main A. 1603. heraus kommen, zu sehen) hat *Nicolaus Goldmann* in deutscher und lateinischer Sprache einen besonderen Tractat heraus gegeben (Lugd. Batav. 1697. in fol. 1 Alph. Tabb. 16.), aus welchem *Nichel Schesfeld* seinen Unterricht von dem Proportional-Circul

Zirkel meistens genommen (Ulm 1697. in 4. 18 Bogen Tabb. 12.), welcher den Liebhabern dieses Instruments zu recommendiren, weil der Goldmannische Tractat nicht so leicht zu haben. *Galileus*, welcher die Erfindung dieses Instruments sich ohne Grund zugeeignet, hat es in italiänischer Sprache beschrieben. Der Titul dieses Buches ist: *Le Operationi del Compasso Geometrico & militare*. Man hat auch von dessen Gebrauch einen französischen Tractat des *Ozanams*, so zu Paris 1688. in 8. gedruckt worden. Hingegen das neueste, und welches verschiedenes besonderes in sich enthält, ist dasjenige, welches *Samuel Cune* in englischer Sprache geschrieben, und nach seinem Tode *Edmund Stone* unter dem Titul: *A new Treatise of the Construction and Use of the Sector* zu London 1729. in 8. (15 Bog. Tabb. 2. und viele Holzschnitte) heraus gegeben.

§. 36. In der *Geometria practica* hat es bisher noch an Erklärung des richtigen Gebrauches der Instrumente und der nöthigen Handgriffe und Vortheile gefehlet. Dem ersten Mangel hat *George de Meisner* in seiner *Neuverbesserten Geometria practica* abzuhelpen gesucht, welche nebst noch einem beygefügtten kurzen Auszuge von einem neuen *Fortifications-Systemate* zu *Frankfurt am Mayn* A. 1733. in 4. (13 Bog. 7 Tabb.) heraus kommen; den Mangel des andern aber *J. W. Zollmann*, Ing. und Artill. Capitain, in seiner vollständigen Anleitung zur *Geodäsie* oder *practischen Geometrie*, welche mit meiner Vorrede A. 1743. in fol. alhier in Halle (26. Bog. 20. Tabb.) heraus
(*Wolfs Mathes.*) B aus

aus kommen. In diesem schönen und nuzbaren Werke rühmet der Autor vor allen andern des jetzigen Professoris zu Göttingen, Herrn Penters, Geometriam practicam.

§. 37. Was nun die theoretischen Schriften betrifft, so hat die gemeine Geometrie unter den Alten *Euclides* beschrieben. Die *Elementa Euclidis* sind von verschiedenen heraus gegeben worden. Den griechischen Text mit einer lateinischen Uebersetzung davon und den übrigen Schriften *Euclidis* hat uns *David Gregorius*, Professor Astronomiæ Savilianus zu Dyfort, gegeben, unter dem Titul: *Ευκλείδης τὰ στοιχίμενα*, h. e. *Euclidis, quæ supersunt omnia* (Oxonix 1703. fol. 7 Alph 17 Bogen). A. 1530. hat *Orontius Finæus* über die 6 ersten Bücher des *Euclidis* einen Commentarium heraus gegeben, in welchem er nur den Sinn *Euclidis* erklärt, nichts aber von neuem hinzusetzt. Eben dergleichen hat A. 1557. *Jacobus Peletarius* gethan. Ueber alle 15. *Elementa* haben Commentarios geschrieben um eben diese Zeit *Nicolaus Tartaglea*, welcher auch etwas von dem Seinen hinzu gethan, und A. 1578. *Franciscus Flussates Candalla*, ein Franke von Adel, welcher die *Elementa* XVI. XVII. und XVIII. von der Verhältniß der geometrischen Körper gegen einander und ihren Beschreibungen innerhalb einer Kugel hinzu gethan. Es haben aber andere die Demonstrationes leichter zu machen gesucht, als sie bey dem *Euclide* zu finden. Wer demnach den ganzen *Euclidem* verlangt, dem kan die Auflage dienen, welche *Isaac Barrow*, weiland Matheses Professor zu Cambridge, an selbigem Orte in

in 8. gegeben, oder auch des *Christophori Clavii Libri XV. Elementorum Euclidis* (Franc. 1654. in 8. Tom. I. 2 Alph. 4 Bog. Tom. II. 1 Alph. 20 Bog.). Wiewohl die erstere Auflage wegen ihrer Kürze viel angenehmer ist als die andere, so wegen des vielen Zusatzes alzuweitläufig gerathen. Es hat aber *Clavius* auch die *Elementa Fluxatis* mit dabey drucken lassen. Allein weil den Anfängern der ganze *Euclides* nichts nuket; so können sie sich entweder mit den *Elemens d' Euclide* des *Dechales*, oder den *Elementis Geometriae planae & solidae* des *Tacquet* vergnügen. Die beste Auflage von den ersten ist die, welche wir dem *Ozanam* zu danken haben (Paris 1709. in Regal 12. Bog. 12. Tabb. 16.) und die hernach wieder von neuem aufgelegt worden. Die beste Auflage von dem andern hat uns *Guil. Whiston*, damals Mathes. Prof. zu Cambridge, gegeben (Chambridge 1703. 8. Bog. 16. Tabb. 7.): denn er hat einige Anmerkungen hinzugesetzt, darinnen er den Nutzen der Lehren des *Euclidis* zeigt. Vorhin war die letzte Auflage, welche zu Amsterdam 1701. in 8. heraus kam (1 Alph. Tabb. 6.). Die ersten 6. Bücher *Elementorum Euclidis* mit dem elften und zwölften hat aus der Uebersetzung *Frederici Commandinae* nebst seinen *Elementis Trigonometriae planae & sphaericae*, und einem *Tractatu de Natura & Arithmetica Logarithmorum* *Joannes Keill* zu Oxfurt 1715. in 8. (1 Alph. 6 Bog.) heraus gegeben zum Gebrauch der Anfänger.

§. 38. *Johannes Scheubel*, Professor über den *Euclidem* zu Tübingen, hat A. 1550. in fol. zu Basel (3 Alph. 5 Bog.) die ersten sechs *Elementa Euclidis*

ohne Buchstaben bey den Figuren heraus gegeben, weil er vermeinet, es wäre alles leichter zu begreifen, wenn die Sachen zulänglich mit Worten beschrieben würden, als wenn man Linien und Winkel durch ben gesetzte Buchstaben unterscheidet. Hingegen hat *Christianus Herlinus* und *Conradus Dasypodius* (das Buch ist A. 1566. zu Straßburg unter dem Titul: *Analyses geometricæ sex librorum Euclidis* in fol. (2 Alph. 5 Bog.) heraus kommen), die Beweise des *Euclidis* in förmliche Schlüsse zergliedert: welche Arbeit den Anfängern darzu dienen kan, daß sie begreifen lernen, wie aus Verbindung vieler Schlüsse ein gründlicher Beweis erwächst.

§. 39. Die Ordnung des *Euclidis* hat *Petrus Ramus* zuerst getadelt, wie aus seinen *Scholis Mathematicis*, die *Lazarus Schoner* zu Franckfurt am Mann A. 1599. in 4. (2 Alph. 17 Bog.) heraus gegeben, zu ersehen. Es sind darinnen enthalten 1. eine Aufmunterung zu der Mathematick, darinnen viele historische Nachrichten zu finden: 2. einige arithmetische Streitigkeiten, und 3. Anmerkungen über die 15. Bücher *Euclidis*. *Ramus* hat demnach andere *Elementa Geometriæ* in 27 Büchern geschrieben, nach der Schulordnung, die *Schoner* nebst den 2. Büchern von der Arithmetick unter dem Titul: *Petri Rami Arithmetica libri duo, Geometriæ septem & viginti*, zu Franckfurt 1599. in 4. (2 Alph. 2. Bog.) heraus gegeben: allein sie haben den *Elementis Euclidis* den Vorzug nicht streitig machen können. Nach ihm haben noch andere auf andere *Elementa Geometriæ* gedacht. Hieher gehören les *Elemens de Geometrie* des Jesuiten *Ignatii Gastonis*

Pardies, die unter seinen *Oeuvres de Mathematiques* zu finden (a la Haye 1691 in 12. (aber auch vorhin besonders etliche mahl nachgedrucket (Edit. 4. Hagæ Com. 1690 in 12. 8. Bog.) und von dem Herrn Abt *Schmidt*, hochberühmten Theolog. Professore in Helmstädt, in das Latein übersehet worden, als er noch die Mathematick und Philosophie zu Jena lehrte. Absonderlich rechnet man hieher des *Arnaud* *Nouveaux Elemens de Geometrie*, welche ohne seinen Nahmen zu Paris 1667. heraus kommen. nach diesem in Havge A. 1690. in 8. (21. Bogen) wieder aufgelegt worden. Nach ihm hat sich *Bernhard Lamy* in seinen *Elemens de Geometrie* gerichtet, welche er zuerst zu Paris 1685. in 12, nach diesem eben daselbst 1710. viel vermehrter drucken lassen (21 Bog.), so, daß nicht allein der ganze *Euclides* bis auf die arithmetischen Bücher, sondern auch eine Einleitung zu den Kegelschnitten darinnen enthalten. Es hat auch den ganzen *Euclidem* in einer anderen Ordnung ein Medicus zu Paris, *Petrus Polynier*, in seiner *Geometrie* vorgetragen, welche zugleich mit den Anfangs-Gründen der Arithmetick unter dem Titul: *Elemens de Mathematique* zu Paris 1704. in groß 12. (1 Alph. 4 B.) gedruckt worden. Für anderen verdienen auch ein Lob die *Elemens de Geometrie* Monseigneur le Duc de Bourgogne (a Trevoux 1705. in Reg. 4. 1 Alphabet 7 Bog.), weil darinnen die nöthigen Lehren kurz und deutlich vorgetragen werden. Hieher gehört auch der *Euclides Reformatus*, Den *Angelus de Marchettis* heraus gegeben (Liburni 1709. in 4. 1 Alph. 10 Bog.): die *Nouveaux Elemens de Geometrie* des

P. Morgues und andere dergleichen. Ich habe den Kern des *Euclidis* in den Anfangs-Gründen der Geometrie und fast den ganzen *Euclidem* in meinen lateinischen Elementis dergestalt vorgetragen, daß einer ohne Anstoß zu höheren Sachen schreiben kan, ohne einiges von den bisher genannten Büchern dabey zu lesen, die wir aber deswegen doch nicht ihres verdienten Werthes berauben wollen. Was in dem *Euclide* von der Circul-Kugel- und Cylindrer-Rechnung fehlet, hat *Archimedes* in seinen 2. Büchern *de Sphæra & Cylindro* und dem Büchlein *de Dimensione circuli* ersetzt, daraus *Tacquet* die nützlichsten Lehren unter dem Titul: *Selecta ex Archimede Theoremata* seinen Elementis Geometriæ beugefüget. Eben dieser *Archimedes* hat uns einige Schriften in der höheren Geometrie hinterlassen, nemlich ein Buch *de Spiralibus*, eines *de Conoidibus & Sphæroidibus* und eines *de Quadratura Parabola*. Alle seine Werke nebst den ersten 4. Büchern *Conicorum Apollonii* und den 3. Büchern *Sphæricorum Theodosii* hat *Isaacus Barrow* mit eigenen Demonstrationibus nach andern heraus gegeben. (Londini 1675 in 4. Opera Archimedis 24 Bog. 1 abb. 13; Apollonii 14 Bogen Tabb. 12; Theodosii 6 Bog. Tabb. 3.). Außer den geometrischen Schriften hat *Barrow* noch die Bücher *de æquiponderantibus & insidentibus humido* hinzu gesetzt; aber den *Arenarium* oder die Sandrechnung weggelassen, welche in einer anderen Auflage mit zu finden, die in Italien A. 1685. in fol. herans kommen, davon besondere Umstände in den Actis Eruditorum Anno 1687. pag. 543. & 544. zu finden. Die Werke des
Archi-

Archimedis hat bis auf die Bücher de insidentibus humido Johann Christoph Scurin in die deutsche Sprache übersezt und zu Nürnberg 1670. in fol. (6 Alph. 2 Bog.) drucken lassen.

§. 40. Die alten Geometra betrachten in der höheren Geometrie hauptsächlich die Sectiones Conicas oder Kegelschnitte, nemlich die Parabel, Hyperbel und Ellipsin. Von diesen hat *Apollonius Pergaeus* 8 Bücher geschrieben. Die ersten 4 Bücher *Conicorum Apollonii* sind verschiedene mahl heraus kommen. Unter die besten Auflagen ist zu zehlen diejenige, welche mit den Commentariis Claudii Richardi, eines Jesuiten zu Antwerpen 1655. in fol. das Tageslicht erblicket (Alph. 5 Bog. 19. Tabb. 30.). Dergleichen er auch A. 1645. in einem Werck in fol. über die 15. *Elementa Euclidis* gegeben hat. Das fünfte, sechste und siebente hat Job Alphonsus Borellus, in Acad. Pisana Mathes. Professor, aus einem Arabischen MSC. zuerst heraus gegeben, und mit Anmerkungen vermehret (Florentiae 1661. in fol. 4 Alph. 21 Bog.). Für allen andern behält diejenige den Preis, welche Halley A. 1710. in fol. zu Oxfurt (5 Alph. 16 Bog.) unter folgendem Titul an das Licht gestellet. *Apollonii Pergaei Conicorum libri octo. Priores quatuor cum Lemmatis Pappi & Commentariis Eutocii Græco-Latini. Græce nunc primum prodeuntes ex MSS. Bodlejanis & Savilianis; posteriorum tres ex collatis diversis MSS. Arabicis in Latinum versi. Octavus autem agnito ejus argumento restitutus. Accedunt Sereni Libri duo de Sectionibus Cylindri & Coni Græco-Latini Græce jam primum ex Bibliotheca Regia Parisiensi. Opera & studio Edm.*

Halleji Geometria Professoris Saviliani. Woraus erhellet, daß zugleich des *Sereni* beyde Bücher de Sectionibus Cylindri & Coni dazu kommen, und das achte Buch des *Apollonii* von dem *Halley* ersetzt worden. Ehe *Borellus* des *Apollonii* Bücher, die man vor verloren hielte, heraus gab, hat *Vincentius Viviani* aus der Beschreibung des *Pappi* das fünfte zu restituiren gesucht und seine Arbeit unter dem Titel: *De maximis & minimis Geometrica divinationio in quintum Conicorum Apollonii Pergæi adhuc desideratum*, zu Florenz 1659. in fol. den Geometris mitgetheilet. Gleichwie es aber der Ausgang wies, daß er in seinem Rathen sehr glücklich war; so trieb ihn dieses an, eine vor langer Zeit schon angefangene Arbeit fortzusetzen, und den Verlust, den die Geometrie an des *Aristai* Schriften erlitten, wieber zu ersetzen. Daher kam endlich A. 1701. zum Vorschein: *De Locis solidis secunda divinationio Geometrica in quinque libros injuria temporum amissos Aristai senioris Geometre* (Florentiæ in folio, 3 Alph. 15 Bog. Text, $2\frac{1}{2}$ Bogen Kupfer und viel Holzschnitte). Es können aber die Schriften des *Viviani* denenjenigen dienen, welche nach Art der alten Geometrarum ihre Demonstrationes einrichten wollen: welche Arbeit nicht zu versäumen, indem sie nicht allein den Verstand exerciret, sondern man auch aus Betrachtung der Figuren öfters einige Sachen leichter als durch Rechnung haben kan, gleichwie wir heute zu Tage insgemein durch Rechnung leichter finden, was aus Betrachtung der Figuren durch große Umwege gesucht werden müste, ja öfters gar nicht zu finden wäre. Und eben

eben hierzu dienet *Laurentii Lorenzini*, der die Kunstgriffe nach Art der Alten zu demonstrieren, seinem Lehrmeister *Viviani* wohl abgelernt, *Exercitatio Geometrica de dimensionibus omnium conicarum sectionum, curvæ parabolicae, curvæ superficiei conoidis parabolici &c.* (Florentiæ 1721. in 4. Bog. 20. Tabb. zn. 14.) die er im Gefängniß versertiget, wo er nichts erfuhr, was die Mathematici vorhatten, und darinnen er vieles nach Art der Alten heraus gebracht, was die neuern Mathematici durch die Differential- und Integral-Rechnung gefunden.

§. 41. Wenn einer Lust hat, die Eigenschaften der Kegelschnitte, nach Art der Alten erwiesen, sich bekannt zu machen, dem wäre kaum zu rathen, daß er sich in die unnütze Weitläufigkeiten des *Apollonii* und seines Commentatoris *Richardi* einliesse; sondern er kan mit grösserem Nutzen des um die Geometrie wohlverdienten Jesuitens, *P. Gregorii a S. Vincentio Opus Geometricum Quadratura Circuli & Sectionum Coni* lesen: welches zu Antwerpen 1647. in fol. (14 Alph.) heraus kommen. Denn unerachtet dieses Werck auch sehr weitläufig ist, so sind doch seine Demonstrationes viel leichter, und ist in diesem Wercke zu den neuern Erfindungen ein guter Grund geleyet worden. Zu geschweigen, daß noch viele andere Sachen ausser den Kegelschnitten darinnen enthalten. Der unvergleichliche *Leibnitz* bekennet selbst (in *Act. Erud.* A 1691. p. 438.), daß ihm bald ein grosses Licht in der höheren Geometrie aufgegangen, als er nebst des *Hugenii* vorzüglichem Wercke *de Horologio Oscillatorio* und des

Dettonvillei oder *Pascalii* Briefen den *Gregorium* & *S. Vincentio* gelesen.

§. 42. Zwar verdienet auch der Frankose, *Claudius Mydorgius*, gelobet zu werden, welcher so wohl die Theoriam als Praxin der Regelschnitte in einem besondern Werke deutlich vorgerragen, welches 1632, und also 15. Jahr eher als des *Gregorii* & *S. Vincentio* zu Paris in fol. heraus kommen: allein es wird wohl das letztere den Preis vor dem ersten bey allen Kennern behalten. Sonst hat in neueren Zeiten *Ph. de la Hire* *Sectiones Conicas in 9. libros distributas* denen Liebhabern der Geometrie mitgetheilet (Paris 1685. in fol. 2 Alph. 18 Bog.) in welchem nicht allein alles, was im *Apollonio* zu finden, sondern auch noch einige andere Sachen auf eine neue Art, jedoch nach der Manier der alten Geometrarum aus der blossen Betrachtung der Figuren ohne einige Rechnung, erwiesen worden.

§. 43. Denen Anfängern würde dieses Werk zu weitläufig seyn, nicht minder, als die bisher genannten alle. Derowegen hat er 6 Jahre vorher ihnen zu Liebe *Nouveaux Elemens de Sections Coniques, les Lieux geometriques, la Construction des Equations* zu Paris in 12. (21 Bogen) heraus gegeben, für welche sich auch des *Ozanam* *Traité de Lignes du premier genre* wohl schicket (a Paris 1687. in 4. Alph. 15 Bog. Tabb. 35.). Eben ihnen zu gefallen hat *Jacobus Milnes* aus dem grossen Werke des *de la Hire* einen Auszug gemacht, welcher zu Orfurt 1702. in 8. gedrucket worden unter dem Titul: *Sectionum Conicarum Elementa nova methodo monstrata* (12 Bog. Text, 19 Bog. Kupfer) 1.

Kupfer), hernach aber 1712. vermehret und verbessert zu Oxfurt wieder heraus kommen (15 Bog. Tabb. 19). Und dieses behält unter allen Compendiis den Preis, wenn sich einer zu der höheren Geometrie vorbereiten will. Unvollständiger ist der Tractat, den *Poivre* in französischer Sprache von den Regel- und Walzenschnitten heraus gegeben (A. 1704. in 8. 5 Bog. 8 Tabb.). Den Anfängern zum besten hat auch ein Compendium von den Kegelschnitten unter dem Titul: *Compendio delle Sezioni Coniche d' Apollonio Guido Grandus*, zu Florenz A. 1722. in 12. (6½ Bogen 7 Tabb.) drucken lassen, welches *Christian August Hausen* ins Lateinische übersezt. Sonst hat auch *Nicolaus de Martino*, Professor Matheseos zu Neapel, A. 1734. in 8. (Tom. I. 21 Bog. Tabb. 8. Tom. II. 22 Bog. Tabb. 8.) *Elementa Sectionum Conicarum* heraus gegeben, die er in einem Context fort geschrieben, ob er gleich die Sachen demonstiret. Er zeigt zugleich den Nutzen der Kegelschnitte in der Constructione problematum Solidorum.

§. 45. Wie man die Kegelschnitte auf einer ebenen Fläche auf verschiedene Art beschreiben kan, hat nach dem *Mydorgio* in dem andern Theile seines vorhin (§. 14.) gerühmten Werkes, in einem besondern Tractatu de organica Conicarum Sectionum in plano descriptione (Lugd. Batav. 1646. in 4. 12 Bog.) der berühmte Professor zu Leyden, *Franciscus a Schooten* gewiesen, welcher auch mit unter seinen *Exercitationibus Mathematicis* zu finden. Es sind dieselben unter

unter dem Titul: *Exercitationum Mathematicarum Libri quinque* zu Leyden 1657. in 4. (3 Alph.) heraus kommen, und handeln von Sachen, die zu der Arithmetick und Geometrie gehören. Sie enthalten über dieses *Apollonii Pergæi loca plana restituta*, ausser dem vorerwehnten Tractat *de Sectionum conicarum descriptione*, allerhand problemata algebraica, und *Christiani Hugonii Ratiocinia de Ludo aleæ*. Ungemein weiter aber als er gehet *Colinus Mac. Lauvain* in seiner *Geometria organica sive descriptione linearum universalium* (Londini 1720. in 4. 19 Bog. 12 Tabb.) wovon unter den algebraischen Schriften ein mehreres wird zu erinnern seyn.

§. 45. Bisher habe ich einige genennet, welche des *Apollonii* Lehren theils verbessert, theils vermehret. Allein es fehlet auch nicht an solchen, welche mit den Erfindungen des *Archimedis* ein gleiches gethan. *Johannes Kepler* hat in seiner *Nova Stereometria Solidorum Vinariorum, imprimis Austriaci* (Lincii 1615. in fol. pag. 28) hiervon einen Anfang gemacht, darinnen unter andern anzutreffen *Supplementum ad Archimedem de Stereometria figurarum, Conoidibus & Spheroidibus proxime succedentium*. Eben dieses Werk hat er folgendes Jahr von neuem in deutscher Sprache zu Linz drucken lassen, (in fol. 28 Bog.) und hin und wieder verändert, auch um etwas vermehret. Der Titul des Buches ist: *Auszug der ubralten Messe-Kunst Archimedis und derselben neulich in Latein ausgegangener Ergänzung* &c. Weil er aber nicht mehrere Arten der Körper betrachtete, als zu der Wirtskunst dienen können; so wurde *Bonaventura*

Cavalarius, Ordinis Jesuitarum S. Hieronymi, das durch aufgemuntert, noch weiter zu gehen, und den Inhalt mehrerer Körper zu suchen, als *Archimedes* und *Kepler* gethan, wie er selbst bekennet in der Vorrede zu seiner *Geometria indivisibilibus continuorum nova ratione promata* (Bononiae 1653 in 4. 3 Alph. 1 Bog.). Gleichwie aber *Kepler* in Erweisung des *Archimedischen* Lehrsatzes (part. 1. theor. 2) daß der Circul sich zum Quadrate des Diametri wie 11 zu 14 verhalte, den Circul in lauter Ausschnitte zertheilet, deren Grundlinien ein unendlich kleiner Theil der Peripherie ist, und den Triangel in lauter kleine Triangel, die einerley Höhe mit dem grossen, aber einen unendlich kleinen Theil von seiner Grundlinie zu ihrer haben; so hat er diese Art zu demonstrieren überall gebraucht, und unter dem Titul: *methodi indivisibilium*, bekannt gemacht. Er hätte aber besser gethan, wenn er die Elemente der Figuren mit *Keplern* für Figuren gehalten hätte, deren eine Abmessung eine endliche, die andere aber eine unendlich kleine Linie ist, als daß er sie Linien, und die Elemente der Körper Flächen genennet, weil dieses vielen ohne Noth Anstoß gegeben. Es hat aber aus eben dem Orden *Stephanus Angelus* sich sonderlich angelegen seyn lassen, den *Methodum indivisibilium* zu excoliren und dessen Nutzen in der That selbst zu zeigen. Wir haben von ihm *Problemata geometrica 60. ciniconos, sphaeras, superficies conicas sphaericasque* (Venetiis 1658. in 4. 1 Alph. 14 Bog.): *De infinitis parabolis, de infinitisque solidis ex variis rationibus ipsarum partiumque earundem genitis* (Venet. 1659. & 1663. in 4. 2 Alph.

22 Bog.) *Miscellaneum hyperbolicum & parabolicum*, darinnen er insonderheit de Centris gravitatis hyperbolæ & partium ejusdem handelt (Venet. 1659. in 4. 1 Alph. 5 Bog.); *Miscellaneum Geometricum*, darinnen er von der Ausmessung und dem centro gravitatis verschiedener Figuren handelt (Venet. 1660. in 4. 7 Alph. 11 Bog.). *De infinitorum spirallium spatiorum mensura opusculum geometricum* (Ven. 1660. in 4. 18. Bog.). *De infinitarum cochlearum mensuris ac centris gravitatis* (Venet. 1661. in 4. 16 Bog.) und endlich *de Superficie ungula & de Quartis Liliorum parabolicorum & cycloidalium Tractatus duo geometrici* (Venet. 1661. in 4. 1 Alphab. 19 Bog.). Seinen Fußstapfen ist Gregorius a S. Vincentio gefolget, von dem oben (§. 42.) geredet worden.

§. 46. Evangelista Torricellius, des Groß-Herzogs zu Florenz Mathematicus, hat sich gleichfalls vorgenommen, die Archimedische Erfindungen in der Geometrie zu erläutern und zu vermehren. Solches erhellet aus seinen *Operibus Geometricis de Solidis Sphæralibus, de motu, de dimensione Parabolæ, de solido Hyperbolico cum appendicibus de Cycloide & Cochlea* (Florentiæ 1664. in 4. 2 Alph.).

§. 47. Der Jesuit, Paulus Guldinus hat in seinem Werke *de Centro gravitatis* eine neue Manier angewiesen, den Inhalt der Figuren und Körper aus ihrem Mittelpuncte der Schwere zu finden, welche Dechales in seinem *Mundo Mathematico* (Tom. 2. lib. II. Geom. pract. f. 124. & fgg.) den Anfängern gar deutlich vorträget. Sie wird unter die vornehmsten Erfindungen des vorigen Jahrhunderts gerechnet;

rechnet; wiewol aus einer Vorrede des Pappi erhellet, daß sie auch den Alten müsse bekannt gewesen seyn, ob wir sie gleich nirgends beschrieben finden. Des Guldini Werck ist in vier Bücher eingetheilet, welche alle zu Wien in fol. gedruckt worden, das erste 1635. (4 Alph. 21 Bog.), das andere, dritte und vierte 1640. (4 Alph. 14 Bog.). Bey dem ersten Buche ist mit angehängt *Differatio Physico-Mathematica de Motu terre ex mutatione centri gravitatis ipsius proveniente*. Ueber dieses findet ihr einen grossen Anhang, darinnen *Tabula numerorum quadratorum & Cuborum decies millium* enthalten, und ihre Ausrechnung, wie auch ihr Gebrauch deutlich angewiesen wird. Es hat aber Guldinus seine Methode nur auf die Körper und Figuren appliciret, deren Ausmessung aus dem *Euclide*, *Archimede* und *Keplern* schon vorhin bekannt war.

§. 48. Die Lehre von den krummen Linien hat *Isaacus Barrow* in seinen *Lectiōibus Geometricis* sehr erweitert, und viele Eigenschaften, die vorhin nur von einigen Linien erwiesen worden, überhaupt von allen erwiesen. Es sind selbige zugleich mit seinen *Lectiōibus Opticis* zu London 1674. in 4. gedruckt worden. (Jene haben 21 Bog. Text, 13 Tabb. Kupfer; diese 15 Bog. Text, 19 Tabb. Kupfer.). Nachdem der Herr von Leibnitz seine Differentialrechnung erfunden; lässet sich alles viel leichter und allgemeiner zeigen.

§. 49. Ja es ist überhaupt dieses zu merken: Nachdem nicht allein die Algebra von dem *Vieta* und *Carcesio* in einen solchen Stand gesetzt worden, daß man sie mit Nutzen in der Geometrie hat anbrin-

anbringen können; sondern auch der unvergleichliche Leibnitz seine Differential- und Integral-Rechnung erfunden, und sonderlich Herr Johannes Bernoulli die letztere durch seine eigene Erfindungen sehr erweitert; hat die höhere Geometrie auch ein ganz anderes Aussehen gewonnen, als sie vorhin gehabt, und dürfen sich die Anfänger, wenn sie nur meine Anfangs-Gründe der Geometrie, absonderlich die lateinischen, wohl inne haben, mit Lesung Feines einigen von allen den bisher erzehleten Büchern aufhalten. Vielmehr wenn es ihnen ein Ernst ist, in der höheren Geometrie etwas rechtes zu thun, müssen sie sich bald auf die Algebra des *Cartesii* und die neuere des Herrn von Leibnitz legen, welche beyde ich sowohl in den Anfangs-Gründen, als auch absonderlich in meinen *Elementis Analyseos* ausführlich abgehandelt, damit sie die neueren Schriften der Geometrarum verstehen, darinnen durch Algebraische Rechnungen alles viel leichter und vollkommener ausgeführet wird. Von diesen Schriften aber will ich in dem folgenden Capitel reden. Doch muß ich noch erinnern, daß es ihnen sehr dienlich seyn werde, wenn sie nach diesem entweder den *Gregorium a S. Vincentio*, den *Vivani*, *de la Hire* oder einen anderen dergleichen Autorem lesen, welcher nach Art der Alten aus Betrachtung der Figuren die Sache erweist, damit sie die rechte Art zu demonstrieren, die in anderen Wissenschaften wieder angebracht werden kan, einsehen mögen. Es wird aber sehr dienlich seyn, wenn sie die Demonstrationen so ordentlich einrichten, wie ich in meinen

Elemen-

Elementis Matheseos gethan, von andern Autoribus aber eben nicht zu geschehen pfleget.

§. 50. Ausser den Kegelschnitten war ben den Alten das so genannte Problema Deliacum berühmet, wie man nemlich zwischen zwey gegebenen Linien zwey mittlere Proportional-Linien finden soll: zu welchem Ende verschiedene krumme Linien erdacht worden, welche *Pappus Alexandrinus* in seinen Collectionibus Mathematicis von dem Untergange beschreyet. Die zwey ersten Bücher von diesem Werke sind verlohren: die sechs letzteren aber zu Bononien 1660. in fol. (4 Alph. 11 Bog.) heraus kommen. Darinnen findet man verschiedene Auflösungen der Delischen Aufgabe, die Eintheilung des Winkels in drey gleiche Theile, die Lehre von den Figuren, die einerley Umfang haben und *isoperimetra* genennet werden, von den Circuln auf der Kugelfläche und von anderen zur Geometrie, auch von einigen zur Mechanick gehörigen Sachen.

§. 51. Es hat ausser diesen bisher erzehleten Büchern noch verschiedene andere in der Geometrie, welche von besonderen Materien handeln. Der gleichen sind 1. *Christiani Hugonii* liber de Circuli magnitudine (Haage 1644. In 4. 5 Bog.) 2. *Ludolphi a. Ceulen*, de circulo & adscriptis liber ex vernacula in Latinam translatus & annotationibus illustratus a Willebrordo Snellio (Lugd. Batav. 1619 in 4. 8 Bog.) 3. Eiusdem fundamenta Arithmetica & Geometrica cum eorundem usu in variis problematis Geometricis partim solo linearum ductu, partim per numeros irrationales & tabulas Sinuum & Algebram solutis, a Snellio itidem Latine versa (Lugd. Batav. 1615. in 4. (Wolfs Mathes.) E 1 Alph.

1 Alph. 16 Bog.). 4. Les dix Livres des Theoremes Geometriques du Comte de Pagan (a Paris 1654. in 8. 1 Alph. 6 Bog.), in welchen von den Proportional-Linien, den Kegelschnitten, der Elliptischen Bahn der Planeten, von regulären Festungen und von der Schiffart gehandelt wird. 5. *Ismaëlis Bulialdi* de lineis spiralibus demonstrationes novæ (Paris 1657. in 4. 8 Bog.). 6. Ejusdem Exercitationes Geometricæ circa demonstrationes per inscriptas & circumscriptas figuras, circa Conicarum sectionum quasdam propositiones & de prismatibus (Paris 1657. in 4. plag. 6.). 7. *Christiani Hugonii* Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipsis & circuli ex dato propositionum gravitatis centro (Lugd. Bat. 1651. in 4. 6 $\frac{1}{2}$ Bog.). 8. *Jacobi de Billy*, eines Jesuiten Tractatus de proportionem harmonica. 9. Eines anderen Jesuiten, *Antonii Laloveræ*, Geometria veterum promota, seu libri septem de Cycloide (Tolosæ 1660.). 10. *Ferdinandi Ernesti*, *Comitis ab Herberstein* Diatome circularum seu specimen Geometricum, quo Lunularum, Curvilinearum aliorumque Spatiorum propositiones demonstrat (Pragæ 1710. in 8. 1 Alphab. Tab. 1.). 11. *Vincentii Viviani* Exercitatio mathematica de formatione & mensura fornicum (Florentiæ 1691. in 4. 6 Bog.). 12. *Joh. Baptiste Palmæ* in Geometriam Exercitationes (Neapoli 1689. in 4. 16 Bog.), darinnen 100 Sätze, welche die gemeine Geometrie betreffen, enthalten. 13. *Apollonii Pergæi* de Sectione rationis libri duo ex Arabico Latine versi & de sectione spatii libri duo restituti ab *Edmundo Halley*. (Oxonii 1706. 1 Alph. 3 Bog.), welches Werk ein grosses Licht in der Analysis der Alten giebet.

14. *H. Scharpes* Geometry improved. 1. by a large and accurate Table of Segments of Circles, 2. a concise Treatise of Polyhedra, (Lond. 1718 in 4. 17 Tabb.) Darinnen er die Lehre der gemeinen Geometrie von den Polyhedris erweitert und die Circulrechnung erleichtert.

Das 3. Capitel.

Von den Algebraischen Schriften.

§. 52.

Die Alten gebrauchten die Algebra bloß zur Auflösung Arithmetischer Aufgaben, und hatten keine bequeme Zeichen. Das älteste Buch, so wir von dieser Materie haben, ist des *Diophanti*, welcher zu Alexandrien im anderen Jahrhundert nach Christi Geburt gelebet. Er hat zwar 13 Bücher von der Algebra aufgesetzt; allein es sind nur 6. heute zu Tage vorhanden, welche *Xylander* aus dem Griechischen in das Lateinische übersetzt, und hernach *Casspar Bachet* mit seinen Commentariis vermehret. Sie sind A. 1575. das erste mahl gedruckt worden. *Bachet* hat A. 1621. zu seiner Auflage den griechischen Text mit dazu gesetzt, und den *Diophantum* besser erkläret, wo ihn *Xylander* nicht recht verstanden hatte. Ehe aber etwas von dem *Diophanto* heraus kam, hat *Lucas Pacioli*, oder wie er mit seinem Ordens-Nahmen genennet wird, *Lucas de Burgo Sancti sepulchri*, ein Minorite, von Geburt ein Italiäner, A. 1494. zu Venedig ein Buch drucken lassen unter dem Titul: *Summa Arithmetica & Geometria proportionumque & propor-*

tionalitatum, (wovon S. 8. geredet worden), darinnen er auch in dem achten Buch der Arithmetick mit wenigem die Algebra beschreibet, wie sie von den Arabern gelehret worden.

S. 53. Unsere Deutschen haben auch dazu bald Lust gehabt, so gar, daß sich auch die Rechenmeister, als Adam Riese, mit Fleiß darauf gelegt. Denn A. 1524. hat Christoph Rudolff von Zauer in Schlesien, die Algebra unter dem Nahmen der Coß in deutscher Sprache heraus gegeben, welche nach diesem Michael Stiefel, aus Esslingen bürtig, ein Prediger in Preussen, mit vielen Anmerkungen von neuen zu Königsberg A. 1553. in 4. (5 Alph. 13 Bog.) wieder auflegen lassen. Der Titul davon ist: Die Coß Christoph Rudolffs mit schönen Exempeln der Coß durch Michael Stiefel gebessert und sehr vermehret. Eben derselbe hat in seiner *Arithmetica integra* in dem dritten Buche die Algebra kurz erkläret, wiewohl er nicht weiter als *Frater Lucas* gegangen. Nemlich alle sind zur selbigen Zeit nur bey der Auflösung der Quadratischen Gleichungen geblieben, bis *Scipio Ferreus*, ein Italiäner, die Regeln für die Cubischen erfunden, welche insgemein *Regula Cardani* genennet werden, weil sie *Cardanus* in seiner *Arte Magna*, quam vulgo *Cossam* vocant, seu *Regulis Algebrae* A. 1545. zuerst öffentlich bekannt gemacht, und A. 1579. *Raphaël Bombelli* in seiner Algebra, die er Italiänisch geschrieben, aus des *Ludovici Ferrariensis* Erfindung angewiesen, wie man die Quadrato-quadratischen Gleichungen durch Hülfe der Cubischen zu zwey quadratischen reduciren kan; wobey man

es

es auch noch bis auf diese Stunde bewenden lassen.

§. 54. Um das Jahr Christi 1590. hat *Franciscus Vieta* der Algebra ein neues Licht gegeben, als er zuerst die Rechnung mit Buchstaben und eine allgemeine Regel aus allen Arithmetischen Gleichungen die Wurzel so genau zu ziehen, als man verlangt, erfunden. Es gehören hieher aus seinen Wercken, wovon unten ausführlicher wird geredet werden, 1. *Isagoge in Artem Analyticam*, darinn die Rechnung mit Buchstaben erkläret wird. 2. *Ad Logisticen speciosam Notæ*, darinnen der Nutzen dieser Rechnung mit Arithmetischen Exempeln und anderen aus der gemeinen Geometrie gezeigt wird. 3. *Zeticorum libri quinque*, darinnen allerhand Fragen aus der Rechenkunst und gemeinen Geometrie aufgelöst werden. 4. *De equationum recognitione & emendatione*, darinnen von der Einrichtung oder Reduction der Gleichungen gehandelt wird. 5. *De numerosa Potestatum ad exegesis resolutione*, darinnen die allgemeine Regel gegeben wird, aus allen Arithmetischen Gleichungen die Wurzel zu ziehen.

§. 55. Die Art mit Buchstaben zu rechnen, wie sie vom *Vieta* erfunden worden, hat *Guilielmus Oughtred*, ein Engelländer, in seinem *Clave Mathematica* behalten, nur daß er die Dignitäten fürher zu bezeichnen angewiesen. Dieses Buch ist das erste mahl 1631. heraus kommen, aber A. 1693. zu Oxfurt (12 Bogen) das fünfte mahl mit einigen andern seinen Schriften wieder aufgelegt worden. Er appliciret die Regeln auf allerhand Exempel, und zeigt, wie durch die Buchstaben-Rechenkunst

in der gemeinen Geometrie Lehrlätze zu erfinden und Aufgaben aufzulösen sind. Er handelt auch nach *Vieta* Exempel von Ausziehung der Wurzel aus allen Arithmetischen Gleichungen so nahe, als man verlangt.

