même édition que celle de la
Bibliothèque

ÉLÉMENS
D'ALGEBRE;

Par M. CLAIRAUT,

Des Académies des Sciences de France, d'Angleterre, de Pruſſe, de Ruſſie, de Bologne & d'Upſal.

QUATRIÉME ÉDITION.

A PARIS,

Chez
- La Veuve SAVOYE, rue S. Jacques.
- SAILLANT, rue S. Jean-de-Beauvais.
- DESPILLY, rue S. Jacques.
- DESAINT, rue du Foin.
- DURAND, rue S. Jacques.
- PANCKOUCKE, rue de la Comédie Françoiſe,
- DELALAIN, rue S. Jacques.

M. DCC. LXVIII.

Avec Approbation & Privilége du Roi.

PRÉFACE.

JE me ſuis propoſé de ſuivre dans cet Ouvrage, la même méthode que dans mes Élémens de Géométrie: j'ai tâché d'y donner les régles de l'Algebre dans un ordre que les Inventeurs euſſent pû ſuivre. Nulle vérité n'y eſt préſentée ſous la forme de Théorêmes. Toutes, au contraire, ſemblent être découvertes en s'exerçant ſur les Problêmes que le beſoin ou la curioſité ont fait entreprendre de réſoudre.

Des Problêmes utiles au commerce, comme ceux où il eſt queſtion de partager des ſommes entre différentes perſonnes à raiſon de leurs miſes ou de quelques conventions faites entr'elles; des régles d'alliage, &c. sont les Problêmes que je suppose avoir occupé les premiers Algébristes.

Je commence par donner la solution d'un des plus simples de ces Problêmes, telle qu'on la peut trouver, sans avoir aucune teinture de l'Algebre. Il est aisé de reconnoître dans cette solution, que si la mémoire suffit à retenir tous les raisonnemens par lesquels il faut passer pour y arriver, c'est que la suite de ces raisonnemens n'est pas bien longue; & l'on voit en même-temps que, lorsqu'on s'éleve à des Problêmes qui en demandent une plus grande, il faut chercher à les écrire d'une maniere fort abrégée, il faut imaginer quelques signes, à l'aide desquels on puisse exprimer l'état où la difficulté est réduite à chaque pas qu'on fait pour la résoudre. Cette maniere d'écrire les questions, est l'Algebre que je fais, pour ainsi dire, inventer au Lecteur.

Pour aller toujours du plus simple au plus composé, je ne propose d'abord que des queſtions numériques ; parce que ce ſont celles qui fixent le plus l'eſprit des Commençans. Après en avoir réſolu pluſieurs qui ne different les unes des autres que par les nombres donnés dans l'enoncé, on s'apperçoit aiſément qu'il y a toujours une partie de l'opération qui ſe trouve commune dans chaque réſolution, & qu'il ſeroit à ſouhaiter de ne faire qu'une ſeule fois : je ſaiſis cette occaſion d'expliquer la maniere de réſoudre généralement les Problêmes, en employant, au lieu des nombres donnés par les conditions, des lettres qui expriment toutes ſortes de grandeurs : & j'enſeigne enſuite à tirer des ſolutions générales les ſolutions particulieres, au moyen de la ſubſtitution des nombres à la place des lettres.

Parmi les différens Problêmes où j'employe des lettres au lieu de nombres, il s'en trouve d'aſſez compliqués pour ne pouvoir pas être réſolus ſans employer les régles d'addition, ſouſtraction multiplication & diviſion : je montre alors comment on doit faire ces opérations. Je n'ai pas cru devoir les donner plutôt, parce que les Commençans les ſuivent avec peine & avec dégoût, lorſqu'on les leur enſeigne dans un temps où ils n'ont aucune idée des quantités ſur leſquelles ils opérent.

La multiplication eſt de toutes ces opérations celle qui arrête ordinairement le plus les Commençans, & dont l'explication embarraſſe le plus les maîtres : ce principe qu'elle renferme, que deux quantités négatives donnent pour leur produit une quantité poſitive, eſt preſque toujours l'écueil des uns & des autres.

Pour éviter d'y tomber, je n'établis ce principe qu'après avoir fait faire des opérations dans leſquelles on a dû en remarquer la néceſſité. Je commence par enſeigner à multiplier une quantité compoſée de pluſieurs termes poſitifs & négatifs par un ſeul terme que je ſuppoſe toujours poſitif, parce que l'on ne s'accoutume pas ordinairement à conſidérer une quantité négative, comme exiſtant ſeule. Cette multiplication étant expliquée, je passe à celle où le multiplicateur est aussi-bien que le multiplicande composé de plusieurs termes positifs & négatifs, & je fais voir facilement que cette opération n'est autre chose que la premiere répétée autant de fois qu'il y a de termes dans le multiplicateur, & que, suivant que les termes de ce multiplicateur sont positifs ou négatifs, les produits qu'ils donnent, doivent être ajoutés ou retranchés.

Par ce moyen, je familiarise les Commençans avec la multiplication, sans que j'aie seulement besoin d'énoncer ces principes ordinaires, que *moins* par *plus* donne *moins*, *moins* par *moins* donne *plus*, &c. qui, en présentant à l'oreille une contradiction dans les mots, laissent presque toujours croire qu'il y en a dans les choses.

On pourroit croire d'abord que je n'ai fait qu'éluder la difficulté, & je n'aurois fait réellement que l'éluder, si je ne parlois pas de la multiplication des quantités purement négatives, par d'autres quantités auſſi entiérement négatives, opération dans laquelle on ne ſçauroit éviter la contradiction apparente dont je viens de parler. Mais je traite à fond de cette multiplication, après en avoir montré la néceſſité au Lecteur, en le conduiſant à un Problême où l'on eſt obligé de conſidérer des quantités négatives indépendamment d'aucunes quantités poſitives dont elles ſoient retranchées.

Lorſque je ſuis parvenu, dans ce Problême, au point où il s'agit de multiplier ou de diviſer des quantités négatives les unes par les autres, je prends le parti qu'ont ſans doute pris les premiers Analyſtes qui ont eu de ces opérations à faire, & qui ont voulu ſuivre une route entiérement ſûre, je cherche une ſolution au Problême par laquelle je puiſſe éviter toute eſpéce de multiplication ou de diviſion de quantités négatives, par ce moyen j'arrive au réſultat, ſans employer d'autres raiſonnemens, que ceux ſur leſquels on ne peut former aucun doute; & je vois ce que doivent être ces produits ou quotiens des quantités négatives que m'avoit donnés la premiere ſolution. Il n'eſt pas difficile enſuite d'en tirer ces principes ſi fameux que *moins* par *moins* donne *plus*, &c.

Je délivre ainſi ces principes de tout ce qu'ils ont de choquant, & le Lecteur parvient en même-temps à connoître la nature des ſolutions négatives des Problêmes ; il apprend cette vérité ſi utile, que lorſque dans une ſolution on arrive à trouver l'inconnue négative, elle doit être priſe dans un ſens opposé à celui ſuivant lequel on l'avoit employée, en exprimant les conditions du Problême.

La premiere Partie de cet Ouvrage traite uniquement des équations du premier degré, ſoit à une, ſoit à pluſieurs inconnues, & de toutes les opérations que demandent ces équations, tant pour arriver à leur réſolution, que pour la rendre auſſi ſimple qu'elle puiſſe être. Telle eſt, par exemple, la régle qu'il faut ſuivre pour trouver le plus grand commun diviſeur, laquelle naît de la néceſſité de réduire une fraction à ſa plus ſimple expreſſion. Cette régle eſt expliquée d'une maniere nouvelle, & j'y ai ajouté pluſieurs réflexions qui la rendent applicable à des cas où la maniere ordinaire de la traiter, pourroit rebuter pour la longueur des calculs, & ne pas toujours donner la quantité qu'on cherche.

Dans la ſeconde Partie, je parle des équations du ſecond degré ; un Problême où il s'agit d'intérêts d'intérêts m'amene à une de ces équations ; je l'ai choiſie de nature à donner pour ſes deux ſolutions deux nombres poſitifs, afin de mieux faire voir comment deux nombres différens réſolvent le même Problême. J'en ai uſé ainſi, dans la crainte que les Commençans, qui ne regardent pas volontiers les racines négatives comme de véritables ſolutions, ne cruſſent que le Problême n'avoit réellement qu'une ſolution.

Cependant, afin de les accoutumer aux racines négatives, je donne enſuite un Problême dans lequel il y a une de ces racines, & telle cependant qu'aucun Commençant ne peut s'empêcher de voir qu'elle satisfait autant au Problême que la positive.

La résolution des équations que demandent ces Problêmes & ceux de même espéce qu'on peut se proposer, engagent les Lecteurs à apprendre plusieurs opérations essentielles de l'Algebre, telles que les extractions des racines quarrées ; la réduction des radicaux, leurs additions, soustractions, &c. opérations qu'on donne d'ordinaire au commencement des Elémens d'Algebre, mais que mon plan exigeoit de placer en ce lieu.

De ces opérations, je passe à un Problême dans lequel on doit employer plusieurs équations du second degré qui contiennent chacune plusieurs inconnues, & je donne les moyens de réduire toutes ces équations à une seule qui ne renferme qu'une inconnue. Je fais voir en même-temps que cette méthode n'est pas seulement propre aux équations où les inconnues ne montent qu'au second degré, mais qu'elle s'étend à tous les degrés.