§. 56. *Thomas Harriot*, auch ein Engelländer, welcher A. 1621. zu London gestorben, hat *Artis Analyticae Praxin ad aequationes algebraicas novas, expedita & generali methodo resolvendas* geschrieben, welche *Waltherus Warner*, ohne seinen eigenen Namen zu melden, A. 1631. in fol. zu London heraus gegeben (2 Alph. 2 Bog.). Darinnen hat er *Vieta* Rechnung sehr erleichtert und zuerst in diese Forme gebracht, die sie bis auf gegenwärtige Stunde hat. Er hat nemlich nicht allein die kleinen Buchstaben an statt der grossen eingeführet, sondern (welches das Hauptwerck ist) die Multiplication durch Verknüpfung der Buchstaben, ohne ein Zeichen, als ab , und der Dignitäten durch a , aa , aaa , &c. zuerst eingeführet, wofür *Cartesius* noch füglich $a.a^2.a^3$ &c. sezet, wie *Kepler* in seiner *Harmonica Mundi* erinnert hatte, daß es nach dem Exempel der Astronomorum geschehen könnte, und wovon den Grund *Stiefel* in seiner *Arithmetica integra* schon längst vor *Vieta* gezeigt. Ueber dieses hat auch *Harriot* den Ursprung der Gleichungen durch die Multiplication und ihre daraus fließende Eigenschaften gelehret: wiewohl man hiervon in *Faulhabers* Schriften schon Spuren findet, dessen Verdienste in der Algebra zur Zeit noch nicht genug erwogen werden, weil seine Schriften nicht wohl zusammen zu haben sind. Mit einem Wort, er hat die

die Regeln der Algebra in den Zustand gesetzt, wie wir sie jetzt haben; aber auf keine Exempel weder in der Arithmetick, noch Geometrie appliciret.

§. 57. *Cartesius* gab A. 1637. zuerst seine *Geometrie* in französischer Sprache heraus, welche hernach von dem *Francisco a Schooten* in die lateinische über-
setzet und mit weitläuftigen *Commentariis* vermeh-
ret, auch mehr als einmahl von neuem wieder auf-
geleget worden. Ich besitze sein Buch von der Auf-
lage, die A. 1659. zu Amsterdam in 4. (5 Alph.
8 Bog.) heraus kommen. Man findet in diesem
Wercke ausser des *Cartesii Geometrie*, die nur in 12.
Bogen bestehet, *Florimundi de Beaune* kurze Anmer-
ckungen und *Francisci a Schooten* *Commentarios* dar-
über; *Joh. Huddenii* Briefe de reductione æquatio-
num und de maximis & minimis; *Erasmi Bartholini*
Principia Matheseos universalis, darinnen die Buch-
staben-Rechenkunst ausführlich abgehandelt wird;
Joh. de Witt zwey Bücher de elementis curvarum,
oder von den Kegelschnitten und *Francisci a Schooten*
*Tractatum de concinandis demonstrationibus ex cal-
culo algebraico*. Allein da von diesen *Commentato-
ribus* bey weiten noch nicht alles deutlich und aus-
führlich erkläret worden, was den Text des *Cartesii*
zu verstehen erfordert wird; so hat erst kürzlich ein
sehr gelehrter Jesuiter, *Claude Rabuel*, diesem Man-
gel völlig abgeholfen in seinen *Commentaires sur la*
Geometrie de M. Descartes, welcher im vorigen 1730.
Jahre zu Lyon in 4. reg. (3 Alph. 6 Bog. Tab. 23.)
nach seinem Tode gedruckt worden und allen Lieb-
habern der Algebra zu recommendiren sind. *Carte-
sius* hat die Algebra völlig behalten, wie sie bey

Harriot zu finden, unerachtet er seiner nicht im geringsten gedencket, und gleichwie vor ihm *Oughtred* in seinem *Clave Mathematica* (§. 56. und *Martinus Ghetaldus* in seinen 5. Büchern *de Resolutione & Compositione Mathematica* (Romæ 1630. in fol. 2 Alph. 15 Bog.) die Vietaische Rechnung auf die gemeine Geometrie appliciret und die quadratischen Aequationen geometrisch construïret; so hat *Cartesius* die Harriotische auch in der höheren angebracht und auch die höheren Aequationen, sonderlich die Cubischen und biquadratischen durch die Parabel und einen Circul zu construïren angewiesen: für welche zwey letztere eine allgemeine Regel in allen Fällen (Denn nach des *Cartesii* Regel muß das andere Glied in der Aequation fehlen, oder erst weggenommen werden). *Thomas Backer* in seinem *Clave Geometrica catholica*, der in lateinischer und englischer Sprache zu London 1684. in 4. heraus kommen (1 Alph. 10 Bog. Tabb. 10) angiebet. Allein den wahren Grund der geometrischen Constructionen durch Verknüpfung zweyer geometrischen Orter, den *Cartesius* dem *Menechmo* abgelernt, als welcher durch zwey Parabeln zwey mittlere Linien in einer steten Proportion mit zwey gegebenen gefunden, aber verschwiegen, und dadurch er auch seine Regel heraus gebracht, hat *Renatus Slusius* in dem andern Theile seines *Mesolabi*, welches das andere macht mit dem andern Theile und vielen *Miscellaneis* zu Eütrich 1668. in 4. heraus kommen (24 Bog.), gezeigt. In seinen *Miscellaneis* hat er die *Analysin speciosam* oder neuere Algebra auf die Quadraturen der krummen Linien, auf die Fragen de Ma-
ximis

ximis & Minimis, auf die Methode den Wendungspunct zu finden, auf den Methodum centrobaricam *Guldini* &c. appliciret, dergleichen Arbeit auch andere, als *Fermatius* in seinen *Operibus Mathematicis Tolosæ* 1679. in fol. und *Robervall* in den *Divers Ouvrages de Mathematique & Physique par Mrs. de l'Academie Royale des Sciences*, ingleichen *Barrrow* in seinen *Lecttionibus Geometricis* mit Ruhm verrichtet.

§. 58. Bisher habe ich von denjenigen geredet, welche die gemeine Algebra zu verbessern sich angelegen seyn lassen. Nun muß ich auch von solchen Büchern reden, welche die Erfindungen anderer zum Nutzen der Anfänger deutlich erkläret. *Johannes Kersey* ein Engelländer, hat *Elementa Algebrae* in englischer Sprache zu London 1671. in folio (10 Alph. 10 Bog.) heraus gegeben. Darinnen wird die Buchstaben-Rechenkunst und die Beschaffenheit der Gleichungen erkläret, und werden alle Regeln mit vielen Exempeln erläutert. Man findet auch den ganzen *Diophantum* darinnen und vieles aus *Ghetaldi* Werke de resolutione & compositione mathematica.

§. 56. Die Regeln der gemeinen Algebra hat ohne Exempel *Gerhard Kinckhuysen* gar deutlich erkläret in seiner *Algebra ofte Stel Konst* (Harlem 1661. in 4. 14 Bog.). In seinem *Grondt der Meetkonst, ofte Verklaringe der Kegel-Sneeden* (Harlem 1684. in 4. 12 Bog.) hat er die vornehmsten Eigenschaften der Kegelschnitte durch die Algebraische Rechnung erwiesen, und in seiner *Geometria ofte Meetkonst* (Haerlem 1663. in 4. 22 Bogen) hat er aller-

hand geometrische Aufgaben aus der gemeinen und höheren Geometrie aufgelöset und artige Constructiones davon gegeben, auch in dem Anhange die geometrischen Constructionen der Cubischen Aequationen erläutert. Diese Schriften verdienen von den Liebhabern der gemeinen Algebra gelesen zu werden. Was sein Landsmann, *Abraham de Graaf* in dieser Sache rühmliches verrichtet, soll unten bengebracht werden. Const rühmet man auch wegen der vielen Exempel des *Jacob Wessenaer Stel-Konst.*

§. 60. Was *Kersey* unter den Engelländern gethan, hat *Jean Prestet* bey den Frankosen zu verrichten sich vorgenommen, und zwar in der andern Auflage seiner *Nouveaux Elemens de Mathematique* (a Paris 1694. in 4. Tom. I. 3 Alph. 8 Bogen, Tom. II. 2 Alph. 18 Bog.), in welchem Werke er nicht allein alle Regeln, die bisher in der gemeinen Algebra erfunden worden, weitläufig erkläret, sondern auch alle zu der Arithmetica Theoretica gehörige Lehrsätze und Aufgaben durch die Algebraische Rechnung ausführet, und zugleich alle Aufgaben des *Diophanti* und *Vieta* nach der neueren Art des *Harriot* und *Cartesii* auflöset. Allein der Application der Algebra auf die Geometrie enthält er sich ganz und gar. Es verdienet aber dieses Buch hauptsächlich um der Diophantischen Aufgaben willen fleißig gelesen zu werden, weil sie in der höheren Analysis des Herrn von Leibnitz mehr Nutzen haben, als man sich insgemein einbildet: wie der Herr von Leibnitz selbst (in *Actis Erudit. Lips. A. 1702. p. 219.*) erinnert und augenscheinlich

lich erweist. Doch weil der Autor wegen alzuvieler Weitläufigkeit den Anfängern verdrüsslich fällt, so hat ihnen zum besten, der durch verschiedene Schriften bekannte und mit einem guten Verstande begabte *Pièrre de l'Oratoire in Frankreich, Bernhard Lamy*, nach seiner Art, einen sehr deutlichen Auszug daraus gemachet, welcher unter dem Titel: *Elemens de Mathematique* in Frankreich und Holland zu verschiedenen mahlen heraus kommen. Die letzte Pariser Edition 1704. in Reg. 12. (1 Alph. 7 Bog.) ist vermehrter als die anderen und nachdem in Holland wieder nachgedruckt worden. Allein zu den Diophantischen Rechnungen findet man in diesem Buche keine Anweisung.

§. 61. Wer nicht allein in der Harriottischen, sondern zugleich der Diophantischen Rechnung sich mit Fleiß üben will; dem kan, nachdem er entweder den *Lamy*. oder den ersten Theil meiner Anfangs-Gründe in der Algebra durchstudiret, *Ozanam* in seinen *Nouveaux Elemens d'Algebre*, (a Amsterdam 1703. in Reg. 8. 1 Alph. 21 Bog.) ein völliges Genügen thun. Ich recommendire vorher den *Lamy* oder ein anderes gleichgültiges Buch zu lesen, weil der erste Theil aus lauter Regeln bestehet, ohne einige Application, damit ein Anfänger überhäufet und verdrüsslich gemachet wird. Es fehlet diesem Buche die Application der Algebra auf die Geometrie, welche er in dem anderen Theile zu zeigen versprochen, der aber zur Zeit nicht heraus kommen, auch nach dem Tode des Autoris nicht mehr zu hoffen. Doch ist dieser Abgang einiger massen dadurch ersetzt, daß der Autor schon vorhin 1687. mit dem

Traité des lignes du premier genre (§. 18 c. 2.) zugleich seinen *Traité des Lieux Geometriques* (8 B. Tabb. 12.) und *Traité de la construction des Equations* (12 Bog. Tabb. 9.) heraus gegeben. Diese beyden Tractate verdienen wegen ihrer sonderbaren Deutlichkeit in dieser Materie gelesen zu werden. Und nimmet mich Wunder, warum man dieselben in Holland nicht nachgedruckt, da man sonst alle übrige Werke dieses gelehrten Mannes daselbst von neuem aufgelegt. Doch ist nicht zu leugnen, daß, wer die allgemeine Methode, wie ich sie in meinen Anfangs-Gründen vorgetragen, inne hat; sich ohne Noth über diese Bücher machen würde. Zwen Tractate von gleichem Nahmen hat auch *de la Hire* zu den oben angeführten *Elemens des Sections Coniques* angehängt, die gleichfalls ihr Lob verdienen.

§. 63. Da aber aus gedachten Tractaten die Liebhaber der Algebra nur erkennen, wie man die Algebraischen Aequationen nach dem Exempel des vortreflichen *Slusii* durch Verknüpfung der Geometrischen Orter construiren kan, keinesweges aber sich in Auflösung Geometrischer Exempel durch die Algebra zu üben Gelegenheit bekommen: so können sie auch in diesem Stücke völlig veranüget werden, wenn sie die *Arithmetica universalis* des vortreflichen *Newton* (Cantabrigiæ 1707. in 8. 1 Alph.) durchg. hen, darinnen sie nicht allein einen ziemlichen Vorrath auserlesener Exempel, sondern auch einige neue Regeln finden, die sie anderswo vergebens suchen. Es hat aber diese *Elementa Algebrae* ohne des Autoris und seinen Nahmen *Guil. Whiston*, Damahlis Matheseos Professor *Lucasianus* in Cambridge

bridge zum gemeinen Nutzen zum Druck befördert. A. 1722. sind sie von neuem (Londini in 8. 22 Bog.). heraus kommen, darinnen die Ordnung der Aufgaben in etwas geändert und *Whistons* Vorrede nebst *Halleji methodo extrahendi radices ex æquationibus per approximationem* weggelassen worden. Es wäre nicht undienlich, wenn ein geschickter Kopf einen Commentarium darüber schriebe, und die schweren Puncte erläuterte: wie Herr *Gravesande* schon öffentlich erinnert und in seinen *Elementis Matheseos universalis* (Lugduni Batav. 1727. in 8. 16 Bogen Tabb. 4.) eine Probe davon geben.

§. 64. Die Ausziehung der Wurzel aus allen Arithmetischen Aequationen hat *Josephus Raphson* in seiner *Analysi Aequationum Universalis*, welche zum andern mahle mit seinem *Conamine Metaphysico de Spatio reali seu ente infinito* zu London 1702. oder vielmehr 1697. in 4. gedruckt worden (die *Analysis* bestehet aus 7, der andere *Tracat* aus 13 Bogen) ziemlich erleichtert. Es können aber seine Regeln alle aus der 116. Aufgabe des ersten Theiles der Algebra (§. 340.) hergeleitet werden. Nachdem *de Lagny* in seinen *Nouveaux Elements d'Algebre* für die Ausziehung der Wurzel aus den Cubischen Gleichungen und denen von dem fünften Grade eine viel leichtere Regel erfunden, hat *Halley* dieselbe in den *Transaktionibus Anglicanis* allgemein gemacht, und haben die *Hallejanische* allgemeine Methode *Wells* in seinen *Elementis Arithmetica* und *Whiston* in dem Anhang zu den *Elementis Algebrae Newtoni* erkläret. Sie fließet aber ohne Weitläufigkeit aus

aus der von mir gegebenen Methode (§. 340. Part. I. Algeb.).

§. 64. In dem *Traité d'Algebre*. welchen Rolle, ein Mitglied der Königl. Academie der Wissenschaften zu Paris 1690. in 4. (12 Bog.) heraus gegeben, sind einige gute Regeln, sonderlich für die Ausziehung der Wurzeln. Allein es ist verdrießlich, daß dieser Mann so sehr affectiret, alles neu zu machen, und andere Erfindungen zu verkleinern, wie theils aus dem Journal des Scavans, theils aus der Histoire de l'Academie des Sciences bekannt ist, und daher auch in diesem Buche lauter ungewöhnliche Wörter brauchet.

§. 65. Die Application der gemeinen Algebra auf die höhere Geometrie kan man aus keinem Buche besser erlernen, als aus des Marquis de l'Hospital *Traité Analytique des Sections Coniques & de leur usage pour la Resolution des Equations dans les Problemes tant déterminez, qu'indéterminez* (a Paris 1707. 2 Alph. 12 $\frac{1}{2}$ Bog. Tabb. 32.): welches Buch allen denen zu recommendiren, welche in der Mathematick etwas rechtschaffenes zu thun gedencfen. Eben dergleichen Arbeit hat Guisnée verrichtet, welche er zu Paris A. 1705. in 4. unter dem Titul: *Application de l'Algebre*, (1 Alph. 19 Bog. Tabb. 6.) heraus gegeben, darinnen gleichfalls die Geometrische Constructionen durch Verknüpfung der Geometrischen Derter deutlich erkläret, und zugleich zu dem Ende die vornehmsten Eigenschaften der Kegelschnitte durch Algebraische Rechnungen heraus gebracht werden. Und ist dieses Buch so geschrieben, daß sich die Anfänger darinnen leicht zurechte finden, wenn sie nur die

die Geometrie inne haben, und in der Algebraischen Rechnung geübet sind.

§. 66. Die Application der Algebra auf solche Fragen, davon man keine gewisse Erkänntniß haben, sondern nur etwas muthmassen kan, hat nach dem Exempel des *Pascal* und *Hugenii*, deren jener in seinem *Triangle Arithmetique* (Paris 1654.) dieser zu Ende der *Exercitationum Geometricarum Schootenii* einige Aufgaben von dem Fortgange des Spieles aufgelöset, *Remond de Monmord* in seinem *Essay d'Analyse sur les jeux de hazard* (a Paris 1708. 1 Alph. 4 Bog.) gezeigt: welches Buch nur um deswillen zu lesen, weil dergleichen Fragen ganz besondere Analytische Kunstgriffe erfordern. Es ist A. 1714. viel vermehrter heraus kommen (a Paris 1714. in 4. 2 Alph. 11 Bog.) mit vielen Briefen, welche die Herren *Bernoulli*, insonderheit *Nicolaus* mit ihm von dergleichen Materien gewechselt. Eben dergleichen Arbeit hat *Jacobus Bernoulli* in seiner *Arte Conjectandi* verrichtet, welche sein Vetter, Herr *Nicolaus Bernoulli* zu Basel A. 1713. in 4. drucken lassen (1 Alph. 20 Bog.) dem er zugleich seine *Dissertationes de seriebus infinitis* beygefüget. Insonderheit hat auch *Abraham de Moivre* ein gelehrtes Werck hiervon heraus gegeben (London 1718. in 4. 1 Alphab.) unter dem Titul: *The Doctrine of Chances, or a Method of caculating probability of Evens in play*: Welches nach diesem vermehrter wieder aufgelegt worden (London 17 Bog. in 4.).

§. 68. Des Herrn *Joh. Christoph Sturms* *Mathesis Enucleata* (Norimberg. 1695. in 8. 1 Alph. Text, 7 Bog. Kupfer) ist bekannt genug. Es fehlen

len aber in demselben die vornehmsten Erfindungen der Neueren, und wird die Schärfe zu demonstrieren, welche die Alten sehr wohl in acht genommen, nicht beobachtet. Daher es kein Genügen thut, sonderlich nach dem Zustande der jetzigen Zeiten, wenn man die Mathematick gründlich erlernen und insonderheit die Kunstgriffe zu erfinden und demonstrieren einsehen will.

§. 68. Es haben sich auch einige gefunden, welche die Regeln der gemeinen Algebra tadeln wollen, als wenn sie nicht in allem ihre Richtigkeit hätten. Hieher gehöret *Ægidius Franciscus de Gottignes*, aus Brüssel bürtig, ein Jesuit, in seiner *Logistica Universalis* (Neap. 1687. in fol. 1 Alph. 14 Bog. Tabb. 5.). Dergleichen hat auch *Hugo de Omerique* in seiner *Analyse Geometrica* (Gadibus 1698 in 4. gethan, welcher an statt der Gleichnisse durch die Verhältnisse schliesset: aber nur bey gemeinen Exempeln bleibet, die bereits andere durch die gemeine Algebra aufgelöset. Die guten Leute thun nichts mehr, als daß sie durch Umwege suchen, wozu man gerades Weges gelangen kan, und dadurch den Fortgang der Wissenschaft aufhalten. Des letztern Analysin hat *Jacobus Kresa* in seiner *Analyse speciosa Trigonometriæ (pharicæ primo mobili, triangulis rectilineis, progressioni arithmeticæ & geometricæ aliisque variis problematis applicata* Pragæ 1720 in 4. 2 Alph. 1 Tab.) behalten. Und erinnert *Pemberton* in der Vorrede über *A View of sir Isaac Newtons Philosophy*, es habe dieser grosse Mathematicus dieses an dem *Omerique* gelobet, daß er die Analysin der Alten zu restituiren gesucht.

§. 69. *Johannes Wallisius* bemühet sich, die von *Keplern* zu Erläuterung des *Archimedis* vorgebrachte und dem *Cavalerio* glücklich gebrauchte Methode die Figuren und Körper in unendliche kleine Elemente zu zertheilen, mit der Algebraischen Rechnung zu vereinigen, und gab zu dem Ende A. 1655. seine *Arithmetica infinitorum* heraus, darinnen er unendliche Reihen Geometrischer Progressionen zu finden anwies, um die Quadraturen der Figuren und Cubaturen der Körper dadurch zu finden. Jetzt treffen wir sie in dem ersten Theile seiner Mathematischen Werke fol. 365. & sqq. an. Weil aber *Wallisius* sich mit der Induction vergnügete (dergleichen Beweis den Mathematischen Wissenschaften unanständig ist), so bemühet sich *Ismaël Bullialdus*, wiewohl durch viele Umwege nach der Art der alten Geometrarum, aus der Natur der Zahlen und Progressionen die *Arithmetica infinitorum* zu demonstrieren, wie aus seinem *Opere Novo ad Arithmetica infinitorum libris 6. comprehenso* (Paris 1682. in fol. 4 Alphab. 16 Bogen) mit mehreren zu ersehen. Ich habe in meinen *Elementis Analyseos* zu Ende in wenigen Zeilen mehr erwiesen, als *Bullialdus* sehr mühsam in seinem ganzen Werke verrichtet.

§. 70. Allein *Wallisius* und *Bullialdus*, der ihm folgete, waren nicht auf den rechten Weg gerathen. Hingegen der scharfsinnige *Leibnitz* konte ihn nicht verfehlen, als er sich nach ihm umsah. Denn als er sich A. 1674, 75 und 76 zu Paris aufhielt, und bey müßigen Stunden auf die höhere Geometrie und andere Mathematische Wissenschaften ge-
(*Wolfs Mathes.*) Dachte;

dachte; gerieth er auf seine unvergleichliche Differential- und Integral-Rechnung, auf dergleichen auch in etwas *Isaacus Newton* in Engelland um eben selbige Zeit kommen. Denn als diese beyde grosse Männer von Geometrischen Sachen mit einander in Briefen conferirten, schrieb unter andern *Newton* vom 24. Octobr. 1676. *Inversa de Tangentibus problemata sunt in potestate, aliaque illis difficiliora: ad quæ solvenda usus sum duplici methodo; una concinniori, altera generaliori. Utramque visum est in presentia litteris transpositis consignare — : 5 a c c d 10 f f h &c.* welche Buchstaben, wenn sie in ihre rechte Ordnung gebracht werden, diesen Verstand haben: *Una methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex equatione simul involvente fluxionem ejus: altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita, ex qua cetera commode derivari possunt, & in collatione terminorum homologorum equationis resultantis ad inveniendos terminos assumptæ seriei.* Und der Herr von Leibnitz überschrieb in seinem Briefe vom 21. Jun. seine Differential-Rechnung selbst: wie nicht allein aus den beyden Briefen zu ersehen, die in dem dritten Theile der Mathematischen Werke des *Wallisii* (f. 634. 648.) zu finden; sondern auch *Newton* selbst aufrichtig bekennet in *Principiis Philosophiæ Naturalis Mathematicis* schol. Lemmat. 2. lib. 2. p. 253. 254. welches er in der letzten Edition von A. 1726. weggelassen, da er auf den Herrn von Leibnitz erbittert war. Er hat aber seine Rechnung erst A. 1684. in den Leipziger Actis p. 467. und *Newton* A. 1687. in dem jetzt angezogenen Buche der gelehrten Welt bekannt

bekannt gemacht : hingegen die beyden Herren *Bernoulli*, absonderlich der jüngere, *Johannes*, haben durch herrliche Aufgaben dieselbe erläutern und weiter perfectioniren helfen.

§. 71. Der *Marquis de l'Hospital*, welcher von dem Herrn *Joh. Bernoulli*, jezt und berühmten Professore Mathematicum in Basel, die Differential- und Integral-Rechnung des Herrn von Leibnitz erlernet, hat zuerst in seiner *Analyse des infiniment petits* (a Paris 1696. in Reg. 4. 1 Alph. 2 Bog. Tabb. 11.) die Differential-Rechnung aus einem MSC. des Herrn *Bernoulli*, welches in Händen verschiedener Mathematicorum ist, deutlich beschrieben und ihren vortreflichen Nutzen in der höheren Geometrie gezeigt. Dieses Werck verdienet mit Bedacht gelesen zu werden, wenn man zu höheren Dingen Lust hat. Er war zwar willens, noch einen Theil heraus zu geben, darinnen er die Integral-Rechnung auf gleiche Weise erläutern wolte und dazu er in dem MSC. des Herrn *Bernoulli* ebenfalls Materie fand : allein weil er von dem Herrn von Leibnitz vernahm, daß er selbst gesonnen wäre, ein *Scientiam infiniti* heraus zu geben, so wolte er lieber seine Arbeit unterlassen, als dadurch die gelehrte Welt eines herrlicheren Werckes berauben. Zum Behuf der Anfänger, die unterweilen mit der Rechnung nicht fortkommen können, hat der berühmte Lausannische Professor, Herr *Crouzas*, seinen *Commentaire sur l'Analyse des infiniment petits*, (a Paris 1721. in 4. 2 Alph. 1 $\frac{1}{2}$ Bog. 4 Tab.) heraus gegeben : welcher aber sehr schlecht gerathen, wie Herr *Bernoulli* in einem Briefe an ihn ihm in einigen Stücken solches

gezeigt. Für andere aber, die weiter gedencken, dienen des berühmten *Varignons Eclaircissements sur l'Analyse des infiniment petits*, welche nach seinem Tode zu Paris 1725. in 4. (16 Bogen Tabb. 6.) heraus kommen. In Engelland hat des *Hospitals* Werck in das Englische übersetzt und mit dem andern Theile, der dazu fehlet, vermehret *E. Stone* und unter dem Titel: *A Method of Fluxions both direct and inverse* zu London 1730. in 8. Reg. (1 Alph. 6 Bog. Tabb. 15.) drucken lassen.

§. 72. Da der Herr von Leibnitz durch viele wichtige Geschäfte abgehalten worden, mit seinem sinnreichen Wercke die gelehrte Welt zu erfreuen, dessen Vortrefflichkeit aus den herrlichen Speciminibus abzunehmen, die in den Leipziger Actis A. 1702. p. 210. & seqq. und A. 1703. p. 19. & seqq. gelesen werden; wolte *Carrée* in seiner *Methode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, de percussion & d'oscillation par l'application du Calcul integral* (a Paris 1700. in Reg. 4. 15 Bog. Tabb. 4) den Verlust einiger massen ersetzen, den wir in Ermangelung des andern Theiles von der Analyse des infiniment petits erlitten. Ob er nun aber gleich nur die ersten Buchstaben der Integral-Rechnung gelehret; so ist man ihm doch deswegen Dank schuldig, daß er damahls den Anfängern dazu den Weg gebähnet. Ein mehreres aber hat der jetzt erwähnte *Stone* gethan.

§. 73. Etwas weiter als er gieng *Georgius Cheynaus* in seinem *Methodo inversa Fluxionum* (denn so nennen die Engelländer die Integral-Rechnung), welchen er zu London 1703. in Reg. 4. drucken lie; (6 Bo,

(6 Bogen). In diesem Buche erkläret er hauptsächlich, was *Newton* und der Herr von *Leibnitz* von den unendlichen Reihen erfunden, wiewohl zu der Zeit, da *Cheynaus* schrieb, der Herr von *Leibnitz* viel höhere Dinge davon publicirte. Vid. *Acta Lipsiens* loc. cit. Nachdem nemlich *Nicolaus Mercator*, ein Holsteiner, in seiner *Logarithmotechnia* prop. 17. p. 31. seqq. (Lond. 1668. in 4. mit des *Michaëlis Angeli Ricci* *Exercitatione Geometrica*, die zuerst in Rom heraus kommen) die Quadratur der Hyperbel durch eine unendliche Reihe gab und dadurch zeigte, wie man die Brüche durch die Division in unendliche Reihen verwandeln solte, so erfand *Newton* noch eine andere Methode durch Ausziehung der Wurzel aus Irrational-Größen unendliche Reihen zu erfinden, und der Herr von *Leibnitz* erdachte, wie man aus einer angenommenen und determinirten Reihe eine andere, darin die coëfficientes determiniret sind, finden solle: wie beides aus ihren Briefen erhellet, die in dem dritten Theile der *Operum Wallisii* f. 622. 629. zu finden. Was *Newton* hierinnen gethan, weist seine *Analysis per quantitatum series, fluxiones ac differentias cum enumeratione linearum tertii ordinis*, welche *Wilhelm Jones* zu London 1711. in 4. (16 Bogen 2 Tabb.) heraus gegeben. Was er von den Lineis tertii ordinis oder Curvis secundi generis schreibt, hat er ohne Beweis beigebracht; deswegen *Jacobus Stirling* in *Illustratione Tractatus D. Newtoni de Enumeratione linearum tertii ordinis* (Oxoniz 1717. in 8. 9 $\frac{1}{2}$ Bog.) diesem Mangel abgeholfen. Er hat nemlich nach dem eigenen Urtheil der Engländer

Mercatoris Methode allgemein gemachet. *David Gregorius* in seiner *Exercitatione Geometrica de dimensione figurarum* (Edinburgi 1684. in 4.) hat die *Methodos* des *Mercatoris* und *Newtons* durch viele *Exempel* illustriret, die zum Theil sein *Better, Jacobus Gregorius*, ausgerechnet hatte, wie er p. 2. 3. & 4. erinnert, dessen Buch, *de vera Circuli & Hyperbolæ Quadratura* (Bataviæ 1668. in 4. 8 Bog.) mit dem angehängten *Geometria parte universali, quantitatum curvarum transmutationi inservienti* (19 Bog.) zeigt, was man sich hierinnen von ihm hätte versprechen können, wenn nicht der Tod sein Vorhaben gehindert hätte. Wichtigere Sachen aber trifft man von den unendlichen Reihen in den oben angeführten *Dissertationibus* des Herrn *Bernoulli* an, und in *Abrahami de Moivre Miscellaneis Analyticis de Seriebus & Quadraturis* Lond. 1730. in 4. reg. 1 Alph. 9 Bog.). *Johannes Craige*, ein Schottländer, brauchet in seinem *Methodo figurarum lineis rectis & curvis comprehensarum Quadraturas determinandi* (Londini 1685. in 4. 6 Bog. Tab. 1.) und in seinem *Treatatu de figurarum curvilinearum Quadraturis & Locis Geometricis*, Londini 1693. in 4. 11 Bogen Tab. 1.) auch unterweilen die unendlichen Reihen; allein so wohl *Gregorius*, als *Craige*, gehen im Quadriren durch Umwege, weil sie dazumahl die *Integral-Rechnung* noch nicht verstanden. Des *Craigii Methodus generalis de Locis Geometricis* ist von dem *Marquis de l'Hospital* in seinen *Sections Coniques* und von mir in den Anfangs-Gründen deutlicher ausgeführt worden. Hingegen hat er nach diesem ein wichtigeres Werck unter dem Titel: *de calculo*

calculo fluentium Libri 2. & de Optica analytica Libri 2. (Lond. 1718. in 4. 12 $\frac{1}{2}$ Bog.) heraus gegeben, darinnen er die Quadratur der krummen Linien erweitert.

§. 74. Niemand hat zum Gebrauch der Anfänger der neueren Aualysis die Integral-Rechnung ausführlicher abgehandelt, als *Gabriel Manfredius*, in seinem Werke *de Constructione aequationum differentialium primi gradus* (Bononiæ 1707. in 4. 1 Alph. 2 Bog. Tabb. 7.), darinnen er die Methoden erklärt, welche in den Exempeln der vortrefflichsten Mathematicorum unserer Zeiten, die hauptsächlich in den Leipziger Actis hin und wieder anzutreffen, verborgen liegen. Dannenhero dieses Buch denen dienet, welche mit leichter Mühe den Methodum Tangentium inverstam wollen verstehen und gebrauchen lernen. Nur wäre zu wünschen gewesen, daß er nach dem Exempel des *Hospitals* die Regeln durch nützliche Exempel erläutert hätte. Nach ihm kan man *Newtons* Buch *de Quadraturis*, so *Jones* mit ediret, und *Craigii* neues Werk (§. 73.) lesen.

§. 75. Alles, was in des *Marquis de l'Hospital* *Analyse des infiniment petits*, dem *Carrè*, *Cheynaë*, *Gregorio* und *Craigio* anzutreffen war, hat *Charles Hayes* in seinem *Treatise of fluxions, or introduction to Mathematical and Mechanical Philosophy*, auch zugleich viele nützliche Aufgaben, die in den Leipziger Actis zu finden, erläutert, absonderlich dasjenige, was der Herr von *Leibnitz* von den Ursachen der himmlischen Bewegungen angegeben. Es ist zu London 1704. in fol. heraus kommen, und bestehet aus 3 Alph. 3 Bogen.

§. 76. Was *Newton* in seinem *Tractate de Quadraturis Curvarum* gegeben, hat auf eine andere Manier zu finden angewiesen *Rogerus Cotesius* in *Harmonia Mensurarum sive Analyfi & Synthesi per rationum & angulorum mensuras promota*, die mit einigen andern *Opusculis Mathematicis* nach dem frühzeitigen Tode des Autoris sein Nachfolger in der Profession zu *Cambridge* (*Cantabr.* 1722. in 4. 50 Bog. 1. Tab.) *Robertus Smith* heraus gegeben. Sein Hauptwerck, welches er *Logometriam* nennet, gehet dahin, daß er durch die *Logarithmos*, *Sinus* und *Tangentes* suchet, was man bisher auf die *Quadratur* der *Hyperbel* und des *Circuls* reduciret. Wie seine Erfindungen ihren Ursprung aus *Newtons* seinen erhalten, hat ein ungenannter Autor in *Epistola ad Amicum de Cotesii inventis* (*Lond.* 1722. in 4. 13 Bogen) gewiesen.

§. 77. A. 1736. hat *Johannes Colson* des *Newtons* *Methodum Fluxionum & infinitarum serierum* ins Englische aus einem *MSC.* übersehet zu *Londen* in 4. (*Alph.* 2.) unter dem Titul: *The method of fluxions and infinite series with its application to the Geometry of Curve lines* heraus gegeben, und mit einem schönen *Commentario* erläutert. Es ist denen Anfängern sehr dienlich, welche die höhere *Analyfin* studiren wollen. Hingegen vorher hat *Abraham de Moivre* zu *Londen* in 4. (*Alph.* 1. Bog. 9.) seine *Miscellanea Analytica de seriebus & quadraturis* der gelehrten Welt mitgetheilet, darinnen viel zur höheren *Geometrie* gehörige Sachen vorkommen.

§. 78. Der Herr von *Leibnitz* hatte anfangs die

die Differential- und Integral-Rechnung bloß bey endlichen grossen gebraucht; bis er durch *Hugenii Horologium oscillatorium* und *Gregorii a S. Vincentio* Werck de quadratura circuli dieselbe bey unendlich Kleinen Grössen anbrachte. *Brook Taylor* hat das erste gleichfalls 40 Jahr hernach gethan in seiner *Methodo Incrementorum directa & indirecta*, der zu London 1715 in 4. ($15\frac{1}{2}$ Bogen) heraus kommen; Herr *Bernoulli* hat sich über seine Duncfelheit mit Recht öffentlich beschweret. *Bernhard Fontenelle*, Secretarius von der Academie der Wissenschaften zu Paris, hat daselbst A. 1727. in 4. (3 Alph. 2 Bogen) *Elements de la Geometrie des infinis* heraus gegeben, darinnen er die heute zu Tage übliche Algebraische Rechnungen aus dem Begriffe des unendlichen herzuleiten suchet.

§. 79. Es hat zwar *Bernhardus Nieuventiit* in seinen *Considerationibus circa Analyseos ad quantitates infinite parvas applicata principia & calculi differentialis usum in resolvendis problematibus Geometricis* (Amstel. 1694. in 8. 3 Bog.) und in seinen *Considerationibus secundis circa calculi differentialis principia* (Amstel. 1666. in 8. 3 Bog.) wider die Differential-Rechnung einige Einwürfe gemacht, und daher eine andere Methode in seiner *Analyse infinitorum* (Amstelod. 1695. in 8. 20 Bog. Tabb. 21.) angewiesen, dadurch eben dieses verrichtet werden soll, was man durch die Differential- und Integral-Rechnung gethan: allein es haben nicht allein der Herr von Leibnitz und der Herr *Bernoulli* in den Leipziger Actis A. 1695. p. 310. & seqq. it. p. 369. & seqq. & A. 1697. p. 125. & seqq. und

Herr Jacob Herrmann in seiner *Responsione ad Cl. Viri Bernhardi Nieuwenitiit Considerationes secundas circa calculi differentialis principia editas* (Basileæ 1700. in 8. 4 Bog.) überflüssig erwiesen, daß sie alle keinen Grund haben, sondern man kan auch von ihm urtheilen, was ich oben (§. 69.) von denen angemercket, welche in den Anfangs-Gründen der gemeinen Algebra ohne Noth Schwierigkeiten gesucht. Sonst wissen verständige auch die *Analysin infinitorum* des Nieuwenitiit noch zu gebrauchen.

§. 80. Der vortreffliche Mathematicus, Johannes Wallis, hat zuerst A. 1685. in englischer, hernach vermehrter in lateinischer Sprache einen *Tractatum Historicum & Practicum de Algebra* publiciret, welcher den grösssten Theil von dem andern *Volumine Operum Mathematicorum* ausmachet. Gleichwie er aber, was in der gemeinen Algebra gethan worden, weitläufig ausführet; so hat er hingegen von der Differential- und Integral-Rechnung wenig oder gar nichts, indem er nur mit wenigem zwey *Problemata* beschreibet fol. 391. & seqq. deren Newton in dem oben angeführten Briefe an den Hrn. von Leibnitz gedenccket. Denn da die erste Auflage heraus kam, war noch wenig von der Differential- und Integral-Rechnung bekannt. Was aber nach der Zeit, sonderlich in den Leipziger Actis davon zum Vorscheine kommen, hat er nicht erfahren, weil er in seinem hohen Alter nicht mehr alle Bücher lesen können, wie er sich selbst damit in einem Briefe an den Herrn von Leibnitz entschuldiget. Vid. Acta Eruditor. Lips.

A. 1696. p. 258. Dannenhero ist dieses Werck nur von denen zu gebrauchen, welche, nachdem sie die Algebra verstehen, erkennen wollen, was nach und nach in derselben gethan worden, und wie öfters durch verschiedene Wege man ein Ziel erreicht habe. Dergleichen Betrachtungen aber sind denen sehr dienlich, welche die Kräfte des menschlichen Verstandes erkennen zu lernen bemühet sind.

§. 81. Charles Reyneau hat in seiner *Analyse démontrée* (a Paris 1708. in Reg. 4. 5 Alph. 7 Bog. 5 Tabb.) alle Methoden weitläufig erkläret, die bisher so wohl in der gemeinen Algebra, als der Differential- und Integral-Rechnung des Herrn von Leibnitz erfunden worden. Allein weil er mit Exempeln sehr sparsam ist; so muß kein Anfänger sich über dieses Buch machen. Hingegen wenn einer meine Anfangs-Gründe recht inne hat, kan er sonder grosse Mühe und nicht ohne Nutzen dieses Werck durchgehen.

§. 82. Die ganze Mathesis puram mit der neuen und alten Algebra findet man in *W. Jones Synopsi Palmariorum Matheseos, or New Introduction to the Mathematicks containing the principles of Arithmetic and Geometry demonstrated &c.* London 1706. in 8. 20 Bogen). In den ersten zur Arithmetik mit Ziffern und Buchstaben gehörigen Sachen ist der Autor so deutlich, daß er es nicht deutlicher hätte machen können. Allein da er im folgenden alles durch bloße Zeichen vorgestellt, so wird er, sonderlich in der Geometrie, für Anfänger unterweilen allzukurz. Wer aber nur mercket, daß in dergleichen Büchern jede

jede Zeile mit Nachdenken und in richtiger Ordnung gelesen werden muß; wird auch darein sich leicht finden lernen. Es kan aber dieses Buch den Lehrenden dienen, wenn sie den Anfängern etwas erklären wollen; hingegen wenn diese auch aus andern Büchern die Sachen gelernet, können sie die Synopsin palmariorum Matheseos zur Wiederholung brauchen. Mit diesem Buche kommet in denen Materien, die zur gemeinen Algebra gehören, gar sehr überein *A Treatise of Algebra*, den Ronayne (Lond. 1717. in 8. 25 Bog.) heraus gegeben: denn die neuere Analysis ist bey ihm nicht zu finden, ausser daß er den Methodum Tangentium & de maximis & minimis durch den Methodum exhaustionum erläutert, da durch Umwege gesucht wird, was die Differential-Rechnung ohne Mühe giebet.

§. 83. Wer die Application der Algebra, sonderlich der neueren, erkennen, auch sich immer mehr und mehr in derselben zu üben gedencket: hat Ursache, die *Acta Eruditorum* und *Histoire de l'Academie des Sciences* mit ihren *Memoires*, imgleichen die *Miscellanea Berolienfis* zu lesen, wiewohl auch die *Transactiones Anglicanae* dazu etwas beytragen können. Die vornehmsten Algebraischen Erfindungen, die in den *Transactionibus Anglicanis* enthalten, trifft ihr in den beyden ersten Theilen der *Miscellaneorum Curiosorum*, being a collection of some of the principal phenomena in Natur &c. an, welche von Wort zu Wort aus ihnen genommen. Der erste Theil ist zu London 1705, der andere 1706. in Reg. 8. heraus kommen (Tom. I. 1 Alph. Tabb 5. Tom. II. 1 Alph. 2 Bogen Tabb. 8.). Alles aber
zusam-

zusammen haben *Lowthorp* und *Motte* in *The Philosophical Transactions abridg'd* zusammen getragen, daß man es bey einander finden kan: wovon unten unter den Mathematischen Wercken weiter geredet werden soll.

§. 84. In den *Transactionibus Anglicanis*, welche für den Monat *May* und *Junius* A. 1708. heraus kamen, schrieb *Johannes Keil*, der Herr *Newton* wäre sonder Zweifel der erste Erfinder der Differential-Rechnung, oder (wie er redet) *Arithmeticae fluxionum*; der Herr von *Leibnitz* aber hätte sie nach diesem unter einem anderen Nahmen und unter anderen Zeichen in den *Actis Eruditorum* heraus gegeben. Weil der Herr *Sloane* denselben Theil der *Transactionum* an den Herrn von *Leibnitz* geschickt hatte; verlangete er in seinem Antwortschreiben von dem 4. Martii 1711, *Keil* sollte in den *Transactionibus Anglicanis* sich erklären, er habe ihm nicht Schuld geben wollen, als wenn er seine Erfindung von einem anderen gelernet und sich mit Unrecht zugeeignet hätte. Als der Herr *Sloane* des Herrn von *Leibnitz* Schreiben *Keil* zuschickte, schrieb er einen weitläuftigen Brief zur Antwort zurücke, darinnen er behaupten wolte, der Herr *Newton* wäre der erste Erfinder der Differential-Rechnung, und hätte in einem Schreiben an den Herrn von *Leibnitz* so viel davon blicken lassen, daß ein solcher Mann, wie er, dadurch die Sache hätte heraus bringen können. Der Herr von *Leibnitz* meinete, hierdurch würde seiner Aufrichtigkeit noch mehr zu nahe getreten, und da es sich nicht gezeime, in seinem Alter, nach so viel ab-

ge-

gelegten Proben derselben, mit einem Menschen, dem die vor diesem geschehenen Sachen nicht genug kundig wären, sich in Streit einzulassen, überließ er in seinem Schreiben von dem 29. Dec. 1711. der Königl. Societät, ob sie nicht der ungerichten Beschuldigung abhelfen wolten. Hierauf hat die Societät durch einige die Briefe untersuchen lassen, die in ihrer Verwahrung sind, und von 1669 bis 1677 von Barrowen, Collinsen, Oldenburgen, Newtonen und Leibnitzen geschrieben worden. Daraus ist das *Commercium epistolicum* D. Johannis Collins & aliorum de *Analysi promota* erwachsen, welches zu London A. 1712. in 4. (15 $\frac{1}{2}$ Bog.) heraus kommen, und von dem Secretario Societatis, Richard Waller, nach Deutschland, Frankreich, Holland und Italien verschicket worden, damit es umsonst an die Mathematicos aller Orten ausge theilet würde. Dadurch suchte man zu behaupten, der Herr Newton sey der erste Erfinder der Differential-Rechnung, und habe demnach Keil dem Herrn von Leibnitz nicht unrecht gethan, daß er ihm dieselbe zugeeignet.

§. 85. Der Herr von Leibnitz war damahls in Wien, und bekam das *Commercium epistolicum* nicht zu sehen. Derowegen, als ich ihm davon schrieb, und von ihm vernehmen wolte, ob nicht etwas dagegen in den *Actis Eruditorum* zu erinnern wäre, wenn das Buch recensiret würde; so gefiel ihm besser, daß unterdessen nur ohne Nahmen des Ortes und des Auctoris bekannt gemacht ward, daß er in Wien wäre, und das *Commercium epistolicum* noch nicht gesehen hätte, und dabey des Herrn

Ber-

Bernoulli Gründe aus einem an ihn abgelassenen Schreiben angeführet worden, warum man ihm die Erfindung nicht streitig machen könnte; welche kleine Schrift von einem halben Bogen auch in die Deutschen *Acta Eruditorum* eingerücktet worden. Davon nahm *Keil* Gelegenheit, sehr anzüglich von dem Herrn von *Leibnitz* und dem Herrn *Bernoulli* zu schreiben, theils in den *Transactionibus Anglicanis*, theils in dem *Journal littéraire*, welches man im Haag drucken läßt. Weil *Keil* sehr grob ist, und Verständige vor sich den Ungrund seiner Beschuldigung sehen, hat der Herr von *Leibnitz* niemahls ihm zu antworten sich entschliessen wollen. Doch hat er bey Gelegenheit in einigen Briefen dem Herrn von *Newton* seine Meynung gesagt, welcher sich auch dagegen verantwortet.

§. 86. Die Briefe des Herrn von *Leibnitz* und Herrn *Newton*, welche 1715. und 16. geschrieben worden, sind bey *Joseph Raphsons* *Historia Fluxionum* (Lond. 1715. in 4. 16 Bogen) gedruckt worden. In dieser Historie aber findet man weiter nichts, als *Newtons* schon so oft gedruckte Sachen, so die unendlichen Reihen und Quadraturen der krummen Linien betreffen, und was der Herr von *Leibnitz* von seiner *Analyse* in den *Actis Eruditorum* 1684. heraus gegeben nebst einigen schon öfters wiederholten, zum Theil einfältigen Anzüglichkeiten wider den Herrn von *Leibnitz*.

§. 87. Zum Beschluß des gegenwärtigen Capitels muß ich auch noch die Analytischen Schriften
der

der Alten anführen. Es erzehlet dieselben Pappus in der Vorrede über das siebente Buch seiner *Collectionis Mathematicæ*, und sind folgende: 1. *Datorum Euclidis liber unus*, welches Buch von einigen mit zu den *Elementis* gedrucket worden. 2. *Apollonii de Sectione Rationis libri duo*, welche Halley zu Oxfurt 1706. in 8. (1 Alph. 6 Bog.) heraus gegeben. 3. *Apollonii de sectione Spatii libri duo*, welche verlohren gegangen, Halley aber zu ersetzen sich bemühet und den vorigen mit angehänget. 4. *Apollonii de inclinationibus libri duo, de Tactionibus libri duo, de locis planis duo, Conicorum octo*, von welchen nur die lezten vorhanden (§. 40.), die ersten aber Martinus Ghetaldus, die anderen Franciscus Vieta ersetzt. 5. *Euclidis Porismatum libri tres & de locis ad superficiem duo*. 6. *Aristæi de locis solidis quinque*, welche Vincentius Viviani ersetzt, und 7. *Eratosthenis de mediis proportionalibus duo*.

Das 4. Capitel.

Von den Trigonometrischen Schriften.

§. 88.

Die Trigonometrie ist anfangs um der Astronomie willen erfunden worden. Daher Ptolomæus in seinen *Almagestum* so viel davon hinein gebracht, als ihm dienlich schiene, und die Neueren pflegen öfters die Trigonometrie vor die Astronomie drucken lassen.

§. 89. *Johann Regiomontanus* (eigentlich *Müller* genannt) hat fünf Bücher von den Triangeln A. 1464. geschrieben, welche nach seinem Tode *Schone-rus* A. 1533. in fol. (2 Alph. 12 Bog.) drucken lassen. Er hat auch einen neuen Canonem Sinuum ausge-rechnet, und darinnen die zehen theiligen Brüche mit grossem Vortheile eingeführet, durch beyde Ar-beit hat er ein grosses zu dieser Wissenschaft beyge-tragen.

§. 90. *Georgius Joachimus Rheticus* hat die Sinus von zehen zu zehen Secunden mit grosser Mühe in solchen Theilen ausgerechnet, deren der Radius 1000000000000000 hat, welche mit einigen Zusätzen nach seinem Tode *Bartholomaeus Pitiscus* zu *Frankfurt* am *Mäyn* 1613. in fol. (3 Alph. 21 Bog.) heraus gegeben. Dieses Buch dienet dazu, daß man die gemeinen *Tabulas Sinuum & Tangentium* daraus corrigiren kan, damit nicht durch die zum östern wiederhohlete Auflagen Feh-ler einschleichen. Es hat nemlich *Rheticus*, der *Mathematicum* Professor zu *Wittenberg* gewesen, aber die Profession verlassen, und bey dem *Copernico* gelebet, viel Mühe angewendet, die *Trigonome-trie* vollkommener zu machen, wie aus dem *Opere Palatino de Triangulis* erhellet, welches er angefan-gen, *Valentinus Otto* aber, des *Churfürsten* von der *Pfalz* *Friderici IV.* Mathematicus, zu Ende gebracht. Es ist dieses Werck A. 1616. in fol. (21 Alph. 17 Bog.) heraus kommen, und befinden sich dar-innen 1. *Rhetici libri tres de fabrica Canonis doctri-nae triangulorum*: 2. *Ejusdem liber quartus de trian-gulis globi*: 3. *Othonis libri quinque de triangulis globi*
(*Wolfs Mathes.*)

globi sine angulo recto: 4. ein sehr weittläufiger Canon triangulorum. Bartholomæus Pitiscus hat in seinen fünf Büchern von der Trigonometrie diese Wissenschaft wohl erläutert. Sie ist zuerst A. 1599, nach diesem zum drittenmahl zu Francfurt A. 1612. in 4. (2 Alph. 15 Bog.) vermehrter heraus kommen. Man findet darinnen den Canonem Sinuum, tangentium & secantium, zugleich mit 11 Büchern, darinnen der Nutzen der Trigonometrie im Feldmessen, in der Baukunst, Fortification, Geographie, Gnomonick und Astronomie durch allerhand nützliche Aufgaben gezeigt wird.

§. 91. Einige Jahre vorher, nemlich A. 1591. hatte Philippus Lansbergius seine *Geometriam Triangulorum* heraus gegeben, welche A. 1663. in fol. zu Middelburg (11 Bog.) in Seeland vermehrter aufgelegt worden und zu Anfange seiner Werke stehet. Das Buch ist deutlich und ausführlich.

§. 92. Willebrordi Snellii doctrinæ triangulorum Canonicæ libros quatuor hat nach seinem Tode Martinus Hortensius zu Leyden 1527. in 8. (29 Bogen) heraus gegeben, und zugleich einen Anhang gemacht, darinnen er den Nutzen sowohl der gemeinen, als sphärischen Trigonometrie zeigt.

§. 93. Philippus Lansbergius hat A. 1663. zu Middelburg in Seeland in fol. (11 Bogen) vermehrter seine *Geometriam Triangulorum* heraus gegeben, darinnen er die Trigonometriam planam & Sphæricam, ingleichen die Constructionem Canonis Sinuum & Tangentium deutlich erkläret: welches

leh-

Letztere vor ihm *Georgius Purbachius* gethan, der Professor Matheseos zu Wien und *Regiomontani* Praeceptor gewesen.

§. 94. Die Trigonometrie hat eine grosse Vollkommenheit erreicht, als *Johannes Neperus*, ein Schottländischer Baron, die Logarithmos zuerst öffentlich darein eingeführet. Sein Buch, so hiesher gehöret, ist unter dem Titul: *Mirifici logarithmorum Canonis descriptio ejusque usus in utraque Trigonometria & omni Logistica mathematica explicatio*, zu Edenburg 1614. in 4. (21 Bog.) heraus kommen und nach seinem Tode von seinem Sohne A. 1619. vermehrter aufgelegt worden. In demselben hat er auch eine allgemeine Regel für die sphärischen Triangel gegeben, welche in etwas von meiner unterschieden ist, die ich in meinen Lateinischen und Deutschen Anfangs-Gründen der Trigonometrie erkläret. Es sind aber seine Logarithmi von denen, die wir jezt haben, unterschieden, weil er den Logarithmum Sinus totius 0 sezet, den wir jezt für den Logarithmum von 1. annehmen.

§. 95. Den *Canonem Neperi*, welcher nur auf Minuten gieng, hat von zehen zu zehen Secunden erweitert *Benjamin Ursinus* und ihn seiner Trigonometrie angehänget, welche zu Eöln A. 1625. in 4. heraus kommen, (die Trigonometrie bestehet aus 1 Alph. 12 Bogen. Der Canon aus 2 Alph. 11 Bog.). In der sphärischen Trigonometrie, gehet er nach der allgemeinen Neperischen Regel.

§. 96. Die Neperischen Logarithmos, welche *Justus Byrgius* längst vorher gehabt, aber nur zu seinem Gebrauch behalten, hat *Kepler* in seinen

Tabulis Rudolphinis in die Astronomie eingeführet. Daher hat sie sein Endam Jacob Partsch zu bequemerem Gebrauche in der Astronomie erläutert in den Tabellen, die zu Sagan 1630. heraus kommen, nach diesem aber wegen ihres Nutzen von Johann Caspar Eisen Schmieden A. 1700. in 8. (1 Alph. 17 Bog.) unter dem Titul: *Joh. Kepleri & Jac. Bartschii Tabulae Manuales Logarithmicae* wieder aufgelegt worden.

§. 97. Auf Nepers Gutbefinden hat *Henricus Briggs*, Professor Geometriae zu Oxfurd, die Logarithmos für die gemeine Zahlen von 1. bis 20000 und von 900000 bis 1000000. ausgerechnet auf die Art, wie wir sie jetzt haben, und nebst einer Beschreibung, wie sie zu finden und zu gebrauchen, A. 1624. in fol. unter dem Titul: *Arithmetica Logarithmica* drucken lassen. *Adrianus Vlacq* hat sie bald darauf (Goudæ 1628. in fol. 9 Alph. 7 Bog.) von neuem auflegen lassen, und die Logarithmos von 20000 bis 90000 hinzu gethan, jedoch des *Briggii* Logarithmos um vier Zahlen vergeringert. Ueber dieses hat er den Canonem Sinuum & Tangentium für alle Minuten des Quadrantens dazu gesetzt, und in der Beschreibung eines und das andere geändert. Eben dieser *Vlacq* hat 1633. seine Trigonometriam artificialem seu Magnum Canonem Triangulorum Logarithmicum (Goudæ in fol. 5 Alph. 3 Bog.) drucken lassen, darinnen er die Logarithmos Sinuum & Tangentium von zehn zu zehn Secunden gegeben, und für die gemeinen Zahlen Logarithmos bis 20000.

§. 98. Es hatte auch *Briggius* einen neuen Canone Sinuum und Tangentium für Hundert Theile der Grade vor; aber er starb, ehe er ihn zu Ende bringen konnte. Was noch fehlehlet, hat *Henricus Gellibrand* hinzu gesetzt, und beyde Arbeit A. 1633. unter dem Titul *Trigonometriae Britannicae* heraus gegeben (Goudæ in fol. 3 Alph. 7 Bog.).

§. 99. Unter eben diesem Titul hat ein Trigonometrisches Werck, aber in Englischer Sprache, *John Newton* drucken lassen (Londini 1658. in fol. 5 Alph. 19 Bogen). Darinnen findet man auſſer den gewöhnlichen Materien, die in dergleichen Büchern abgehandelt werden. 100000 Logarithmos für gemeine Zahlen und die Logarithmos Sinuum & Tangentium für Hundert-Theile der Grade, ja für Tausend-Theile der ersten drey Grade des Quadranten.

§. 100. A. 1643. ist zu Bononien in 4. (1 Alph. 1 Bogen) des berühmten *Cavalieri* *Trigonometria plana & sphaerica* heraus kommen, deren sich *Geminianus Rondelli*, Mathematicum Professor zu Bononien, in seiner *Universale Trigonometria, lineare e logarithmica* (Bologna 1705. in 4. 2 Alph. 12 Bog.) bedienet.

§. 101. *Sethi Wardi* *Idea Trigonometriae demonstratae*, welche A. 1654 in 4. (13 Bog.) mit seinem Tractat von den Cometen zu Oxfurt heraus kommen, ist sehr kurz. Dergleichen Bewandniß hat es mit *Wilhelm Oughtredi* *Trigonometria*, die mit dem Canone Sinuum, tangentium & secantium zu London und *Job. Wilsons* *Principiis, Trigonometriae*

succincte demonstratis (Lugd. Batav. 1718. in 8. 5 Bog. Tabb. 2.).

§. 102. *Richard Norwood* hat eine *Trigonometrie* in Englischer Sprache zu London 1651. in 4. (2 Alph. 3 Bogen) mit dem *Canone Sinuum, tangentium, & logarithmorum* heraus gegeben, darinnen er in der sphärischen *Nepers* allgemeine Regel erkläret. *William Hawney* hat A. 1725. in 8. maj (1 Alph. 8 Bog.) eine vollständige Anweisung zur *Trigonometrie* in eben der Sprache unter dem Titel: *The Doctrine of plain and spherical Trigonometrie* heraus gegeben und darinnen den Nutzen in der Schiff-Kunst zur See, *Astronomie*, *Geographie*, *Fortification*, Messung der Höhen und Weiten, und der *Gnomonick* weitläufig gezeigt.

§. 103. Für Anfänger dienet das *Compendium Trigonometriae planae & sphaericae*, welches *Jacobus Gooden* ein Jesuit, nebst den vornehmsten Lehr-Sätzen aus dem *Euclide* und einem Auszuge aus dem *Canone Sinuum, tangentium & logarithmorum*, zu Lüttig 1704. in 8. (12½ Bog.) heraus gegeben.

§. 104. Unter den gemeinen *Tabulis Sinuum, Tangentium & Logarithmorum* lobet man des *Vlacq.* die zu Haage 1665. gedruckt worden, und des *Ozams*, der seine darnach corrigiret. Was ich bey meinen in Halle A. 1711. (20 Bog.) und A. 1728. zum andern mahl und in diesem Jahre wiederum von neuem aufgelegt worden, gethan; kan man aus der beygefügtten Vorrede ersehen.

§. 105.

§. 105. *Jacobus Resa*, ein Jesuit, hat die Algebra in der *Trigonometria plana & Sphaerica* anzuwenden gelehret in seinem Buche, welches zu Prag A. 1720. in 4. (2 Alph. 2 Tabb.) heraus kommen unter den Titul: *Analysis Speciosa Trigonometria Sphaerica, primo mobili, Triangulis rectilineis & progressioni arithmetica, aliisque variis problematis applicata.*

Das 5. Capitel.

Von den Architectonischen Schriften.

§. 106.
Aus dem Alterthume sind uns allein *Vitruvii* zehn Bücher von der Baukunst übrig geblieben, in welchen er alles, was zur Baukunst gehöret, ausführlich zu lehren sich bemühet. Die beste Lateinische Edition ist des *Laët*, welche zu Amsterdam 1649. in fol. (6 Alph.) mit den Anmerkungen des *Guil. Philandri*, *Danielis Barbari* und *Claudii Salmasii*. Dem *Lexico Vitruviano Bernhardini Baldi*, den *Elementis Architecturae Henrici Wottoni*, drey Büchern von der Malererey *Leonis Baptistae de Albertis*, einigen Excerptis ex *Dialogo Pomponii Gaurici* de sculptura und einen *Commentario de sculptura & pictura Ludovici Demontiosii &c.* zum Vorschein kommen.

§. 107. Man tadelt aber an dem sonst so ruhmwürdigen Werke *Vitruvii*, daß er keine gute Ordnung gehalten, sondern alles untereinander geworfen; überaus unverständlich geschrieben, nemlich

nach dem Urtheile *Alberti* lib. 6. c. 1. de re ædificatoria pag. 80. & seq.) den Griechen Lateinisch, und den Lateinern Griechisch, und viel überflüssiges mit eingemischet.

§. 108. Den ersten und dritten Fehler hat *Perrault* gehoben, als er, wie vor diesem *Philibert de l'Orme* gerathen, in seiner *Architecture generale de Vitruve reduite en Abregé* (Amstel. 1682. in 8. 16 $\frac{1}{2}$ Bog. Text, 1 $\frac{1}{2}$ Kupfer) die Lehren *Vitruvii* in eine richtige Ordnung gebracht, die durch das ganze Werck hin und wieder zerstreuet sind.

§. 109. Den dunkelen Text *Vitruvii* hat *D. Gualt. H. Rivius* durch seine deutsche Uebersetzung und die jedem Capitel beigefugte Auslegung verständlich gemacht. Es ist sein überseheter *Vitruvius* das letztemahl zu Basel 1614. in fol. heraus kommen (7 Alph. 2 Buch mit vielen Figuren), aber nach dem Exempel *Vitruvii* viel überflüssiges mit eingemengget. Dieser deutschen Uebersetzung ist die Französische des *Perrault* vorzuziehen, die Anfangs 1673, hernach 1684. vermehrter und hin und wieder verändert, mit auserlesenen Anmerckungen und ausbündig schönen Kupfern unter dem Titul: *Lex dix Livres d' Architecture de Vitruve* zu Paris in Reg. fol. gedrucket worden (4 Alph. 5 Bog.).

§. 110. Weil aber *Vitruvius* die Lehre von den 5 Ordnungen, welche von einigen für das Hauptwerck in der Baukunst gehalten wird, nicht vollständig abgehandelt, wie denn auch zu seiner Zeit die Römische Ordnung noch nicht erfunden war: so hat wohlgedachter *Perrault* ein herrliches Werck von den Ordnungen der Baukunst, unter dem Titul:

tul: *Ordonance des cinq especes de Colones selon la methode des anciens*, zu Paris 1684. in fol. heraus gegeben, darinnen er die Vorurtheile der Baumeister gewaltig bestreitet.

§. 111. Lange nach *Vitruvio* hat *Leo Baptista de Albertis* gelebet, dessen *Libri de re edificatoria decem* zu Paris 1512. gedruckt worden (2 Alphab. in 4). Er hat sich angelegen seyn lassen, die Regeln der Baukunst zusammen zu tragen; aber die wichtige Lehre von den fünf Ordnungen etwas schlecht abgehandelt. Zwar wolte er *Vitruvio* seinen Ruhm abjagen; aber es ist ihm nicht gelungen. Es ist dieses Buch auch 1585. zu Florenz Lateinisch, und zu Venedig Italiänisch 1546. in 8. (1 Alph. 9½ Bog.) heraus kommen: ja vorhin 1553. ins Französische übersetzt worden.

§. 112. Bald nach ihm haben *Sebastian Serli* und *Andreas Palladio* zu einer Zeit gelebet. Jener hat 7, dieser 4 Bücher von der Baukunst geschrieben. Die ersten 5. Bücher *Serlii* sind Italiänisch zu Venedig (1601. in fol.), Deutsch zu Basel 1609. in fol. gedruckt worden (4. Alph. 13. Bog. Er handelt nur von allerhand Gebäuden und Architectonischen Wercken, und den 5. Ordnungen. Die Grundregeln hat er weggelassen, sonder Zweifel weil er sie aus *Vitruvio* als bekannt voraus setzet, den er so hoch gehalten, daß es ihm unrecht geschienen im geringsten von ihm abzuweichen. Vid. lib. 3. fol. 46. edit. Venet. Das sechste Buch von den Wohnungs Gebäuden ist nicht zum Vorschein kommen. Das siebende von den Häusern auf dem Lande hat *Jaco-*

bus Strada Lateinisch und Italiänisch zu Franckfurt 1575. in fol. drucken lassen.

§. 113. *Palladius* hat den Ruhm, daß er es allen andern Baumeistern in den 5. Ordnungen zuvor gethan, und seinen Wercken ein prächtiges Ansehen giebet. In seinem ersten Buche ist eine vollständige Anweisung zur Bau-Kunst enthalten. In den übrigen wird von allerhand Arten der Gebäude und anderen Architectonischen Wercken gehandelt. Er hat ordentlich und deutlich geschrieben. Daher er auch für andern den Anfängern der Bau-Kunst zu recommendiren. Alle 5. Bücher sind Italiänisch A. 1575. in fol. gedruckt worden. A. 1714. ist zu Benedig eine neue Auflage gemachet worden, da man die Holzschnitte in Kupffer verwandelt, und seinen Tractat von den Antiquitäten zu Rom mit beigefügt. Die ersten zwey hat Georg Andreas Böckler in das Deutsche übersetzt; und mit vielen Anmerkungen zu Nürnberg 1689. in fol. (1. Alph. 3. Bogen Tab. 88) auflegen lassen. Sonst hat auch *Palladius* eine Beschreibung der Kirchen zu Rom A. 1554. in 8. drucken lassen.

§. 114. Der Abt *Philibertus de l'Orme*, Caroli IX. Rath, Eleemosinarius und Baumeister hat A. 1567. zu Paris 9. Bücher von der Bau-Kunst in Französischer Sprache in fol. heraus gegeben. Es sind viele nützliche Regeln, sonderlich von den Gewölbern, darinnen zu finden, die man anderswo vergebens suchet. Er war zu seiner Zeit so berühmt, daß man ihn auch auffe Frankreich Königliche und Fürstliche Palläste angeben ließ. Er mischet aber
wie

wie *Vitruvius* und *Alberti* viel Dinge mit ein, die zur Sache nicht gehören.

§. 115. *Jacobus Barozzio Vignola* hat 1631. in Italiänischer Sprache ein Buch von den 5. Ordnungen heraus gegeben A. 1712. hat es *Dureau de Champdorè* unter dem Titul: *Regles de cinq Ordres d'Architecture de J. B. Vignole avec plusieurs augmentations de Michael Angel Bounaroti* zu Leyden in 8. ($9\frac{1}{2}$ Bog.) wieder auflegen lassen. Weil er aber sehr kurz geschrieben, hat es *Daviler* in seiner Französischen Uebersetzung mit weitläufftigen Commentariis vermehret, in welchem die ganze Baum Kunst erläutert wird. Das Werk ist unter dem Titul: *Court d'Architecture, qui comprend les Ordres de Vignole, avec des Commentaires, les figures & descriptions des plus beaux batimens & de ceux de Michel Angel &c.* zu Paris heraus kommen, und zu Amsterdam 1694. in 4. (3. Alphab. 20. Bogen Tabb. 13. 6. Bogen). Der Herr Sturm hat dieses Buch in das Deutsche übersezt, und mit einigen Anmerckungen vermehret, das Lexicon aber, daraus der grössste Theil des Buches besteht, weggelassen, auch noch $3\frac{1}{2}$ Bogen Figuren dazu gemachet (Amstel. 1699. in 4. 2. Alphabet). Es ist nach diesem zu Paris vermehret von neuem aufgelegt worden.

§. 116. *Vincentius Scamozzi* hat 1615. zu Venedig unter dem Titul: *L'Idée della Architettura Universale* das erste, andere, dritte, sechste und siebende Buch seiner Bau = Kunst in fol. drucken lassen. Das sechste und dritte ist ins Deutsche übersezt worden, und unter dem Titul: *Alärliche Beschreibung*

Schreibung der fünff Säulen • Ordnungen und der gantzten Baukunst zu Nürnberg 1697. in fol. nachgedruckt worden (2. Alphab. 6. Bog. Tabb. 85.). Man rühmet ihn, daß er sich wohl auf die Proportion verstanden. Allein er hat verwirret geschrieben, und wird ein Anfänger die Bau. Kunst aus ihm nicht lernen. Die beste Auflage ist die Französische, welche zu Leyden A. 1713. in fol. Reg. (3. Alph. 5. Bog. Tabb. 105.) unter dem Titul: *Oeuvres d'Architecture de Vicent Scamozzi* herauskommen.

§. 117. *Carolus Philippus Dieussart* hat in seinem in Deutscher Sprache herausgegeben *Theatro Architecturae Civilis* (Bamberg 1697. in Reg. fol. 1. Alphab. 3. Bog. Tabb. LXV.) nicht allein die zur Bau • Kunst nöthigen Regeln gegeben; sondern auch die 5. Ordnungen nach dem *Palladio*, *Vignola*, *Scamozzi*, *Pietro Cataneo*, *Sebastian Serlio*, und *Branca* untereinander verglichen: Dergleichen Arbeit vor ihm *Rol. Freard de Chambray* (A Paris 1650. in fol.) verrichtet und nach ihm *le Blond* in seinem *Parallele des V. Ordre d'Architecture* (A Paris 1710. in 4.).

§. 118. *Blondell* hat A. 1698. seinen *Cours d'Architecture* in 5. Theilen zu Paris in Regal fol. drucken lassen, davon schon etwas A. 1675. herauskommen war (8. Alph. 14. Bog. Tabb. XXIV. und sehr viel eingedruckte Kupfer). In dem ersten Theile erläutert er die 5. Ordnungen nach dem *Vitruvio*, *Vignola*, *Palladio*, *Scamozzi*; in den übrigen handelt er meistens von dem Gebrauch der Ordnungen aus aller berühmten Baumeister
Schrift

Schriften. Er hat sich nemlich vorgenommen bloß von denen Dingen zu handeln, welche zur Schönheit des Gebäudes gehören. Vid. part. 5. lib. 3. c. 1. f. 671.

§. 119. Es dienen auch zur Erläuterung der fünf Ordnungen des *Antoine Desgodetz Edifices antiques de Rome* (A Paris 1697. in fol. 3. Alph. 17. Bog. mit ausbündig schönen eingedruckten Kupfern): in gleichen *Joh. Balthaser Lauterbachs Abregé d' Architecture* (Amst. 1699. in 8. 2. Bog. Tabb. XVIII.) Er hat die leichteste Manier die Ordnungen zu zeichnen, und zwar auf eine neue Art angewiesen.

§. 120. *Nicolaus Goldmann*, ein Breslauer, hat in seinem *Tractatu de Stylometris* oder dem Gebrauche der Baustäbe (Lugd. Bat. 1661. in fol. Lat. & Germ. 9 Bog. Tabb. XL.) Instrumente beschrieben, dadurch man die 5. Ordnungen überaus leicht beschreiben kan, und die Ordnungen selbst in grössere Perfection gesetzt, als vor ihm nie geschehen. In seiner vollständigen Anweisung zu der *Civil-Bau-Kunst*, welche der Herr *Sturm* zu *Wolffenbüttel* 1696. in Reg. fol. (2. Alph. 4. B. Tabb. 74.) ediret, wird eben die Lehre von den Ordnungen vorgetragen, und ihr Gebrauch gezeigt, über dieses auch alles übrige mit Fleiß zusammen getragen, was in den Schriften *Vitruvii*, der berühmten *Italiänischen Baumeister* und dem *Commentario Vilalpandi* über den Propheten *Ezechiel* hin und wieder zerstreuet zu finden. Er hat anfangs die Kunst-Wörter erklärt, und ihnen einige allgemeine Regeln von der Festigkeit, Bequemlichkeit

lichkeit und Zierlichkeit der Gebäude beifüget: keinesweges aber, wie die Mathematici aus diesen vorhergesetzten Gründen das folgende erwiesen. Daher muß man sich nicht einbilden, als wenn er sein Buch nach der Mathematischen Lehr-Art eingerichtet, und die Regeln der Bau-Kunst, wie in Wissenschaften gebräuchlich, demonstriret hätte. Es ist aber sonst dieses Buch das beste unter allen; wiewohl zum Gebrauch der Ungelehrten viel dienlicher wäre, wenn man ein kürzeres und vollständigeres in besserer Ordnung aufsetzte, zumahl da die Kürze der Deutlichkeit nichts benehmen würde. Es hat aber auch schon der Herr Sturm A. 1699. in der ersten Ausübung der Civil-Bau-Kunst des Goldmanns viel ersetzt, was ihm an nöthigen Materien abgehet. In diesen Anmerkungen thut er zugleich einen Vorschlag von einer sechsten Ordnung, die aber zur Zeit noch nicht angenommen worden (1. Alph. 14 Bog. Tab. XIX.). Nach diesem hat Herr Sturm verschiedenes zu mehrerer Erläuterung dieses Werckes drucken lassen, welches in Augspurg von dem Kupferstecher Wolff verlegt worden, und die Kupferhändler herum zu tragen pflegen. Es würde weitläufftig fallen, wenn wir so vieler Tractate Titul alle erzählen sollten. Insonderheit aber hat Herr Johann Jacob Schübler in Nürnberg, ein in Architectonischen Erfindungen sinnreicher Kopff, allerhand nützliche Wercke in Verlegung Johann Christoph Weigels Wittwe heraus gegeben, welche denenjenigen viel Nutzen schaffen können,

so

so die Bau. Kunst in allerhand Wercken ausüben wollen.

§. 121. In Frankreich ist Anno 1728. in 4. (1. Alphab. 19 $\frac{1}{2}$ Bogen 150. Tabb.) heraus kommen: *Architecture moderne, ou l' Art de bien batis pour toutes Sortes de Personnes tant pour les Maisons des particulieres que pour Palais.* Er handelt alles zur Bau. Kunst dienliche ab, ausser die Lehre von den 5. Ordnungen sehet er als bekannt voraus.

§. 122. Exempel von den Zierathen der Fenster und Thüren, findet man in *Dominici de Russi* grossem Werke, das er davon zu Rom 1712. in fol. Tabb. 14. heraus geben und das man in Augsburg, wo die Kupfer in kleinerem Format nachgestochen worden, von neuem aufgelegt. Gleichwie er aber seine Exempel von den Pallästen aus Rom genommen; so hat im Gegentheile *Ferdinand Ruggiers* ein gleiches Werk (Florent. 1722. in fol. Reg. Tabb. 80.) heraus gegeben, darinnen er die Zierathen von den Pallästen zu Florenz genommen. Von ganzen Gebäuden findet man vergnügliche Exempel in dem Entwurffe einer *Historischen Architectur*, welche der Kays. Bau. Meister *Johann Bernhard Fischer von Erlachen* (Wien in groß fol. 44 Bog. 93. Tab.) heraus gegeben, woraus man von der alten und neuen Baukunst verschiedener Völcker vieles ersehen kan. Ich muß auch noch die *Holländischen Gebäude*, die *Vingboon* und *Post*, zwey berühmte Baumeister, angeben, anführen: der Titul von dem ersten ist: *Les nouvelles Oeuvres d' Architecture de Philippe Vingboons*
(Leyd)

(Leiden 1715. in fol. Reg. 11. Bog. Tabb. 80.): der Titul des anderen ist: *Les Oeuvres d' Architecture de Pierre Post* (Leiden 1715. in fol. 22. Bogen Tabb. 75.).

§. 123. Wer die zur Zimmer-Kunst gehörige Sachen erkennen will, damit er lerne, wie geschickte Verbindungen des Holzwercs zu erhalten; kan sich aus Johann Wilhelms *Architectura Civili* oder Beschreibung und Vorreissung vieler vornehmen Dachwercke &c. (Nürnberg in fol. 5. Bog. Tabb. LXXIV. in 2. Theilen) und Johann Vogels *Modernen Bau-Kunst* (Hamburg 1707. in fol. 3. Bog. Tabb. 36.) Raths erholen. In Engelland hat Jacob Smith einen Tractat von dieser Kunst heraus gegeben (Londen 1733. in 8. Tabb. 41.) der Titul ist: *The Charpenters Compagnion*, oder der Zimmerleute Gesehrte.

§. 124. Zu dem Wasserbaue sind gute Bücher *L' Arte di restituire à Roma la tralasciata Navigazione del suo Tevere* Corneli Meyers, eines Holländers, (in Roma A. 1685. in fol. 2. Alph. 3. Bog. mit vielen eingedruckten Kupfern): seine *Nuovi ritrovamenti* (in Roma 1689. in fol. 8. Bog. mit vielen Kupfern) und ein anderes Buch, so von eben diesem Autore zu Rom. 1696. in fol. (12. Bog. mit vielen Kupfern) gedrucket worden. Hieher gehöret auch des Job. Baptista Barratterie *Architectura d' Acque* (Piacenza 1656. in fol. 3. Alph. 6. Bog.): ingleichen Dominici Guilielmi *della natura de fiumi Trattata* (Bonon. 1697. in 4. 2. Alph. 12. Bog. 15. Tab.) Aus dem ersten Buche hat ein ungenannter Franzose einen angenehmen Auszug gemacht, und ihn

ihn als sein eigenes Werk unter dem Titel: *Traité des Moyens de rendre les Rivières navigables* zu Amsterdam in 8. herausgegeben (Amsterdam 1696. in Neg. 8. 6. Bog. Tabb. XII.) der vor kurzem auch in das Deutsche übersetzt worden. Man kan auch hieher ziehen, die beyden Tractate welche *Hed. Gautier* von dem Brückenbaue heraus gegeben. Der erste hat zu seinen Titel: *Traité des ponts & chaussées*, und ist zu Paris 1716. in 8. (14. Bogen 26. Tabb.) gedruckt worden. Der Titel des andern ist: *Dissertation sur les Culées voussois, piles & poussées des ponts.*

§. 125. Endlich muß ich auch des Herrn des *Argues* Kunsttrichtig- und Probemäßige Zeichnung zum Steinhauen in der Bau- Kunst rühmen; darinnen die schöne Erfindung der Franzosen die Steine nach Geometrischen Gründen zu allen Arten der Bogen und Gewölber zu hauen, deutlich vorgestellt wird. Die deutsche Übersetzung aus dem Französichen ist in Nürnberg 1699. in 8. gedruckt worden (15. Bog. Tabb. 114.). Es hat aber von dieser Kunst sehr weitläufftig in einem grossen Werke gehandelt *Frezier*, welches in 3. Tomis zu Straßburg A. 1737. bis 39. gedruckt worden, unter dem Titel: *La Theorie & la Pratique de la coupe des pierres & des bois*, welches wegen der vielen Kupffer sehr kostbahr ist. Ingleichen muß ich hier eines Werkes gedencken, welches von *Batty Langley* in Englischer Sprache zu London 1726. in fol. (1. Alph. 11. Bogen Tabb. 40.) heraus kommen, darinnen
(*Wolf's Mathes.*) S die

die Geometrie in der Bau-, Kunst und Garten-Bau-Kunst angewiesen wird. Sonst hat man in der Garten-Bau-Kunst *La Theorie & la Pratique du jardinage* (A Paris 1709. 1. Alph. 4. Bog. Tabb. 32.).