La troiſiéme Partie a pour objet les équations de tous les degrés priſes en général. Je traite du nombre de leurs racines, des propriétés que les coëfficiens du ſecond, du troiſiéme, &c. terme, ont d'être, ou la ſomme des racines, ou celle des produits de ces racines, &c. Je tire de ces propriétés la fameuſe régle de Deſcartes, pour trouver toutes les racines commenſurables qui ſont dans une équation; & comme cette méthode engage dans des calculs exceſſifs à cauſe du grand nombre de diviſions qu'il faut tenter, je donne la méthode de Newton, qui s'étend non-ſeulement aux racines commenſurables ou diviſeurs d'une dimenſion, mais aux diviſeurs de tant de dimenſions que l'on veut. Je ne me contente pas de donner la démonſtration de cette méthode que Newton avoit ſupprimée, mais je fais voir par quelle route il a pu la découvrir. C'eſt un avantage que je ne crois pas qu'on puiſſe trouver dans la démonſtration que M. s'Graveſande en a donnée (dans ſon *Specimen commentarii in* *arihtmeticam universalem*, inséré à la fin de ses Elémens d'Algebre) & qui est la seule que je sçache avoir été donnée, malgré le grand nombre de Traités d'Algebre qui ont paru depuis Newton. J'ai appris cependant que le R. P. Jacquier, connu pour avoir commenté les recherches les plus élevées de Newton, avoit pris la peine de traiter celle-ci, mais ce qu'il a fait sur cette matiere, n'est pas venu à ma connoissance.

Au reste, dans cette Partie & dans celles qui suivent, je ne m'arrête pas, comme dans les deux précédentes, à montrer les Problêmes qui pourroient avoir conduit aux équations que j'examine, parce que je ne crois plus avoir besoin de ce motif pour exciter la curiosité des Lecteurs. Ils ont dû suffisamment voir par les premiers Problêmes, de quelle importance il étoit de sçavoir résoudre toutes sortes d'équations.

Je traite dans la quatriéme Partie des équations de tous les degrés, lorsqu'elles n'ont que deux termes, ou l'orſqu'en ayant trois, elles ſe réduiſent à la méthode des équations du ſecond degré par une ſimple transformation. J'enſeigne, par ce moyen, aux Commençans, un grand nombre d'opérations ſur les quantités radicales de toute eſpéce, & je leur donne une connoiſſance entiere, tant de l'élévation des puiſſances, que de l'extraction des racines.

Une régle qui eſt abſolument néceſſaire pour la réſolution complette de ces équations, & qui a toujours été omiſe dans tous les Ouvrages Elémentaires, (celui de M. s'Graveſande excepté) c'eſt l'extraction des racines des quantités en partie commenſurables, & en partie incommenſurables: Newton, à qui on doit cette régle, l'ayant donnée à ſon ordinaire ſans démonſtration, je l'ai traitée ici comme un Problême; par ce moyen la découverte & la démonſtration marchent toujours de concert.

La méthode de Newton s'étend aux quantités numériques quel que ſoit l'expoſant de la racine, mais elle ne s'applique pas aux quantités littérales, lorsque cet exposant passe le second degré; je supplée ce qui manque à cette méthode, en donnant le procédé qu'il faut suivre pour les quantités littérales. De plus, je fais voir que la méthode de Newton, pour les quantités numériques, peut induire en erreur dans quelques occasions; c'est lorsque la racine d'une quantité contient des fractions, & que cette quantité elle-même n'en renferme pas. Je montre ce qu'il faut faire alors pour remédier à cet inconvénient.

M. s'Gravesande qui a commenté l'article de l'Arithmétique universelle de Newton, où se trouve cette méthode, n'a point remarqué les cas qui peuvent y échapper, & il n'a point donné la maniere de l'appliquer aux quantités littérales de tous les dégrés.

Toutes ces opérations, lorsqu'on veut les appliquer à une puissance quelconque, supposant qu'on connoisse la formule du binome, je saisis l'occasion qu'elles me fournissent d'amener l'invention de cette fameuse formule. Je la démontre d'une maniere nouvelle, & je fais voir les différens usages qu'elle a fournis, tels que le moyen de trouver par approximation toutes sortes de quantités composées à volonté de radicaux, de fractions, &c. ce qui peut préparer les Commençans à l'analyse de l'infini.

La cinquiéme Partie traite des équations du troisiéme & du quatriéme degré qui ont tous leurs termes, c'est-à-dire, toute la complication qu'elles peuvent avoir. Je donne d'abord la solution générale des équations du troisiéme degré, & je fais voir ensuite les équations particulieres, où cette solution n'apprend point la valeur de l'inconnue, ce qui forme le cas qu'on appelle irréductible. Dans ces équations, au défaut des racines exactes, j'enseigne à en trouver par approximation; je donne, pour y parvenir, une méthode nouvelle beaucoup plus simple que celles qui ont paru jusqu'à présent. Par cette méthode, dès la premiere opération, j'ai la valeur de la racine

racine cherchée à un millieme près, à la ſeconde à un millionieme, & ainſi de ſuite.

Je paſſe de là aux équations du quatrieme degré, &, après avoir donné leur réſolution générale, je fais voir que cette réſolution, ainſi que celle des équations du ſecond degré, a cet avantage ſur la réſolution des équations du troiſieme, qu'une ſeule & même formule peut, à l'aide des ſignes *plus* & *moins*, exprimer toutes les racines de l'équation. Je démontre auſſi, ce que les Auteurs Elémentaires n'ont fait que ſuppoſer, que les quatre racines d'une équation du quatrieme degré, ſont toujours ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, ou deux réelles & deux imaginaires; c'eſt-à-dire, que je prouve que les racines imaginaires des équations du quatrieme degré, peuvent, ainſi que celles du ſecond, être regardées comme compoſées d'une partie réelle, & d'une partie qui eſt la racine quarrée d'une quantité négative.

La réſolution des équations du quatrieme degré, étant fondée ſur celle des équations du troiſieme, elle a de même que ces équations, cet inconvénient, que dans un cas on ne ſçauroit avoir les racines que par approximation. Je donne une maniere bien ſimple de trouver cette approximation, en employant celle que j'avois donnée précédemment pour les équations du troiſieme degré.

Quant aux équations qui paſſent le quatrieme degré, je ne donne rien pour leur réſolution en général, parce que juſqu'à préſent on n'a pû y parvenir, quelques efforts qu'ayent fait les Analyſtes. L'on eſt réduit, excepté quelques cas particuliers que j'ai traités, pour la plûpart, dans la troiſieme & quatrieme Partie, à de ſimples approximations qui ſont beaucoup plus faciles, lorſqu'on eſt aidé de la Géométrie : c'eſt pourquoi je remets à traiter de ces équations, au tems où j'enſeignerai la théorie des lignes courbes.

On devoit s'attendre, après ce que j'avois dit en annonçant mes Elémens d'Algebre, à y trouver des applications

APPROBATION.

J'AI LU, par ordre de Monseigneur le Chancelier, les *Eléments d'Algebre & de Géométrie, par M. Clairaut*, & je crois que l'on peut en permettre l'Impression: A Paris le 12 Novembre 1768.

Signé, l'Abbé DE LA CHAPELLE.

PRIVILÉGE DU ROI.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE: à nos Amés & Féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maître des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillis, Sénéchaux, leurs Lieutenants Civils, & autres, nos Justiciers qu'il appartiendra: SALUT, notre amé *Jean-Baptiste* DESPILLY, *Libraire*, Nous a fait exposer, qu'il desireroit faire imprimer & donner au public: *les Eléments d'Algébre & de Géométrie, par M. Clairaut*, s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilége pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer ledit Ouvrage autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le temps de six années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes. FAISONS défenses à tous Imprimeurs, Libraires, & autres personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance:

comme aussi d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire ledit ouvrage, ni d'en faire aucun extrait sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts, A LA CHARGE que ces Présentes seront enrégistrées tout au long sur le registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression dudit ouvrage sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en beau papier & beaux caracteres, conformément aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du dix Avril mil sept cent vingt-cinq, à peine de déchéance du présent Privilége; qu'avant de l'exposer en vente, le manuscrit qui aura servi de copie à l'impression dudit ouvrage, sera remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier Garde des Sceaux de France, le sieur DE MAUPEOU; qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle dudit sieur DE MAUPEOU: le tout à peine de nullité des Présentes; DU CONTENU desquelles vous MANDONS & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayans causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. VOULONS que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin dudit ouvrage, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers, Secrétaires, foi soit ajoûtée comme à l'original. COM-

MANDONS au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis, & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte-Normande & Lettres à ce contraires; Car tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris, le quatorziéme jour du mois de Décembre l'an de grace mil sept cent soixante-huit, & de notre Régne le cinquante-quatriéme. Par le Roi en son Conseil.

Signé, LE BEGUE.

Régistré sur le Registre XVII de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, le présent Privilége & ensemble la Cession, N° 195. Fol. 591, conformément aux Réglemens de 1723. A Paris, ce 20 Décembre 1768.