Das 6. Capitel.

Von der Artillerie oder Pyrotechnie.

§. 126.

Unter unseren Deutschen, die sich auf Feuerwercke verstehen, werden Casimirus Simionowicz ein Pohle, Johann Sigismund Buchner und Ernst Braun im Werth gehalten. Des ersten vollkommene Büchsenmeisterey-Kunst ist mit dem andern Theile von Daniel Ellrichen vermehret worden und zu Franckfurt am Mayn in fol. heraus kommen (3. Alph. 20. Bogen Tabb. 43.). Aus ihm hat meistens das seine Dechales in seinem *Mundo Mathematico* genommen. Buchners Artillerie oder *Theoria & Praxis Artilleriæ* ist zu Nürnberg 1685. in fol. (2. Alph. 18. Bogen Tabb. 53.) und Braunens *Nouissimum Fundamentum & Praxis Artilleriæ* zu Danksig 1687. in fol. (2. Alph. 16. Bog. Tabb. 60.) gedruckt worden. Es handeln aber diese Autores nicht allein vom Pulver und dem Geschütze; sondern auch von allen Lust- und Ernst-Feuerwercken: von welchen Materien zusammen ein kurzer, doch deutlicher Begriff, in Georg Andrea Böcklers dritten und vierdten Theile des *Manualis Architecturæ Militaris*

ris oder Hand = Büchleins über die Fortification zu finden (Frankfurt und Leipzig 1689. in 16. Tom. III. 4. Bog. Tabb. XI. Tom. IV. 10. Bogen Tabb. XXXIV.).

§. 127. Michael Mieth hat in seiner *Artillerie recentiori praxi* oder Geschütz = Beschreibung das Geschütze nebst den Ernst Feuern mit dem Pulver und seinem Gebrauche am ausführlichsten beschrieben: allein von Lust, Feuer, Wercken nichts bengebracht (Frankfurt 1684. in fol. 3. Alphab. 10. Bog. Tabb. LX.).

§. 128. Dergleichen Arbeit ist fast *La Forge de Vulcain, ou l'Appareil des Machines de Guerre*, die der Chevalier de Saint Julien (A la Haye 1706. in Regal 8. 10. Bog.) heraus gegeben, nur daß, wie leichte zu erachten, nicht alles so weiltläufig wie dort ausgeführet wird. Der Autor bemühet sich, junge Leute, die einige Erkenntniß von der Artillerie zu wissen verlangen, nicht aber Artillerie, Bediente und Stück, Gießerey zu unterrichten: wozu Miethens Werck dienlich.

§. 129. Alles, was nur von Geschütze, dessen man sich im Kriege bedienet, erfunden worden, hat sehr genau beschrieben und vorgezeichnet *Surirey de Saine Remy* in seinen *Memoires d'Artillerie*. Die beste Auflage ist zu Paris 1707. in Reg. 4. (4. Alph. 17. Bogen Tabb. 196.) heraus kommen, und vermehrter als die anderen: wiewohl Buchner, Braun, Mieth und Simienowitz zusammen weit mehreres als der Frankeose haben. Und Christoph Friederich von Geißler neue, curieuse und

vollkommene Artillerie (Dresden 1718. in fol. 2. Alph. 15. Tabb. hält auch viel gutes in sich.

§. 130. Absonderlich ist denen, welche gerne was kurzes und gutes von der Artillerie haben wollen, der gründliche Unterricht von der Artillerie zu recommendiren, der zu Hamburg 1699. in 8. aus dem Holländischen übersezt worden (10. Bog. Tabb. $6\frac{1}{4}$ Bog.) und den berühmten *Cæborn* zu seinem Autore hat.

§. 131. Für Anfänger dienet der gründliche Unterricht von der Theoria und Praxi der heutigen Büchsenmeisterei, den *Augustinus Brand* zu Franckfurt A. 1713. in 8. (2. Alph. 4. Bogen 29. Tabb.) drucken lassen. Auf den Titul steht zwar, als wenn es eine Uebersetzung einer Französische Schrift des *Chevalier de St. Julien* wäre: allein den Ungrund siehet man daraus, weil ein grosser Theil des Buches von Wort zu Wort aus Mäthen, und vieles auf gleiche Art aus anderen deutschen Autoribus geschrieben. Unterdessen ist das Buch sehr wohl zu gebrauchen.

§. 132. Man kan auch hieher *Blondells l'Art de jetter les Bombes* (A Paris 1683. in 4.) ziehen, welche auch zu Amsterdam 1690. (1. Alph. und vielen Figuren) nachgedruckt und ins Deutsche übersezt zu Sulzbach heraus kommen 1680. in 8. und die einige Schrift in dieser Materie gewesen, die Mathematisch ausgeführet worden, bis der Herr Graf von Zerberstein in Prage ein ausführliches Werk unter dem Titul: *Cyclo diatomia, qua vero rei tormentariae incremento motum ac tempus projectorum mensurat & demonstrat*

frat F. E Comes ab Herberstein (A. 1716. in 8. 1. Alphab. Tabb. 20.) heraus gegeben. Ingleichen muß hier des *Lamberti Lambion Bau Practica* nicht vergessen werden (Wien 1696. in 8. 15. Bogen Tabb 5.), darinnen ausführlicher als anderswo von den Minen gehandelt wird.

Das 7. Capitel.

Von der Fortification.

§. 133.

Die Fortifications-Schriften enthalten entweder ihrer Autorum eigene Erfindungen in sich, oder sind zum Unterrichte derjenigen geschrieben, welche die Fortification lernen wollen. Von beyden will ich nur die vornehmsten erzehlen.

§. 134. Anfangs hielte man die Holländische Fortification für so vollkommen, daß nichts daran zu verbessern stünde. Dieselbe hat Freitag, ihr Erfinder, in seiner *Architectura militari* (Amsterdam 1665. in fol. 2. Alph. 9. Bogen 1 $\frac{1}{2}$ Alph. Tab.) am ausführlichsten beschrieben. Sie wird auch fast in allen Anweisungen zur Fortification nicht unbillig zuerst erkläret, weil sie zu den neueren Erfindungen Anlaß gegeben, und diese durch sie desto leichter verstanden werden. *Gerhardus Melder* hat sie in seiner *Praxi Fortificatoria* (Frankfurt 1666. in fol. 36. Bogen 8. Tabb.) hin und wieder, was die Grösse der Linien und Winckel betrifft, geändert. Eben dieselbe beschreibt *Matthias Dagen* in seiner *Architectura militari moderna*, die Lateinisch

A. 1647. in fol. heraus kommen (5. Alphab. 13. Bog. 78. Tabb.) worinnen er viel nütliches von dem würrlichen Bestungsbaue beybringet. Hingegen Wendelin Schild - Knecht, der gleichsam die lustige Person unter den Ingenieurs agiret, beschreibet dieselbe Comœdianten - haßlig. Sein Buch ist zu Stetin A. 1652. in fol. (1296. Bog. Text, 20 $\frac{1}{2}$ Bog. Kupfer) heraus kommen.

§. 135. Sie ist bald in schlechteren Werth kommen, als der Herr Graf von Pagan A. 1645. seine Manier zu fortificiren bekannt gemacht. Diese ist anfangs Französisch zu Paris 1645. in fol. unter dem Titul: *Les Fortifications de M. le Comte de Pagan* (1. Alph. 6. Bog. Tabb. XI.) heraus kommen, und hernach auch in unsere deutsche Sprache übersetzt worden. Mit dieser kommet in dem meisten die überein, welche Heinrich Ruffe, Baron von Ruffenstein, entworffen, von Melder mit seinen weisläufftigen Anmerkungen zu Osnabrück in fol. heraus gegeben (43. Bogen Text und 16. Bog. Kupfer.).

§. 136. Etwas weiter gehet Blondells Manier von ihr ab, welche viel schöne Maximen in sich begreiffet, aber allzu kostbahr ist. Es ist seine *Nouvelle maniere de fortifier les places* anfangs zu Paris 1686. in Reg. 12. (5. Bog. Text. Tabb. XII.) gedruckt, und nachdem auch in Haage 1686. in 8. nachgedruckt worden.

§. 137. Vauban hat zweyerley Manieren zu fortificiren erdonnen, die ich beyde in meinen Anfangs-Gründen beschrieben. Er selbst hat niehmahls etwas davon entworffen; aber verschiedene andere haben

haben sie publiciret. Für die beste Edition von der ersten hält man diejenige, welche wir dem Abte du Fay zu dancken haben, weil sie Vauban selbst approbiret. Sie ist unter dem Titul: *La Veritable maniere de bien fortifier de M. Vauban* zu Amsterdam 1692. in 12. gedrucket worden (9. Bog. mit einigen Kupffern). Die andere Art zu befestigen hat der Urheber des *Ingenieur Francois* (A Paris 1691. in Reg. 8. 13 $\frac{1}{2}$ Bog. 33. Tab.) zuerst beschrieben. Beyde hat der Herr Sturm in seinem *Veritable Vauban* (A la Haye 1709. in Reg. 8. 14. Bog. Tab. 31.) erkläret, auch die Fundamental-Regeln der Fortification zugleich erzehlet, und nach Gewohnheit eine *Arithmetica* und *Geometria* præmittiret, daß also die Anfänger dieses Buch wohl nutzen können. Die Baubanische Manier zu befestigen ist in einem weitläufftigen Wercke, so in zweyen Theilen bestehet, zu Haag A. 1737. in 4. heraus kommen. Der Titul heißet: *La maniere de fortifier les places par Vauban.*

§. 128. Coëborn hat seine Manier zu befestigen in Holländischer Sprache zu Leeuwarden in fol. publiciret 45. Bog. 1 ab. XIV.). Nach diesem ist sie ins Französische übersezt worden, und unter dem Titul: *Nouvelle Fortification tant pour un terrain bas & humide, que sec & eleve* zu Haag 1706. in Reg. 8. (19. Bog. Tabb. XIV.) heraus kommen.

§. 139. Ganz besondere Arten zu befestigen, die mit den anderen nichts gemein haben, haben Alexander de Grotte zu Venedig 1716. in fol. (3. Alphab. und Donatus Rosetti zu Turin. 1678. in fol. (2. Alphab.

phab. 5. Bog.) in Italiänischer Sprache heraus gegeben.

S. 140. Unter unseren Deutschen ist Bernhard Scheiters neuvermehrte und verstärkte Festungs- Bau- und Krieges- Schule bekannt, die zu Braunschweig 1672. in fol. gedrucket worden (1. Alphab. 7. Bogen Tabb. XXIV. in Dieg. fol. Als Christian Neubauer das folgende Jahr darauf in seinen zu Cölln an der Spree gedruckten Wohlmeinenden Gedanken oder Discurs über die ausgegangene Fortification des Herrn Joh. Bernhard Scheitern (Cölln an der Spree in 8.) wider dieselbe schrieb, und seine neue Invention ihr entgegen setze: gab Scheiter An. 1677. zu Straßburg in fol. sein *Examen Fortificationum* heraus, darinnen er die Neubauerische Invention verwirffet, seine alte vertheidiget, und noch eine andere neue hinzu setzet (1. Alphab. 2. Bogen Tabb. VIII.) Neubauer hat A. 1679. in seiner *Vera Praxi Architecturae Militaris* oder gründlichen Beschreibung der neu inventirten Invention (Stargard 1679. in fol. 19. Bog. Tab. VIII.) wieder darauf geantwortet.

S. 141. Der Herr Ernst Friedrich von Borgsdorff hat in seiner unüberwindlichen Festung (Ulm 1682. in 8. 7. Bogen Tab. VIII.) allerhand gute Maximen, welche verdienen gelesen zu werden. Ebenso verdienet Joh. Jac. Werdmüllers Probierstein der *Ingenieurs* (Frankfurt 16. Bogen mit einigen Kupffern) wegen der guten Maximen, die bey ihm anzutreffen, recommendiret zu werden. Von der Art ist auch seine *Apologia Fortificatoria* (Franc.

(Franc. 1691. in fol. 1. Alph. 15. Bog. Tabb. XVI.). Der Herr von Borgsdorff aber hat noch einen andern Tractat unter dem Titul: Die befestigte Stütze eines Fürstenthums, oder neu-erfundene Defension wider das sonst Welt-bezwingende Canoniren, Bombardiren und Miniren, zu Nürnberg 1687. in 8. (8. Bog. mit einigen Kupffern) heraus gegeben.

§. 142. Kein Buch hat grösser Ansehen gemacht als Georg Kimplers befestigte Festung (Franc. 1674. in 12. 16. Bog.) darinnen er ganz eine andere Beschaffenheit der Festungen erfordert, als alle bisher erbaute und inventirte Festungen haben. Er hat selbst hiervon keinen Riß gegeben: sie aber wieder Scheitern vertheidiget, unter dem Titul: Herrn Joh. Bernh. Scheiters, Ingenieurs, furieußer Sturm auf die befestigte Festung totaliter abgeschlagen von Georg Kimplern (Frankfurt 1678. in 12. 2. Bog.). Niemand aber hat sich mehr angelegen seyn lassen solches zu prästiren als der Herr Sturm in seiner Entdeckung der unstreitig allerbesten Manier zu befestigen (Frankfurt an der Oder 1704. in 8. 12. Bog. Tab. IX.). Sonst hat auch Daniel Suttinger in einer zu Dresden in fol. heraus gegebenen Schrift 14. Bogen 9½ Bogen Kupfer) dergleichen unternommen. Die Kimplerischen Schriften sind bisher sehr rar gewesen. Derowegen hat Herr Ludwig Andreas Herlin die Liebhaber der Fortification sich gar sehr verbunden, daß er sie insgesamt zu Dresden 1724. in 4. (3. Alph. 9. Bog. Tabb. 10.) auflegen lassen und mit Anmerkungen und Zeich-

nungen erläutert, auch einige andre Tractate mit beygefüget. Er ist mit Herr Sturmens Urtheil von Rimplers Erfindung gar nicht zufrieden, gleichwie auch andere nicht so viel auf seine Erfindungen halten, als er will.

§. 143. Rimplers Maximen billiget J. H. Landsberg, ein Deutscher, Ober-Ingenieur der Staaten von Holland, und hat einen Riß darnach fertigget; jedoch weil er ihm nicht in allem völlig ein Gelingen thut, noch eine neue, aber sehr weitläufige Manier zu befestigen hinzu gethan. Sein Buch ist unter dem Titul; *Nouvelle maniere de fortifier les places* zu Haag 1712. in 4. (11. Bog. 8. Tab.) heraus kommen. Herr von Meißner hat zu seiner neu verbesserten *Geometria practica* davon oben geredet worden, einen Kurzen Auszug von einem neuen *Fortifications Systemate* beygefüget, darinnen er die allgemeine Fortifications Manier vor untüchtig erkläret, und zeigt, daß ganz andere Grund-Regeln erwahlet werden müssen: wiewohl er zur Zeit keinen nach seinen Maximen giebet. Er rühmet auch in der Vorrede, daß der Herr Geheime Rath Bülffinger der einige sey, welcher bisher von den allgemeinen Maximen abgegangen. Jedoch hat auch dieser noch zur Zeit von seinen Erfindungen nichts ans Tage-Licht gegeben.

§. 144. Christoph Heeres *Theoria & Praxis Artis muniendi*, oder Kunstmäßige Handgriffe und Anweisung der vielfachen Fortification, nach welcher heute zu Tage die Festungen in Europa erbauet zu werden pflegen. (Frankfurt

furt 1689. in 4. 16. Bogen Tabb. XXX.) ist wegen seiner artigen Manieren die Festungen zu zeichnen, und der Beschreibung des würcklichen Baues der Festung mit Fleiß zu lesen. In seinem *Speculo Artis Muniendi* oder hell-leuchtendem Fortifications-Spiegel (Leipzig 1694. in 4. 17. Bogen Tab. XXXI.) hat er gleichfalls besondere Constructiones und beschreibet einige vornehme Festungen in Europa.

§. 145. Eben so haben bey unseren Deutschen ganz besondere Manieren zu befestigen gegeben, welche von Verständigen verdienen erwogen zu werden, Johann Franz Grindel von Nach (Nürnberg 1683. in fol. 14. Bog. und an Figuren 15. Bogen); Christoph Zeidemann so wohl in seiner *Architectura militari* (München 1661. in fol. 1. Alph. 22. Bogen und an Figuren 27. Bog.) als in seiner *Neuen und herfür gegebenen Krieges-Architectur* (München 1673. in fol. 10. Bogen und an Figuren 14. Bog.).

§. 146. Daniel Speckle, ein Baumeister in Straßburg hat schon A. 1589. eine *Architecturam* von Festungen in fol. (2. Alphab. 10. Bogen Tab. XXXVI) ausgehen lassen; allein er hat so viel vortreffliche Sachen in seinem Werke, daß er noch heute zu Tage überall in sonderbarer Hochachtung ist, nur daß er nach der alten Art die Werke zu hoch bauet. Daher hat man es auch A. 1705. zu Dresden von neuem in fol. (2. Alph. 10. Bogen Tabb. 36) auflegen lassen. Man findet viel darinnen, so man anderswo vergebens suchet.

§. 147. Ich muß auch noch *Wilhelm Dilichii Peribologiam* oder Berichte von Festungs-, Gebäuden anführen, welche zu *Frankfurt am Mayn* 1640. in fol. wieder aufgelegt worden (2. Alph. 2. Bog. Tabb. 409. oder 9. Alph. 11. Bog.), weil Verständige viele zur Praxi gehörige Dinge daraus nehmen können. Denn wenn man die Wahrheit sagen soll, so trifft man sonderlich die Erfindungen der *Frankosen*, die als etwas besonderes angesehen werden, lange vorher bey diesem Autore an. Aus des *Dechales* Bericht aber von den Mathematischen Schrifften, der vor seinen *Mundum Mathematicum* gedrucket worden, ersiehet man, daß das Buch in *Frankreich* nicht unbekannt gewesen. Er hat auch eine *Kriegs-Schule* geschrieben, die zu *Frankfurt am Mayn* 1689. in fol. heraus kommen (10. Alphab. 13. Bogen mit einer grossen Menge Kupfer und eingedruckten Figuren.). Darinnen er alles zum Kriege gehörige erkläret, und daher findet man auch viel von den Festungen und Attaquen darinnen. Er beschreibet aber zugleich das Krieges-Wesen der alten Römer und Griechen.

§. 148. Nun will ich auch von einigen nützlichen Büchern reden, welche zu dem Ende geschrieben sind, damit Anfänger in der Fortification unterrichtet werden können. In der *Frankösischen* Sprache haben wir verschiedene von dieser Sorte. Es verdienet *Don Sebastian Fernandez de Medrano* hier nicht ohne Ruhm genennet zu werden, dessen *Ingenieur Practique ou l'Architecture militaire & moderne* (A *Brusselles* 1696. in 8. 1. Alph.

1. Alph. Tabb. XXXV.) gute Praxin mit Raïson beybringenet. Es ist zugleich eine zur Fortification zulängliche Geometria practica mit darinnen enthalten.

§. 149. Ozanam in seinem *Traité de Fortification* (A Paris 1664. 17. Bogen Tabb. XLIV.) hat die Maximen der Fortification wohl erkläret, und verschiedene Manieren zu befestigen, als seine eigene, des Errard, des Grafen von Pagan, des Bombelle, des Blondel, des Vauban, des Sardi, des de Ville, des Marolois, ausführlich abgehandelt, auch in allen die Trigonometrische Rechnung gewiesen.

§. 150. Der *Ingenieur François*, dessen bereits oben (§. 131.) gedacht worden, wird gleichfalls von denen geliebet, die von dem Kriege Profession machen, weil nebst der Geometria practica auf dem Papiere und Felde die Haupt, Maximen der Fortification in angenehmer Kürze vorgetragen, die Zeichnung der Festungen ohne Tabellen angewiesen, auch der wirkliche Bau erläutert, und *Vaubans* verstärckte Manier zuerst darinnen publiciret wird.

§. 151. Der *Chevalier de Saint Julien* in seiner *Architecture Militaire* (A la Haye 1705. in 8. 11. Bogen Tabb. XXV.) erkläret überhaupt die Maximen der Fortification und das Dessen verschiedene Ingenieurs, thut einen Vorschlag wie man grosse Städte vortheilhaft fortificiren könnte und zeigt eine leichte herrliche Art die irregulären Derter bey nahe wie reguläre zu fortificiren, die sich bey jedem Dessen gebrauchen lässt, und aus Dilichs Peribo-

Peribologia und Krieges = Schule genommen, wo sie viel allgemeiner abgehandelt wird.

§. 152. Ich muß auch die *Nouvelle maniere de fortifier les places, tirée des methodes du Chevalier de Ville, du Comte de Pagan & de Monsieur de Vauban* (A Amsterdam 1686. in Reg. 12. 10. Bog. Tabb. XXV.) hier anführen, weil man nicht allein in diesem Werke die Maximen der Fortification fast besser als sonst irgendwo antrifft, sondern auch daraus lernen kan, wie man die Desseins verschiedener Ingenieurs auf einmahl nutzen kan. *Vaubans* und *Coborns* Maximen hat der Director der Känserlichen Kriegs, Academie zu Brüssel, *Hartmann*, unter dem Titul: *Les Principes de la fortification moderne* (Bruxelles 1722. in 8. 19. Bogen 9. Tab.) ausgeführet und insonderheit die Attaquen und dagegen zu führende Defension besser angewiesen, als sie sonst irgendwo zu finden. Insonderheit aber ist vor diejenigen welche die Fortification studiren wollen, ein nütliches Werk, welches unter den Titul: *Le parfait Ingenieur Francois* zu Amsterdam A. 1734. in 4. (1. Alphab. 22. Bogen) heraus kommen, darinnen er die vornehmsten Maniren zu fortificiren nebst den Attaquen umständlich erkläret, auf Sturmen aber nicht viel hält. Vor diesen hielt man viel auf *Les Travaux de Mars ou l' Art de la Guerre*, welches Buch *Allain Manesson Mallet* zu Paris Anno 1685. in Octavo von neuem aufgelegt, in 3. Theilen (3. Alph. 4. Bogen und 266. Figuren, so im Texte stehen.) Allein nach der Zeit hat sich die Fortification gar sehr geändert.

§. 153. In unserer deutschen Sprache haben wir George Conrad Marci oder Stahls Europäischen Ingenieur (Nürnberg 1696. in 8. 2. Alphab. 16. Bog. Tab. XL.), darinnen nebst der Fortification eine vollständige Arithmetick und Geometria practica enthalten: 2. des Herrn Johann Heinrich Behrs aufs neu verschangte Turrenne oder gründliche Alt und Neue Kriegs-Bau-Kunst (Frankff. 1690. in 8. 1. Alphab. 16. Bog. Tab. XXXII.), welches fast eben so wie das vorige eingerichtet: 3. Sebastian Grubers Friedens und Kriegs-Schule (Nürnberg. 1697. in 8. 2. Alph. Text 1½ Bog. Kupf.) 4. Sein Examen Fortificationum Leipzig 1703. in 8. (1. Alph. 22. Bog. 19. Tab.) und eben desselben Neuen und gründlichen Unterricht von der heutigen Fortification und Artillerie (Nürnberg. 1700. in 8. 1. Alph. 17. Bog. 16. Tab.) und andere.

§. 154. Wer die Fortification versteht, kan des Herrn Leonhard Christoph Sturms Architecturam Militarem hypotheticam & Electricam, das ist, getreue Anweisung, wie man sich der gar verschiedenen Deutschen, Französischen, Holländischen und Italiänischen Befestigungs-Manieren bedienen könne (Nürnberg 1702. in 8. 10. Bog. Text, 6. Bogen Kupfer) mit Nutzen lesen, massen in selbigem Buche die Schrifften der meisten Ingenieurs erzehlet, ihre Desseins erläutert, beurtheilet und öfters verändert werden. Da aber in dieser ersten Auflage die Profile fehlen, so hat er diesem Mangel in der andern abgeholfen, welche vermehrter und sauberer zu Nürnberg

1719. in 4. (1. Alphab. 41. Tabb.) heraus kommen.

§. 155. Von den Attaquen hat Goulon einen besondern Tractat aufgesetzt, darinnen diese Materie ausführlicher aus der Erfahrung abgehandelt wird, als sonst in Fortifications Schriften zu geschehen pfleget. Es sind diese *Memoires pour l' Attaque & pour la defense d' une Place* zu Haage 1706. in 8. (13. Bog. 4. Tab.) herauskommen und noch in diesem Jahre zu Wesel in Reg. 8. nachgedrucket (5. Bog. Tabb. IV.), hernach 1709. ins Deutsche übersetzt worden (Nürnberg in 8. $5\frac{1}{2}$ Bog. 4. Tabb.). Ein vollständigeres Werk aber von den Attaquen ist dasjenige, welches aus den MSC. des Vauban, so er zum Gebrauch des Herzogs von Burgund aufgesetzt hatte, zu Hage A. 1737. in 4. (1. Alph. $5\frac{1}{2}$ Bogen. 33. Tabb.) heraus gekommen, ob es zwar nicht dazu bestimmt war, daß er das Tage, Licht jemahlen erblicken sollte.

§. 156. Zum würcklichen Festungs-Baue findet man absonderslich in Johann Saulhabers Ingenieur Schule (Nürnberg 1637 in 4.) und Lambert Lambions Bau-Practica (Wien 1696. in 8. 16. Bog. und an Figuren $1\frac{1}{2}$ Bog.) viele dienliche Anleitung.

§. 157. Joh. Teyler hat in seiner *Architectura militari* (Rot. 1697. in 4. 8. Bog. Tabb. 41.) die Principia der Fortification durch die Algebra zu erweisen angefangen. Es hat auch auf eine andere Art ein Specimen Algebrae ad Artem Fortificationem applicatae Herr Johann Matthias Haas, nun

nun Professor Matheseos zu Wittenberg, (Leipzig 1707. in 4. 3 $\frac{1}{2}$ Bog. 1. Tab.) gegeben. Dergleichen auch Herr Johann Christoph Glaser in der ersten Probe seiner vernünftigen Gedancken, von der Kriegs-Baukunst gethan, (Halle 1728. in 4. 1 Alph. 2 Bog. 6 Tabb.). Er tadelt, daß bisher den Graben die nöthige Defension gesetzt, und giebet an, wie diesem Fehler abzu-
helfen.

Das 8. Capitel.

Von den Mechanischen Schriften.

§. 158.

Die Mechanick und Statick ist bey den Alten sehr unvollkommen gewesen. Wir finden bey ihnen nichts mehr, als was *Archimedes* in seinen Büchern de æquiponderantibus von dem Mittel-Puncte der Schwere und dem wahren Stande der Körper gegeben, und *Pappus* lib. 8. Collect. Mathematic. von dem Hebel, dem Rade an einer Aye, vom Seil und Kloben, der Schraube und dem Reile erwiesen.

§. 159. Die Neueren, welche Einleitungen zu der Mechanick geschrieben, gehen insgemein auch nicht weiter: ja die meisten lassen weg, was *Archimedes* von dem Mittelpuncte der Schwere erwiesen, weil Anfänger sich darein nicht wohl zu finden wissen. Hieher gehöret *Guido Ubaldi liber Mechanicorum*. (Pisauri 1577. in fol. 2 Alphab.) *Simonis Stevini Statica*, von welcher unten geredet wird: *Jacob Robaults Traité Mecanique*, so unter seinen Wercken (Wolfs Mathes.)

zu finden, die nach seinem Tode heraus kommen, und unterweilen an die Lateinische Uebersetzungen seiner Physic angehänget wird: *Ignatii Gastonis Pardies Statica*, die zu Haage 1692. in 12. ($10\frac{1}{2}$ Bog.) Französich zum dritten mahle aufgelegt, aber mit vielen Fehlern ins Lateinische übersezt worden: *Bernhard Lamys Mecanique* (A Paris 1687. in 12. 12 Bog.) dazu ein Bogen nach diesem kommen ist, wie man auf eine neue Art die vornehmste Sätze der Mechanick erweisen soll: *Guilielmi Oughtred Institutiones mechanicae*, von welchen unten geredet wird: *Pauli Casati Mechanicorum libri octo* (Lyon 1684. in 4. 4 Alph. 7 Bogen), darinnen viel zur Ausübung dienliches anzutreffen, und *Andrea Jungnickels*, der aus einem Glaser-Gesellen erstlich ein gemeiner Soldate, hernach Batterien-Meister worden, *Clavis Machinarum* (Nürnberg 1661. in 4. 2 Alph. 3 Bog.). Das aller vollständigste Werck von dieser Materie ist das grosse Werck, welches *Varignon* verfertiget, und nach seinem Tode unter dem Titul: *Nouvelle Mecanique & Statique* zu Paris (A. 1725. in 4. reg. 4 Alph. 21 Bogen Tabb. 64.) heraus kommen: welches aber nur für die gehöret, welche an tieffsinniger Theorie ihr Gefallen haben.

§. 160. *Galileus Galilaei* ist am ersten weiter gegangen in seinen *Discursibus & demonstrationibus Mathematicis circa duas novas scientias pertinentes ad Mechanicam & Motum localem*, welche zugleich mit seinen *Dialogis de Systemate Mundi* zu Leyden 1699. in 4. aus dem Italiänischen in das Lateinische

nische überſetzt heraus kommen. Die *Dialogi de motu* beſtehen aus 1 Alph. 14 Bogen. Er hat aber hauptſächlich die Bewegung der ſchweren Körper ſo wohl in einem leeren Raume, als einer ſchiefſliegenden Fläche ausgemacht, und den Wiſderſtand der feſten Körper, wiewohl der letztere nicht mit ſolchem Fortgange, wie das erſte zu erſt wegen angefangen. Seine Lehre hat zum Theil *Toricellius* in ſeinen zwey Büchern *de motu gravium naturaliter descendantium & projectorum* erläuttert und erweitert, welche unter ſeinen *Operibus Geometricis* anzutreffen, davon unten geredet werden ſoll.

§. 161. *Joh. Baptiſta Balianus* hat in ſeinem *Traſtatu de motu naturali gravium* (Genue 1646. in 4.) *Galilei* Lehre von der Bewegung der ſchweren Körper ändern wollen; allein er hat bey niemanden Beyfall gefunden. Hingegen was *Galileus* von der Bewegung der *pendulorum* hergebracht, hat *Chriſtianus Hugenius* in ſeinem vortrefſlichen Werke *de Horologio oscillatorio* (Paris 1673. in fol. 2 Alph.) mit neuen Erfindungen erweitert, darinnen er auch die Auswickelung der krummen Linien (*evolutionem curvarum*) zuerſt bekannt gemacht. Der Herr von *Leibnitz* hat in den *Actis Eruditorum* A. 1684. p. 319. den Wiſderſtand der feſten Körper gründlicher zu determiniren angewieſen, als *Galileus*: wovon nach dieſem auch der berühmte *Variignon* in den *Memoires de l'Academie Royale des Sciences* A. 1702. p. 87. nach ſeiner Art allgemein gehandelt.

§. 162. *Johannes Alphonfus Borellus* hat in seinem *Tractatu de vi percussione* die Regeln der Bewegung zu erklären unternommen. Das Buch ist anfangs zu Bononien 1666. in 4. gedruckt, und hernach mit einem andern *Tractatu de motionibus naturalibus a gravitate pendentibus* zu Leyden A. 1686. in 4. (3 Alph. 18 Bog. 21 Tabb.) wieder aufgelegt worden. Er hat in seinem herrlichen *Wercke de motu animalium* (Lugd. Bat. 1685. in 4. 3 Alph. 18 Bogen 18. Tabb.) die verschiedenen Bewegungen der Thiere aus Statischen und Mechanischen Gründen erklärt: wiewohl nach dem jetzigen Zustande der Wissenschaften vieles darinnen zu verbessern stünde.

§. 163. Die ersten, welche zu einer Zeit wahre Regeln von der Bewegung der Königlichen Societät in Engelland übergeben, sind gewesen: *Wallisus*, *Hugenius* und *Christophorus Wren*. Ihre Erfindungen sind in den *Transactionibus Anglicanis* n. 43. p. 864. & 867. und n. 46. p. 927. und bey *Johann Lowthorp* in den *Philosophical Transactions abrig' d' Vol. I. c. 5. p. 545. & seqq.* zu finden. Es haben aber *Hugenius* und *Wren* von der Bewegung derjenigen Körper gehandelt, die eine ausdehnende Kraft haben. *Wallisus* aber von der Bewegung der harten, die dergleichen Kraft nicht haben. *Hugenius* hat nach diesem einen besondern *Tractat de motu corporum ex percussione* geschrieben, welcher unter seinen Wercken zu finden, die nach seinem Tode heraus kommen, und darinnen er seine Erfindungen deutlicher erklärt. *Wallisus* aber hat ein vollständiges *Werck de machina seu motu* versertiget,

get, darinnen er nicht allein die Erfindungen der Alten, *Galilaei, Wreni, Hugenii*, und seine eigene meistens theils algebraisch erwiesen, sondern auch in einer weitläuftigen Abhandlung *de centro gravitatis* viel zur höheren Geometrie gehörige Sachen zugleich mit ausgeführet. Allein weil es für die Anfänger zu hoch ist, so hat *Johann Keil*, der hernach Astronomiæ Professor zu *Oxford* gewesen, in seiner *Introductione ad veram Physicam*, die A. 1705. zu *Oxford* in 8. (19 $\frac{1}{2}$ Bog.) vermehrter zum andern mahle gedruckt, und neulich vom neuem vermehrt aufgelegt worden, die vornehmsten Sachen daraus nach ihrem Begriffe eingerichtet. Und wird nach diesem unter seinen Wercken noch weiter davon gedacht werden.

§. 164. *Mariotte* hat in seinem *Traité du Choc des Corps* die Regeln der Bewegung durch Experimente mit pendulis ausgemacht: welches auch schon *Hugenius* vor sich versuchet hatte, um der Nichtigkeit seiner Regeln sich destomehr zu versichern. Es ist zuerst zu *Paris* A. 1673. in 8. (18 Bog. 2 Tab.) gedruckt worden A. 1679. ist es daselbst zum dritten mahle viel vermehrter heraus kommen: und nach dieser Auflage hat man es unter seine Werke drucken lassen, die unter dem Titel: *Oeuvres de Mariotte de l'Academie Royale des Sciences* zu *Leiden* A. 1717. in 4. (4 Alph. 2 Bog. 25 Tabb.) heraus kommen sind. Was *Dechales* in seinem *Traité du mouvement* (*Lyon* 1682. in 8.) und *Pardies* in seinem *Discurse* von der Bewegung, davon wir unten reden wollen, gegeben, ist nicht in allem der Wahrheit gemäß.

§. 165. *Hugenius* hat in der Bewegung in krummen Linien, sonderlich in Circuln, die *Vires centrifugas* zu betrachten den Anfang gemacht, und davon einige Lehrsätze ohne Beweis zu Ende seines *Horologii oscillatorii* mit angehängen; nach diesem aber in einem besonderen Tractat *de vi centrifuga* den Beweis beygefüget, welcher mit unter seinen Wercken zu finden, die nach seinem Tode heraus kommen sind. *Keil* hat in seiner *Introductione ad veram physicam* dieselben zum Begriff der Anfänger demonstret; der *Marquis de l' Hôpital* aber in den *Memoires de l' Academie Royale des Sciences* A. 1700. p. 19. durch die Differential-Rechnung des Herrn von *Leibnitz* herausgebracht.

§. 166. Der große Geometra *Isaacus Newton* hat in seinen *Principiis Mathematicis Philosophiæ Naturalis* (Londini 1682. in Reg. 4. 2 Alph. 18 Bog.) viel scharfsinnige Erfindungen von der Bewegung, absonderlich den *viribus centripetis & centrifugis*. Allein es erfordert dieses Werk einen Leser, der in der höheren Geometrie und beyder Analyti wohl gesetzt ist. Es ist A. 1713. zu Cambridge (in Reg. 4. 2 Alph. 19 Bogen) von neuem wieder aufgelegt und bald darauf A. 1714. in Amsterdam nachgedruckt worden. Es ist hin und wieder viel geändert, und hat *Rogerus Cotes* Astronomiæ Professor zu Cambridge eine Vorrede davor gemacht. A. 1726. ist es zum drittenmale viel verbesserter und vermehrter heraus kommen (Londen in 4. Reg. 3 Alph.) Anno 1706. hat *H. Ditton* ein Buch heraus gegeben, welches ich noch nicht gese-

gesehen. Doch vermuthe aus dem Titul, er werde nicht allein mit dem Herrn Keil zu Galilai, Wallisi, Wrenni, Hugenii; sondern auch des Herrn Newtons Erfindungen einen ebenen Weg gebahnet haben. Der Titul des Buches ist: *The general Laws of Nature and Motion with their application to Mechanicks. Also the doctrine of centripetal Forces and Velocitics of Bodies, describing any of the Conick Sections, being a part of the great Mr. Newtons Principales. The whole illustrated with variety of useful Theorems and Problems, and accommodated to the use of Yunger Mathematicians.* Eben den Anfangern zum besten hat Guil. Whiston zu Cambridge A. 1710. in 8 (1 Alph.) *Prælectiones physico mathematicas* heraus gegeben, darinnen er des Herrn Newton *Philosophiam mathematicam* den Anfängern begreiflich machet, wiewohl er im demonstrieren mehrere Freyheit unterweilen brauchet, als es die alten Geometræ vergönnen würden: welche ihm aber in Ansehung seiner Absicht verstattet werden kan. Zu eben Newtoas Werck hat auch John Clarke eine Einleitung gegeben unter dem Titul: *A Demonstration of some of the principal sections of sir Isaac Newtons Principles of Natural Philosophy* (Londen 1730. in 8. Reg. 22 Bogen Tabb. 12.).

§. 167. In den *Memoires*, welche die *Academie Royale des Sciences* alle Jahre zu Paris heraus giebet, findet man viele allgemeine Regeln von der Bewegung, welche der Herr Varignon durch die Differential-Rechnung des Herrn von Leibnitz heraus gebracht. Und in den Leipziger *Actis* sind

viel vortrefliche Schediasmata des Herrn von Leibnitz und des Herrn Joh. Bernoulli hin und wieder anzutreffen, darinnen die *Scientia motus* durch neue Erfindungen illustriret wird.

§. 168. Diese Erfindungen insgesamt hat Herr Jacob Herrmann, Mathematicum Professor vor dem in Padua, in seiner *Phoronomia* viel allgemainer vorgetragen und mit seinen eigenen vermehret. Das gelehrte Werck ist zu Amsterdam 1716. in 4. (2 Alphab. 5 Bog. 12 Tabb.) heraus kommen, aber so geschrieben, daß es die Anfänger wenig nutzen können.