Signé, BRIASSON, *Syndic.*

Je soussigné reconnois que Messieurs les Interressés au présent Privilége, sont Durand neveu, pour un quart; Veuve Savoye; Delalain; Desaint; Pankouke; Saillant & moi, chacun pour un huitiéme, renonçant à toute autre propriété du présent Privilége: A Paris ce 20 Décembre 1768.

Signé, DESPILLY.

de cette Science à la Géométrie, j'ai crû cependant devoir les réserver pour un autre Ouvrage. Il m'a paru qu'en donnant un Traité entier de pure Algebre, c'étoit offrir aux Commençans les moyens de s'y fortifier davantage, & qu'ils gagneroient à ne l'appliquer à la Géométrie, que lorsque les opérations Analytiques ne leur coûteroient plus. J'espere que les principes qu'ils trouveront dans cet Ouvrage, les mettront en état de surmonter les plus grandes difficultés qu'ils rencontreront dans la haute Géométrie.

Au reste, je ne suppose pour l'intelligence de ce Traité, que les opérations principales de l'Arithmétique, parmi lesquelles je compte la regle de trois; ceux qui auront lû mes Elémens de Géométrie, posséderont la théorie des proportions, autant qu'il est nécessaire pour entendre tout ce que je dis ici. J'avois d'abord compté donner dans le même livre, tant les Elémens d'Arithmétique, que ceux d'Algebre, & je n'aurois pas manqué alors de traiter des proportions plus à fond que je n'ai fait dans mes Elémens de Géométrie ; mais l'ordre que j'ai ſuivi m'a paru demander de traiter ſéparément ces deux Sciences. En effet, voulant me rapprocher autant qu'il eſt poſſible du chemin des Inventeurs, j'ai dû ſuppoſer l'Arithmétique familiere à ceux qui vouloient pénétrer dans l'Algebre.

ÉLÉMENS

ÉLÉMENS D'ALGÉBRE.

PREMIERE PARTIE.

De la Méthode Algébrique d'exprimer les Problêmes par des Equations, & de la résolution des Equations du premier degré.

PARMI les différens Problêmes dont les premiers Mathématiciens qui ont eu le nom d'Algébristes se sont occupés, je choisis celui-ci, comme un des plus propres à faire voir comment ils sont parvenus à former la Science qu'on nomme Algébre ou Analyse.

I.

Exemple d'un Problême semblable à ceux que les premiers Algébristes ont pû se proposer.

Partager une somme, par exemple, 890 ℔ à trois personnes, en sorte que la premiere ait 180 ℔ de plus que la seconde, & la seconde, 115 ℔ de plus que la troisieme.

Voici d'abord comme j'imagine qu'aura raisonné un homme, qui, sans aucune teinture de l'Algébre, sera parvenu à résoudre ce Problême.

Solution de ce Problême, telle qu'on la pourroit trouver sans Algébre.

Il est évident que si on connoissoit une des trois parts, on connoîtroit aussi-tôt les deux autres. Supposons, par exemple, qu'on connoisse la troisieme qui est la plus petite, il faudra y ajouter 115 ℔, & l'on aura la valeur de la seconde; ensuite pour avoir la premiere, il faudra ajouter 180 ℔ à cette seconde, ce qui revient au même que si on ajoutoit 180 ℔, plus 115 ℔ ou 295 ℔ à la troisieme.

Quelle que soit la troisieme part, nous sçavons donc que cette part, plus elle-même avec 115 ℔, plus encore elle-même avec 295 ℔ doit faire une somme égale à 890 ℔.

De-là, il suit que le triple de la plus petite part, plus 115 ℔, plus 295 ℔ ou en une fois plus 410 ℔, est égal à 890 ℔.

Or si le triple de la part qu'on cherche plus 410 ℔ est égal à 890 ℔, il faut donc que ce triple de la part qu'on cherche soit plus petit que 890 ℔ de 410 ℔. Donc ce triple de la plus petite part est égal à 480 ℔. Donc la plus petite part est égale à 160 ℔.

La seconde sera par conséquent de 275 ℔, & la premiere ou la plus grande de 430 ℔.

C'eſt vraiſemblablement ainſi que les premiers Algébriſtes ont raiſonné quand ils ſe ſont propoſés de pareilles queſtions, ſans doute qu'à meſure qu'ils avançoient vers la ſolution d'une queſtion, ils chargeoient leur mémoire de tous les raiſonnemens qui les avoient conduits au point où ils étoient; & lorſque les queſtions n'étoient pas plus compliquées que la précédente, il n'y avoit pas de quoi ſe rebuter; mais dès que leurs recherches ont offert plus d'idées à retenir, il a fallu qu'ils cherchaſſent une maniere plus courte de s'exprimer, qu'ils euſſent quelques ſignes ſimples, avec leſquels, quelqu'avancés qu'ils fuſſent dans la ſolution d'un Problême, ils puſſent voir d'un coup d'œil ce qu'ils avoient fait & ce qu'il leur reſtoit à faire. Or l'eſpece de langage particulier qu'ils ont imaginé pour cela, c'eſt l'Algébre.

II.

Méthode Algébrique d'exprimer le Problême précédent.

Pour mieux donner les principes de cette Science, nous allons reprendre la même queſtion, nous écrirons en langage ordinaire les raiſonnemens que l'Algébriſte fait pour réſoudre ſon Problême, & en caracteres Algébriques ce qui lui ſuffit d'écrire pour aider ſa mémoire.

La plus petite ou la troiſieme part, quelle qu'elle ſoit, je l'exprime par une ſeule lettre qui ſera, par exemple, ... x

La ſeconde ſera par conſéquent la premiere plus 115, ce que j'écris ainſi. . . . .
$x + 115$, choiſiſſant le ſigne $+$ qu'on prononce *plus* pour déſigner l'Addition des deux quantités entre leſquelles on le place.

Le ſigne $+$ indique l'addition.

Quant à la premiere part ou la plus grande; comme elle ſurpaſſe la ſeconde de 180, elle ſera exprimée par . . . . $x + 115 + 180$.

Ajoutant ces trois parts, on aura . . . . $3x + 115 + 115 + 180$, ou en réduiſant . . . . $3x + 410$.

Le ſigne = marque l'égalité.

Mais cette ſomme des trois parts doit égaler 890 ℔, ce qui s'exprime ainſi $3x + 410 = 890$, employant le caractere = qui ſe prononce *égal* pour exprimer l'égalité des deux quantités entre leſquelles on le place.

Une équation eſt l'égalité de deux quantités.

On réſout une équation, lorſqu'on trouve la valeur de l'inconnue qu'elle renferme.

La queſtion, par ce calcul, eſt donc changée en une autre, où il s'agit de trouver une quantité dont le triple étant ajouté avec 410, faſſe 890. Trouver la réſolution de ſemblables queſtions, c'eſt ce qu'on appelle réſoudre une équation, l'équation dans ce cas-ci eſt $3x + 410 = 890$: on l'appelle ainſi, parce qu'elle indique l'égalité de deux quantités: réſoudre cette équation, c'eſt trouver la valeur de l'inconnue x par cette condition que ſon triple plus 410 faſſe 890.

III

Réſolution de l'équation qui exprime le Problême précédent.

Pour réſoudre cette équation, voici comment l'Algébriſte raiſonne, & comment il écrit ſes raiſonnemens. L'équation à réſoudre . . . . $3x + 410 = 890$, m'apprend qu'il faut ajouter . . . . . 410 à $3x$ pour faire la ſomme de 890; donc $3x$ ſont moindres que 890 de 410, ce que j'écris ainſi . . . . $3x = 890 - 410$.

Le caractere — indique la Souſtraction.

Prenant le caractere — qui ſe prononce *moins* pour faire reſſouvenir que la quantité qu'il précede doit être retranchée de celle qu'il ſuit.

De cette nouvelle équation $3x = 890 - 410$, l'on tire, en retranchant en effet 410 de 890, cette autre équation $3x = 480$.

Mais ſi trois x valent 480, un x vaut donc le tiers de 480 ou 160, ce que j'écris ainſi, $x = \frac{480}{3} = 160$, & la queſtion eſt réſolue, puiſqu'il ſuffit de connoître une des parts pour connoître les autres.

IV.

Autre ſolution du Problême précédent.

Si on avoit voulu réſoudre la queſtion en commençant par chercher la plus grande part, on l'auroit pû de même.

Voici comment on s'y ſeroit pris.

Soit cette premiere part . . . . y

La ſeconde ayant 180 de moins, ſera $y-180$.

Et la troiſieme ayant 115 de moins que la ſeconde ſera . . . . $y - 180 - 115$

Or la ſomme de ces trois quantités eſt . . . . $3y - 180 - 180 - 115$

c'eſt-à-dire . . . . . $3y - 475$.

Mais cette ſomme doit égaler 890.

On a donc l'équation $3y - 475 = 890$ qui apprend que $3y$ ſurpaſſent 890 de 475, puiſqu'il faut retrancher 475 de $3y$ pour avoir 890. Donc $3y = 890 + 475$ ou $3y = 1365$.

Donc y ou la plus grande part $= 455$ comme ci-deſſus.

V.

Si dans le Problême il avoit fallu partager une ſomme plus ou moins grande que celle qu'on a employée, & que les différences euſſent été d'autres nombres que ceux dont on s'eſt ſervi, il eſt évident qu'on l'auroit réſolu de la même maniere. Supposons, par exemple, que le Probléme eût été énoncé ainsi.

Autre exemple du Problême précédent.

Partager 9600 à quatre personnes, en sorte que la premiere ait 300 de plus que la seconde, & la seconde 250 de plus que la troisieme, & la troisieme 200 de plus que la quatrieme.

On auroit raisonné de la maniere suivante :

En nommant la quatrieme part . . . . x.

La troisieme sera $x + 200$.

La seconde . . . $x + 200 + 250$.

La premiere . . . $x + 200 + 250 + 300$

Or, la somme de toutes ces parts doit être égale à 9600. On a donc l'équation

$$4x + 1400 = 9600.$$

Pour résoudre cette équation, je remarque, comme dans la précédente, que si $4x$ ne sont égaux à 9600 que lorsqu'on leur a ajouté 1400, il faut qu'ils soient égaux à ce qui reste de 9600 lorsqu'on en a retranché 1400, ce que l'on écrit ainsi . . . . $4x = 9600 - 1400$,

ou $4x = 8200$.

Mais si quatre x sont égaux à 8200, un x vaut donc le quart de 8200, c'est-à-dire que $x = \frac{8200}{4} = 2050$: la plus petite part x étant connue, les autres se trouvent tout de suite, la troisieme $= 2250$, la seconde $= 2500$, & la premiere $= 2800$.

VI.

Le Problême pourroit être encore plus varié, & dépendre toujours des mêmes principes; supposons, par exemple, qu'il fût énoncé ainsi.

Troisieme

Partager 5500 en deux parties, de maniere *que la premiere ait un tiers de plus que la seconde, plus encore* 180.

exemple du Problême précédent.

Voici comment on le résoudroit.

Soit la seconde part . . . . x.

On aura pour la premiere $x + \frac{1}{3}x + 180$.

Or comme leur somme doit égaler 5500, on a donc l'équation $2x + \frac{1}{3}x + 180 = 5500$. Pour résoudre cette équation, je commencerai par ajouter $2x$ avec $\frac{1}{3}x$, ce qui me donne $\frac{7}{3}x$ parce que deux entiers valent six tiers, & que par conséquent ces deux entiers avec un tiers font sept tiers. Donc l'équation précédente se réduit à . . . . $\frac{7x}{3} + 180 = 5500$, qui deviendra par le même raisonnement que dans les exemples précédens $\frac{7x}{3} = 5500 - 180$

ou $\frac{7x}{3} = 5320$.

Or si le tiers de $7x$ vaut 5320, les $7x$ entiers valent donc trois fois davantage, ce que l'on écrit ainsi . . . . $7x = 5320 \times 3$. Employant le signe $\times$ qui se prononce multiplié *par*, pour désigner la multiplication des deux quantités qu'il sépare.

Le signe $\times$ indique la multiplication.

Ensuite, au lieu de $7x = 5320 \times 3$, il suffit d'écrire $7x = 15960$ que l'on a en multipliant en effet 5320 par 3.

Et par le moyen de cette nouvelle équation on a $x = \frac{15960}{7} = 2280$, valeur de la seconde part.

La premiere part sera aisée à trouver ensuite, puisqu'il ne faudra qu'ajouter à cette quantité

2280, son tiers 760, & de plus 180, ainsi qu'on l'avoit proposé, & l'on aura 3220 pour la premiere part.

Les Commençans pourront s'exercer à varier encore davantage l'énoncé du Problême précédent, & à le résoudre dans les différens cas qu'ils imagineront, ils seront récompensés de leurs peines par la facilité qu'ils acquerront. Afin de les aider davantage, je vais donner un autre Problême qui a encore beaucoup de rapport avec le précédent.

VII.

Nouveau Problême de même nature que le précédent.

Trois Marchands font une société, le premier fournit 17000 ℔, *le second* 13000 ℔, *le troisieme* 10000; *comme ils ont besoin de quelqu'un qui se donne les soins que demande leur commerce, celui qui n'a mis que* 10000 ℔ *se charge de toutes les affaires, à condition qu'il tirera de plus que les autres* 3 *pour* 100 *de tout le gain qui se fera : il arrive que ce gain monte à* 100000 ℔ *: on demande ce qu'il faut qu'ils en ayent chacun.*

Soit la part du premier x

Le second ayant mis moins dans la raison de 13 à 17, doit avoir une somme moindre dans cette même raison, c'est-à-dire, seulement . . . . $\frac{13}{17}x$

Le troisieme en supposant qu'il n'eût qu'à raison de sa mise, auroit les dix 17emes du premier; mais devant avoir de plus 3 pour 100 sur le tout, c'est-à-dire 3000 ℔, sa part sera . . . $\frac{10}{17}x + 3000$.

Et comme la ſomme de ces trois parts doit être 100000 ℔, on aura... $x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x + 3000 = 100000$ ou $x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x = 97000$.

Pour dégager l'inconnue de cette équation, ſoit conſidéré que $x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x$ ou $\frac{17}{17}x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x$ ne ſignifie autre choſe que $\frac{40}{17}x$; on a donc $\frac{40}{17}x = 97000$ ou $40x = 97000 \times 17$ ou $40x = 1649000$ ou $x = \frac{1649000}{40} = 41225$.

La part du premier étant trouvée, celle du ſecond exprimée par $\frac{13}{17}x$, ſera $\frac{13}{17} \times 41225$, c'eſt-à-dire 31525 ; celle du troiſieme, exprimée par $\frac{10}{17}x + 3000$, ſera $\frac{10}{17} \times 41225 + 3000 = 27250$.

VIII.

La ſolution analytique d'un Problême à deux parties.

Par ces deux Problêmes les Lecteurs entrevoient ce que c'eſt que l'Algébre, & ils apprennent qu'en général la ſolution d'un Problême eſt compoſée de deux parties; dans la premiere, on nomme par une lettre comme x ou y, &c. la quantité inconnue qu'on cherche, ou une de celles qui étant connue, détermineroit les autres ; on tâche enſuite d'arriver à une équation où l'inconnue ſe trouve, ce qui ſe fait en exprimant de deux manieres différentes une même quantité.

Dans la premiere on exprime ce Problême par une équation.

Dans la ſeconde partie il s'agit de dégager l'inconnue dans l'équation.

Dans la ſeconde on réſout cette équation.

La premiere de ces deux parties eſt difficile à réduire en préceptes clairs pour les Commençans, ce ne peut être que par des exemples qu'on la faſſe bien ſentir.

Quant à la ſeconde, on la peut beaucoup plus aiſément expliquer d'une maniere générale.

IX.

Les équations du premier degré ſont celles où l'inconnue n'eſt multipliée ou diviſée que par des quantités connues.

Dans les queſtions que nous venons de réſoudre, on eſt arrivé à des équations dans leſquelles l'inconnue ne ſe trouvoit pas autrement engagée que par la multiplication ou la diviſion de nombres connus ; on appelle ces ſortes d'équations, équations du premier degré, telles ſont $2x - 10 = 56$, $\frac{2}{3}x + 15 = x - \frac{1}{5}x + 30$, &c. Et les Problêmes qui conduiſent à ces équations ſont nommés des Problêmes du premier degré.

On les appelle ainſi pour les diſtinguer de ceux dans leſquels l'inconnue ſeroit ou quarrée, ou * cubée, &c. qu'on dit être auſſi-bien que leurs équations ; du ſecond degré ſi l'inconnue eſt quarrée ; du troiſieme, ſi l'inconnue eſt cubée, &c.

Qu'on demande, par exemple, un nombre dont le triple étant ajouté avec le quarré, donnât 65, le Problême qu'il faudroit réſoudre alors ſeroit du ſecond degré. Et l'équation $3x + xx = 65$ (dans laquelle xx déſigne le quarré de x) qui exprimeroit les conditions de ce Problême, ſeroit une équation du ſecond degré.

* On doit avoir vu en Arithmétique qu'un nombre eſt quarré ou cubé, ſuivant qu'il eſt multiplié une ou deux fois par lui-même. On quarre 7, par exemple, lorſque, en le multipliant par lui-même, on en forme 49, de même on le cube lorſque le multipliant deux fois par lui-même on en forme 343.

On n'a pû parvenir à la résolution de ces équations qu'après s'être exercé long-tems aux équations du premier degré. Nous allons donc chercher toutes les regles que demandent celles-ci.

X.

Pour les trouver, reprenons d'abord l'équation $4x + 1400 = 9600$, traitée art. V. laquelle est composée des trois termes $4x$, 1400, 9600, (on appelle ainsi toutes les parties d'une équation, séparées les unes des autres par les signes $+$ ou $-$) & remarquons que par le même raisonnement, par lequel nous en avons tiré que $4x = 9600 - 1400$, nous pourrons dans toutes sortes d'équations prendre quelque terme que ce soit, précédé du signe $+$, & le passer de l'autre côté du signe $=$ en lui donnant le signe $-$. Qu'on ait, par exemple, $50 + \frac{10}{3}x = 5x + 30$, il sera permis de passer le terme $\frac{10}{3}x$ en $-$ de l'autre côté, & écrire ainsi l'équation $50 = 5x + 30 - \frac{10}{3}x$; car on peut dire, comme dans l'art. V, que puisqu'il faut ajouter $\frac{10}{3}x$ à 50 pour être égal à la quantité $5x + 30$, il faut donc que 50 soit plus petit que $5x + 30$ de la quantité $\frac{10}{3}x$, c'est-à-dire, qu'il soit égal à $5x + 30 - \frac{10}{3}x$.