§. 169. Noch weiter ist gegangen Leonhard Euler in seiner *Mechanica, sive Motus Scientia analytice promota*, die in zwey Theilen zu Petersburg in 4. heraus kommen (Tom. I. 2 Alph. 17 Bog. 14. Tabb. Tom. II. 2 Alph. 18 Bog. 18 Tabb.), allein weil dieser grosse Analyst voraus setzet, daß dem Leser bekannt ist, was ihm geläufig, auch das vorhergehende alles wohl inne hat, daß es ihm von selbst einfället, ohne einer Citation nothig zu haben, über dieses in vielen Stücken sehr kurz ist; so darf sich ein Anfänger nicht über dieses Werck wagen, sondern er muß sich vorher wohl in der *Analysi* und anderen mechanischen Schriften geübet haben.

§. 170. *De la Hire* in seinem *Traité de Mechanique* (A Paris 1695. in Reg. 12. 18 Bog.) führet schon auf höhere Sachen, als sonst in den Büchern von gleichem Titul zu geschehen pfleget: denn er erweiset nicht allein, was in Verfertigung der Maschinen Nutzen haben kan; sondern handelt auch zugleich

gleich von den Gesetzen der Bewegung. Es ist eines der besten Bücher, die wir zur Zeit in dieser Materie haben.

§. 171. Wer so wohl die allgemeine Algebra, als die Differential-Rechnung auf die Mechanick appliciret sehen will; kan die *Elemens de Mecanique & Physique* des Parent nachschlagen (A Paris 1700. in Reg. 12. 12 Bogen Tabb. 12), darinnen er die Gesetze der Bewegung der an einanderstossenden Körper nach dem Ingenianischen Principiis vorträget und zugleich die Kräfte der einfachen Maschinen erläutert, dabey viel nützliche Mechanische Fragenörtert. Nur ist zu beklagen, daß er sich nicht der Deutlichkeit beflissen.

§. 172. Blosser Maschinen beschreiben *Jacobus de Strada*, dessen Werck sein Enckel *Octavius de Strada* 1618. heraus gegeben, so A. 1629. wieder aufgelegt worden: Zeisling im *Theatro Machinarum*, welches in Leipzig A. 1612. in 4. heraus kommen. *Jacobus Besson* in seinem Buche, was er A. 1578. von den Maschinen und Instrumenten heraus gegeben: *Augustinus de Ramellis de Mesanzana* in dem Wercke, welches aus dem Französichen ins Deutsche übersetzt, und A. 1620. in fol. (7 Alph. 18 Bogen) unter dem Titul: *Schatzkammer mechanischer Künste*, gedruckt worden: *George Andreas Böckler* in seinem *Theatro Machinarum*, oder *Schauplatz der mechanischen Künste*, (Nürnberg 1673. in fol. 11 Bog. Tabb. 154.). Der gröste Theil der Maschinen, welche diese Autores beschrieben, ist nichts nütze. Die übrigen sind schon in einem viel besse-

ren Stande, als sie von ihnen beschrieben werden. Die Proportion der Theile, darinnen die Seele der Maschinen bestehet, werden ganz verschwiegen. Doch kan man aus den Figuren die verschiedene Manieren, die bewegende Kräfte an Maschinen anzubringen, und durch sie Körper in Bewegung zu setzen, erlernen.

§. 173. Genauere Beschreibungen geben Perrault von einigen Maschinen in seinem *Recueil de plusieurs Machines de Nouvelle invention* (A Paris 1700. in 4. 7 Bog. Tabb. XI.) welcher Tractat mit zu seinen physicalischen Wercken, die zu Haag gedruckt, angehängt worden, und Hugenius in seinem *Automato Planetario* zu Ende der *Operum posthumorum*, darinnen er eine Maschine beschreibet, dadurch alle Bewegungen der Planeten richtig vorgestellt werden. Er hat auch seine Perpendiculuhr in dem *Horologio Oscillatorio* (§. 125.) deutlich beschrieben.

§. 174. Ueberhaupt hat die Structur der Uhrwercke ein gewisser Engelländer umständlich erklärt, dessen *Artificial Clockmaker or A Treatise of Watch and Clock-Worck* das andere mahl zu London 1700. in Reg. 12. vermehrter heraus kommen (7 $\frac{1}{2}$ Bogen Tabb. II.). Und man hat wohl gethan, daß man es in die deutsche Sprache übersehet, und zu des Welpers *Gnomonica* mit drucken lassen. Es handelt auch von dieser Materie Oughtred in seinen *Operibus posthumis* p 68. & sqq. Einen guten Unterricht hat Herr Johann George Leutmann von den Uhrwercken A. 1718. in seiner vollständigen Nachricht von den Uhren (Halle 1718. 8 Bog. 7 Tab.)

ertheilet, welcher diejenigen vergnüget, die Nachricht von ihrer Verfertigung und ihrem Gebrauche verlangen. Und dieses hat ihn veranlaßet, daß er davon eine Continuation (Halle 1722. in 8. 11 Bog. 40 Tab.) gegeben, darinnen er von der Probiruhr und Repetiruhr insbesondere handelt. Ein sehr gutes Buch in dieser Materie ist, welches Dom. Alexander unter dem Titel: *Traité general des Horloges* zu Paris 1734. in 8. (1 Alphab. 2 Bogen 25 Tabb.) heraus gegeben, und auf mein Anrathen Christoph Philipp Breyer zu Lemgo A. 1738. in 8. (1 Alph. 5 Bog. 25 Tabb.) unter dem Titel: P. Dom. Alexanders ausführliche Abhandlung von den Uhren ins Deutsche übersezt, drucken lassen.

§. 175. Petrus Limpergh in seinem *Mole-Book* (Amsterdam 1690. in Reg. fol. 2 Bogen Tabb. XXXII.) beschreibet sonderlich die Holländische Windmühlen, sowohl die Mahl- als Schneidemühlen.

§. 176. Kein vollständiges *Theatrum machinarum* ist zur Zeit vorhanden gewesen. Es hat zwar der sinnreiche und fleißige Mechanicus Herr Jacob Leupold dergleichen schon in den *Actis Eruditorum* A. 1712. p. 366. versprochen; allein die Arbeit eine Weile wieder liegen lassen, die er mit Versäumung anderer wider sein Interesse hätte vernehmen müssen. Ich bin selbst mit unter denenjenigen gewesen, die ihn aufgemuntert haben, dieses nützliche Werck nicht liegen zu lassen, welches von einem andern nicht so leichte wieder dürfte zu stande gebracht werden, wenn er es unterliesse, und ihm
einen

einen Vorschlag gethan, daß er nicht ein Buch, sondern viele daraus machen möchte. Er hat sich endlich denselben gefallen lassen und mit dem *Theatro Machinarum generali*, oder dem Schauplatze des Grundes mechanischer Wissenschaften (Leipzig 1724. in fol. 2 Alph. 20 Bogen 71 Tabb.) den Anfang gemacht, darinnen er nicht allein die einfachen Maschinen, sondern auch die verschiedenen Manieren, wie die bewegende Kräfte angebracht werden, nebst andern dahin gehörigen Dingen vorstellet. Als dieses Werck von den Gelehrten und Kunstverständigen über die Massen wohl aufgenommen ward, zumahl da er das Werck auf gutes Papier mit sauberen Drucke und feinen Kupfern verfertigen läset, und ohne seinen Gewinn dabey zu suchen, es für einen sehr leidlichen Preis dahin giebet; so ist er dadurch aufgemuntert worden mit Fleiß fortzufahren. Und sind über dieses schon das *Theatrum Machinarum hydrotechnicarum* oder der Schauplatz der Wasser-Baukunst (Leipzig 1724. in fol. 2 Alph. 5 Bog. 51 Tabb.) und von dem *Theatro Machinarum hydraulicarum*, oder dem Schauplatz der Wasserkünste der erste (Leipzig 1724. in fol. 2 Alph. 52 Tabb.) und andere Theil (Leipzig 1725. in fol. 2 Alph. 1 Bog. Tabb. 54.), das *Theatrum Machinarium* oder Schauplatz der Hebzzeuge (Leipzig 1725. in fol. 2 Alph. Tabb. 96.), das *Theatrum Staticum universale*, oder Schauplatz der Wage- und Gewichtkunst (Leipzig 1726. in fol. 2 Alph. 11 Bog. Tabb. 57.), das *Theatrum Pontificiale*, oder Schauplatz der Bräu-

Brücken und des Brückenbaues (Leipzig 1726. in fol. 1 Alphab. 21 Bogen Tabb. 57.) und das *Theatrum Arithmetico-Geometricum* oder Schauplatz der Rechen- und Maasskunst (Leipzig 1727. in fol. 2 Alph. 8 $\frac{1}{2}$ Bogen Tabb. 43.). Es ist noch ein grosser Rest zurücke geblieben; denn es solten noch von halben Jahren zu halben Jahren folgen der Schauplatz, 1. curiöser Wasserkünste, 2. des Mühlenbaues, 3. der nützlichen Feueröfen und Feurung, 4. der Feurung bey den Bergwercken und Schmelzung der Metalle, 5. der Bergwercks-Maschinen, der Maschinen und Instrumente zur bürgerlichen Baukunst, 7. der Maschinen und Instrumente zum Kriege und zur Kriegsbaukunst, 8. der Haushaltungs-Maschinen und Instrumente, 9. der Jagt-Maschinen und des Jäger-Zeuges, 10. der Luft-Maschinen, 11. der Optischen Maschinen und Instrumente, 12. aller Maschinen und Instrumente, 311 Sonnen-Uhren und der Uhrenkunst, 13. aller Astronomischen Instrumente, 14. der zum Gehöre der Sprache und Music gehörigen Instrumente, 15. aller alten und neuen anatomischen und chirurgischen Maschinen und Instrumenten, 16. aller Maschinen und Instrumenten vor Künstler und Handwercke. Allein der Tod hat seine nützliche Arbeit unterbrochen, daß das beste und was eigentlich zu diesem Werke gehörte, nemlich der Mühlen-Bau und

und die Bergwercks-Maschinen zurück geblieben.

§. 177. Es verdienet hier ins besondere recommendirt zu werden *Belidors Architecture hydraulique*, die man angefangen ins Deutsche übersetzt mit einer Vorrede zu Augsburg von An. 1740. in fol. heraus zu geben, als welcher Autor ausser einer ausführlichen Beschreibung der Maschinen zugleich aus denen Gründen der Mechanick die Theorie demonstrirt. Sonst ist auch hier zu gedencken, daß Gallon in 6. Tomis zu Paris A. 1735. in 4. (Alphab. 6. 20 Bogen 22 Tabb.) die von der Academie der Wissenschaften von Jahre zu Jahre approbirte Maschinen unter dem Titel: *Machines & Inventions approuvées par l'Academie Royale des sciences* heraus gegeben, darinnen eine genaue Beschreibung derselben zu finden.

Das 9. Capitel.

Von den Hydrostatischen, Aerometrischen und Hydraulischen Schriften.

§. 178.
Die Hydrostatick hat *Archimedes* zuerst erfunden, und gehören hieher seine zwey Bücher *de insidentibus humido*. Seine Lehren hat *Marianus Gethalaus* in seinem *Archimede promoto* durch experimentiren vermehret, daraus *Oughtred* in seinen *Operibus posthumis* p. 55. & seqq. einen Auszug giebet.

§. 179.

§. 179. *Mariotte* in seinem *Traité de mouvement des eaux & des autres Corps fluides* (A Paris 1686. in Reg. 12. 17 $\frac{1}{2}$ Bog.) hat die Hydrostatischen, auch verschiedene zur Hydraulick gehörige Lehrsätze durch Experimente und Gründe erwiesen. Es ist das beste Buch, welches wir zur Zeit in dieser Sache haben, und mit unter seinen Wercken zu finden, deren oben (§. 128.) Meldung geschehen. Und demnach hat Herr D. Johann Christoph Meinig wohl gethan, daß er es in die Deutsche Sprache übersezt und mit Anmerkungen erläutert (Leipzig 1723. in 8. 1 Alphab. 5 $\frac{1}{2}$ Bogen).

§. 180. Es meritiret auch *Robertus Boyle* in seinen *Paradoxis Hydrostaticis* (Genevæ 1680. in 4. 15 Bog. Tab. 3.) und in seiner *Medicina Hydrostatica* (Genevæ 1693. in 4. 10 $\frac{1}{2}$ Bog.) von denen gelesen zu werden, welche diese Wissenschaft in Erkenntniß der Natur und im gemeinen Leben nutzen wollen.

§. 181. *Franciscus Tertius de Lanis* hat in dem dritten Theile seines *Magisterii Naturæ & Artis* (Parmæ 1692. in fol. 6 Alph. 14 Bog. Tab. XIII.) l. 25. f. 49. & seqq. die Hydrostatick ausführlicher erläutert, als sie sonst irgendwo zu finden. Und in dem ersten und absonderlich dem andern Theile findet man die *Machinas Hydraulicas* hin und wieder beschrieben: gleichwie auch in dem ersten Theile der Mechanick viel erläutert wird (Tom. I. Brixia 1684. in fol. 6 Alphab. Tabb. XXIV. Tom. II. Brixia 1686. 6 Alph. 5 Bog. Tabb. XX.).

§. 182. *Lamy* erkläret in dem andern Theile seiner *Mecanique*, oder dem *Traité de l'équilibre des liquéurs*, gleichfalls die Hydrostatischen und Hydraulischen Hauptlehren. Dergleichen thut auch *Robault* zu Ende seiner *Mechanick*. Eben so hat *Wallisius* seine *Mechanicam* mit den Hydrostatischen Lehren beslossen. Und *Newton* hat in seinen *Principiis Philos. Nat. Mathem. Sect. 5. lib. 5. p. 29. & seqq.* die Hydrostatick mit höheren Erfindungen vermehret.

§. 183. Von der Aerometrie ist noch kein besonderes Buch vorhanden ausser dem, was ich unter dem Titel: *Elementa Aerometrie* 1709. zu Leipzig in 12. (16 Bog. Tab. XII.) drucken lassen. Doch findet man hin und wieder dahin gehörige Wahrheiten bey denen, welche nach der Erfindung der Luftpumpe die Eigenschaften der Luft untersuchen, und gehören mit unter die Aerometrischen Schriften, die *Traitez des Barometres, Thermometres & Notiomètres, ou Hygrometres* (A Amsterdam 1707. in 12. 7 Bogen Tab. XXXV.).

§. 184. Die Hydraulick zu verbessern hat *Johannes Ceva A.* 1692. zu Bononien seine *Geometriam motus* in 4. (12 Bog. 9 Tabb.) heraus gegeben. *Joannes Baptista Balianus* hat in oben (§. 161. c. 8.) angeführtem Werke lib. 3. 4. 5. von der Bewegung der flüssigen Körper, und andern zur Hydraulick dienenden Sachen gehandelt. *Dominicus Guilielmini* hat in seiner *Mensura aquarum fluentium* (Bononiæ 1690. und 1691. in 4. 19 Bog. 8. Tab.) die Regeln der Mathematicorum zum Gebrauch im menschlichen Leben zu bringen sich bemühet.

Von

Von der Bewegung des Wassers verdienet auch gelobet zu werden *Job. Poleni de motu aquae mixto libri duo, quibus multa nova pertinentia ad aestuaria, ad portus atque ad flumina continentur Batavii 1717. in 4. (18 Bog. 3 Tabb.)*. Er handelt von derjenigen Bewegung, da das Wasser, welches sich bewegt, anderes stillstehendes drucket und es zugleich in Bewegung setzet. Niemand aber ist in der Theorie weiter gegangen als *Newton* in seinen *Principiis*, *Herrmann* in seiner *Phoronomia* und *Varignon* in den *Memoires de l'Academie des Sciences* A. 1699. & 1703. Nach der Zeit ist zu Paris A. 1725. in 4. (18 Bogen 5 Tabb.). *Varignons Traité du mouvement & de la mesure des eaux courantes & jaillissantes* heraus kommen, welchen der *Abt Pujol* aus seinen hinterlassenen *MSC.* gezogen. Es verdienet aber hier vor allen andern ein besonderes Lob des *Daniel Bernoulli Hydrodynamica, sive de viribus & motibus fluidorum Commentarii*, welche zu *Strassburg* An. 1738. in 4. (1 Alph. 16. Bog. 12. Tabb.) heraus kommen. Aus den *Divers Ouvrages de Mathématique & de Physique par Mrs. de l'Academie Royale des Sciences* können hieher einige Tractätlein des *Picard* und *Mariotte* gezogen werden.

§. 185. Von dem *Picard* haben wir *Traité du Nivellement* (A Paris 1684. in 12. 15 Bog. Tabb. III.) in welchem das Wasserwägen, welches man zu Wasserleitungen nöthig hat, auf die neueste Manier beschrieben wird. Vergleichen treffen wir auch unter *Mariottes* Werken an.

(*Wolfs Matthes.*)

5

§. 186.

§. 186. Von den Ältesten hat *Heron Alexandrinus* in seinem *Libro Spiritalium*, welches *Commandinus* in das Lateinische übersezt, und zu Paris 1583. in 4. heraus gegeben, die verschiedene Arten der Springbrunnen und andere Wasserkünste beschrieben. Dergleichen Arbeit hat in neueren Zeiten *Salomon de Caux*, ein Ingenieur des Churfürsten von der Pfalz, in seinem *Frankösischen Werke* von den Maschinen, absonderlich den Hydraulischen, so A. 1615. heraus kommen, verrichtet. Hieher gehören auch *Joh. Bapt. Porta Pneumaticorum libri tres*, welche mit seinen *curvilinearum elementorum libris duobus* zu Neapel A. 1601. in 4. (18. Bog.) heraus kommen, und des bekannten Jesuitens *Casparis Schotti Mechanica Hydraulico-pneumatica* (Herbipoli 1658. in 4.) *Georg Andreas Böckler* in seiner *Architectura Curiosa* oder Bau- und Wasserkunst (Nürnberg 1704. in fol. 21 Bog. Tabb. 200.) hat so wohl die einfachen *Machinas Hydraulicas*, als allerhand bis 70 Arten der Aufsätze zu Fontainen, und über 120 Arten von Wasser- und Luftbrunnen, beschrieben. Insonderheit gehören hieher Herrn *Leupolds* beyde Theile von dem *Theatro Machinarum hydraulicarum* (§. 169.). Und *Lucas Antonius Portius* hat seinen *Nonnullis de motu corporum* auch etwas *de nonnullis Fontibus Naturalibus* angehängt, darinnen er die Möglichkeit einiger Brunnen zeigt, derer bey dem *Plinio* gedacht wird (Neapoli 1704. in 12. 7 Bogen Tab. V.). Ein vollständiges Werk für diejenigen, welche eine gegründete Praxin lieben, hat
 Stephen

Stephen Schwitzer in Englischer Sprache unter dem Titul: *An Introduction to a generale System of Hydrostatik and Hydraulicks* (Londen 1729. in 4. Reg. 3 Alph. Tab. 50.) heraus gegeben.

Das 10. Capitel.

Von den Optischen Schriften.

§. 187.

Von den Alten hat einiges von der Optick und Catoptrick *Euclides* aufgezeichnet, welches *Johannes Pena* in das Lateinische übersehet und zu Paris 1604. heraus gegeben. Es ist auch in der neuen Edition seiner Werke des *Gregorii* (§ 8 c. 2. zu finden.

§. 188. Um das Jahr Christi 1100. hat *Alhazen*, ein Araber, ein grosses Werk von der Optick geschrieben. Aus ihm hat A. 1250. *Vitellio*, ein Pöble, in seinen weitläufigen 10 Büchern von der Optick die meisten Lehren entlehnet: den Grund der Beweise aus dem *Apollonio*, *Theodosio*, *Menelao*, *Theone*, *Pappo* und *Proclo* genommen. *Fridericus Risnerus* hat beyde Werke zusammen unter dem Titul: *Opticae Thesaurus* zu Basel 1572. (in fol. 194 Bog.) heraus gegeben, und des ersten Lehren in ordentliche Sätze gebracht und mit dem *Vitellione* verglichen. Es sind aber beyde Werke nach dem jetzigen Zustande der Wissenschaften nicht vollständig. Denn von der Dioptrick muste man dazumahl fast gar nichts, indem die Vergrößerungs- und die Ferngläser noch nicht erfunden waren. Un in der Lehre von dem Lichte und den Farben steckten die Alten

in grossen Vorurtheilen, wie sie denn auch nicht die wahre Beschaffenheit des Sehens verstanden.

§. 189. Johann Kepler hat An. 1604. in 4. (2 Alph. 15 Bogen) *Paralipomena in Vitellionem, quibus Astronomiæ pars optica continetur*, heraus gegeben, darinnen er unter andern die wahre Beschaffenheit des Sehens entdeckt, und viele zum Aufnehmen der Astronomie dienende Sachen vorgetragen.

§. 190. Einen kurzen Begriff von der alten Optick hat um das Jahr Christi 1279. Johannes Pechamus, Erzbischoff zu Canterbury und Primas von Engelland, geschrieben, welches zu Cölln A. 1627. in 4. (11 Bogen) gedruckt worden. In neueren Zeiten haben dergleichen Arbeit verrichtet Ambrosius Rhodius, Professor Mathematicum zu Wittenberg, dessen *Optica cum Tractatu de crepusculis* zu Wittenberg A. 1611. in 8. (1 Alph. 10 Bog.) heraus kommen, und Fridericus Risnerus, dessen *Optica libri quatuor* zu Cassel 1606. in 4. (1 Alph. 12 Bog.) gedruckt worden.

§. 191. Die Optick hat in bessern Stand zu bringen sich bemühet Rogerius Bacon, einer der grössten Weltweisen seiner Zeiten, der A. 1284. zu Oxfurt gestorben, und wegen seiner Mathematischen Wissenschaften als ein Zauberer angeklaget worden. Seine *Perspectivam* hat Johannes Combachius, Philosophiæ Professor zu Marburg, zu Franckfurt 1614. in 4. (1 Alph. 5 Bog.) drucken lassen. Es ist wenig Mathematisches darinnen zu finden: doch verdienet dieses Buch gelesen zu werden.

§. 192.

§. 192. Es haben aber die Alten sich hauptsächlich angelegen seyn lassen dasjenige zu erklären, was man vermittelt gerader und zurücke geworfener Strahlen siehet: was aber von den gebrochenen Strahlen herrühret, haben sie (wie schon §. 2. angemercket worden) ganz unvollkommen abgehandelt. *Jo. Bapt. Porta* hat 9 Bücher de Refractione geschrieben, die zu Neapel A. 1593. in 4. (1 Alph. 6 Bogen) heraus kommen. Darinnen bemühet er sich diese Materie gründlicher und ausführlicher abzuhandeln: allein er hat es eben nicht weit gebracht. *Kepler* ist der erste gewesen, welcher die Dioptrick in einen bessern Zustand gesetzt, und die Eigenschaften der geschliffenen Gläser richtig erwiesen. Seine *Dioptrica* ist zu Augspurg in 4. (14 Bog.) heraus gegeben, und nach diesem an andern Orten wieder aufgelegt worden. Er hat *Galilei* Briefe vorher drucken lassen, darinnen von einigen Neuigkeiten gehandelt wird, die er nach seinem *Nuncio Sidereo* durch die Ferngläser im Himmel entdeckt, nebst einer Untersuchung der Vorrede, welche *Jo. Pena* über *Euclidis Optick* von dem Nutzen der Optick geschrieben.

§. 193. *Cartesius* hat in seiner *Dioptrica*, welche stets mit zu seinen *Principiis Philosophiae* gedruckt wird, viel Physikalische Materien, erzehlet die Eigenschaften der Elliptischen und Hyperbolischen Gläser, und beschreibt das Glässhleiffen auf so eine Art, daß darinnen Geübte zur Gnüge ersehen können, er habe nicht viel damit zuthun gehabt.

§. 194. *P. Cherubin*, ein Capuciner, hat in seiner

Dioptrique Oculaire (A Paris 1671. in fol. 5 Alphab. 11. Bog. Tab. XVI.) sonderlich viel *Practica* und beschreibet viel Maschinen zum Glasschleiffen. In seinem anderen Werke *de la Vision parfaite* (A Paris 1678. in fol. 3 Alphab. 10 Bog. Tab. 23.) ist sein Hauptwerck ein doppeltes Ferngläß zu vertheidigen, dadurch man mit zwey Augen zugleich sehen kan, welches er zu Ende seiner *Dioptrique* angegeben hatte.

§. 195. *Nicolaus Hartsäcker* hat in seinem *Essay de Dioptrique* (A Paris 1 Alphabet 10 Bog. mit viel eingedruckten Figuren) viel *physicalische* Materien mit abgehandelt; doch handelt er auch wohl von dem Glasschleiffen und dem Gebrauche der geschliffenen Gläser, als einer der aus der Erfahrung redet, und demonstiret die Eigenschaften der geschliffenen Gläser. Dieses Buch verdienet Anfängern wegen der Deutlichkeit *recommenderet* zu werden.

§. 196. Für diejenigen, welche die Theorie lieben und von aller Praxi richtigen Grund verlangen, dienet *Willim Molineux Dioptrica Nova. or a Treatise of Dioptricks* (Londini 1692. in 4. 16 Bog. Tab. 40.). Und kan *Hugenii Dioptrica* aus seinen *Operibus posthumis* mit dem *Tractatu de poliendis vitris* mit dazu genommen werden, in welchem Buche viel neue Dinge anzutreffen sind, und die Theorie der *Dioptrick* am allergründlichsten abgehandelt wird. Es sind diese Opera zu Leyden 1703. in 4. heraus kommen (2 Alphab. 19 Bogen Tabb. 24.) und wollen einen in der Geometrie wohlgeübten Leser haben.

§. 197. Die Optick allein, ohne Catoptrick und Dioptrick, erkläret *Christophorus Scheinerus* in seinem *Oculo* (Oenipon. 1619. in 4. 1 Alph. 10 Bog.). Der Herr *Newton* in seiner *Opticks or a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and colours of Light* (Lond. 1704. in Reg. 4. 2 Alph. 5 Bogen Tab. 19.) hat durch sehr viele Experimente seine neue Theorie von dem Lichte und den Farben zu erweisen sich angelegen seyn lassen. Zu Ende sind zwey Lateinische Tractate, der erste *de Enumeratione Linearum tertii generis*; der andere *de quadratura Carvarum*. *Samuel Clark* hat dieses Werck in das Lateinische übersezet und *Newton* die Uebersetzung gut heissen, auch etwas wenigens von neuem hinzu gethan (Londini 1704. in Reg. 4. 2 Alph. 9 Bogen Tab. XIX.). A. 1719. ist die andere Lateinische Auflage heraus kommen (Londini in 4. 2 Alph. 8 Bog. 12 Tab.), darinnen sonderlich die angehängten physikalischen Fragen vermehret worden. Hingegen sind die beyden Geometrischen Tractate hinweg gelassen, die in seiner Analysis gedruckt worden, welche *Jones* heraus gegeben (§. 23.). Nach seinem Tode sind seine *lectiones opticae* A. 1669. 1670. & 1671. in *Scholis publicis habitae*, (Lond. 1729. in 4. 1 Alph. 14 Bog. Tabb. 24.) heraus kommen, darinnen zwar vieles vorkommet, welches auch in seiner Optick zu finden, aber doch auf eine ganz andere Art vorgetragen wird. Hieher können auch des *Moriotte* *Essay de la Nature des Couleurs* (A Paris 1681. in Reg. 12. 1 Alph. 9 Bog. Tabb. XVI.) welcher der vierdte und grössste Theil von seinen *Essays*

de Physique ist, auch mit unter seinen zusammen gedruckten Wercken gefunden wird, und *Hugenii Traité de la Lumiere* (A Leide 1690. in 4. 1 Alph. 2 Bog.) gerechnet werden, dessen hypothesis sich *Pierro Ango* in seiner *Optique* (A Paris 1682. in 12.) die meisten Optischen phœnomena zu demonstrieren bedienet.

§. 198. *Andreas Tacquet* hat in seiner *Optica*, die unter seinen *Operibus Mathematicis* zu finden, dasjenige gegeben, woraus sich die Regeln der Perspectiv herleiten lassen, die er zugleich mit durchnimmet: in seiner *Catoptrica* aber die Eigenschaften der platten, hohlen und erhabenen Spiegel erwiesen. *Isaacus Barrow* in seinen *Lectionibus Opticis* hingegen handelt die Theorie von der Catoptrick und Dioptrick ab: dergleichen auch *David Gregorius* in seinen *Elementis Dioptricae & Catoptricae Sphaericae* (Oxonii 1695. in Reg. 8. 7 Bog.) verrichtet: darinnen Verständige, die es durchgelesen, viel Fehler wollen angemercket haben.

§. 199. Die Optick, Catoptrick und Dioptrick zugleich erkläret *Zacharias Traher* in seinem *Nervo Optico* (Viennæ 1675. in fol. 2 Alph. 16 Bog. Tabb. XXVIII.), welcher mit einer ungeschickten Theorie anmuthige Praxes verknüpft. Noch mehrere Praxes aber hat *Joh. Zahn* in seinem *Oculo artificiali Teledioptrico*. Die andere Edition ist vermehrter, aber mit vielen Druckfehlern zu Nürnberg 1702. in fol. heraus kommen (9 Alph. 8 Bogen mit vielen Holzschnitten und Kupfern). Dieses Buch ist denen zu recommendiren, die sich auf Praxin legen. Von dieser Art ist auch *Athanasii Kircheri Ars magna lucis*

lucis & umbræ (Romæ 1646. in fol. 10 Alph. 16 Bog. 34 Tabb.).

§. 200. Johann Christoph Kohlhans hat in seinem *Tractatu Optico* (Lips. 1663. in 8.) aus allerhand Büchern Excerpta zusammen getragen und meistens der Autorum eigene Worte behalten. Für deutsche Künstler dienet *Johannes Michaëlis Conradi* dreysfach gearteter Sehestrahl (Eoburg 1710. in 4. 17 Bogen Tab. 25.). Denenjenigen aber, die sich im Glasschleiffen üben wollen, ist besonders zu recommendiren Christian Gottlieb Zertels vollständige Anweisung zum Glasschleiffen, wie auch zu Verfertigung der Optischen Maschinen, welche mit meiner Vorrede in Halle A. 1716. in 8. (14 Bog. 20 Tabb.) gedruckt worden. Diese hat mit nützlichen Anmerkungen erläutert und verbessert Herr Johann George Leutmann, der im Glasschleiffen gute Proben abgelegt, in seinen neuen Anmerkungen vom Glasschleiffen (Wittenberg 1719. in 8. 7 Bogen 21 Tab.).

§. 201. *Andrea Alberti* zwey Bücher von der *Perspectiv* (Nürnberg. 1670. in fol. 19 Bogen Tab. XV.) sind allen Liebhabern dieser Kunst sehr zu loben, und nicht weniger des *Desargues Maniere Universelle pour pratiquer la Perspective*, die anfangs von Alb. Bosse heraus gegeben, und darnach von J. Baran in die Holländische Sprache übersetzt worden, (Amst. 1686. in 8. 12 Bog. und sehr viel Figuren): welches letztere für das Hauptbuch in der *Perspectiv* von Verständigen gehalten wird.

§. 202. Denen, die sich in perspectivischen Zeichnungen üben wollen, kan des *P. Andrea Pozza Architectura Pictorum & Sculptorum* dienen. Der erste Theil ist Lateinisch und Italiänisch zu Rom 1693. in Reg. fol. der andere aber 1700. heraus kommen. Es hat jeder so viel Kupfer als Blätter, nemlich der erste 102; der andere 120. Es ist demnach der Mühe werth gewesen, daß der Italiänische Text ins Deutsche und die sehr grossen Kupfer in ein bequemes Format gebracht worden, damit mehrere dieses nützliche Werck gebrauchen können. Der erste Theil ist zu Augsburg 1706, der andere 1709. nachgestochen worden.

§. 203. Eben so hat Joh. Christoph Rembold gar rühmlich eines Französichen Jesuitens *Perspective Præctique* (A Paris 1642. in 4.) in die Deutsche Sprache übersezt und zu Nürnberg 1710. heraus gegeben, weil in derselben eine fertige Praxis mit einer leichten Theorie verknüpft wird. Es bestehet aus 1 Alph. 8 Bog. und sind 150. saubere Kupfer mit eingedruckt. Es wäre aber zu wünschen, daß ihm die andere Edition von A. 1663. in die Hände kommen wäre, dazu nicht allein zwen Theile noch von neuem hinzu kommen sind, sondern auch der erste Theil hin und wieder verbessert, vermehret, und mit einer Kriegs-Perspectiv versehen worden (Tom. I. 2 Alph. 10 Bog. Tom. II. 1 Alph. 13 Bog. Tom. III. 2 Alphabet 8 Bogen). In dem anderen Theile findet man Nachricht von den inclinirten Körpern: in dem dritten von Decken-Stücken und
allen

allen Anamorphosibus oder verzogenen Bildern in der Optick, Catoptrick und Dioptrick.

§. 204. Den Anfängern dienet des *Lamy Perspective* (A Paris 1701. in 8.), darinnen ihre Gründe auf eine leichte Art erwiesen werden. Die Demonstrationes lieben, können *Joh. Franc. Niceronis Thaumaturgum Opticum* aufschlagen und doch eine leichte Praxin dabey haben. Es wollte zwar dieser Minorite noch zwey Theile von der Catoptrick und Dioptrick heraus geben; aber er ist zu frühzeitig gestorben. Der erste Theil ist zu Paris 1646. in fol. gedruckt worden (2 Alph. 18 Bog. Tabb. XLII.). Nach seinem Tode ist seine *Perspective curieuse* zu Paris 1652. in 4. herauskommen, welche in 4 Bücher eingetheilet ist und mehr als der *Thaumaturgus Opticus* in sich enthält.

§. 205. A. 1711. hat *G. J. Gravesand* ein Doctor Juris, der nun Professor Mathematicum zu Leyden ist, einen *Essai de Perspective* zu Haage 1711. in 8 Reg. (12 Bog. 32 Tab.) heraus gegeben, darinnen er alles demonstret.

§. 206. Ich kan unter die Optischen Schriften auch noch diejenige rechnen, welche Observationen durch Vergrößerungs Gläser gegeben. Hieher gehöret *Roberti Hooke Micrographia*, so Englisch zu London 1667. in fol. (3 Alphab. 8 Bogen Tabb. XXXIII.) gedruckt worden und die Physick sehr illustriret. Von solcher Beschaffenheit sind auch des *Antonii van Leeuwenbæck* Schriften, nemlich 1. *Arcana naturæ detecta* (Delphis Batav. 1695. in 4. 2 Alph. 6 Bogen Tab. 11. und viel eingedruckte Kupf.

Kupfer): 2. *Arcana naturæ ope & beneficio exquisitissimorum Microscopiorum detecta* (Lugd. Bat. 1696. in 4. 3 Alph. Tabb. 26. mit vielen eingedruckten Kupfern: 3. *Continuatio Arcanorum Naturæ detectorum* (ibid. 1697. in 4. 1 Alph. 2 Bogen Tab. 7.): 4. *Continuatio epistolarum datarum ad longe celeberrimam Regiam Societatem Londinensem* (Lugd. Batav. 1696. in 4. 16½ Bogen Tab. 10.): 5. *Epistolæ ad Societatem Regiam Anglicam & alios illustres viros* (Lugd. Bat. 1719. in 4. 2 Alph. 11 Bog. Tabb. 23.): 6. *Epistolæ physiologicæ super compluribus naturæ arcanis* (Delphis 1719. in 4. 2 Alph. 16 Bog. Tab. 31.). Man hat A. 1722. zu Leiden für diese Bücher einen allgemeinen Titel drucken lassen: *Antonii a Leuwenhæk Opera omnia seu Arcana Naturæ ope exactissimorum microscopiorum detecta, experimentis variis comprobata, epistolis ad varios illustres viros, ut & ad integram, quæ Londini floret, sapientem Societatem datis comprehensa*: denn der ungleiche Format zeigt, daß es nur zusammen gelegte, nicht aber von neuem zusammen gedruckte Werke sind. Von geringerm Werthe ist Johann Franz Griendels von Aach *Micrographia Curiosa, oder Beschreibung verschiedener kleiner Körper* (Nürnberg 1687. in 4. 9 Bogen Tabb. XXXV.). Nicht viel besser ist die *Micrographia Curiosa*, welche Philippus Bonanni seinen *Observationibus circa viventia, quæ in rebus non viventibus reperiuntur* Rom. 1691. in 4. 2 Alphab. 12 Bog. Tabb. LXVIII.) angehängt, wenn man ausnimmet, was er von seinem Vergrößerungs-Glase geschrieben.

Das II. Capitel.

Von den Astronomischen Schriften.

§. 207.

Die Astronomischen Schriften enthalten entweder die Observationen in sich, oder sie erklären die Trigonometrischen und Geometrischen Manieren, aus den Observationen die Astronomischen Tafeln, und die Bewegung der Sterne auszurechnen, oder sind Astronomischen Tafeln, oder sie erklären den Gebrauch der Himmelskugel, oder auch die Natur und Eigenschaften der Weltkörper.

§. 208. Was wir von den Observationen der Alten übrig haben, unter denen sonderlich *Hipparchus* berühmt ist, hat uns *Ptolomæus* in seinem *Almagesto* erhalten. An. 882. fing unter den Saracenen *Albategnius* an sich hervor zu thun: A. 1457. *Johannes Regiomontanus* (der eigentlich Müller heisset, und von seiner Vater-Stadt in Francken den Namen *Regiomontanus* bekommen), nach seinem Tode aber von A. 1475. bis 1504. seine Schüler *Joh. Werner* und *Bernhard Walther*, welche zu Nürnberg observiret, da auch *Regiomontanus* seine meiste Observationen angestellet. *Regiomontani* und *Walthers* Observationes sind zu Nürnberg mit einigen andern *Purbachii* und *Regiomontani* kleinen Schriften A. 1544. in 4. (22 Bogen) heraus kommen. Der Titul des Buches ist: *Scripta Joannis Regiomontani de Torqueto, Astrolabio armillari, Regula magna Ptolemaica Baculoque astronomico & observationibus Cometarum; item observationes motuum Solis ac*

Stel-

Stellarum tam fixarum, quam erraticarum; item libellas M. Georgii Purbachii de quadrato Geometrico. Bon A. 1509. an hat Copernicus, nach ihm der Landgraf von Hessen Wilhelm mit seinem Mathematico Christophoro Rothmanno und seinem Mechamico Jobst Byrgen zu Cassel und Tycho de Brahe zu Uranienburg observiret. Tycho hat A. 1582. angefangen und bis 1601. continuiret mit einem grösseren Vorrathe und besseren Instrumenten, als vor ihm nicht geschehen war. Alle bisher erzehleten Observationen zugleich mit Mæstlini Schickardi und anderer ihren treffen wir in der *Historia Cælesti* an, welche auf Befehl Sr. Kayserlichen Majestät Ferdinandi III. gloriwürdigsten Andenckens, zu Regensburg 1672. in fol. gedruckt worden (12 Alphab. 6 Bog. 1 abb. III.). Es werden zugleich des Tychonis Instrumente darinnen beschrieben, die er selbst in seiner *Astronomiæ instauratæ Mechanica* (Norimb. 1602. in fol. 1 Alph. 11 Bog.) vorgestellt, auch des Mæstlini, Schickardi und einige anderer Observationen mit angehängt. Des Landgrafen von Hessen Observationes mit Regiomontani und Waltheri ihren hat Willebrordus Snellius zu Leyden 1618. in 4. (1 Alph. 13 Bog.) heraus gegeben.