Les termes d'une équation sont ses parties séparées par les signes $+$ ou $-$.

De la même maniere qu'on a vû, art. III, que l'équation $3y - 475 = 890$ se changeoit en $3y = 890 + 475$, on verra qu'en général les termes qui sont en $-$ d'un côté du signe d'égalité peuvent être passés en $+$ de l'autre. Qu'on ait, par exemple, $32 - 6x = 9x + 119$, on en tirera $32 = 6x + 9x + 119$. Car si 32 doit être diminué du $6x$ pour égaler $9x + 119$

il faut qu'il ſoit plus grand que $6x$ de cette quantité, c'eſt-à-dire qu'il ſoit égal à $6x + 9x + 119$.

XI.

Tout terme peut être paſſé d'un côté de l'Equation à l'autre, en changeant de ſigne.

Voilà donc un principe général pour toutes les équations, c'eſt que les termes que l'on voudra pourront être paſſés d'un côté de l'équation à l'autre, en obſervant de changer leurs ſignes. Or, ce principe eſt d'une utilité infinie en ce qu'il épargne beaucoup de raiſonnemens.

XII.

On appelle membres d'une équation, ſes deux parties ſéparées par le ſigne $=$.

Par ſon moyen on peut toujours changer une équation en une autre, où l'on ait d'un côté du ſigne $=$, c'eſt-à-dire, dans l'un des membres de l'équation les termes affectés de x & de l'autre côté du ſigne $=$, c'eſt à-dire, dans l'autre membre de l'équation tout ce qui eſt entiérement connu.

Que l'on ait, par exemple, l'équation $8x + 30 = \frac{5}{3}x + 250$; j'en tire $8x - \frac{5}{3}x = 250 - 30$: que l'on ait $60 - \frac{5}{4}x = 250 - \frac{7}{3}x$, on en tire $\frac{7}{3}x - \frac{5}{4}x = 250 - 60$, & ainſi des autres.

XIII.

Lorſqu'après les tranſpoſitions néceſſaires, on aura fait paſſer tous les termes affectés de x d'un côté, & les termes connus de l'autre; ce qui ſe préſente le plus naturellement, c'eſt de réduire chacun des deux membres de l'équation à ſa plus ſimple expreſſion. Qu'on ait, par exemple $8x - \frac{5}{3}x = 250 - 30$, on en tire auſſi-tôt $\frac{19}{3}x = 220$, en retranchant en effet 30 de 250, & en retranchant auſſi $\frac{5}{3}x$ de $8x$ ou de $\frac{24}{3}x$ qui lui eſt égal.

Qu'on ait l'équation $\frac{7}{3}x - \frac{5}{4}x = 250-60$, on la change en $\frac{13}{12}x = 190$, à cauſe qu'en réduiſant $\frac{7}{3}x$ & $\frac{5}{4}x$ au même dénominateur, on a $\frac{28}{12}x$ & $\frac{15}{12}x$ dont la différence eſt $\frac{13}{12}x$, & qu'en retranchant 60 de 250, il en reſte 190.

XIV.

Par de ſemblables réductions qui ſont toujours faciles à ceux qui ſçavent l'Arithmétique, on changera toutes les équations du premier degré, quelques composées qu'elles ſoient, en d'autres qui n'auront que deux termes, dont l'un ſera composé d'un certain nombre d'x entier ou rompu, & l'autre un terme entiérement connu, telles que ſont les équations $4x = 8200$, $\frac{7}{3}x = 5320$, & réſolues dans les art. V & VI.

Rappellons-nous maintenant ce que nous avons dit ſur ces équations, & nous en tirerons des principes généraux pour toutes les autres.

De l'équation $4x = 8200$ nous avons tiré $x = \frac{8200}{4}$, parce qu'il s'enſuivoit de ce que $4x$ valoient 8200, qu'un x ne pouvoit valoir que le quart de cette ſomme; de ce raiſonnement & de ceux que l'on formeroit pareillement pour les autres nombres d'x, on tire ce principe général, qu'on peut ôter le multiplicateur qui affecte l'inconnue dans un des membres de l'équation, en le faiſant ſervir de diviſeur à l'autre membre.

Maniere de faire évanouir le multiplicateur qui affecte l'inconnue.

XIII.

De l'équation $\frac{7}{3}x = 5320$, nous avons tiré $7x = 3 \times 5320$, en remarquant que ſi le tiers de $7x$ vaut 5320, $7x$ entiers doivent valoir trois fois davantage. De-là on forme ce prin-

Maniere de faire disparoître le diviseur qui affecte l'inconnue.

cipe général, que pour faire disparoître le diviseur qui affecte l'inconnue dans un membre de l'équation, on n'a qu'à le faire servir de multiplicateur à l'autre membre.

XVI.

Avec ces regles on est en état de résoudre toutes sortes d'équations du premier degré. Pour exercer les Commençans, voici quelques exemples.

Exemples d'équations du premier degré, résolues par les principes précédens.

$\frac{6}{5}x - 90 + \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x - 82$ se change par la transposition en $\frac{6}{5}x + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}x = 90 - 82$, ou en réduisant $\frac{6x}{5} - \frac{2}{3}x = 8$, ou $\frac{18}{15}x - \frac{10}{15}x = 8$, ou $\frac{8}{15}x = 8$, ou $8x = 8 \times 15$, ou en dernier lieu $x = 15$.

De même $\frac{2}{7}x + 9 = \frac{1}{3}x - 10$ devient en transposant $\frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x = 10 + 9$, ou $\frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x = 19$, ou $\frac{1}{21}x = 19$, ou $x = 399$.

Enfin $\frac{2}{9}x - 40 - \frac{1}{4}x = 60 - \frac{7}{5}x$ donne en transposant $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$, qui, en réduisant d'abord $\frac{2}{9}$ & $\frac{1}{4}$ au même dénominateur, devient $\frac{7}{5}x - \frac{1}{36}x = 100$, & qui, en réduisant $\frac{7}{5}$ & $\frac{1}{36}$ au même dénominateur, devient ensuite $\frac{247}{180}x = 100$, ou $x = \frac{18000}{247}$.

XVII.

Au lieu de réduire toutes les fractions au même dénominateur, on peut faire disparoître l'un après l'autre tous les diviseurs de l'équation donnée, au moyen de la méthode suivante, qui a dû être bientôt imaginée par ceux qui, les premiers, ont manié ces sortes d'équations.

Maniere de faire évanouir les

Soit repris l'exemple précédent $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$, il est clair que si on multiplie les deux membres de cette équation par 9, les deux produits seront les mêmes; car des quantités égales, multipliées par le même nombre, doivent donner le même produit; on aura par cette multiplication $\frac{18}{9}x - \frac{9}{4}x + \frac{63}{5}x = 900$ qui, à cause que $\frac{18}{9}x = 2x$, se réduit à $2x - \frac{9}{4}x + \frac{63}{5}x = 900$, dans laquelle le diviseur 9 a disparu, & l'on voit bien que cela devoit arriver nécessairement; car $\frac{2}{9}$ de quelque quantité que ce soit, multipliés par 9, doivent donner 2 entiers de cette même quantité. Pour faire disparoître de même 4, il faudra multiplier tous les termes de l'équation par 4, en observant seulement pour le terme $\frac{9}{4}x$ que la multiplication par 4 se fera en ôtant le 4 qui est dessous. Ainsi l'on aura $8x - 9x + \frac{252}{5}x = 3600$, ou $\frac{252}{5}x - x = 3600$, qui, multipliant les deux membres par 5, deviendra $252x - 5x = 28000$, ou $247x = 18000$, ou $x = \frac{18000}{247}$.

fractions d'une équation.

Le principe général qu'on tire de là, c'est que pour faire disparoître un diviseur d'un terme, il faut multiplier tous les autres termes par le diviseur, & l'ôter du terme où il est.

XVIII.

On peut trouver une maniere de faire disparoître tous les diviseurs à la fois, en remarquant que si on multiplie tous les termes par un même nombre qui puisse se diviser par chacun de ces diviseurs, chaque terme se réduira. Multiplions, par exemple, l'équation $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$ par 180 qui peut se diviser par 9, par 4 & par 5, on aura $\frac{360}{9}x - \frac{180}{4}x + \frac{1260}{5}x = 18000$, ou $40x - 45x + 252x = 18000$, ou $247x = 18000$.

Autre méthode par laquelle on les fait tous évanouir à la fois.