§. 209. In dem verwichenen Seculo hat sich die Zahl der Observatorum sehr vermehret. Wir haben in Engelland den Horoccium, Halley und Glamstäden; in Frankreich den Cassendum, Cassini, de Louville und de la Hire; in Italien den Ricciolum, Manfredium und Polenum; in Deutschland ausser Hevelio, Riemarten, Wurtzelbauern, Doppelmäyern, die

die beyden Roste, Wagnern, und Kirchen; in Copenhagen den weiland Königlischen Mathematicum, Etats-Canzley und Consistorial-Rath, auch Policey- und Bürgermeister, Römer und noch andere, indem sich ihre Zahl noch täglich mehret.

§. 210. In den *Operibus posthumis Jeremiae Horocii* (Londini 1673. in 4. 3 Alph. 12 Bog Tabl 2.) findet man *Excerpta ex Epistolis ad Guil. Crabtrium, suum in studiis Astronomicis socium*, darinnen seine Observationes von 1636. bis 1640. beschrieben werden; einen *Catalogum observationum*, die er in gedachten Jahren gehalten, und *Excerpta ex Schediasmatis Guil. Crabtrii de observationibus ab ipso institutis* A. 1635. 36. 37. 38.

§. 211. *Joh. Baptista Ricciolus*, ein Jesuit in Italien, hat in seiner *Astronomia Reformata* (Bononiæ 1665. in fol. 6 Alph. 5 Bog.) einen Kern alter und neuer Observationen mit den vornehmsten der seinigen vereiniget, und daraus geschlossen, wie weit man in allen Theilen der Astronomie nunmehr kommen sey: welches Buch daher von den Liebhabern der Astronomie mit Nutzen zu lesen.

§. 212. *Johannes Hevelius*, ein Rathsherr in der Altstadt zu Danzig, hat es dem *Tychoni* sowohl an Instrumenten, als an Fleiß zu observiren weit zuvor gethan. Seine Instrumente hat er in dem ersten Theile seiner *Mechanica cælestis* (Gedani 1673. in Reg. fol. 5 Alph. 4 Bog. Tabb. XXX.) beschrieben. Der andere Theil (Gedani 1679. in fol. 14 Alph. 6 Bogen mit vielen Kupfern) enthält seine Observationen von 48 Jahren in sich, und ist zu bedauern, daß

Daß die meisten Exemplaria davon durch einen unvermutheten Brand noch selbiges Jahr im Feuer aufgegangen. *Robertus Hooke* in seinen *Animadversionibus* über den ersten Theil, die er zu London in Englischer Sprache 1674. in 4. (11 Bog. 3 Tabb.) heraus gab, wolte die Richtigkeit seiner Instrumente in Zweifel ziehen; allein als der berühmte *Halley* nach Danzig von der Societät geschicket wurde, hat er sie in allem ganz richtig befunden, und *Hevelii* Methode zu observiren gebilliget. Die Observationen, die er ihm zu Gefallen A. 1679. angestellet, nebst vielen anderen hat er in seinem *Anno Climacterico seu Rerum Uranicarum observationum quadragésimo nono* (Gedani 1685. in fol. 2 Alph. 6 Bog. mit Kupfern). Längst vorher nemlich A. 1661. ist auch der berühmte Astronomus *Ismaël Bullialdus* in Danzig gewesen, und hat *Hevelii* Observatorium besesehen, und seine Art zu observiren in Augenschein genommen. Was beyde davon geurtheilet; ist aus den Briefen zu ersehen, die unter dem Titul: *Excerpta ex literis illustrium & clarissimorum virorum ad Dn. Joh. Hevelium per scriptis Judicia de rebus astronomicis ejusdemque scriptis*, zu Danzig A. 1683. (1 Alph. 5 Bog.) *Johannes Ericus Olhoffius* drucken lassen, p. 67. 68. 71. 79. 187.)

S. 213. Von dem *Cassini* sind auserlesene Observationen in einem vortreflichen Werke anzutreffen, welches unter dem Titul: *Recueil d'observations faites en plusieurs voyages par ordre de Sa Majesté, pour perfectionner l'Astronomie & la Geographie, avec divers Traitez Astronomiques des Messieurs de l'Acad.*

l'Academie Royale de Sciences (A Paris 1693. in fol. 6 Alph. 12 Bog. Tabb. 11.) heraus kommen und viele merckwürdige Sachen in sich enthält. Viele von *Cassini* und seines Sohnes, ingleichen seines Schwieger=Sohnes *Maraldi*, wie auch *Philippi de la Hire* und seines Sohnes *Observationibus* findet man in den *Memoires de l'Academie Royale des sciences*, die von A. 1699. an jährlich heraus kommen. Es sind aber auch A. 1729. zu Paris unter den Titel: *Memoires de l'Academie Royale des Sciences depuis 1666. jusqu'à 1699. Tom. VIII. (5 Alph. Tab. 14.)* die Astronomischen Observationen heraus kommen, welche die Mitglieder der Academie zu selbigen Zeiten zur Aufnahme der Astronomie angestellt. Was man von den dreßsigjährigen Observationen des Herrn *Flamstädt*s sich zu versprechen habe, ist aus den *Miscellaneis Berolinensibus* p. 263. & seqq. zu sehen. A. 1712. hat *Halley* die *Historiam caelestem Joh. Flamstædii* (Lond. in fol. 6 Alph. 8 Bog. Tabb. 5) heraus gegeben, darinnen seine Observationes von 1676. bis 1705. zu finden. allein da *Halley* nicht alles nach seinem Sinne eingerichtet; so hat er die meisten Exemplaria davon cassiret und eine neue Auflage vorgenommen, darüber er gestorben, so daß sie doch nun Herr *Halley* sein Nachfolger auf dem Königl. Observatorio zu Greenwich zu Ende bringet. Es sind darinnen anzutreffen im ersten Theile *William Gascoige* Observationes von A. 1638. bis 1643. seine eigene Observationes vom Diameter der Sonne und des Monds, Distantien der Planeten, von den Fixsternen, Sonnen=Mond= und Jupiters-
(*Wolfs* Mathes.)

Trabanten=Finsternissen, Flecken in der Sonne, Cometen, Strahlenbrechung des Lichtes nebst dem Orte der Planeten aus den Observationibus ausgerechnet, mit nöthigen Tafeln. Im andern Theile werden erscheinen, die Distanzien der Fixsterne und Planeten vom Zenith nebst andern von der Sonne und dem Mond und des Jupiters Trabanten von A. 1689. bis 1719; Tabellen aus den Observationibus die Stellen der Sterne und Planeten leicht zu berechnen; 2000 Orter des Monds und viele Orter der übrigen Planeten aus den Observationen ausgerechnet. Im dritten Theile wird man antreffen einen Catalogum von der geraden Ascension, der Distanzien vom Pole, der Länge, Breite und Grösse von 3500. Fixsternen mit Veränderung der geraden Ascension und Distanz vom Pole auf einen Grad der Länge. Hiervor stehet eine sehr lange Vorrede, darinnen Nachricht gegeben wird von allen vorhergehenden Astronomischen Observationen und den Instrumenten, damit sie angestellet worden, nebst einer Nachricht von seinen eigenen Observationen und Instrumenten und andere vorher verfertigte Catalogi fixarum. Hierzu sind noch kommen Charten über die Gestirne, neue Astronomische Tabellen aus seinen eigenen Observationibus gerechnet, seine Astronomische Lectiones, die er im Collegio zu Gresham gehalten, nebst anderen Tractaten und Briefe von den berühmtesten Astronomis und Mathematicis. Nicht weniger wäre zu wünschen, daß auch dem Herrn Römer von seinen wichtigen Affairen so viel Zeit übrig gewesen wäre, seine ausse-
 lese

lesene Observationen zu publiciren, die er so viele Jahre her angestellt, oder sie jetzt nach seinem Tode jemand in Ordnung brächte. Auch würden die Liebhaber der Astronomie aus des Herrn Kirchs, des Herrn Wurtzelbauers und des Herrn Linarts Observationen Nutzen haben: wenn man die vornehmsten derselben ihnen mittheilen wolte. Sonst findet man verschiedene Astronomische Observationen in den *Transactionibus Anglicanis*, den *Miscellaneis Berolinensibus* und den *Actis Eruditorum*.

§. 214. Die Geometrische Astronomie hat unter den Alten *Claudius Ptolomæus*, der im Jahr Christi 147. gestorben, beschrieben. Seine *μεγάλη Σύνταξις* ist A. G. 827. auf Befehl des Königes der Saracenen *Maimonis* aus dem Griechischen in das Arabische und A. 1528. aus dem Arabischen von *Georgio Trapezuntio* in das Lateinische übersezt, von *Luca Gaurico Mattheseos* Professor zu Neapel übersehen, und in gedachtem Jahre das erste mahl zum Druck befördert worden. A. 1551. ist es mit *Ptolomæi* Astrologischen Schriften, nemlich seinen vier Büchern *de Judiciis*, seinem *Centiloquio* und den *Significationibus stellarum inerrantium* unter dem Titul: *Cl. Ptolomæi omnia, quæ exstant, opera præter Geographiam* zu Basel in fol. (6 Alph.) von *Erasmo Oswalden* zum Drucke befördert worden. Weil dieses Werk eine vollkommene Astronomie in sich begreiffet, aber für Anfänger zu weitläufig ist, so wolte *Georgius Purbachius* daraus einen Auszug machen. Wie er aber über der Arbeit starb, so hat *Regiomontanus* auf sein Begehren vollendet, was

sein Lehrmeister nicht ausführen konnte, und dadurch das *Almagestum* des *Ptolemai* (welches diesen Namen von den Arabern bekommen hat) deutlich erklärt. Es ist aber erst A. 1543. heraus kommen: nach diesem A. 1550. in fol. (2 Alph. 11 Bog.) zu Nürnberg wieder aufgelegt worden. Der Titel des Buches ist, *Libri tredecim in Ptolomai magnam compositionem, quam almagestum vocant.* Nach der Art des *Almagesti* hat bey den Arabern *Albategnius*, sein *Werck de scientia stellarum* (Nürnberg 1537. it. Bononia 1545 in 4) eingerichtet, in welchem er die *Astronomie* aus seinen eigenen *Observationen* verbessert.

§. 215. *Nicolaus Copernicus* hat A. 1566. zu einer wahren *Astronomie* den Grund gelegt, als er in seinen *Libris 6. Revolutionum celestium*, die mehr als einmahl, unter andern zu Basel 1566. in fol. (4 Alph. 14 Bog.) gedruckt worden, des *Philolai* Lehre von der Bewegung der Erde um ihre Aye und um die Sonne eingeführet, und dadurch die verwirrten *Epicyclos* und *Epicycepicyclos* auf einmahl verbannet. Und ist sich dannenhero zu verwundern, daß *Tycho de Brahe* ihm nicht gefolget. Er würde ihm aber ohnfehlbarh gefolget seyn, wenn er so lange gelebet hätte, bis er an die Verfertigung der *Astronomischen Tabellen* kommen wäre: denn da würde er gefunden haben, wie er ohne die Bewegung der Erde voraus zu setzen damit nicht würde zu stande kommen seyn.

§. 216. *Christianus S. Longomontanus* hat in seiner *Astronomia Danica* (Amstelod. 1640. in fol. 6 Alph.) die ganze *Astronomie* abgehandelt und mit *Exempeln*

peln die Regeln erläutert. Allein weil er mit dem *Tychone* das Systema *Copernici* nicht annehmen will; multipliciret er die Circul in seinen Theorien vor die Bewegung der Planeten über die massen. *Phil. Lansbergius* hingegen in seinen *Theoricis Motuum cælestium* bleibet bey dem *Copernico* und giebet dannenhero viel leichtere Theorien der Bewegung der Planeten.

§. 217. Die bisher genannte Astronomi alle, und die zu ihren Zeiten gelebet, haben davor gehalten, daß die Planeten sich in Circuln bewegeten. Wer nun die Astronomiam circularem völlig zu erkennen Lust hat, dem kan *Andreas Tacquet* in seinen *Libris Octo Astronomiæ* ein Gnügen thun. Es sind dieselben der herrlichste Theil von seinen *Operibus Mathematicis* und den Liebhabern der Astronomie zu recommendiren. Nur ist zu beklagen, daß er keine Exempel gegeben.

§. 218. *Johannes Keplerus* hat in seinen sehr tief-sinnigen *Commentariis de motibus Stellæ Martis* seu *Astronomia nova ætiologica* (A. 1609. in fol. 4 Alphab.) zuerst dargethan, daß die Planeten sich nicht in Circuln, sondern in einer Ellipsi bewegeten, in deren einem Brennpuncte die Sonne wäre und nach den wahren Gesetzen der Natur die Bewegungen der Planeten in seinem *Epitome Astronomiæ Copernicanæ* (Franc. 1635. in 8. 2 Alph. 15 Bogen) erläutert, auch in beyden Theilen die Ursachen der himmlischen Bewegungen untersucht, welche der Herr von Leibnitz in seinen *Tentamine de causis motuum Cælestium Physicis* (welches in den Leipziger

Actis A. 1689 p. 82. zu finden) und der Herr Newton Lib. 3. Princip. Mathem. Philos. Nat. besser als er getroffen und weiter ausgeföhret: auch neulich *Philippe Villemot* in seinem *Nouveau Systeme du mouvement des Planetes* (A Lyon 1707. in 12. 12 Bogen Tabb. 12.) auf seine Art erläutert.

§. 219. *Lansberg* verachtete zwar die Erfindungen *Keplers*; allein *Horoccius* hat in seinen *Posthumis* ihn zur Gnüge vertheidiget. *Ismaël Bullialdus* wolte in seiner *Astronomia Philolaica* (Paris. 1645. in fol. 7 Alph. 20 Bog.) *Keplers Theorie* verbessern; aber es zeigte *Sebus Wardus* in *Inquisitione in Astronomiam Philolaicam Bullialdi*, welche seinem *Tractate* von den Cometen beygefüget ist, so zu *Oxfurt* A. 1653. in 4. (14 Bog.) heraus kommen, daß es ihm nicht völlig gelungen war. Doch hat er in seinen *Fundamentis Astronomiæ Philolaicæ clarius explicatis & assertis adversus Wardi impugnationem* (Paris 1657. in 4. 7 Bog.) seine Fehler ziemlich glücklich verbessert, und wäre zu wünschen gewesen, daß er (wie er vorhabens war) seine *Astronomiam Philolaicam* nach dieser Verbesserung geändert hätte. Sonst hat *Wardus* auch seiner *Trigonometriæ demonstratæ*, die mit der *Prælektion de Cometis* zu *Oxfurt* 1654. in 4. (3 Bog.) gedruckt worden, eine *Inquisitionem in Bullialdi Astronomiæ Philolaicæ fundamenta* hinzu gesetzt.

§. 220. *Bullialdi* hypothesin hat *Vincentius Wing* in seiner *Astronomia Britannica* behalten (Londini 1669. in fol. 7 Alph. 5 Bog.): welches Buch für Anfänger dienet, weil alle Aufgaben der Astronomie durch

durch wahre Exempel erläutert, die Trigonometrie deutlich erkläret, und ein Auszug aus den alten und neuen Observationen darinnen gegeben wird.

§. 122. Es hat zwar *Sethus Wardus* in seiner *Astronomia Geometrica* (Londini 1656 in Reg. 8. 14½ Bog.) eine ganz Geometrische Methode angewiesen, die Bewegungen der Planeten in der Ellipsi zu rechnen, und hat dieselbe *Joh. Newton* in seiner *Astronomia Britannica* (Lond. 1657. in 4. 1 Alph. 20 Bog. Englisch) durch alle Planeten mit Exempeln erläutert; auch folget ihm *Thomas Streete* in seiner *Astronomia Carolina*, die A. 1661. in 4. (29 Bog.), hernach vermehrter A. 1710. in 4. (2 Alph. 3 Bog.) zu London gedruckt, und von Herrn *Gabriel Doppelmayern* aus dem Englischen ins Lateinische übersezt worden, (Nürnberg 1705. in 4. 1 Alphab. 13 Bogen 5 Tabb.): allein da er von den wahren Gründen, die *Kepler* angegeben, abgewichen, ist es kein Wunder, daß sie mit der Erfahrung nicht übereinkommet. Dessen ungeachtet hat auch der Graf von *Pagan* in seiner *Theorie des Planetes* (A Paris 1657. in 4.) dieselbe behalten. Aus *Keplers* *Epitome Astronomiæ* ist zu sehen, daß *Wardis* Erfindungen nicht würden auf ihn gewartet haben, wenn sie wären gültig gewesen.

§. 222. Alle Erfindungen der Astronomorum, die bis zu seiner Zeit gelebet, hat *Joh. Baptista Ricciolus* in seinem *Almagesto Novo* (Bon. 1651. in fol. 16½ Alph.) zusammen getragen. Hingegen *David Gregorius* hat in seinen *Elementis Astronomiæ Physicæ & Geometricæ* (Oxonix 1702. in fol. 5 Alph. 12 Bog.) eine solche Astronomie gegeben, wie man sie wünschen kan,

nachdem *Copernicus* das wahre *Systema mundi* auf die Bahn gebracht, *Kepler* die richtigen Geseze der Bewegung entdecket, und *Newton* ihre Ursachen ausgemacht. Es verdienete das vortrefliche Werck, daß es aus den Observationen des Herrn *Glamstädt* und anderer neuen Observatorum durch und durch mit wahren Exempeln erläutert würde. Man hat es in Engelland in die Englische Sprache übersezt, und zu Geneve ist es A. 1726. in 4. (5 Alph. Tabb. 46) mit einigen Zusäzen von neuem wieder aufgelegt worden.

§. 223. Die Anfänger finden den Kern der neueren Astronomie in *Guilielmi Whiston Praelectionibus Astronomicis Cantabrigiae* 1707. in 8. 1 Alph. 6 Bog.), wiewohl er nur die Theorie der Planeten abhandelt, und in *Joh. Keils Introductione ad veram Astronomiam* (Oxoniae 1718. in 8. 1 Alph. 9½ Bog. 2 Tabb.). Sonst sind auch des *Nic. Mercatoris Institutionum Astronomicarum Libri duo* (Londini 676. in 8. 1 Alph.) ein sehr dienliches Buch, dorinnen beyde Theile der Astronomie nach den hypothesibus der alten und neuen Astronomorum erkläret und mit Exempeln erläutert worden. Wer die Theoricas der Alten erkennen will, den wird *Georgius Purbachius* in seinen *Theoricis Planetarum* vergnügen, die unter anderen zu Basel 1569. in 8. (8 Bogen) mit *Regiomontani disputationibus contra Cremonensia in planetarum theoricis deliramenta* und *Johannis Esleri Speculo astrologico* gedruckt worden. Es sind bey dieser Auflage *Christiani Wurstisii*, Professoris Mathematicum zu Basel, *questiones novae in illas theoricas* (1 Alph. 5 Bo,

Bogen) hinzukommen. Hingegen *Erasmus Oswaldus Schreckenfuchs* hat *Commentaria* darüber zu Basel 1556. in fol. (5 Alph. 5 Bog.) herausgegeben, darinnen die alte Astronomie völlig abgehandelt und gar deutlich erkläret wird. Ausser den Theoricis erkläret auch den sphärischen Theil der Astronomie *Michael Mästlinus* in seinem *Epitome Astronomiæ* (Tübingæ 1610. in 8. 1 Alph. 12 Bogen).

§. 224. Die allerältesten Astronomischen Tafeln sind des *Ptolemei*, die in seinem *Almagesto* zu finden, aber nicht mehr mit dem Himmel übereinkommen. *Alphonfus XI.* König in Castilien hat sie verbessern lassen, hauptsächlich durch den Juden *Is. Hazan*. Daher sind A. 1252. die *Tabula Alphonfinæ* zum Vorschein kommen. Er hat über 400000 Ducaten auf die Astronomie zu Verbesserung der Tafeln gewendet, und selbst eine Vorrede dazu gemacht, die bey etlichen Exemplaribus zu finden. Es merckte aber bald *Purbachius*, daß auch diese Tafeln nicht so viel Ruhm verdienten, als sie hatten, und daher legte sich *Regiomontanus* und nach ihm *Waltther* und *Werner* auf das Observiren; aber es kam die Verbesserung der Astronomischen Tafeln nicht zu stande, absonderlich da *Regiomontanus* frühzeitig starb, welcher der Arbeit gewachsen war.

§. 225. *Nicolaus Copernicus* hat in seinen *Libris Revolutionum* neue Tafeln gegeben, aber sie sind niehmahls gebraucht worden, indem *Erasmus Reinholdus* Math. Prof. in Wittenberg die *Tabulas Prutenicas* bald daraus verfertigte, die unter andern zu Tübingen 1571. in 4. (2 Alph. 15 Bog.) gedruckt worden.

Es erkannte aber *Tycho de Brahe* schon in seiner Jugend ihre Unvollkommenheit, und legte sich daher mit solchen Enfer auf das Observiren, weil er sie verbessern wolte: allein er hat es selber nicht zu stande gebracht, auffer daß er die Bewegung der Sonne und des Mondes *Tomo primo Progygnasmatum* in Ordnung gebracht. Zwar verfertigte aus des *Tycho*nis Observationen *Logomontanus* die *Tabulas Davicas*, die er nach dem Exempel *Copernici* in seiner *Astronomia Danica* der Theorie eines jeden Planetens befügte: allein sie wurden durch des unergleichlichen *Keplers Tabulas Rudolphinas* (Ulmae 1627. in fol 2 Alph. 20 Bog.) bald verdunckelt. Unerschachtet *Lansbergius* durch seine *Tabulas motuum caelestium perpetuas* dieser ihren Werth verkleinern wolte; so hat er doch nicht Glauben gefunden, sondern vielmehr *Horocius* in seiner *Astronomia Kepleriana defensa*, die der größte Theil von seinen operibus posthumis ist, ihm öffentlich widersprochen. Eine bessere Arbeit war des *Morini*, der *Mariae Cunitiae*, und des *Nicolai Mercatoris*, welche den schweren calculum Rudolphinum den Anfängern zu erleichtern trachteten, und daher die *Tabulas Rudolphinas* in eine andere Forme brachten. *Morini Tabula Rudolphina in Compendium redacta* sind mit des *Stretii Astronomia Carolina* zu Nürnberg heraus kommen (S. 15.). *Mariae Cunitia* hat ihre Arbeit unter dem Titel *Urania propitia sive Tabula Astronomica mire facilis, vim hypotheseum physicarum a Keplero proditarum complexa, facillimo calculandi compendio sine ulla Logarithmorum mentione phaenomenis satisfaciens* Lateinisch

teinisch und Deutsch zu Velske in Schlesien drucken lassen (1650 in fol. 6 Alph. 4 Bog.). Mercator aber ist in seinen Institutionibus Astronomicis nachzuschlagen.

§. 226. Die *Tabulæ Wingii* in seiner *Astronomia Britannica* und die *Novalmagestica* des Riccioli in seiner *Astronomia Reformatata* sind für den Rudolphinis nicht in grosses Ansehen kommen, noch weniger aber die, welche Joh. Newton in seiner *Astronomia Britannica* nach den Theorien des Wardi gerechnet, und die *Tables Astronomiques du Comte de Pagan* (A Paris 1658. in 4. Alph. 11 Bog.), die auf eben diesen Grund gebauet worden. Bullialdi *Tabulæ Philolaica* in seiner *Astronomia Philolaica* sind denen dienlich, welche sich in Astronomischen Rechnungen anfangen zu üben, weil die Rechnung nach ihnen leichte ist. Der berühmte Astronomus Glanstädt hält die *Tabulas Carolinas* des Streetii in seiner *Astronomia Carolina* mit vor die besten, daher sie auch Whiston zu seinen *Praelectionibus Astronomicis* drucken lassen. Endlich hat de la Hire seine *Tabulas Astronomicas* auf blosser Observationes, und keine Hypothesin gebauet: welches vorhin unmöglich war, ehe man die Ferngläser, Micrometra und Perpendiculuhren hatte. Sie sind zu Paris 1702. in 4. heraus kommen (1 Alph. 15 Bog. Tab IV.) und treffen zur Zeit überaus genau mit den Observationen überein. Sie sind in der That bloß für verbesserte *Tabulæ Rudolphinae* anzusehen. Schon lange vorher nemlich A. 1687. hatte er die Tafeln für den Sonnen- und Mondlauf unter dem Titul: *Tabularum astronomicarum pars prior*

prior zu Paris in 4. (17 Bogen) besonders heraus gegeben.

§. 227. Johannes Hevelius hat in seinem *Prodromio Astronomiae* (Gedani 1690. in fol. 4 Alph. 7 Bogen) neue *Tubales Solares* gegeben. Allein es wäre zu wünschen, daß er eben dergleichen aus dem grossen Vorrathe seiner Observationen für die übrigen gerechnet hätte.

§. 228. Die neuesten Tabellen sind, welche der jüngere *Cassini* zu Paris A. 1740. in 4. 2 Alph. 5 Tabb. heraus gegeben, und darinnen man Anleitung zu allen Rechnungen findet, welche man nach dem gegenwärtigen Zustande der Astronomie zu den Observationibus von nöthen hat. Es sind dieselbe zugleich mit seinen *Elemens d' Astronomie* (3 Alph. 15. Bogen 21 Tabb.) gedruckt: welche vor allen andern denen zu recommendiren, welche die Astronomie gründlich erlernen wolten, wie wohl er die Sphärische Astronomie voraus setzet, und hauptsächlich die Theoriam abhandelt.

§. 229. Den ersten Catalogum Fixarum hat *Hipparchus* verfertiget, daraus *Ptolomæus* Almag. lib. 7. seinen genommen. *Tycho de Brabe* hat Progymnasim. Tom I. p. 257. einen neuen gegeben, den *Kepler* in *Rudolphinis* erweitert. Die *Tabulas Longitudinis ac Latitudinis stellarum fixarum ex observatione Ulugh Beighii* hat aus einem Persischen MSC. ins Lateinische übersetzt, mit Commentariis erläutert, und zu Oxfurt 1665. in 4. (1 Alph. 13 Bog.) heraus gegeben, *Thomas Hyde* zugleich mit *Muhammedis Tixini Tabulis declinationum & ascensionum rectarum*. Den voll-

ständ-

fründigen Catalogum nebst allen den übrigen hatte *Hevelius* in *Prodromo* aus seinen eigenen *Observationibus* gegeben: allein *Glamstädt* in seiner *Historia coelesti* ist noch viel weiter gegangen. Hingegen *Ricciolus* in seiner *Astronomia Reformata* hat wenige Sterne selbst observiret, die übrigen aus dem *Tycho*ne genommen und ihre Stellen nach *Gutdüncken* geändert.

§. 230. Die Sterne kennen zu lernen, dienet *Hevelii Firmamentum Sobiescianum* (Gedani 1690. in fol. 6 Bog. 54 Tab.): wozu auch unter den Astronomis *Joh. Bayeri Uranometria* (Ulmae 1661. in fol. 12 Bog. Tabb. 48.) gebrauchet wird. Insonderheit gehöret hieher das kostbare Werk *Johann Glamstädt's*, welches unter dem Titel: *Atlas coelestis* heraus kommen (Londen 1729. in fol. Reg. 5 Bogen 29 Tabb.). Für Anfänger dienen dazu *Aegidii Srauchii Astrognoſtia* Witteb. 1684. in 12. 9 Bog. Tabb. 25.) und *Wilhelm Schickardi Astroscopium* (Lipsiæ 1698. in 12. 6 Bog. Tab. II.).

§. 231. Von dem Gebrauche der Himmels- und Erdkugel haben *Guil. Bleau* in seiner *Institutione Astronomica de usu Globorum* (Amstelod. 1690. in Reg. 8. 16 Bogen) und sonderlich *Bion* in seiner *Usage des Globes celestes & terrestres & des Spheres* (A Paris 1699. in Reg. 12. 16 Bog. Tabb. 26.) sehr wohl geschrieben. Insonderheit hat auch Herr *Zumbach* ohne seinen Namen *Institutiones globi utriusque* drucken lassen, die er auf Begehren *Gerard Valks* zu seinen Globis verfertiget (Amstelod. in 4. 18 Bogen 5 Tabb.). Welcher mit gleichem

chem Fleiße einen Tractat von einem Astronomischen Instrumente, so Astrolabium heißet, und zur Auflösung vieler Astronomischen Fragen dienet, zu Paris 1702. unter dem Titul: *P Usagedes Astrolabes tant universels, que particuliers* (10 $\frac{1}{2}$ Bogen Tabb. IX.) heraus gegeben. Der erstere ist neu-lich vermehrter aufgelegt worden.

§. 232. Gleichwie aber die Himmelskugeln dazu dienen, daß man durch bloße Bewegung auf eine leichte Art die Astronomischen Aufgaben von der ersten Bewegung auflösen kan, ohne sich in die beschwerlichsten Rechnungen einzulassen; so hat Joannes Schonerus ein Instrument erfunden, wodurch man die Bewegung der Planeten ohne Rechnung ansmachen kan, welches er in einem besonderen Tractatu beschrieben, der unter seinen Operibus zu finden. Gleichwie aber dasselbe nach den hypothesibus der alten Astronomie eingerichtet; so hat der vortrefliche Astronomus und Hochfürstliche Hessische Mathematicus Herr Zumbach von Rössfeld schon vor vielen Jahren ein Instrument erfunden, welches er *Planetolabium* nennet, dadurch man ohne Rechnung auf eine gar leichte Weise den Ort eines jeden Planetens auf eine gegebene Zeit finden kan. Es sind von diesem *Planetolabio* zwey Auflagen vorhanden. Die erste ist zu Leyden A. 1691. in 4. heraus kommen (14 $\frac{1}{2}$ Bogen und 4 Tabb.) und wird darinnen sowohl die Verfertigung, als der Gebrauch des Instrumentes beschrieben. Die andere hingegen ist zu Amsterdam An. 1700. gedruckt

druckt worden ($6\frac{1}{2}$ Bogen 2 Tabb.) und enthält bloß den Gebrauch des Instruments in sich, weil es Gerard Valk, bey dem dieses nützliche Instrument zu haben, eigentlich dazu drucken lassen, daß man weiß, wie man das Instrument gebrauchen soll. Er hat nach diesem noch ein anderes Instrument erfunden, welches dienet auf eine gleiche Art den Ort der Jupiters-Trabanten auf jede gegebene Zeit zu determiniren. Die Beschreibung davon ist unter dem Titul: *Jovilabii* zu Amsterdam 1716. in 4. (6 Bogen 1 Tabb.) heraus kommen und ist darinnen bloß der Gebrauch des Instrumentes zu finden. Er hat endlich auch das *Saturnilabium* hinzu gethan, welches zu Amsterdam 1726. in 4. (9. Bogen Tabb. 2.) heraus kommen, darinnen er anweist, wie man den Lauf der Satellitum Saturni durch ein Instrument determiniren kan. Das *Planecabilium* ist nach der ersten Auflage zu Zürich von einem Bürger daselbst *Fest* genannt, in die deutsche Sprache übersetzt worden.

§. 233. Wer die Natur und Eigenschaften der Welt-Cörper zu erkennen Lust hat, dem dienen ausser dem *Almagesto* des Riccioli 1. Christophori Scheineri *Rosa Ursina* (Bracciani 1626. & 1630. in fol. 11 Alfab.) mit vielen kostbaren Figuren, darinnen sonderlich die Sonnen-Flecken erklärt werden. 2. *Ejusdem disquisitiones Mathematicae de Controversiis & novitatibus Astronomicis* (Ingolstadii 1614. in 4. 12 Bogen). 3. *Galilaei Historie* von den Sonnen-Flecken, die er in Ita-

liani

liänischer Sprache zu Rom 1613. heraus gegeben, und sein *Nuncius Sidereus*, der einige mahl gedruckt worden. 4. *Scheineri Opusculum de refractionibus caelestibus* (Ingolstadii 1615. in 4.) und *Ejusdem Sol ellipticus* (August. Vindel. 1615. in 4. 5 Bogen). 5. *Johannis Kepleri Libri tres de Cometis* (Augustæ Vindelicorum 1619. in 4. 20 Bogen 1 Tabb.) und sein Bericht von den Cometen An. 1607. (Halle 1608. in 4. 5 Bogen). 6. *Ejusdem Prodromus Dissertationum Cosmographicarum*, so mit *Georgii Joachimi Rhetici Narratione de libris Revolutionum Nicolai Copernici* zu Tübingen 1596. in 4. (1 Alph.) heraus kommen. 7. *Ejusdem somnium de Astronomia Lunari*, so 1634. in 4. zu Francffurt (1 Alph.) nach seinem Tode gedruckt worden. 8. *Ejusdem Harmonica Mundi* (Lincii 1619. in fol. 3 Alphab. 13 Bogen). (9.) *Johannis Hevelii Selenographia* (Gedani 1647. in fol. 6 Alphab. 10 Bogen Tabb. III.). (10.) *Ejusdem Cometographia* (Gedani 1668. in fol. 10 Alphab. 19 Bogen Tabb. 38. und sehr viel eingedruckte Kupfer), *Prodromus Cometicus* (Gedani 1665. in fol. 17 Bogen 3. Tabb.). *Epistola de Cometa anni 1672.* (Gedani 1672. in fol. 2 Bogen 1 Tabb.). *Dissertatio de nativa Saturni facie* (Gedani 1656. in fol. 12 Bogen 9 Tabb.). *Mercurius in Sole visus* mit *Horoccii Venere in Sole visa* und *Historia stellæ miræ* (Gedani 1662. in fol. 2 Alphabet 2 Bogen 10 Tabb.). 11. *Christiani Hugenii Systema Saturninum* Hagæ-Comitis 1659. in 4. 12 Bogen), und absonderlich 12. sein

sein *Cosmotheorus* ibid. 1698. in 4. 18 Bog. Tab. 5. item Leoburgi 1704. in 8. 8 Bogen Tabb. V.). 13. *Hesperii & Phosphori Nova phenomena sive observationes circa Planetam Veneris, autore Francisco Blanchino* (Romæ 1728. in fol. 1 Alph. 2 Bogen Tab. an. 10.). 14. *Jacobi Bernoulli Conamen novi Systematis Cometarum* (Amstelodam. 1682 in 8. 6 $\frac{1}{2}$ Bog. Tabb. 8.). 15. *Joh. Bapt. du Hamel* in seiner *Astronomia Physica* Tom. I Oper. Philos. Norimb. 1681. in 4.), wiewohl in den Schriften auch viel zu finden, welches die geometrische Astronomie erläutert. 16. *Petri Horrebovii Clavis Astronomiæ* (Havniæ 1725. in 4 18 Bogen) und *Ejusdem Copernicus triumphans sive de parallaxi orbis annui Tractatus epistolaris* Ibid. 1727. in 4. 7 Bog. Tab. I.). Und über dieses sind auch diejenigen Schriften hieher zu ziehen, die oben von den Ursachen der himmlischen Bewegungen (S. 12.) angeführet worden: zu welchen noch *Joh. Polemi Dialogus de Vorticibus* (Patavii 1712. in 4. 1 Alph. 6 Bog. 7 Tab.) kommet.

S. 244. Die Wahrheit und Vortreflichkeit des Copernicanischen Welt-Baues hat *Galilaus Galilei* in seinem *Systemate Cosmico* (Lugd. Bat. 1699. in 4. 3 Alph. 21 Bog.) erwiesen, welches Buch mit grossem Verstande geschrieben, und unter andern viel zu der *Astronomia Physica* be trägt. Eben dergleichen Arbeit haben wir *Petro Megerlino* in seinem *Systemate Mundi Copernicano, argumentis invictis demonstrato* (Amstelod. 1682. in 8. 6 Bog. Tabb. 3.), *Bullialdo* in *Philolao ab inferis resuscitato seu dissertatione de vero systemate* (Amstel. 1639. in 4.) und
(*Wolfs Mathes.*) R *Joh.*

Joh. Jacob Zimmermannen in Scriptura Coper-
nizante (Nürnberg 1709. in 8. 8 Bog.) zu danken.

§. 235. *Antonius Maria Schyrlæus de Rheita*, ein Capuciner, hat in dem andern Theile seines *Oculi Enochii atque Eliæ seu Radio sidereo mystico* (Antverpiæ 1665. in fol. 4 Alph. 9 Bog.), die Astronomie, welche er in dem ersten Theile nach seinen eigenen hypothesibus abgehandelt, zum Nutzen der Prediger angewendet. Zu Ende des ersten Theils handelt er auch vom Glässhleiffen und den geschliffenen Gläsern.

§. 236. Die Rechnung der Finsternisse haben zum Gebrauche der Anfänger in besonderen Schriften erläutert 1. *Elias Molerus in opere novo Astronomico de supputandis deliquiis iuxta Tabulas Prutenicas* (Lugduni 1687. in 4. 1 Alph. 4 Bog.). 2. *Johannes Hancke*, ein Jesuit, in *Tenebris summatim illustratis*, der auch nach *Riccioli* Tafeln die Rechnung anweist (Moguntiz 1682. in 4. 15 Bog.). 3. *Zimmermann* in seinen auf alle und jede Hypothesen applicable Fundamental-Aufgaben von den Sonn und Mondfinsternissen (Hamburg 1691. in 8. 15½ Bogen), dabey er auch Logarithmos für die Logisticam Sexagenariam gegeben, dergleichen sonst nirgends zu finden. 4. Hieher gehöret auch Herrn *Johann Bernhard Wiedeburgs Disputation* von der Sonnenfinsterniß A. 1715. (Helmstädt 1714. in 4. 12 Bogen 4 Tab.), ingleichen 5. Herrn *Christoph Langhansens*, Professoris Mathematicum zu Königsberg *Dissertationes de eclipsi lunari & de eclipsi solari*, deren erstere er unter dem

Pra-

Præsidio des Herrn Professoris Bläſing, die andere aber als Präses gehalten. Insonderheit aber gehöret hieher Joh. Leonhard Rostens aufrichtiger Astronomus (Nürnberg 1727. in 4. 2 Alsph. 5 Bog. Tabb. 14.). Denn gleichwie er in seinem Astronomischen Handbuche (Nürnberg 1718. 3 Alsph. Tabb. 14.) den sphärischen Theil der Astronomie mit deutlichen Exempeln erläutert und wie man Astronomische Observationes anzustellen hat, deutlich erkläret; so hat er in dem andern Buche verschiedenes zur doctrina sphærica, Bewegung der Cometen und Observationibus Astronomicis gehörige Sachen abgehandelt, insonderheit aber vieles zu der Rechnung der Finsternisse, gehöriges erkläret, welches mit Nutzen zu lesen. Hieher gehöret auch des Angeli Capelli *Astrosophia numerica*, welche in zwey Theilen zu Venedig 1733. und 1736. heraus gekommen (P. I. 14 Bog. 8. Tab. P. II. 1 Alsph. 16 Bog.). Im ersten Theile wird die Astronomische Rechnung ausführlich erkläret; im andern sind die Astronomischen Tabellen enthalten.

§. 237. Wenn wir alles ohne Unterscheid anführen wollten, so wären noch mehrere Astronomische Schriften vorhanden, deren Meldung hier geschehen könnte. Allein man kan dergleichen zur Gnüge in Riccioli *Almagesto* finden. Nur muß ich von Tychoonis *Pragymnasmatibus Astronomiae instauratae* derer vorher ist gedacht worden, noch erinnern, daß der erste Theil zwar nur den Titel von dem, neuen Sterne A. 1572. bekommen, jedoch überhaupt von Verbesserung der Bewegung der Sonne und des

Mondes, ingleichen der Fixsterne handelt (Pragæ 1610. in 4. 4 Alph. 13 Bog.), der andere aber ausführliche Nachricht von dem Cometen 1577. ertheilet (Pragæ 1610. in 4. 2 Alph. 14 Bogen). Bey dem anderen Theile sind in dieser ersten Auflage *Tychonis de Brahe epistola astronomica* (Uraniburgi 1610. in 4. 1 Alph. 16 Bog.) beygefüget: die *Pro-gymnasmatata* aber allein sind zu Franckfurt am Mayn unter dem Titul: *Opera Tychonis de Brahe* in 4. nachgedruckt worden.

Das 12. Capitel.

Von den Chronologischen Schriften.

§. 238.

Die Hauptbücher in der Chronologie sind *Josephi Scaligeri de Emendatione Temporum*, *Dionysii Petavii Doctrina Temporum*, *Sethi Calvisii Introductio in Chronologiam* und *Johannis Baptistæ Riccioli Chronologia Reformata*.

§. 239. *Scaliger* hat sein Werk zuerst 1587. heraus gegeben, welches er aber 15 Jahre hernach fast ganz geändert, daß es sich kaum mehr ähnlich geblieben. Er hat in der Chronologie den Weg gebahnet, und dadurch seine grosse Gelehrsamkeit sehen lassen. Es ist aber kein Buch für Anfänger.

§. 240. *Petavii Doctrina Temporum* ist anfangs zu Paris 1627. in fol. heraus kommen. Allein viel besser ist die neue Edition, welche in drey Theile zu Antwerpen 1703. in fol. (21 Alph. 7 Bog.) gedruckt worden. In der ersten Edition fehlet der ganze dritte

dritte Theil, darinnen sein *Uranologium sive Systema variorum Auctorum, qui de Sphæra ac sideribus eorumque motibus Græce commentati sunt*, (so er A. 1630. besonders heraus gegeben), seine *Libri VII. variarum Dissertationum*, welche die Chronologie illustriren, und *Libri tres Epistolarum* enthalten. Es wäre wohlgethan gewesen, wenn er *Scaligerum* nicht so hart tractiret hätte.

§. 241. *Sethi Calvisii* (der Cantor zu Leipzig und viel gelehrter gewesen, als seines gleichen zu seyn pflegen) Werk ist mehr als einmahl, so wohl in fol. als in 4. aufgelegt worden. Er hat die schweren Lehren *Scaligeri* erleichtert. *Riccioli Chronologia Reformata* ist zu Bononien 1669. in fol. (11 Alph. 18 Bog.) gedruckt worden, und meritiret, wie seine übrigen Schriften gelesen zu werden, sonderlich von denen, die gerne alles, was gethan worden, besichtigen finden wollen.

§. 242. Für Anfänger sind gute Bücher, 1. *Dionysii Petavii Rationarium Temporum* (Moguntiae 1646. in 8. 2 Alph. 22 Bog.). 2. *Guilielmi Beveregii Institutiones Chronologicae cum Arithmetica Chronologica* (Londini 1705. in 4. 1 Alph. 11 Bog.). 3. *Ægidii Strauchii Breviarium Chronologicum* (Wittenbergæ 1664. in 12. 2 Alph. 10 Bog.).

§. 243. Zum Calender-Wesen gehörige Sachen müssen in *Christophori Clavii Operibus*, *Sethi Calvisii Elencho Calendarii Gregoriani* (Franc. ad Mœn. 1612. in 4. 27 Bog.); *Francisci Vietæ Relatione Calendarii vere Gregoriani* und *Calendario Gregoriano perpetuo*, so beyde unter seinen *Operibus* zu finden; *Blondells*

Histoire du Calendrier Romain (a Paris 1682. in 4.); *Erhardi Weigelii bürgerlichem Zeitspiegel* (Jena 1664. in 4. 15 Bog.); *Guil. Bonjour Calendario Romano* (Romæ 1701. in fol. 21 Bogen); *Francisci Blanchinii Solutione Problematis Paschalis* (Romæ 1703. in 4. 13 Bog. Tabb. V.); *Dominici Quartaironii Responsionibus ad assertiones Dominici Cassini pro Reformatione Calendarii Gregoriani* (Romæ 1703. in Regal 4. 4 Bog.); *Eustachii Manfredii Epistola ad Quartaironium, qua Cassini assertiones 16. vindicantur* (Venetiis 1705. in Reg. 4. 8 Bog.) und *Thomæ Pii Maphæi Opere de Cyclorum Soli Lunarium inconstantia & emendatione* (Venetiis 1706. in 4. 1½ Alph.) gesucht werden.

§. 244. Herr Zumbach hat einen *Cyclum lunarem & eclipticum perpetuum* A. 1708. zu Amsterdam in 4. (4 Bog. 1 Tab.) drucken lassen, der nebst dem Instrumente, wie seine übrigen Sachen bey Gerard Valken zu bekommen.

§. 245. Den Jüdischen Calender hat *Sebastianus Münsterus* zu Basel A. 1527. in 4. (1 Alph. 5 Bogen) Hebräisch und Lateinisch heraus gegeben. Hieher gehöret auch *Rabbi Ori Calendarium Palaestinarum & universorum Iudeorum*, den *Iacobus Christmannus*, Professor zu Heydelberg, aus dem Hebräischen in das Lateinische übersehet, und zu Frankfurt am Mäyn A. 1564. in 4. (20 Bogen) heraus gegeben.

Das 13. Capitel.

Von Geographischen und Gnomonischen Schriften.

§. 246. Das vollständige und fast einigste Werk von der Mathematischen Geographie ist des schon öfters mit Ruhm erwähnten Jesuitens Riccioli *Geographia Reformata* (Venetiis 1662. in fol. 7 Alph. 17 Bog.). Aus ihm hat Erhard Weigel in seinem *Erdspiegel* für die Anfänger einen Auszug gemacht (Jena 1665. in 4. 1 Alph. 3 Bog.).

§. 247. Es verdienet auch *Bernhardi Varenii Geographia generalis* gelobet zu werden, die zu Cambridge 1672. in 8. heraus kommen (1 Alph. 9 Bog. Tab. V.) und zu Jena nach dieser Edition 1693. in 8. nachgedruckt worden. Die beste Auflage ist, welche wir *Jacobo Jurin* zu danken haben. Sie ist zu Cambridge An. 1712. in 8 Reg. (1 Alph. 15 Bog. 9 Tabb.) heraus kommen, und hat *Jurin* im Anhang beigefüget, was nach *Varenii* Tode neues erfunden worden. Man lobet auch Herrn J. G. Liebknechts, Mathematicum Professoris zu Gießen, *Elementa Geographiæ generalis* (Frankff. 1712. in 8. 1 Alph. 10 Bogen, an Figuren $8\frac{1}{2}$ Bogen). Den Anfängern ist des Herrn *Sturms* *Geographia Mathematica* (Deutsch, Frankfurt an der Oder 1705. in 8. 10 Bogen Tabb. V.) nützlich zu lesen, darinnen sonderlich die Beschreibung der Landcharten zu finden.

§. 248. Hieher gehöret auch *Georgii Furnier*, eines berühmten Jesuitens, *Hydrographie* a Paris 1653. 10 Alph. 10 Bogen), welches das vollständigste Werck ist, so wir von der Schiffart zur See ehedessen gehabt: allein jetzt sind in Engelland gar viele Wercke heraus kommen, welche dieses übertreffen. Weil wir aber bey uns nicht viel damit zu thun haben; so will ich bloß *James Hodysons system of the Mathematicis* anführen, welches zu London 1723. in 4. vermehrter heraus kommen (7 Alph. 19 Bog. Tabb. 14. und vielen eingedruckten Figuren) und darinnen ausser der ganzen Schiffkunst alles übrige enthalten, was man aus der Mathematick zu gründlichen Verstande derselben zu wissen nöthig. Diesem kan beygefüget werden, der grosse *Atlas marinus & commercialis*, der zu London 1728. heraus kommen; aber mehr historisch ist. Den schweresten Theil von der Schiffart zur See hat Herr *Johann Bernoulli* in seinem *Traite de la Manœuvre des Vaisseaux* (Basel 1714. in 8. Reg. 15 Bog. 10 Tabb.) gründlich abgehandelt.

§. 249. Zur Verbesserung hauptsächlich der Geographie gehören die *Observationes Mathematicæ & Physicæ in India & China factæ Francisci Noël*, eines gelehrten Jesuitens, die zu Prage 1710 in 4. (17 Bog. 2 Tabb.) heraus gekommen. Auch kan man hieher *Ludovici Feuillée Journal des Observations Physiques, mathematiques & botaniques* (A Paris 1714. in 4. Tom. I. 2 Alph. 20 Bog. 16 Tabb. Tom. II. 35 Bog. 50 Tabb.) rechnen.

§. 250. Die Gnomonick, so wohl was die Theorie als ihre Ausübung betrifft, hat *Christophorus Clavius* nach Art der Alten genau demonstriret. Es machet seine *Gnomonica* den vierdten Theil seiner *Operum* aus, und ist allzu weidläufig und verwirret geschrieben. Daher wohl nicht zu vermuthen, daß sie jemand mit Bedacht gang durchzulesen sich entschliessen können. Leichtere Beweise geben *Ozanam* und *Dechales* in ihren *Curlibus Mathematicis*.

§. 251. *Athanasius Kircherus* hat in seiner *Arte Magna Lucis & Umbrae* sehr viel von Sonnenuhren. Und wer deutlichere demonstrationes als des *Clavii* verlangt, den wird *Guarinus Guarini in parte posteriore Mathematicae Caelestis* (Mediol. 1683. in fol. 1 Alph. 3 Bog. mit vielen Kupfern) vergnügen. Der erste Theil dieses Buchs (mit vielen Kupfern 7 Alph. 5 Bogen) ist zugleich mit dem andern heraus kommen, und erkläret die ganze Astronomie sehr deutlich.

§. 252. *Picard* hat eine Manier erfunden, durch Rechnung die Linien auf grossen Sonnenuhren zu suchen, die in den oben (§. 176.) citirten *Divers Ouvrages des Mathematiques* stehet. *Philippus de la Hire* hat in seiner *Gnomonique* (A Paris 1683. in 12.) geometrische Manieren angewiesen, aus einigen observirten Schatten Sonnenuhren zu beschreiben.

§. 253. *Caspar Uttenhöfer*, ein Bürger zu Nürnberg, hat einen *Pedem Mechanicum* oder Werckschuh heraus gegeben, darinnen er auf eine neue Weise aus einem ausgetheilten Werckschuhe

die horologia primaria und declinantia aufzureissen anweist. Die andere Auflage ist vermehrter heraus kommen A. 1620. in 4. (7 Bog. mit eingedruckten Kupfern).

§. 254. A. 1625. hat M. Eberhard Welper (der ausser einer Bedienung gelebet, und sich mit Information in Mathesi fortgebracht), seine *Gnomicam*, das ist, einen gründlichen Unterricht und Beschreibung, wie man allerhand Sonnenuhren auf ebenen Orten künstlich aufreissen und leichtlich verfertigen soll, zu Straßburg, auf seine Kosten in 4. (8 Bog.) heraus gegeben. Er hält in sich das Fundament, welches vor ihm *Sebastianus Münsterus* in seinen *Rudimentis Mathematicis* (Basel 1551. in fol. 2 Alph 20 Bogen) gebrauchet, deren erster Theil die *Elementa Geometriae*, der andere aber Beschreibung der Sonnenuhren lehret. *Jo- hann Christoph Sturm*, hat An. 1672. die *Welperische Gnomonic* zu Nürnberg in 4. (21 Bogen, an Figuren $14\frac{1}{2}$ Bogen) wieder auflegen lassen, und mit dem andern Theil vermehret, darinnen er von den abweichenden Uhren, und von andern Sachen handelt, die man mit auf die Sonnen-Uhren verzeichnen kan; dergleichen sind die Zeichen des Thier-Kreisses, die Länge des Tages und der Nacht 2c. Den ersten Theil hat er auch zugleich mit dienlichen Anmerkungen erläutert. Endlich An. 1681. hat er noch den dritten Theil hinzu gethan, darinnen er angewiesen, wie man allerhand Sonnenuhren auf allerley Arten der Körper beschreiben kan (Nürnberg 1681. in 4. 19 Bogen und

und an Figuren 9 Bogen). An. 1708. hat man von diesem nützlichen Buche zu Nürnberg eine neue Auflage in fol. (2 Alph. 16 Bog. 35. Tabb.) gemacht, und ist noch der vierdte Theil hinzu kommen, darinnen *Picards* und *de la Hire* vorhin angeführte Manieren die Sonnenuhren zu beschreiben erkläret werden. Auch ist mit als ein Anhang der kunstreiche Urmacher dazu kommen, dessen schon oben (§. 16. c. 8.) gedacht worden.

§. 825. Ich muß insonderheit auch allen Liebhabern der Mathematick recommendiren des Herrn Doppelmayers neue und gründliche Anweisung, wie nach einer universalen Methode grosse Sonnenuhren aus einem arithmetischen und geometrischen Fundament zu zeichnen (Nürnberg 1719. in fol. 2 Alphab. 10 Bogen 20 Tabb.). Das Werck ist eingerichtet, daß man es zu der letzten Edition der Welperischen Gnomonica kan binden lassen. Und diese beyden Bücher können in der Materie von den Sonnenuhren an statt aller übrigen seyn. Sonst hat auch Bernhard Gruber, ein gelehrter Cistercienser zu Prage, eine *Horographiam Trigonometricam* heraus gegeben, Prage (1718. in 4. 1 Alphab. 14 Bogen Tabb. 11.), darinnen er weist, wie man die Stundenlinien und was sonst auf die Sonnenuhren kommet, durch trigonometrische Rechnung auf einer Fläche determiniren kan.

§. 256. Die Beschreibungen von allerhand Arten der Sonnenuhren findet man in Johann Petersen Stengels *Gnomonica Universalis* oder ausführlicher Beschreibung der Sonnenuhren (Ulm, 1706. in 8. 18 Bogen Tabb. 109.). Hieher gehöret auch *Georgii Michaëlis Praxis Gnomonica*, die in deutscher Sprache zu Jena 1701. in 8. (12 Bogen und an Figuren $1\frac{1}{2}$ Bogen) heraus kommen: Johann Ulrich Müllers untrüglicher Stundenzeiger (Ulm, 1702. in 8. 1 Alphabet 9 Bogen, und an Figuren 9 Bogen), und *Henrici Cæfii Horographia plana* (Lugd. Batav. 1689. in 4. 12 Bog. 20 Tabb.) in welchem bloß von den Hauptuhren, und etwas von den abweichenden gehandelt wird.

§. 257. An. 1711. hat Johann Gauppe *Gnomonicam Mechanicam Universalem* in Deutscher Sprache zu Augspurg in 4. ($2\frac{1}{2}$ Alphabet, und an Figuren $21\frac{1}{4}$ Bogen) heraus gegeben, zum Gebrauch derer, welche in der Mathematischen Theorie nicht geübet sind. Er hat mit einem kleinen Tractat hinein drucken lassen, den *Henricus Bierum*, ein Ingenieur. An. 1676. (4 Bogen) heraus gegeben, als dessen mechanischer Manier die Sonnenuhren zu beschreiben er sich bedienet. Auf eben diesen Grund bauet Herr Johann Jacob Schübler in seiner neuen und deutlichen Anleitung zur practischen Sonnen-Uhrkunst (Nürnberg 1726. in 8. Reg. 14 Bogen Tabb. 44.). Bey ihm findet man insbesondere, wie die Sonnenuhren geschickt einzufassen.

fassen, damit sie sich an den Mauren besser präsentiren.

§. 258. Es beschreibet auch *Nicolaus Bion* in seinem *Traité de la Construction & des principaux usages des instruments de Mathématique* A Paris 1709. in 8. 1 Alph. 28 Tabb.) allerhand Arten der Sonnenuhren: welches fast einzige Buch in dieser Materie Herr Joh. George Doppelmayr, Prof. Math. zu Nürnberg, in die Deutsche Sprache übersetzt, und unter dem Titel: *Mechanische Werckshule*, zu Nürnberg 1712. in 4. (2 Alph. 5 Bogen 28 Tab.) drucken lassen, auch nach diesem mit einem Anhang vermehret.

§. 259. *Ignatius Gasson Pardies* hat zwey Maschinen erfunden, dadurch alle Arten der Sonnenuhren sehr leicht beschrieben werden. Ihre Beschreibung ist seiner *Statique* beygefüget.

Das 14. Capitel.

Von den Mathematischen Cursibus und Lexicis.

§. 260.

Petrus Herigonius hat den ersten *Cursum Mathematicum* in Lateinischer und Französicher Sprache geschrieben, und in sechs Theilen zu Paris 1644. in 8. (10 Alph. 2 Bogen) drucken lassen. Er erkläret die dreyzehn Bücher *Euclidis* mit seinen *Datis*, nebst einigen Schriften *Apollonii Pergæi*, so verlohren gangen und von *Willebrordo Snellio*, *Marino Ghetaldo* und *Francisco Vieta* durch
eigen

eigenen Fleiß restituiret worden; die Arithmetick, Algebra, Trigonometrie, Geometriam practicam, Fortification, Astronomie, Geographie, Schiff-Kunst, Optick, Catoptrick, Dioptrick, Perspectiv, Gnomonick und Music. Im Demonstrieren gebrauchet er lauter besondere Zeichen, die von denen jetzt üblichen unterschieden sind, und daher diejenigen, welche an andere gewöhnet sind, irre machen. Die Sachen, die er fürtraget, sind gut: allein die meisten Disciplinen haben sich von der Zeit an sehr verändert. Auch gehet er mehr auf Theorie als auf praxin.

§. 261. A. 1662. hat der bekannte Jesuit *Casspar Schottus* seinen *Cursum mathematicum* zu Würzburg in fol. heraus gegeben, welcher A. 1674. zu Franckfurt am Mäyn, und A. 1676. zu Bamberg in fol. (7 Alph. 19 Bogen, und über 2 Alph. Kupfer) wieder aufgelegt worden. Er bestehet in 28 Büchern, darinnen einige leichte Aufgaben von der Geometria practica, die Arithmetick, die ersten 6 Bücher *Euclidis*, die Trigonometrie, das Feldmessen mit *Kirchers Pantometro*, die Astronomie mit den Theorien der Planeten, die Astrologie, Chronologie, Geographie, Hydrographie, Chorographie, Mechanick, Statick, Hydrostatick, Hydraulick, Optick, Catoptrick, Dioptrick, die Kriegs-Baukunst, die Music und Algebra, meistens sehr unvollständig und nicht gründlich abgehandelt werden; daher er heute zu Tage denen kein Gnügen thut, welche die Mathematick gründlich zu lernen gesonnen.

§. 262. A. 1681. hat *Jonas Moore* zu London *A new systeme of the Mathematicks* heraus gegeben. In dem ersten Theile findet man 1. die Arithmetick, sowol die gemeine als die mit zehentheiligen Brüchen und Buchstaben: 2. die sechs ersten Bücher *Euclidis* mit dem eilften und zwölften und der *Geometria practica*: 3. die gemeine und sphärische Trigonometrie: 4. die Cosmographie: 5. die Schiffkunst: 6. den sphärischen Theil der Astronomie. In dem andern sind astronomische Tafeln, nebst den Tafeln der *sinuum tangentium*, *sinuum versorum* & *logarithmorum* und die Geographie, oder eine Beschreibung der vornehmsten Länder. Das Buch ist hauptsächlich für diejenigen geschrieben, welche die Schiffkunst aus dem Grunde erlernen wollen.

§. 263. *Claudius Franciscus Milliet Dechaies*, ein Jesuit in Frankreich hat An. 1674. in drey Theilen seinen *Mundum Mathematicum* drucken lassen. Als er aber auf eine neue vermehrte Auflage bedacht war, unterbrach der Tod sein Vorhaben. Unterdessen bediente sich *Amatus Varcinus*, einer aus seiner Gesellschaft, seiner MSC. und gab dieses Werk von neuem zu Lyon 1690. in fol. (32 Alph.) heraus. In dem ersten Theile sind enthalten 1. ein Tractat von dem Fortgange der mathematischen Wissenschaften und den berühmten Mathematicis, 2. *Euclidis Elementa* XIV. 3. *Theodosii Sphærica*, 4. ein Tractat von den Kegelschnitten, 5. eine *Arithmetica practica*, 6. die Trigonometrie, 7. die Algebra, 8. eine

8. eine Widerlegung der Carthesianischen Philosophie: in dem andern 1. eine Geometria practica, 2. die Mechanick, 3. die Statick, 4. die Geographie, 5. ein Tractat von den Magneten, 6. die bürgerliche Baukunst, 7. die Zimmerkunst, 8. ein Tractat von dem Steinhauen: in dem dritten 1. die Fortification, 2. die Hydrostatick, 3. ein Tractat von den Quellen und Flüssen, 4. die Hydraulick, 5. die Kunst zu schiffen, 6. die Optick, 7. die Perspectiv, 8. die Catoptrick, 9. die Dioptrick: im vierdten endlich 1. die Music, 2. die Feuerwerckerkunst, 3. das Astrolabium, 4. die Gnomonick, 5. die Astronomie, 6. die Astrologie, 7. ein Tractat von den Meteoris, 8. die Beschreibung des Calenders. Die alte und gemeine Sachen werden von ihm wohl erkläret: von den neueren und höheren aber trifft man nichts darinnen an. Doch ist es das vollständigste unter den Büchern von seiner Art.

§. 264. An. 1690. hat Wilhelm Leyborn, ein Engelländer, einen *Cursum Mathematicum* in Englischer Sprache unter dem Titul: *Mathematical Sciences in nine Books* zu London in fol. (11 Alph 43 Tabb.) drucken lassen. In dem ersten Buche erkläret er die Arithmetick mit den Logarithmis; im anderen die gemeine Geometrie (welchem als ein Anhang eine Einleitung zur Algebra beigefüget), in dem dritten den sphärischen Theil der Astronomie, im vierdten die Cosmographie, Geographie und Chronologie, im fünften die gemeine und sphärische Trigonometrie, im sechsten
den

den Gebrauch der geometriſchen Instrumente in der Geodeſie, Planimetrie, Bau-Kunſt und Fortification, im ſiebenden die Schiff Kunſt, im achten die Gnomonick, im neunnden die Theorie der Planeten, welches das andere Buch aus *Mercatoris Institutionibus Astronomicis* iſt.

§. 265. *Abraham de Graaf*, ein Holländer, hat in ſeiner Mutter, Sprache zu Amſterdam 1694. in 4. (1. Alph. 21. Bog. Tabb. 94.) *de geheele Matheſis of Wiſkunſt* heraus gegeben. Es enthält dieſer *Curſus* in ſich 1. einen kleinen Tractat von der Proportion, 2. die Arithmetick, 3. die gemeine Geometrie, 4. die gemeine ſphäriſche Trigonometrie, 5. die Aſtronomie, 6. das Feldmeſſen und die Viſir-Kunſt, 7. die Schiff Kunſt, 8. die Fortification, 9. die Gnomonick, 10. die Perſpectiv, 11. die Dioptrick mit der Catoptrick, 12. die Mechanick, 13. die Algebra. Er iſt überall ſehr kurz, auſſer die gemeine Algebra iſt ausführlich. Denn von der neuern kan er noch nichts haben, als die zu ſeiner Zeit erſt in ihrem Anſange zu ſehen war.

§. 266. An. 1697. hat *Ozanam* ſeinen *Cours de Mathematique* zu Paris heraus gegeben, der A. 1699. zu Amſterdam (4. Alphab. 14. Bogen Tabb. 155.) nachgedruckt worden. Im erſten Theile ſtehen die ſechs erſten *Elementa Euclidis* mit dem eilfften und zwölfſten und die Buchſtaben-Rechen-Kunſt; im anderen die gemeine ſphäriſche Trigonometrie mit den *Tabulis Sinuum*,
(*Wolfs Matheſ.*) § Tan-

Tangentium & Logarithmorum; im dritten die Geometria practica; im vierdten die Mechanick und Perspectiv; im fünfften die Geographie und Gnomonick. Er ist also sehr unvollständig, doch wird alles gründlich erwiesen, nach Art der Alten.

§. 267. *Jacob Taylor* hat in seinem *Treasury of the Mathematicks*, oder *Schatz der Mathematick*, welchen A. 1707. *W. Alingham* zu London in 8. (1. Alphab. 12. Bog. 18. Tabb.) wieder auslegen lassen, die vornehmsten Aufgaben aus der Arithmetick, Geometria Practica, beyden Trigonometrien, der sphärischen Astronomie, der Geographie, der Schiff = Kunst, dem Feldmessen, der Visir = Kunst, der Gnomonick, Fortification und Feuerwercker = Kunst, ohne Beweis und Erklärung der Kunst = Wörter fürgetragen. Zu Ende stehen die *Tabulae Logarithmorum* und *Tabulae Sinuum & Tangentium*.

§. 268. Weil es mir an einem geschickten Buche fehlte, nach dem ich meine *Lediones* zum Nutzen der Studirenden einrichten könnte; so habe ich Anno 1710. meine Anfangs = Gründe der Mathematischen Wissenschaften in Halle in vier Theilen in 8. heraus gegeben (5. Alph. 10. Bog. 111. Tabb.), welche zu Ende des 1717ten Jahres von neuem hin und wieder verbessert und vermehret, im 1725ten Jahre zum dritten, im 1731ten Jahre zum vierdten mahl An. 1738. zum fünfften mahl im 1743ten Jahre zum sechsten mahl und nun in diesem 1750ten Jahre zum

zum siebenden mahl heraus kommen. Unerachtet ich darein nichts gebracht, als was einem, der einen guten Grund in der Mathematick legen will, zu wissen nöthig ist; so habe ich mich gleichwohl bewegen lassen, für die ersten Anfänger einen Auszug zu machen. Doch habe ich mich beflissen, nicht allein die richtige Ordnung (welche das beste ist, so man aus der Mathematick erlernen kan), sondern auch die Sachen ziemlich ausführlich zu behalten. Daher ich nicht zweiffle, es werde seinen Nutzen haben und zu dem Aufnehmen der Mathematick das seine beitragen. Es ist dieser Auszug aus den Anfangs = Gründen aller Mathematischen Wissenschaften. (2 Alphabet 44. Tabb.) An. 1717. in 8. das erste mahl und An. 1724. das andere mahl und 1728 das dritte mahl und nach diesem noch fünf mahl heraus kommen. Die Anfangs = Gründe sind in Holland in die Holländische, der Auszug aber ist in Lausanne in die Lateinische, und zu Paris in die Französische Sprache übersezt worden.

§. 269. Als der selbige Herr Verleger von mir begehrte, ich möchte die Anfangs = Gründe in die Lateinische Sprache übersezen; habe ich es für bequemer gefunden, wenn ich ein ausführlicher Werck schriebe, darinnen alles gründlich erwiesen würde, was einem zu wissen nöthig ist, der die Mathematick aus dem Grunde zu erlernen gedencet. Der erste Theil ist An. 1713. in 4. (4. Alphab. 19. Bogen 50. § 2 Tab.

Tab. der andero An. 1715. (6. Alphab. 1. Bogen 81. Tabb.) heraus kommen. In dem ersten ist 1. ein Unterricht von der Mathematischen Lehr. Art, 2. die Arithmetick, 3. die Geometrie, 4. die Trigonometrie, 5. die Algebra und Differential. Rechnung, darinnen zugleich die höhere Geometrie abgehandelt wird, 6. die Mechanick und Statick, die Hydrostatick, 8. die Aerometrie, 9. die Hydraulick: in dem anderen aber 1. die Optick, 2. die Perspectiv, 3. die Catoptrick, 4. die Dioptrick, 5. die Spharica und sphärische Trigonometrie, 6. die Astronomie, 7. die Geographie, 8. die Chronologie, 9. die Gnomonick, 10. die Pyrotechnie, 11. die Fortification, 12. die Baukunst, 13. ein Unterricht von den Mathematischen Schriften enthalten. Da dieses Buch ganz abgegangen und es wieder von neuen heraus kommen sollen; habe ich es viel vermehrter heraus zu geben für rathsam erachtet, und ist der Anfang davon mit der Arithmetick, Geometrie, Trigonometrie und Algebra im 1730. Jahre gemacht worden. Und bestehet nun dasselbe aus 5. Theilen. Es sind diese 5. Theile auch zu Genev nachgedruckt worden, und in Italien hat man gleichfalls mit dem ersten Theile einen Anfang gemacht.

S. 270. Weil man auf vielen Universitäten lieber Lateinische Bücher hat (wiewohl in der Ma-

Mathematick die Deutschen vieler Ursach halber meines Erachtens vorzuziehen sind), hingegen meine Lateinische Elementa zu diesem Zwecke nicht dienen, indem sie weiter gehen, als derselbe leidet, so hat Herr Joh. Friedrich Weidler, berühmter Professor auf der Universität Wittenberg, zum Behuf seiner *Lectiōum Institutiones Mathematicas* (Wittenberg 1718. in 8. 2. Alph. 8. Bog. Fig. 44.) heraus gegeben, dergleichen Arbeit wir auch von dem Jenischen Professore Matheſeos, Herr Wiedeburgen haben.

§. 271. *Conradus Dasypodius*, Mathematicum Professor zu Straßburg, hat A. 1573. ein *Dictionarium Mathematicum* in Griechischer und Lateinischer Sprache zu Straßburg in 8. (12. Bogen) heraus gegeben. Man findet darinnen die Erklärungen der Kunst. Wörter, welche in der Arithmetick, Geometrie, dem Feldmessen, der Astronomie und Music gebraucht werden. Das Buch ist nach der Ordnung der Disciplinen, nicht aber des Alphabets geschrieben, und hat nicht viel sonderliches.

§. 272. *Hieronymi Vitalis*, eines Theatiners, *Lexicon Mathematicum* ist zuerst zu Paris 1668. in 8. (1. Alph. 18. Bog.) heraus kommen. Man findet darinnen nichts als die Wörter aus der gemeinen Geometrie, aus der Astronomie und Astrologie. A. 1690. ist es zu Rom in 4. (6. Alphab. 3. Bog.) wieder aufgelegt worden, und sind nicht allein die vielfältigen unnützen astrologischen Sachen weggethan, sondern auch fast aus allen Ma-

thematischen Wissenschaften viele andere hinzu gethan worden.

§. 273. Ozanam hat sein *Dictionaire Mathematique* welches zu Paris 1691. in 4. 4. Alph. gedruckt worden,) nach den Ordnungen der Disciplinen aufgesetzt und erläutert, darinnen die Kunst Wörter der Arithmetick, Algebra, Geometrie, Cosinographie, Astronomie, Schiff-Kunst, Geographie, Optick, Perspectiv, Gnomonick, Catoptrick, Dioptrick, Mahler-Kunst, Mechanick, Statick, Hydrostatick, Bau-Kunst, Fortification und Music. Der gröste Theil gehöret nicht zur Mathematick, und fehlen die neuen Mathematischen Kunst-Wörter.

§. 274. J. Harris hat ein *Universal english Dictionary of Arts and Sciences explaining not only the Terms of Arts, but them selves* geschrieben. Der erste Theil ist zu London A. 1704. der andere A. 1710. in fol. heraus kommen. Es werden in diesem sehr weitläufigen Werke nicht allein mathematische Sachen und Kunst Wörter; sondern auch Sachen und Wörter aus allen übrigen Disciplinen nach der Ordnung des Alphabets erkläret.

§. 275. Auf Begehren habe ich A. 1716. zu Leipzig in Reg. 8. ein *Mathematisches Lexicon* heraus gegeben, darinnen nicht allein die in allen Theilen der Mathematick übliche Kunst-Wörter erkläret; sondern auch zur Historie der mathematischen Wissenschaften dienliche Nachrichten theilet, und die Schriften, wo jede Materie ausgeführet zu finden, angeführet werden (2. Alphab. 5. Bog.

5. Bog. mit vielen eingedruckten Figuren). Es ist längst nicht mehr zu haben gewesen, verschiedener Ursachen wegen aber mit der neuen Auflage nicht zu Stande kommen, bis man es endlich ganz verändert heraus gegeben, ohne meinen Namen dabey zu setzen, indem ich es auch vor meine Arbeit nicht erkenne, und thun mir die Unrecht, die es vor das meinige ausgeben. Mein Lexicon hat Joseph Severi ins Italiänische übersezt. Herr Chambers hat in seiner *Cyclopaedia oder Universal Dictionary of Arts and Sciences* (Lond. 1728. 22. Alph. 8. Bog. Tabb. 28.) auch zugleich ein mathematisches Lexicon, welches er größten Theils aus meinen Lateinischen Elementis genommen, wie allein die Figuren es ausweisen. Johann Ludolph Gäsche aber hat ein Kriegs-, Ingenieur- und See-Lexicon zu Dresden A. 1735. in 8. (2. Alph. 8. Bog. 21. Tabb.) zum Behuf derer Druckten lassen, welche die in der Fortification, im Kriege, der Feuerwerker-Kunst, Artillerie und Schifffahrt zur See gebräuchliche Kunst-Wörter zu wissen verlangen.

Das 15. Capitel.

Von Mathematischen Wercken.

§. 276.

L Es Oeuvres Mathematiques de Simon Stevin de Bruges hat A. 1634. in fol. (9. Alphab. 20. Bogen) Albertus Girardus mit einigen Anmerkungen heraus gegeben. Es sind darinnen

nen enthalten 1. die Arithmetick in Rational- und Irrational Zahlen mit der Algebra, 2. *Diophanti Alexandrini* sechs Bücher, davon die vier ersten *Stevinus*, die zwey letzten *Girardus* ins Französische übersezet, 3. eine Anweisung, die Verzinsungen der Capitalien leicht zu rechnen, nebst der *Logistica decimali* und der Lehre von den *incommensurabilibus*, wobey zugleich das zehende *Elementum Euclidis* erläutert wird, 4. die gemeine und sphärische Trigonometrie, 5. die Geographie, 6. die Astronomie, 7. die ausübende Geometrie, 8. die Statick, 9. die Optick, 10. die Lehre von den Feld- Lagern, 11. die Fortification durch Schleusen, 12. die andere Fortification. Der Autor ist so wol in der Theorie als Praxi wohl beschlagen gewesen.

§. 277. Des berühmten Jesuitens *Christophori Clavii Opera mathematica* sind von dem Autore selbst übersehen, hin und wieder verbessert und vermehret, und in 5. Theilen zu Maynß A. 1612. in fol. (40. Alphab. 9. Bog.) heraus gegeben worden. In dem ersten Theile stehen *XVI Elementa Euclidis* und *Libri tres Sphaericorum Theodosii* mit *Clavii* weitläufigen Commentariis, die Ausrechnung und Canones sinuum, tangentium & secantium, die Lehre von den geradelinichten und sphärischen Triangeln, nebst beyden Trigonometrien; in dem andern eine *Geometria practica*, die Arithmetick und Algebra mit einer Widerlegung *Cyclometriae Josephi Scaligeri*, der eine unrichtige Quadratur des Circuls angegeben; in dem dritten

Joannis de Sacro Bosco libellus de sphaera mit einem weitläufigen Commentario *Clavii* und drey Bücher von dem Astrolabio; in dem vierdten die Gnomonick, die Beschreibung und der Gebrauch eines Instruments die Sonnen, Uhren zu beschreiben, ein kurzer Begriff von den Horizontal- und abweichenden Sonnen, Uhren; in dem fünften die Erklärung des Römischen Calenders, wie er von dem Pabste *Gregorio XIII.* verbessert worden, eine Vertheidigung dieses Calenders wider *Michaëlem Mästlinum* nebst einem Anhang dazu, in welchem *Josephus Scaliger*, *Georgius Germanus* und *Franciscus Vieta* widerleget worden, welche die Verbesserung des Calenders auf andere Art eingerichtet wissen wollen. *Clavius* richtet sich im Demonstriren nach der Schärfe der Alten, nemlich *Euclidis*, *Archimedis* und *Apollonii*.

§. 278. *Francisci Vieta* in Frankreich zu verschiedenen Zeiten besonders gedruckte Werke hat *Franciscus a Schooten*, Professor Mathematicum in seiner Vater. Stadt *Leyden*, in einen Band zusammen getragen, und daselbst 1646. in folio (6. Alph.) drucken lassen. Die Titul der darinnen enthaltenen Schriften sind folgende: 1. *Isagoge in Artem analytitam*, 2. *Ad Logisticen speciosam Notæ priores*, 3. *Zeteticorum libri quinque*, 4. *de equationum recognitione & emendatione Tractatus duo*, 5. *de numerosa potestatum ad exegesis resolutione*, 6. *Effectuum Geometricarum canonica recensio*, 7. *Supplementum Geometriae*, 8. *Pseudo-*

L 5

Meso-

Mesolabum & alia quædam adiuncta capitula, 9. Theoremata ad sectiones angulares, 10. Responsum ad problema, quod omnibus Mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, 11. Apollonius Gallus, 12. Variorum de rebus Mathematicis responsum liber, 13. Munimen adversus nova cyclometrica, 14. Ratio Calendarii vere Gregoriani, 15. Calendarium Gregorianum perpetuum, 16. Adversus Christophorum Clavius Expostulatio.

§. 279. *Philippi Lansbergii Opera omnia* sind zu Middelburg in Seeland A. 1663. in fol. (10. Alph.) heraus kommen. Es befinden sich darin folgende Schriften: 1. *Triangulorum Geometriæ libri quatuor*, 2. *Cyclometriæ novæ libri duo*, 3. *Uranometriæ libri tres*, 4. *In quadrantem tum astronomicum, tum geometricum, nec non in astrolabium introductio*, 5. *Horologiographia plana*, 6. *Commentationes in motum Terræ diurnum & anuum, & in verum adspectabilis cæli typum*, 7. *Tabule motuum cælestium perpetuæ cum novis motuum cælestium Theoricis & astronomicarum observationum thesauro*, 8. *Chronologiæ sacræ libri tres*, in quibus annorum mundi series ab orbe condito ad eversa per Romanos Hiërosolyma nova methodo ostenditur.

§. 280. In den *Opusculis Mathematicis Guilielmi Oughtred* (Oxford 1677. in 8. 15. Bog.) sind enthalten 1. *Institutiones Mechanicæ*, 2. *De variis corporum generibus gravitate & magnitudine comparatis Tractatus ex Marini Ghetaldi Archimede promoto excerptus*, 3. *Tractatus de automatis*, 4. *Quæ-*
stio-

stionum Diophanti Alexandrini Libri tres, 5. *De triangulis planis reſtangulis*, 6. *De diſiſione ſuperfici-
erum*, 7. *Muſicæ elementa*, 8. *Architectura mili-
taris*, 9. *Tractatus de ſectionibus angularibus*.

§. 281. Des bekannten Jeſuitens *Andrea Tac-
quet Opera Mathematica* hat in ſeiner Vaterſtadt
Antwerpen ein anderer Jeſuite *Simon Laurentius
Veteranus* A. 1669. in fol. (9. Alphab. 15. Bogen
88. Tab.) auflegen laſſen. Die darinnen befind-
lichen Schriften ſind folgende: 1. *Aſtronomiæ libri
oſto cum appendice*, 2. *Geometriæ præcti-
cæ libri tres*, 3. *Opticæ libri tres*, 4. *Catoptricæ libri tres*, 5. *Ar-
chitecturæ militaris liber unus*, 6. *Cylindricorum &
Annularium libri quinque*, 7. *Differtatio Phyſico-Ma-
thematica de circularum volutionibus*.