Or pour trouver ce nombre qui puisse se diviser par tous les diviseurs, il ne faut que multiplier successivement ces diviseurs les uns par les autres. Qu'on ait, par exemple, $\frac{7}{3}x + \frac{1}{5}x = 160 - \frac{2}{7}x$ dont on veuille faire évanouir les diviseurs, je multiplie d'abord 3 par 5, & je multiplie ensuite leur produit 15 par 7, ce qui me donne 105 pour le nombre qui est divisible par 3, 5, 7 : ce nombre trouvé, je m'en sers pour multiplier toute l'équation, ce qui me donne $\frac{735}{3}x + \frac{105}{5}x = 16800 - \frac{210}{7}x$, ou $245x + 21x = 16800 - 30x$.

Pour abréger encore cette opération, au lieu de former le produit 105 des trois diviseurs, on se contentera d'écrire ainsi ce produit $3 \times 5 \times 7$, la multiplication donne alors $\frac{7 \times 3 \times 5 \times 7}{3}x$

$$+ \frac{7 \times 3 \times 5}{5}x = 160 \times 3 \times 5 \times 7 - \frac{7 \times 5 \times 3 \times 2}{7}x$$

dans laquelle on voit tout de suite que le nombre 3 doit s'en aller du numérateur de la 1ere. fraction, puisque la division par 3 doit être détruite en faisant la multiplication par 3; il en est de même du 5 & du 7, qui sont à la fois aux numérateurs & aux diviseurs des autres fractions.

Par ce moyen on arrive à l'équation $7 \times 5 \times 7x + 7 \times 3x = 160 \times 3 \times 5 \times 7 - 2 \times 3 \times 5x$ qui, en faisant les multiplications indiquées par les signes $\times$, donne $245x + 21x = 16800 - 30x$ délivrée des fractions.

XIX.

Pour suivre le plus vraisemblablement qu'il est possible l'ordre des inventeurs, nous ne nous

arrêterons

arrêterons pas maintenant à approfondir davantage la méthode de dégager l'inconnue, mais nous reviendrons à la maniere de mettre les Problêmes en équations. La résolution des équations a pû, indépendamment des Problêmes auxquels elles ont rapport, occuper les Algébristes lorsque cette Science a été avancée à un certain point; mais il est à présumer que ceux qui en ont jetté les fondemens, n'ont examiné les équations qu'à l'occasion des Problêmes dont elles étoient, pour ainsi dire, le dénouement. D'ailleurs il se trouve quelquefois dans les équations des complications dont on ne se seroit pas douté, si la nature des Problêmes qu'on cherchoit ne les avoit amenées.

Nous ne pouvons rien dire ici de plus clair, sur la maniere générale de mettre les Problêmes en équations, que ce que nous avons dit, art. VIII; mais nous allons donner plusieurs exemples qui accoutumeront les Commençans à cette recherche.

Troisieme Problême.

Pour payer un certain nombre d'Ouvriers sur le pied de 3 ℔ chacun, il manque 8 ℔ à un homme qui les fait travailler; mais en ne leur donnant à chacun que 2 ℔, il lui reste 3 ℔ : on demande combien cet homme à d'argent.

On emploie une barre en Algébre comme en Arithmétique pour indiquer la division.

Soit x le nombre de livres que posséde cet homme, donc $x + 8$ est la somme qui peut satisfaire tous les Ouvriers sur le pied de 3 ℔; & comme le nombre des Ouvriers doit être trois fois plus petit que celui qui exprime cette somme, il sera exprimé par le tiers de $x+8$, ce qu'on écrira ainsi $\frac{x+8}{3}$; car en Algebre comme en Arithmétique une barre horisontale indique toujours la division de la quantité supérieure par l'inférieure.

De plus, puisqu'il reste 3 ℔ quand on ne donne que 2 ℔ à chaque Ouvrier, $x-3$ est donc la somme suffisante pour payer tous ces Ouvriers à raison de 2 ℔ chacun. Donc $\frac{x-3}{2}$ peut exprimer le nombre d'Ouvriers, mais puisque nous avons deux valeurs du même nombre, il faut qu'elles soient égales; le Problême est donc réduit à la résolution de l'équation $\frac{x-3}{2}=\frac{x+8}{3}$.

Pour la résoudre nous commencerons par faire disparoître le diviseur 2 du membre $\frac{x-3}{2}$ de cette équation, en multipliant l'autre membre par ce même nombre 2, ce qui changera l'équation en $x-3=\frac{2x+16}{3}$; car il est évident que le double de $\frac{x-3}{2}$ est $x-3$, & que le double de $\frac{x+8}{3}$ sera $\frac{2x+16}{3}$ par la même raison que $2x+16$ est le double de $x+8$. On fera ensuite évanouir le diviseur 3 de l'équation $\frac{2x+16}{3}=x-3$, en multipliant le second membre par 3 & en l'ôtant du premier, ce qui donnera $2x + 16 = 3x - 9$, ou $x = 25$.

Si on veut ſçavoir à préſent combien il y a d'Ouvriers, il faut prendre une des deux expreſſions $\frac{x-3}{2}$ ou $\frac{x+8}{3}$ qu'on a trouvées pour ce nombre $\frac{x-3}{2}$ par exemple. Puiſqu'on ſçait maintenant que $x = 25$, $x - 3$ ſera donc 22, & partant $\frac{x-3}{2}$ ſera $\frac{22}{2} = 11$ nombre d'Ouvriers demandé.

XX.

Il eſt bon de remarquer à propos de l'équation $\frac{x-3}{2} = \frac{x+8}{3}$, qu'il ne ſeroit pas permis pour y appliquer la regle de l'art. XI. de changer de côté & de ſigne les quantités -3 & $+8$, & d'écrire ainſi l'équation $\frac{x-8}{2} = \frac{x+3}{3}$, parce que le nombre -3 n'eſt pas proprement un terme du premier membre, mais ſeulement un terme de ſon dividende $x - 3$; la quantité $\frac{x-3}{2}$ n'étant réellement qu'un ſeul terme de l'équation, ainſi que $\frac{x+8}{3}$. Pour appliquer donc la regle de l'art. XI, il faudroit commencer par prendre, ainſi qu'il eſt indiqué par le nombre 2 qui eſt ſous la premiere barre, la moitié de $x - 3$ ce qui donneroit $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$; enſuite il faudroit prendre, à cauſe du 3 qui eſt ſous l'autre barre, le tiers de $x + 8$ qui seroit $\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$: égalant alors ces deux quantités on auroit l'équation $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$ dans laquelle on pourroit faire les transpositions qu'on voudroit.

XXI.

Le Problême précédent pourroit encore être résolu de la maniere suivante.

Autre solution du même Problême.

Que y exprime le nombre d'Ouvriers, $3y$ sera l'argent qu'il faudroit leur donner sur le pied de 3 ℔ chacun. Mais il manque 8 ℔ pour les satisfaire à ce prix : donc $3y - 8$ est l'argent que possede celui qui les doit payer.

D'un autre côté $2y$ seroit ce qu'il faudroit pour payer ces Ouvriers à raison de 2 ℔, & il resteroit en ce cas 3 ℔. Donc $2y + 3$ est une autre expression de l'argent que possede celui qui les doit payer.

Il faut donc égaler les deux quantités $2y + 3$ & $3y - 8$, ou ce qui revient au même, il faut résoudre l'équation $2y + 3 = 3y - 8$ pour avoir la valeur de y. Cette équation étant résolue par les principes précédens, ce qui est fort facile, on aura 11 pour y, c'est-à-dire pour le nombre d'Ouvriers demandé.

XXII.

Quatrieme Problême.

Un Courrier est parti d'un lieu, il y a 9 heures & fait 5 lieues en 2 heures, on envoie un autre Courrier après lui, dont la vîtesse est telle qu'il fait 11 lieues en 3 heures ; il s'agit de sçavoir où le second Courrier attrapera le premier.

Soit x le chemin que le second Courrier fera avant d'avoir attrapé le premier, il est évident que ce chemin doit être égal à celui que le premier Courrier avoit fait pendant ses 9 heures d'avance, plus au chemin que le même premier Courrier fait pendant le tems que marche le second Courrier. Pour trouver d'abord le chemin que le premier Courrier avoit fait pendant 9 heures, il faut faire cette proportion * ou regle de trois.

Comme 2 heures sont à 5 lieues, ainsi 9 heures sont à un quatrieme terme, qui, suivant les regles connues en Arithmétique, se trouvera en multipliant le second terme 5 de la proportion par le troisieme 9, & en divisant leur produit par le premier 2; & qui sera par conséquent $\frac{45}{2}$ nombre de lieues faites par le premier Courrier pendant les 9 heures.

Mais comme en Algebre on veut toujours écrire ses opérations le plus courtement qu'il est possible; voici comment on dénote cette proportion:

Maniere dont on exprime les proportions en Algebre.

$$\overset{\text{heures}}{2} : \overset{\text{lieues}}{5} = \overset{\text{heures}}{9} : \overset{\text{lieues}}{\tfrac{45}{2}}$$

Les signes : servant, l'un à comparer 2 à 5, & l'autre 9 à $\frac{45}{2}$ & le signe = servant à marquer l'égalité qui doit être entre le rapport de 2 à 5 & celui de 9 à $\frac{45}{2}$.

Pour trouver ensuite le chemin que le même Courrier fera pendant le temps que le second Courrier fera le chemin x, on cherchera, premierement, le temps qu'il faut au second Cour-

* Je suppose ici, ou qu'on ait lû dans mes Elémens de Géométrie les articles IX. X, &c. de la seconde Partie, dans lesquels on traite des proportions, ou qu'au moins on possede bien la regle de trois expliquée dans les Livres d'Arithmétique.

rier pour faire le chemin x, ce qui se trouvera par cette proportion ;

$$\overset{\text{lieues}}{11} : \overset{\text{heures}}{3} = \overset{\text{lieues}}{x} : \overset{\text{heures}}{\frac{3x}{11}}$$

par laquelle, sans s'embarrasser du nombre de lieues contenues dans x, on apprend qu'il suffit de multiplier ce nombre par 3 & de le diviser par 11, pour avoir le nombre d'heures qu'il faut au second Courrier pour le parcourir.

Sans faire attention maintenant si le nombre d'heures exprimé par $\frac{3}{11}x$ est connu, ou s'il est inconnu, on fera cette proportion ;

$$\overset{\text{heures}}{2} : \overset{\text{lieues}}{5} = \overset{\text{heures}}{\frac{3}{11}x} : \overset{\text{lieues}}{\frac{15}{22}x}$$

dont le quatrieme terme $\frac{15}{22}x$ exprime le chemin du premier Courrier, pendant le tems $\frac{3}{11}x$, c'est-à-dire, avant d'être attrapé.

Par ce moyen on a la même quantité exprimée de deux façons différentes ; car le chemin du second Courrier a premierement pour expression x, en second lieu il est la somme des $\frac{45}{2}$ lieues d'avance qu'avoit le premier Courrier sur lui, & des $\frac{15}{22}x$ que ce même premier Courrier devoit avoir fait, jusqu'à ce qu'il fût attrapé. Egalant donc ces deux expressions, on aura l'équation $x = \frac{45}{2} + \frac{15}{22}x$ qui donne par les regles précédentes $x = 70 + \frac{5}{7}$.

XXIII.

Si le premier Courrier, outre l'avantage qu'il a d'être parti plutôt, avoit encore celui d'être parti d'un lieu plus avancé, la question, quoique plus compliquée, seroit aisément réduite aux mêmes principes.

Que le premier Courrier, par exemple, allant en Eſpagne, ſoit parti d'Orléans le lundi à 8 heures du ſoir en faiſant 7 lieues en 3 heures, & que le ſecond Courrier allant après le premier ſoit parti le mardi matin à 10 heures de Paris, ſuppoſé à 34 lieues d'Orléans, en faiſant 13 lieues en 4 heures, on demande le lieu de leur rencontre.

Pour réſoudre cette queſtion, il faut prendre la différence de 8 heures du ſoir, à 10 heures du matin, ce qui donne 14 heures; & comme le premier fait 7 lieues en 3 heures, on aura par cette proportion.

$$\overset{\text{heures}}{3} : \overset{\text{lieues}}{7} = \overset{\text{heures}}{14} : \overset{\text{lieues}}{\tfrac{98}{3}}$$

Leſquelles étant ajoutées avec les 34 lieues d'avance donneront $34 + \frac{98}{3}$ ou $\frac{200}{3}$ lieues pour la diſtance de Paris où étoit le premier Courrier, lorſque le ſecond eſt parti. Enſuite on fera comme ci-deſſus, cette proportion;

$$\overset{\text{lieues}}{13} : \overset{\text{heures}}{4} = \overset{\text{lieues}}{x} : \overset{\text{heures}}{\tfrac{4}{13}x}$$

nombres d'heures néceſſaires au ſecond Courrier pour faire le chemin x.

Mais pendant ce même nombre d'heures, le premier Courrier aura fait un chemin qu'on trouvera ainſi.

$$\overset{\text{heures}}{3} : \overset{\text{lieues}}{7} = \overset{\text{heures}}{\tfrac{4}{13}x} : \overset{\text{lieues}}{\tfrac{28}{39}x}$$

L'on aura donc l'équation $x = \frac{28}{39}x + \frac{200}{3}$ d'où l'on tire, par les regles expliquées ci deſſus, $x = 236 + \frac{4}{11}$, chemin du ſecond Courrier, lorſqu'il aura attrapé le premier.

XXIV.

Lorſque les premiers Algébriſtes ont eu trouvé la ſolution de quelque queſtion qui les intéreſſoit, ils n'ont gueres manqué d'en faire différentes applications en variant les nombres donnés dans ces queſtions. Par exemple, ils auront répété pluſieurs fois la queſtion précédente, en changeant les rapports des vîteſſes des Courriers, & la diſtance entre leurs départs. Dans ces différentes applications, ils ont ſenti qu'il y avoit une partie de l'opération qu'on répétoit à chaque exemple particulier du méme Problême, & qui pouvoit ſe faire une fois pour toutes en cherchant quelque ſolution où l'on ne ſe reſtraignît point à tel ou tel nombre particulier, mais qui fût générale pour tout nombre donné. Pour faire voir ce qu'ils ont imaginé à ce ſujet, nous allons reprendre le Problême précédent, & le traiter le plus généralement qu'il nous ſera poſſible.

Solution du Problême précédent pris généralement.

Soit exprimée la diſtance qui eſt entre les deux Courriers pour la lettre . . . . a
on fera de cet a le nombre de lieues qu'on voudra, lorſque la queſtion ſera pouſſée juſqu'à la fin.

Soit exprimé enſuite le nombre d'heures dont le départ du premier Courrier a précédé celui du ſecond par la lettre . . . . b

Que la vîteſſe du premier Courrier ſoit telle qu'il faſſe le nombre de lieues c
pendant le nombre d'heures . . . . d

Que la vîteſſe du ſecond Courrier ſoit telle qu'il faſſe le nombre de lieues . . . . e
dans le nombre d'heures . . . . f

Soit enfin comme dans la ſolution particuliere le chemin que le ſecond Courrier doit faire pour joindre le premier x

C'eſt une attention qu'on a communément dans l'Algebre de prendre les premieres lettres a, b, c, &c. de l'Alphabet, pour exprimer les quantités connues & les dernieres s, t, u, x, &c. pour celles qu'on cherche.

On emploie les premieres lettres de l'Alphabet, pour exprimer ce que l'on connoît, & les dernieres pour ce qu'on ne connoît pas.

Pour trouver préſentement, à l'exemple de la méthode qu'on a ſuivie dans l'exemple précédent, le chemin que fait le premier Courrier pendant le nombre d'heures b, il faudra chercher le quatrieme terme d'une proportion, dont le premier terme ſoit le nombre d'heures d, le ſecond le nombre de lieues c, le troiſieme le nombre d'heures b, & il eſt clair que cette opération ſe fera, comme dans toutes les autres regles de trois, en multipliant le ſecond & le troiſieme terme, l'un par l'autre, & en diviſant leur produit par le premier terme.

Quant à la maniere d'exprimer le produit de ces termes qui ne ſont plus comme ci-deſſus des chiffres, mais des lettres propres à exprimer des nombres quelconques, ce qu'on a trouvé de plus ſimple, c'eſt de placer à côté l'une de l'autre, les lettres qu'on veut multiplier ; à l'égard de la diviſion, nous avons deja vû qu'en Algebre, comme en Arithmétique, on mettoit une barre horiſontale entre les quantités qu'on veut diviſer.

Les lettres qui ſe ſuivent ſans aucun ſigne entr'elles, ſont cenſées ſe multiplier.

Par ce moyen la proportion précédente s'écrit ainſi $d : c = b : \frac{bc}{d}$.

Ayant donc $\frac{b\,c}{d}$ pour exprimer le chemin que le premier Courrier a fait avant que le second soit parti, si on ajoute à ce chemin la distance a qui étoit entr'eux, on aura pour le chemin d'avance du premier au moment du départ du second .... $a + \frac{b\,c}{d}$.

Pour trouver ensuite le chemin que le premier Courrier fait pendant que l'autre court après lui & qu'il parcourt x; commençons, ainsi que ci-dessus, par trouver le tems que le second Courrier met à parcourir l'espace x, ce qui se fera par le moyen d'une proportion .... $e : f = x : \frac{f\,x}{e}$ dont le premier terme sera le nombre de lieues e; le second, le nombre d'heures f; le troisieme, le nombre de lieues x, & le quatrieme $\frac{f\,x}{e}$ le tems cherché.

Or, quel que soit le nombre d'heures $\frac{f\,x}{e}$ qu'ait couru le second Courrier pour attraper le premier, on sçait que si on fait une proportion dont les trois premiers termes soient, 1°. le nombre d'heures d; 2°. le nombre de lieues c; 3°. le nombre précedent $\frac{f\,x}{e}$, le quatrieme terme sera le chemin que le premier Courrier a fait dans le même tems que le second a parcouru x.

Cette proportion s'écrira ainsi $d : c = \frac{f\,x}{e}$:

$c \times \frac{\frac{fx}{e}}{d}$ nombre de lieues faites par le premier Courrier, pendant que le ſecond parcourt x.

Mais le chemin du premier Courrier ajouté avec le chemin $a + \frac{bc}{d}$ qu'il avoit d'avance, doit égaler le chemin du ſecond.

On a donc l'équation $x = a + \frac{bc}{d} + c \times \frac{\frac{fx}{e}}{d}$.