§. 282. A. 1692. hat ein Franköſiſcher Jeſuit,
P. Hoſtus, Profeſſor Mathematicum zu Toulon, *Re-
cueil des Traités de Mathematique, qui peuvent être
neceſſaires a un Gentilhomme pour ſervir par mer ou
par terre* zu Paris in 12. (26. Bog. 67. Tabb.)
heraus gegeben. Es beſtehet aus drey Theilen.
In dem erſten ſind die *Elementa Euclidis*, die
Arithmetick und Trigonometrie; in dem andern
die *Geometria Præctica*, die Sphærick, die Me-
chanick, die Fortification und Pyrotechnie; in
dem dritten die Schiff-Kunſt.

§. 283. A. 1693. ſind auf Königl. Koſten die
Opera Veterum Mathematicorum, Griechiſch und
Lateiniſch in fol. (4. Alphab. 174. Fig.) zu Paris
heraus kommen, nemlich 1. *Athenæus de machi-
nis*, 2. *Apollodori Poliorcetica*, 3. *Philonis liber
quar-*

quartus de telorum constructione & quintus de rationibus toleranda instituendaque obsidionis, 4. *Biton de constructione machinarum bellicarum & catapultarum*, 5. *Heronis Belopæca*, *Spirititalia & automata*, 6. *Julii Africani Cesti*, 7. *Anonymi liber de toleranda obsidione*, und 8. *Bernardini Baldi Scholia in Heronis Belopæcam* nebst einigen andern Sachen.

§. 284. Auf eben diese Kosten sind An. 1693. in fol. zu Paris heraus kommen *Divers ouvrages de Mathematique & Physique par Messieurs de l'Academie Royale des Sciences* (108. Bogen.). Man findet darinnen folgende Schriften: 1. *Frenicles Tractat von den Exclusionibus* und 2. sein Buch von den *Combinationibus*, ingleichen 3. ein anderes von den *quadratis magicis*, 4. *Robervall* von der Bewegung, welche Lehre er auf die *Tangentes Curvarum* appliciret, 5. seinen Entwurff eines Buches von der zusammen gesetzten Bewegung, 6. sein Buch von den Gleichungen, 7. seinen Tractat von den *indivisibilibus*, 8. sein Buch von der *Trochoide*; 9. seinen Brief an den *Mersennum* von einigen Lehresätzen *Torricellii*, 10. *Torricellii* Brief an *Robervallen* auf Veranlassung des vorhergehenden Briefes geschrieben, 11. *Robervalls* Schreiben, darinnen er sich wegen seiner Erfindungen wider *Torricellium* und andere Italiäner vertheidiget, 12. *Hugenii* Buch von der Ursache der Schwere, 13. eine Demonstration von dem wagerechten Stande der Wage, 14. die Kräfte, die Federn oder Seile zu ziehen, 15. eine

ne neue bewegende Krafft durch Hülffe des Pulvers und der Luft, 16. eine sinnreiche Construction des Ortes an der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten, 17. *Fermatii* Regel *de maximis & minimis* demonstiret und verbessert, 18. Auflösung einer Opusculen Aufgabe, welche der 39ste Satz des fünfften Buches bey dem *Alhazen* und der 22ste des 6ten Buches bey dem *Vitellione* ist, 19. *Picards* Manier grosse Sonnen - Uhren durch Rechnung zu beschreiben, 20. ein Schediasma von dem Maasse, 21. von den Grössen des Masses, 22. von dem Masse der flüssigen und trockenen Sachen, 23. von der Proportion des ausfliessenden Wassers, 24. Experimente von dieser Materie, 25. *Fragmenta dioptrica* die Brennpuncte der geschliffenen Gläser zu finden, 26. *Auzouts* Tractat vom *Micrometro*, 27. *Mariottens* Regeln vom springenden Wasser, 28. *Römers* Regeln von der Dicke der Röhren in Spring Brunnen und Wasserleitungen, und 29. seine Experimente von dem Werfen der schweren Körper. Diese Werke insgesamt findet man mitten unter denen *Memoires de l'Academie Royale de sciences depuis 1666 jusqu'à 1699.* welche in denen verschiedenen Tomis zu Paris heraus kommen: welches ich zu dem Buche erinnere, damit diejenigen, welche die *Histoire de l'Academie Royale de sciences* mit denen *Memoires* zusammen besitzen, diese Werke nicht von neuem als etwas besonderes ihnen anschaffen.

zica sind zu Venedig 1575. in 4. (1. Alphab. 18 $\frac{1}{2}$ Bogen) heraus kommen und begriffen in sich 1. *de Sphæra librum unum*, darinnen weiter nichts als die in dieser Materie gebräuchlichen Kunst - Wörter erkläret worden, 2. *Compendium ecclesiasticum* oder die Oster - Fest - Rechnung, 3. einen Tractat von den Astronomischen Instrumenten, dem *Quadrato Geometrico*, *Quadranten*, *Astrolabio*, den *Armillis* und der *Himmels - Kugel*, 4. einen *Gnomonischen* Tractat von den Stunden Linien, 5. die *Sätze des 13ten Elementi Euclidis*: 6. einen kurzen Begriff von *Boëtii Musica* und einige Regeln von der *Musie*, 7. von den Stunden - Linien drey Bücher darinnen der Grund der *Gnomonick* weitläufftiger auszuführen wird, 8. zwey Bücher von der *Arithmetick*.

§. 286. *Thome Ceva*, eines Jesuitens *Opuscula mathematica* (Mediolani 1699. in 8. 4. Bogen) enthalten einige *Demonstrationes* in sich *de ratione æquilibrii*, *de sectione geometrico - harmonica* & *arithmetica*, *de sectione anguli rectilini in quotvis partes*, *de parabola instar ellipsis maximæ atque instar hyperbolæ habentis transversam diametrum infinitam*; *de lineis phantasticis* & *flexilineis* nebst einigen *Excerptis* aus einer *Italiänischen Exercitatione Vincentii Viviani* und *Ozanams Idea universali Matheſeos*.

§. 287. *Johannis Wallisii* SS. Theol. D. und Professoris *Saviliani* zu *Oxford*, *Opera Mathematica* bestehen aus drey Theilen. Der erste ist zu *Oxford* Anno 1665. in fol. (11. Alphabet 17. Bogen) her.

heraus kommen und findet man darinnen 1. *Orationem inauguralem*, die er Anno 1649. d. 30. Oct. bey dem Antritt seiner Profession gehalten, 2. *Matheseos universalem seu Arithmeticum Opus integrum*, 3. *Tractatum elencticum adversus Marci Methonii de proportionibus dialogum*, 4. *Tractatum de sectionibus Conicis nova methodo expositis*, 5. *Arithmetica infinitorum*, 6. *Tractatus duos de Cycloide & Cissoide ac corporibus inde genitis, & de curvarum tum linearum ενδυνύσει, tum superficierum πλατυσµῶ*, 7. *Observationem eclipsis solaris An. 1654. d. 2. Aug. Oxonii visa*, 8. *Mechanicam, sive de motu Tractatum Geometricum. A. 1693. ist der andere Theil (10. Alphab. 17. Bogen) gefolget. Darinnen befinden sich 1. Tractatus Historicus & practicus de Algebra, 2. de combinationibus, alternationibus & partibus aliquotis, 3. de sectionibus angularibus, 4. de angulo contactus & semicirculis, 5. defensio ejusdem Tractatus, 6. desceptatio geometrica de postulato quinto & quinta definitione lib. 6. Euclidis, 7. Cono - Cuneus geometricè consideratus, 8. de gravitate & gravitatione disquisitio geometrica, 9. de aestu maris hypothesis nova, 10. commercium epistolicum de questionibus quibusdam mathematicis, 11. Joh. Caswelli Trigonometria plana & sphaerica. Der dritte Theil ist Ann. 1699. in fol. (14. Alph.) zum Vorschein kommen. In diesem sind kommen 1. Claudii Ptolemæi, Porphyrii & Manuelis Briennis Harmonica, 2. Archimedis Arenarius & dimensio circuli cum Eutocii Ascalonica in hanc Commentario: 3. Aristarchi Samii*
liber

liber de magnitudibus & distantiiis Solis & Luna;
 4. *Fragmentum libri secundi collectionis mathematicae Pappi Alexandrini;* 5. *Collectio epistolarum quarundam Collinii, Leibnitii, Newtonii, Wallisii, Flamstedii.* 6. *Tractatus de loquela, Grammatica linguae Anglicanae, Institutio logica, Mens sobria serio commendata in concione Latina habita, Epistola ad Titum expositio* und einige andere Theologische Sachen.

§. 288. Anno 1742. sind des grossen Mathematici unserer Zeiten *Joannis Bernoulli Opera mathematica* in vier Theilen zu Genff in 4. heraus kommen (Tom. I. 3. Alphab. 4. Bogen 23. Tabb. Tom. II. 3. Alphab. 9. Bogen 17. Tabb. Tom. III. 3. Alphabet. 2. Bogen 36. Tabb. Tom. IV. 3. Alphabet 12. Bogen 15. Tabb.). Man findet hierinnen nicht allein alles beneinander, was dieser grosse Mathematicus jemahlen geschrieben, und grössten Theils in den *Actis Eruditorum Lipsiensibus* oder auch zum Theil besonders drucken lassen; sondern in dem vierdten Theile sind zugleich diejenigen Werke enthalten, die vorhin noch niemahlen das Tage- Licht gesehen. Dieses vortreffliche Buch ist denenjenigen dienlich, welche den Grund zur höheren Geometrie und neueren Analysis gelegeet, und weiter zu gehen gedencken. In Holland hat *Gravesand* diejenigen Schriften, welche *Hugenius* theils bey seinem Leben nach und nach heraus gegeben, theils im
 MSC.

MSC. hinterlassen, und die nach seinem Tode herauskommen, zusammen unter dem Titul: *Opera varia* und *Opera reliqua* drucken lassen, weil verschiedene Verleger Recht dazu gehabt, daß sie nicht unter dem Titul *Opera Omnia* gedruckt werden können. Die ersten sind zu Leyden 1724. die andern zu Amsterdam 1728. in 4. heraus kommen. Beyde bestehen aus einigen mäßigen Voluminibus.

§. 289. In die gegenwärtige Classe gehören auch *Casspari Schotti Organon Mathematicum* und seine *Magia Universalis Naturæ & Artis*. Das erste Buch ist zu Würzburg Anno 1688. in 4. (5. Alphabet, an Figuren 1. Alphabet 7. Bogen): das andere zu Bamberg Anno 1677. in 4. (14. Alphabet 89. Tabb.) in vier Theilen heraus kommen. In dem ersten werden vermittelst einiger Tabellen die Aufgaben aus der Arithmetick, Geometrie, Fortification, Chronologie, Gnomonick, Astronomie, Astrologie, Steganographie und Music aufgelöset. In dem ersten Theile des andern stehet die Optik, Catoptrick und Dioptrick; im andern die Acustick und Music, im dritten die Mechanick, Statick, Hydrostatick, Hydrotechnie, Aerotechnie, Arithmetick und Geometrie; im vierdten die Cryptographie, Pyrotechnie, Magnetic; Physiognomie, Chiromantie und dergleichen; wiewohl diese Wissenschaften nicht alle ausführlich abgehandelt worden.

(*Wolfs Mathef.*)

M

§. 290.

§. 290. Anmuthige Sachen hat aus allen Theilen der Mathematick zusammen getragen und mit kurtweiligen vermendet Daniel Schwenter, *Mathematicum & linguarum orientalium Professor* zu Altdorff in seinen *Deliciis physico mathematicis* (Nürnberg 1636. in 4. 3. Alphab. 4. Bog.), welche hernach Philippus Harsdörffer mit zwey Theilen vermehrter (10. Alph. 8. Bog.) von neuem heraus gegeben. Dergleichen Arbeit sind auch Ozanams *Recreations de Mathematique & de Physique* (A Paris 1696. in 8. 3. Alph. 7. Bog. 44. Tab.): welches letztere Buch viel vermehrter wieder aufgelegt worden (Paris 1725. in 8. 5. Alph. 6. Bog. Tabb. 132.)





I.

Register über die Capitel.

Das 1. Capitel.	
Von den Arithmetischen Schriften.	5
Das 2. Capitel.	
• den Geometrischen Schriften.	13
Das 3. Capitel.	
• den Algebraischen Schriften.	35
Das 4. Capitel.	
• den Trigonometrischen Schriften.	64
Das 5. Capitel.	
• den Architectonischen Schriften.	71
Das 6. Capitel.	
• den Schriften über die Artillerie.	82
Das 7. Capitel.	
• den Fortifications-Schriften.	85
Das 8. Capitel.	
• den Mechanischen Schriften.	97
Das 9. Capitel.	
• den Hydrostatischen, Aerometrischen und Hy- draulischen Schriften.	110
Das 10. Capitel.	
• den Optischen Schriften.	115
Das 11. Capitel.	
• den Astronomischen Schriften.	125
Das 12. Capitel.	
• den Chronologischen Schriften.	148
Das 13. Capitel.	
• den Geographischen und Gnomonischen Schrif- ten.	151
Das 14. Capitel.	
• den Mathematischen <i>Curſibus</i> und <i>Lexicis</i> .	157
Das 15. Capitel.	
Mathematischen Wercken.	167
M 2	II. Regi-

II.

Register über die Autores, nach den Jyvi eingerichtet.

A.		<i>Baker</i> (Thomas)	57
A	<i>Cta Eruditorum</i>	<i>Baldus</i> (Bernhardinus)	106
	83.		283
	167. 213	<i>Balianus</i> (Joh. Baptista)	
<i>Albategnius</i>	208. 213		161. 184
<i>Alberti</i> (Andreas)	201	<i>Baran</i> (J.)	201
<i>de Albertis</i> (Leo Baptista)		<i>Barratterus</i> (Johannes Ba-	
	106. 107. 111.	prista)	124
<i>Alexander</i> (Dom.)	174	<i>Barbarus</i> (Daniel)	106
<i>Alhazen</i>	188. 284	<i>Barlaamus</i> Monachus	7
<i>Alingham</i> (William)	263	<i>Barrow</i> (Isaacus)	37. 39.
<i>Alphonsus</i> XI.	224		48. 57. 198
<i>Angeli</i> (Stephanus)	45	<i>Bartholinus</i> (Erasmus)	57
<i>Ango</i> (Pierre)	197	<i>Bartsch</i> (Jacob)	96
<i>Anonymi</i> 76. 83. 152. 174.		<i>Bayerus</i> (Johannes)	230
	203. 283	<i>Bayer</i> (Johann Hartmann)	
<i>Apollonius Pergæus</i> 40. 45.			21. 31
	51. 87. 188. 260.	<i>de Beaune</i> (Florimundus)	
	278		57
<i>Apollodorus</i> (Gallus)	283	<i>Behr</i> (Johann Heinrich)	
<i>Archimedes</i>	39. 45. 158.		153
	178. 277. 287	<i>Belidor</i>	177
<i>Architecturæ moderne</i>	121	<i>Berger</i> C. P.	174
<i>Aristæus</i>	40. 87	<i>Bernoulli</i> (Jacob)	66. 70.
<i>Aristarchus</i> Samius	287		233
<i>Arnaud</i>	39	<i>Bernoulli</i> Dan.	184
<i>Athenæus</i>	283	-- (Johannes)	49. 66. 70.
<i>Anzout</i>	284		78. 84. 71. 248. 288
		-- (Nicolaus)	66
B.		<i>Besson</i> (Jacobus)	172
B	<i>Bachet</i> (Caspar)	<i>Beveregius</i> (Guilielmus)	
	52		242
	<i>Bacon</i> (Rogerius)	<i>Bierum</i> (Henricus)	257
	191	<i>Bilfin</i>	

II. Register über die Autores.

<i>Bilfinger</i>	143	C.
<i>de Billy</i> (Jacobus)	51	
<i>Bion</i> (Nicolaus)	231. 258	<i>Calvisius</i> (Sethus) 238.
<i>Biron</i>	283	241. 243
<i>Bläsing</i> (David)	236	<i>Candalla</i> (Franciscus Fluf-
<i>Blanchini</i> (Franciscus)	233	fates) 37
	243	<i>Cangler</i> (Bernhard) 32
<i>Bleau</i> (Guilielmus)	231	<i>Capelli</i> (Angel.) 236
<i>Blond</i>	117	<i>Cardanus</i> (Hieronymus)
<i>Blondell</i> (Franciscus)	118	53
131. 136. 149. 243		<i>Carré</i> 72. 75
<i>Böckler</i> (Georg Andreas)		<i>des Cartes</i> (Renatus) 49. 56
31. 113. 126. 172. 186		60. 193
<i>Boëthius</i> (Anitius Manlius		<i>Casatus</i> (Paulus) 159
Severinus)	2. 285	<i>Cassini</i> (Dominicus) 209.
<i>Bombelli</i> (Raphaël)	53	213. 275
<i>Bombelle</i>	149	-- <i>der Sohn</i> 213. 228
<i>Bonanni</i> (Philippus)	206	<i>Caswel</i> (Johannes) 287
<i>Bonjour</i> (Guilielmus)	243	<i>Cataneo</i> (Pietro) 117
<i>von Borgsdorff</i> (Ernst		<i>Cavaleries</i> (Bonaventura)
Friedrich)	141	45. 69. 100
<i>Borellus</i> , Johannes Alphon-		<i>de Caux</i> (Salomon) 186
fus)	40. 162	<i>Cestus</i> (Jul. African) 283
<i>Bosse</i> (Abraham)	201	<i>Ceva</i> (Joannes) 184
<i>Boyle</i> (Robert)	180	-- (Thomas) 286
<i>Branca</i>	117	<i>Chamberus</i> (Joannes) 7.
<i>Brand</i> (Augustinus)	131	275
<i>Braun</i> (Ernst)	126	<i>de Chambray</i> (Roland Fre-
<i>Briennius</i> (Manuel)	287	ard) 117
<i>Briggis</i> (Henricus)	22.	<i>de Champtoré</i> (Duraeus)
97. 98		115
<i>Buchner</i> (Johann Sigis-		<i>Cherubim</i> 154
mund)	126	<i>Cheyneus</i> (Georgius) 73.
<i>Bullialdus</i> (Ismaël)	51. 69.	75
212. 219. 226. 234		<i>Christmannus</i> (Jacobus)
<i>Bounaroti</i> (Michael Ange-		245
lo)	115	<i>Clark</i> (Samuel) 197
<i>Byge</i> (Johst)	35. 96. 208.	-- (Johann) 166
		<i>Clavius</i>

II. Register über die Autores.

Clavius (Christophorus)	Dægen (Matth.)	134
14. 33. 37. 243. 250.	Divers Ouvrages de Mathe-	
277	matique &c.	284
Cæborn (Minno Baronde)	Doppelmayer (Gabriel)	
130. 138. 132	209. 221. 255. 258	
Coetsius (Henricus)	Duc de Bourgogne	39
Collin (Johannes)		
84. 287		
Colson (Joh.)		
77		
Combachius (Johannes)		
191		
Conradi (Johannes Mi-		
chaël)		
200		
Copernicus (Nicolaus)		
208.		
215. 222. 225. 233		
Cotes (Rogerus)		
76. 166		
Crabtrius (Guilielmus)		
210		
Craige (Johannes)		
73		
Crouzas		
70		
Cunitia (Maria)		
225		
Cunn (Samuel)		
21. 35		
	E.	
	Emart (Georg Chri-	
	stoph)	209. 213
	Eisenschmidt (Johann Ca-	
	spar)	96
	Ellrich (Daniel)	126
	Erard	149
	Eratoſthenes	87
	Eslerus (Joannes)	215
	Euclides 6. 37. 39. 40. 47.	
	87. 103. 187. 260. 261.	
	263. 264. 267. 276. 277.	
		285

D.

D*afipodius* (Conradus) *Eutocius* (Ascalonita) 287
38. 271

F.

<i>Dechales</i> (Claudius Francisus Milliet)	14. 37. 47	<i>Faber Stabulensis</i> (Jacobus)	4
	126. 147. 164. 250. 263	<i>Sâsch</i> (Joh. Ludol.)	275
<i>Demontiosius</i> (Ludovicus)		<i>Saulhaber</i> (Johann)	56.
	106		156
<i>Desargues</i>	125. 201	<i>Fæsi</i>	232
<i>Desgodetz</i> (Antoine)	119	<i>du Fay</i>	137
<i>Dettonvilleus</i>	41	<i>Fermatius</i>	57. 284
<i>Dieuffart</i> (Carolus Philippus)	117	<i>Ferreus</i> (Scipio)	53
<i>Dillich</i> (Wilhelm)	147	<i>Feuillée</i> (Ludovicus)	249
<i>Diophantus</i> (Alexandrinus)		<i>Finaeus</i> (Orontius)	37
	52. 58. 60. 276. 280	<i>Fischer von Erlachen</i>	
<i>Ditton</i> (H.)	166	(Johann Bernhard)	122

Flam.

II. Register über die Autores.

<i>Flamſtæd</i> (Johann)	209	<i>Gregorius a S. Vincentio</i>	41
213. 222. 226. 229. 230.			45. 49
	287	<i>Gregorius</i> (Jacobus)	73
<i>Fontanelle</i> (Bernh.)	78	-- (David)	37. 73. 75. 187.
<i>Fournier</i> (Georgius)	248		198. 222.
<i>Frenicle</i>	284	<i>Grindel von Naach</i> (Jo:	
<i>Greitag</i> (Adam)	134	hann Frank)	145. 206
<i>Frezier</i>	125	<i>de Grotte</i> (Alexander)	139
<i>Frisius</i> (Gemna)	16	<i>Gruber</i> (Sebastian)	153
		-- (Bernhard)	255
G.		<i>Guarini</i> (Guarinus)	251
		<i>Guisnée</i>	65
<i>Galilæus Galilæi</i> .	35. 160.	<i>Guldinus</i> (Paulus)	47. 57
161. 192. 233. 234		<i>Guilielmini</i> (Dominic.)	124
<i>Gallon</i>	177		184
<i>Gascoïge</i> (William)	213	H.	
<i>Gassendus</i> (Petrus)	209		
<i>Gaupe</i> (Johann)	257	<i>Saas</i> (Johann Mat:	
<i>Gauricus</i> (Lucas)	106. 213	thias)	157
-- (Pompon)	106	<i>Halley</i> (Etmund)	40. 51. 63.
<i>Geißler</i> (Christoph Fried:		87. 209. 212. 213	
rich von)	129	<i>du Hamel</i> Johannes Bapti-	
<i>Gellibrand</i> (Henricus)	98	sta)	233
<i>Germanus</i> (Georg)	277	<i>Hancke</i> (Johannes)	236
<i>Gbethaldus</i> (Marinus)	57.	<i>Harriot</i> (Thomas)	56. 60
58. 87. 178. 260. 280		<i>Harris</i> (Johannes)	274
<i>Girardus</i> (Albertus)	276	<i>Harsdörffer</i> (Philipp)	
<i>Glaſer I. C.</i>	157		290
<i>Goldmann</i> (Nicolaus)	35	<i>Hartmann</i>	152
	120	<i>Hartsøker</i> (Nicolaus)	195
<i>Gooden</i> (Jacobus)	103	<i>Hausen</i> (Chr. Aug.)	43
<i>de Gottignes</i> (Ægidius		<i>Havvney</i> (William)	102
Franciscus)	68	<i>Hayes</i> (Charles)	75
<i>Goulon</i>	155	<i>Hazan</i> (Iſaac)	216
<i>de Graaf</i> (Abraham)	59.	<i>Heidemann</i> (Chriſtoph)	
	265		145
<i>Grandus</i> (Gvido)	43	<i>Henſchius</i> (Gregor.)	12
<i>Graveſand</i> (G. J.)	63. 205. 288	M 4	Beer

II. Register über die Autores.

<u>Beer</u> (Christoph)	144	<i>Hugo de Omerique</i>	68
<u>von Gerberstein</u> (Friedrich)		<i>Hulsius</i> (Levinus)	35
<u>Ernst Graff</u>	51. 132	<i>Hyde</i> (Thomas)	229
<i>Herigonius</i> Petrus	14. 260		
<i>Herlinus</i> (Christophorus)		I.	
	38		
<i>Herlin</i> (Eduwig Andreas)		<i>Ingenieur Francois</i>	150
	142	-- <i>Parfait</i>	152
<i>Herrmann</i> (Jacob)	79. 167	<i>Joannes</i> (Archiepiscopus	
	184	<i>Cantuariensis</i>)	190
<i>Heron</i> (Alexandrinus)	186	<i>Joannes de sacro Bosco</i>	268
	283	<i>Joannes</i> (William)	74. 82.
<i>Hertel</i> (Gottlieb)	200		197
<i>Herwart von Hohenburg</i>		<i>Jordanus</i>	4
(Johann George)	25	<i>Journal literaire</i>	57
<u>Hevel</u> (Johann)	209. 212.	<i>Julien</i> (Chevalier de Saint)	
	227. 229. 230. 233.		128. 121. 151
<i>Hipparchus</i>	208. 229	<i>Julius Africanus</i>	274
<i>de la Hire</i> (Philippus)	31. 42	<i>Jungenickel</i> (Andreas)	
	44. 45. 61. 170. 209. 213.		159
	226. 252. 254	<i>Jurin</i> (Jacobus)	247
der Sohn	205		
<i>Histoire de l'Academie Ro-</i>		K.	
<i>gale des Sciences</i>	83. 213		
	284	<i>Keil</i> (Joannes)	37. 84.
<i>Hodysen</i> (James)	248		85. 163. 165. 166.
<i>Hoocke</i> Robert)	206. 212		223
<i>Horrebovius</i> (Petrus)	233	<i>Kepler</i> (Johann)	45. 47.
<i>Horocius</i> (Jeremias)	209.		56. 86. 189. 191. 218.
	210. 219. 225. 233		219. 221. 222. 225. 229.
<i>Hortensius</i> (Martinus)	92		233
<i>de l'Hospital</i> (Marquis)	65	<i>Kersey</i> (Joann)	58
	70. 73. 74. 165	<i>Kinckhuysen</i> (Gerhardt)	59
<i>Hofius</i>	282	<i>Bucher</i> (Athanasius)	199
<i>Hugenius</i> (Christianus)	41.		251. 261
	45. 5. 66. 161. 163. 165	<i>Birch</i> (Gottsfried)	209.
	173. 196. 197. 233. 284		213
<i>Huddenius</i> (Johannes)	57		

II. Register über die Autores.

Kolhans (Johann Chri- stoph) 200	Limbergh (Petrus) 175
Kresa (Jacobus) 68. 105	Longomontanus (Christia- nus S.) 216. 225
L.	Lorenzini (Laurentius) 40
	de Louville 209
	Lovvthorp (Johannes) 83
de Laet 106	
& de Lagny 64	Lucas de Burgo S. Sepulchri
Lalovera (Antonius) 51	8
Lambion (Lambert) 132.	Ludolph (Hioh) 26
156	Ludolphus a Ceulen 51
Lamy (Bernhard) 39. 60.	Ludovicus Ferrariensis 53
159. 182. 204	
Landsberg (J. H.) 143.	M.
216	
Langhansen (Christoph) 236	Mac. Laurin. (Colinus) 44
Langley (Batty) 125	Mallet (Allain Manesson)
de Lanis (Franciscus Ter- tius) 181	30. 35. 152.
Lansbergius (Philippus) 91	Manfredius (Gabriel) 74
93. 219. 225. 279.	-- (Eustachius) 209. 243
Lauterbach (Johann Bal- thasar) 119	Manuel Briennius 278
Leuvenhæck (Antonius van) 206	Maphæus (Thomas Pius) 243
Leibnitz (Gottfried Wil- helm Baron von) 19.	Maraldi 213
48. 49. 60. 67. 68. 72. 73.	de Marchettis (Angelus) 39
75. 78. 79. 84. 85. 86.	Mariotte 164. 179. 184.
161. 167. 218. 287	10. 284
Leotaudus (Vincentius) 14	Marolois 149
Leupold (Jacob) 176. 186	Martini Maur. 28
Leutmann (Johann Geor- ge) 174. 200	Martino Nicol. 44
Leyborn (William) 264	Maurolycus (Franciscus) 11. 284
Liebknecht (Johann Geor- ge) 247	Martius (George Conrad) 153
	de Medrano (Don Seba- stian Fernandez) 148
	Megerlinus (Petrus) 234
	M s Mei-

II. Register über die Autores.

<i>Meibomius</i> (Marcus)	278	<i>Muhammedes Tixinus</i>	229
<i>Meining</i> (Johann Christoph)	179	<i>Munsterus</i> (Sebastianus)	245. 254
<i>de Meisner</i> (Georg.)	36. 143	<i>Mydorgius</i> (Claudius)	42. 49
<i>Melder</i> (Gerhard)	134. 135	N.	
<i>Memoires de l' Academie Roy. &c.</i>	213. 284	<i>Neperus</i> (Joannes)	23. 94. 95
<i>Menelaus</i>	188	<i>Neubauer</i> (Christian)	140
<i>Mercator</i> (Nicolaus)	73. 223. 225. 265	<i>Newton</i> (Joannes)	99. 231. 226
<i>Mersennus</i>	284	-- Isaac	63. 68. 73. 76. 80. 84. 86. 166. 182. 197. 218. 222. 287
<i>Metius</i> (Adrianus)	17	<i>Nicron</i> (Johannes Franciscus)	204
<i>Meyer</i> (Cornelius)	124	<i>Nicomachus</i>	2
<i>Michael</i> (George)	256	<i>Nieuventijt</i> (Bernhard)	79
<i>Michaël Angelo Bounaroti</i>	115	<i>Noël</i> (Franciscus)	249
<i>Mieth</i> (Michael)	127. 128	<i>Norwood</i> (Richard)	102
<i>Milnes</i> (Jacobus)	43	O.	
<i>Miscellanea Berolinensia</i>	83	<i>Oldenburg</i> (Heinrich)	84
<i>Mæstlinus</i> (Michaël)	208. 223. 277	<i>Olhoff</i> (Johann Erich)	212
<i>Moire</i> (Abraham de)	66. 73. 77	<i>de Omerique</i> (Hugo)	68
<i>Molerus</i> (Elias)	236	<i>Opera veterum Mathem.</i>	283
<i>Mollneaux</i> (William)	196	<i>Opus Palatinum</i>	90
<i>Monmort Remond de</i>	66	<i>Ori Rabbi</i>	245
<i>Moore</i> (Jonas)	262	<i>Oswald</i> (Erasmus)	214. 223
<i>Morgues</i>	39	<i>Otto</i> (Valentius)	90
<i>Morinus</i> (Joh. Baptista)	225	<i>Oughtred</i> (Guilielmus)	55. 101. 159. 174. 178. 230
<i>Morland</i> (Samuel)	18	<i>Ozanans</i>	
<i>Motte</i> (Benjamin)	83		
<i>Müller</i> (Johann Ulrich)	256		

II. Register über die Autores.

Ozanam 14. 33. 35. 37. 43.
60. 104. 149. 250. 266.
273. 286. 290

P.

P*aciolus* (Lucas) 8. 52
de *Pagan* (Comte) 51.
135. 149. 152. 221. 226
Palladius (Andreas) 112.
113

Palma (Johannes Baptista)
51

Pappus (Alexandrinus) 47
50. 84. 158. 188. 287

Pardies (Ignatius Gaston)
39. 159. 164. 259

Parent 171

Pascal 19. 41. 66

Peccamus (Johannes) 190

Peletarius (Jacobus) 37

Pena (Joannes) 187. 192

Penter 36

Perrault 109. 108. 110.
173

Petavius (Dionysius) 240.
242

Philander (Guilielmus) 106

Philibert de l'Orme 108. 114

Philo 283

Philosophical Transactions
84. 213

Picard 184. 252. 284

Pitiscus (Bartholomæus) 90

Poivre 43

Polenus (Joannes) 20. 185.
209. 233

Polynier (Petrus) 39

Porphyrius 287

Porta (Johannes Baptista)
186. 192

Portius (Lucas Antonius)
186

Post (Pietre) 122

Pozzo (Andreas) 202

Prestet (Jean) 60

Proclus 186

Pfellus 3

Ptolemæus (Claudius) 88.
208. 213. 224. 229. 287

Parbachius (Georgius) 93.
208. 214. 223. 224

Q.

Q*uartaironius* (Domini-
cus) 243

R.

R*abuel* (Claud.) 57

de *Ramellis* (Augu-
stinus) 172

Ramus (Petrus) 39

Raphson (Josephus) 64. 86

de *Rees* 27

Regiomontanns (Joannes)
21. 89. 208. 213. 223. 224

Reinholdus (Erasmus) 34.
224

Rembold (Johann Chri-
stoph) 203

Remont de Monmort 66

Reyher (Samuel) 24

Reyneau (Charles) 81
de

II. Register über die Autores.

de Rbeita (Antonius Maria Schyrlæus)	235	S.
Rheticus (Georgius Joachimus)	90. 233	
Rhodius (Ambrosius)	190	de Sacro Bosco (Joh.) 727
Ricciolus (Joannes Baptista)	209. 211. 222. 226. 229. 233. 236. 237. 241. 246	Salmasius (Claudius) 106
Riccus (Michael Angelus)	73	Sardi (Pietro) 149
Richardus (Claudius)	40. 41	Scaliger (Josephus) 238. 239. 277
Riese (Adam)	53	Scamozzi (Vincentius) 116
Rimpler (George)	142. 143	Scheimerus (Christophorus) 197. 233
Risnerus (Fridericus)	188. 190	Scheiter (Bernhard) 140
Rivius (Gualterus Henricus)	109	Scheubel (Johann) 38
Robervall	57. 284	Schickard (Wilhelm) 208. 230
Rolle	64	Scheffelt (Michael) 35
Römer (Olaus)	209. 213. 284	Schmidt (Johann Andreas) 39
Robault (Jacob)	159. 182	Schoner (Joannes) 39. 89. 232
Romanus (Adrianus)	278	a Schooten (Franciscus) 45. 57. 66. 278
Ronayne	82	Schottus (Caspar) 14. 186. 261. 289
Rondelli (Geminianus)	100	Schrecken. Suchs (Erasmus Dēwald) 223
Rosetti (Donatus)	139	Schübler (Johann Jacob) 120. 257
de Rossi (Dominicus)	122	Schwenter (Daniel) 31. 290
Rost (Johann Leonhardt)	209. 236	Scippio Ferreus 53
Rethmannus (Christophorus)	208	Serenus 40
Rudoff (Christoph)	53	Sereri (Joseph) 275
Russe Baron von Ruffenstein (Heinrich)	135	Serlius (Sebastianus) 112
Ruggieri (Serdinand)	122	Scharpe (H.) 51
		Simienowitz (Casimirus) 126

Sloane

II. Register über die Autores.

<i>Sloane</i> (Hans)	84	<i>Traber</i> (Zacharias)	199
<i>Slusius</i> (Renatus)	57. 63	<i>Transactiões Anglicanæ</i>	
<i>Smith</i> (Robertus)	76		183. 113
<i>Snellius</i> (Willebrordus)	51.	<i>Trapezuntius</i> (Georgius)	
	92. 208. 260		213
<i>Speckle</i> (Daniel)	146	<i>Trew</i> (Abdias)	32
<i>Stahl</i> (George Conrad)		<i>Tycho de Brahe</i>	208. 212.
	153		215. 225. 229. 237
<i>Stengel</i> (Peterson)	256		
<i>Stevinus</i> (Simon)	21. 159. 276	V.	
<i>Stiefel</i> (Michael)	9. 53. 56	<i>Valk</i> (Gerard)	231. 232
<i>Stirling</i> (Jacobus)	73	<i>Varenius</i> (Bernhard)	
<i>Stone</i> (E)	35. 70		247
<i>de Strada</i> (Jacobus)	112. 172	<i>Vauignon</i>	70. 159. 161. 167.
-- (Octavius)	172		184
<i>Strauchius</i> (Ægidius)	230.	<i>Vauban</i>	137. 149. 150. 152
	242		155
<i>Streete</i> (Thomas)	211. 217.	<i>Ubaldu</i> (Guido)	159
	226	<i>Veteranus</i> (Simon Lauren-	
<i>Sturm</i> (Johann Christoph)		tius)	281
	39. 68. 254	<i>Vlacq</i> (Adrianus)	97. 104
-- (Leonhard Christoph)		<i>Ulugh Beigh</i>	220
	34. 115. 120. 137. 142.	<i>Vieta</i> (Franciscus)	49. 54.
	154. 247		55. 60. 87. 243. 260. 277.
<i>Surirey de Saint Remy</i>	129		278
<i>Suttinger</i> (Daniel)	142	<i>Vignola</i> (Jacob Barozzio)	
<i>Switzer</i> (Stephen)	186		115
T.		<i>Vilalpandus</i>	120
T <i>acquet</i> (Andreas)	13. 37.	<i>de Ville</i> (Antonius)	149
	39. 198. 217. 281	<i>Villemont</i> (Philippus)	218
<i>Tartaglia</i> (Nicolaus)	10. 37	<i>Vingboon</i> (Philipp)	122
<i>Taylor</i> (Brook)	78	<i>Vitalis</i> (Hieronymus)	272
-- (Jacob)	267	<i>Vitellio</i>	188. 284
<i>Teuber</i> (Gottfried)	19	<i>Vitruvius Pollio</i> (Marcus)	
<i>Teyler</i> (Johannes)	157		106. 107. 109. 110. 114
<i>Theodosius</i>	36. 188. 263	<i>Viviani</i> (Vincentius)	40. 51.
<i>Theon</i>	188		87. 286.
<i>Torricellius</i> (Evangelista)		<i>Vogel</i> (Johann)	123
	45. 160. 284	<i>Voigtel</i>	

II. Register über die Autores.

Voigtel (Nicolaus)	34	Wilhelm (Johann)	124
Ursinus (Benjamin)	95	Wilhelm (Landgraf zu Hesse)	208
Uttenhöfer (Calpar)	253	Willichus (Jacobus)	3
W.		Wilson (Henricus)	33
Wagner ()	209	-- (Johannes)	101
Waller (Richard)	84	Wing (Vincentius)	220. 226
Wallisius (Joannes)	15. 64.	de Witt (Johannes)	57
70. 80. 163. 182. 287		Wolff (Christian)	23. 64.
Walther (Bernhard)	208.	69. 104. 183. 268. 269.	275
224		Wotton (Henricus)	106
Wardus (Sethus)	104. 29.	Wreen (Christophorus)	163
221. 224		Wurstisius (Christianus)	123
Warner (Waltherus)	56	Wurzelbauer (Johann)	209. 213
Weidler (Johann Friedrich)	34. 270	Philipp)	X.
Weigel (Erhard)	243. 246	Xylander (Guilielmus)	3. 52
Wells (Eduardus)	15. 64	Z.	
Welper (Eberhard)	254.	Zahn (Johann)	199
255		Zeising	172
Werthmüller (Johann Jacob)	141	Zimmermann (Johann)	234. 236
Werner (Johann)	208. 216	Jacob)	36
Wessenaer (Jacob)	59	Zollmann (J. W.)	36
Whiston (Guilielmus)	37.	Zumbach von Kösfeld	
63. 64. 166. 221. 226		(Lotharius)	231. 232. 244
Wiedeburg (Johann Bernhard)	236. 270		



K S I E G O Z
M A R C I N A Z A M O Y S K I E G O

40614073 KZ KZ