Si on ſe reſſouvient des opérations des fractions, on doit ſçavoir que pour multiplier une fraction comme $\frac{6}{3}$ par 4, il faut multiplier le numérateur * & écrire $\frac{6 \times 4}{3}$ ou $\frac{24}{3}$. De mê-

* On doit avoir vû dans l'Arithmétique, que le numérateur d'une fraction eſt le nombre placé au-deſſus de la barre, & qui ſert de dividende ; de même qu'on appelle dominateur, le nombre qui eſt au-deſſous de la barre, & qui ſert de diviſeur. Les opérations d'Arithmétique, que je ſuppoſe ici, & dans beaucoup d'autres endroits de cet ouvrage, ſont expliquées aſſez clairement dans pluſieurs Livres. Pour éviter cependant aux Lecteurs la peine d'y recourir, je vais en peu de mots rappeller ces opérations & les raiſons ſur leſquelles elles ſont fondées.

Pour multiplier une fraction telle que $\frac{5}{7}$ par 8 on multiplie le numérateur 5 par 8, & l'on écrit le même diviſeur ſous leur produit 40, ce qui donne $\frac{40}{7}$ la raiſon en eſt claire ; car 8 fois 5 ſeptiemes doivent faire 40 ſeptiemes, comme 8 fois 5 grandeurs quelconques font 40 de ces mêmes grandeurs.

Pour diviſer $\frac{3}{5}$ par 4, il faut écrire ſous le numérame pour multiplier $\frac{fx}{e}$ par c, il faut multiplier c par fx & laiſſer le diviſeur e, ce qui donne $\frac{cfx}{e}$ pour $c \times \frac{fx}{e}$. On ſçait de plus que quand on diviſe une fraction comme $\frac{5}{3}$ par un nombre quelconque comme 6, il faut multiplier le dénominateur 3 par ce nombre 6, ce qui donne $\frac{5}{3 \times 6}$ ou $\frac{5}{18}$. De même pour diviſer la fraction $\frac{cfx}{e}$ par d, il faut écrire $\frac{cfx}{de}$.

Ayant ainſi changé l'expreſſion précédente $\frac{c \times \frac{fx}{e}}{d}$ en $\frac{cfx}{de}$ l'équation qu'on doit ré-

teur 3 le produit 20 de 4 par le dénominateur 5, ce qui donne $\frac{3}{20}$. La raiſon en eſt que 1 cinquieme devenant 1 vingtieme, lorſqu'on le diviſe par 4, 3 cinquiemes doivent devenir 3 vingtiemes par la même diviſion.

Pour multiplier $\frac{5}{7}$ par $\frac{8}{3}$ on multiplie les numérateurs 5 & 8, & on diviſe leur produit 40 par le produit 21 des dénominateurs 3 & 7 ce qui donne $\frac{40}{21}$ Cette opération eſt fondée ſur ce que le produit de $\frac{8}{3}$ par $\frac{5}{7}$ doit être 3 fois plus petit que celui de 8 par $\frac{5}{7}$, mais 8 par $\frac{5}{7}$ a donné $\frac{40}{7}$ donc $\frac{8}{3}$ par $\frac{5}{7}$ doit donner le tiers de $\frac{40}{7}$, c'eſt-à-dire $\frac{40}{21}$.

Enfin, pour diviſer $\frac{3}{5}$ par $\frac{4}{11}$ il faut multiplier le numérateur 3 de la premiere fraction par le dénominateur 11 de la ſeconde, & diviſer leur produit 33 par le produit 20 du dénominateur 5 de la premiere fraction & du numérateur 4 de la ſeconde, ce qui donne $\frac{33}{20}$. Opération dont on voit la raiſon en remarquant que $\frac{3}{5}$ diviſés par 4 donneroient $\frac{3}{20}$, & que $\frac{3}{5}$ diviſés par $\frac{4}{11}$ qui ſont 11 fois plus petits que 4 doivent donner un quotient 11 fois plus grand, c'eſt-à-dire $\frac{33}{20}$.

soudre est $x = a + \frac{bc}{d} + \frac{cfx}{de}$. Opération qui demande qu'on commence, ainsi qu'on l'a enseigné art. XVIII. par multiplier tous les termes, excepté le dernier, par le diviseur de afin de l'ôter de ce terme.

Nous aurons par cette opération $dex = ade + \frac{bcde}{d} + cfx$ ou $dex = ade + bce + cfx$ à cause que $\frac{bcde}{d}$ est la même chose que bce, puisque la quantité bce reste la même lorsqu'on la multiplie & qu'on la divise par d.

Passant le terme cfx dans le premier membre, on aura $dex - cfx = ade + bce$.

Afin de trouver x dans cette équation, nous remarquerons que si nous connoissions les nombres de, & cf qui expriment ce que contiennent d'x les termes dex, & cfx, nous retrancherions le second du premier, & que le reste qui exprimeroit la quantité d'x contenue dans le premier membre de l'équation, serviroit de diviseur au second membre, pour avoir la valeur de x. Or, sans connoître les nombres de & cf, il est clair que $de - ef$ exprime leur différence, & par conséquent la quantité d'x que contient le premier membre de l'équation $dex - cfx = ade + bce$. Donc x a pour valeur ce qui vient en divisant le second membre par ce nombre $de - cf$. Donc $x = \frac{ade + bce}{de - ef}$ & c'est-là la solution générale du Probléme précédent ; car qu'on ſçache à préſent ce que c'eſt que a, b, c, d, e, f, on n'aura plus qu'à en faire l'uſage indiqué par cette valeur générale de x, c'eſt-à-dire, multiplier ſucceſſivement a, d, e, l'un par l'autre : ajouter à ce produit celui que l'on a en multipliant ſucceſſivement b, c, e, & diviſer la ſomme de ces deux produits, par le nombre qui eſt la différence du produit de c par f au produit de d par e, & l'on aura par cette opération, telle ſolution particuliere qu'on voudra.

X X V.

Application de la ſolution précédente à des nombres.

Suppoſons, par exemple, comme dans l'art. XXIII. que la diſtance entre les deux Courriers ſoit de 34 lieues, que le premier Courrier ſoit parti 14 heures plutôt que le ſecond, qu'il faſſe 7 lieues en 3 heures, & que le ſecond faſſe 13 lieues en 4 heures, on aura.

$$a = 34, b = 14, c = 7$$
$$d = 3, e = 13, f = 4$$

qui donneront

$$ade = 34 \times 3 \times 13, \text{ c'eſt-à-dire}$$
$$= 102 \times 13 = 1326,$$
$$bce = 14 \times 7 \times 13 = 1274$$

& par conſéquent $ade + bce = 2600$
$de = 39$, $cf = 28$ & partant $de - cf = 11$
d'où l'on tirera

$$x = \frac{ade + bce}{de - cf} = \frac{2600}{11} = 236 + \frac{4}{11}$$

ainſi qu'on l'a trouvé dans l'art. XXIII.

Autre application.

Si on veut enſuite tirer de la ſolution générale le premier cas calculé dans l'art. XXII. où les deux Courriers étoient ſuppoſés partir du même lieu, le premier ayant 9 heures d'avance, & une vîtesse capable de lui faire faire 5 lieues en 2 heures, tandis que le second en fait 11 en 3. On aura dans ce cas ....

$$a = 0,\ b = 9,\ c = 5,$$
$$d = 2,\ e = 11,\ f = 3,$$

& substituant ces valeurs dans la formule générale ou valeur de x, on aura $x = \frac{9 \times 5 \times 11}{2 \times 11 - 5 \times 3}$ $= \frac{495}{7} = 70 + \frac{5}{7}$ ainsi qu'on l'a trouvé dans l'art. XXII. On fera de même tant d'autres applications qu'on voudra.

XXVI.

On n'a pas eu plutôt trouvé la maniere de généraliser un Problême en se servant de lettres au lieu de nombres, qu'on a presque toujours pris les Problêmes dans leur plus grande généralité; il faut donc accoutumer les Commençans à les traiter ainsi. Dans cette vûe nous allons résoudre le Problême suivant.

Un Ouvrier peut faire un certain ouvrage exprimé par a *dans un tems exprimé par* b; *un second fait l'ouvrage* c *dans le tems* d, *un troisieme l'ouvrage* e *dans le tems* f, *on demande quel tems il faudra à ces trois Ouvriers travaillant ensemble pour faire l'ouvrage* g. Cinquieme Problême.

Soit x le tems cherché on aura l'ouvrage fait par le premier dans ce tems, en faisant la proportion suivante :

$$b : a = x : \frac{a\,x}{b}$$

On aura l'ouvrage fait dans le même tems par le second Ouvrier en faisant la proportion.

$$d : c = x : \frac{cx}{d}$$

Enfin on aura l'ouvrage fait dans le même tems par le troisieme Ouvrier par le moyen de cette proportion.

$$f : e = x : \frac{ex}{f}$$

Donc $\frac{ex}{f} + \frac{cx}{d} + \frac{ax}{b}$ est l'ouvrage des trois Ouvriers lorsqu'ils travaillent ensemble pendant le tems cherché, mais cet ouvrage doit égaler g, on a donc l'équation

$$\frac{ex}{f} + \frac{cx}{d} + \frac{ax}{b} = g.$$

Pour la résoudre, on multipliera, suivant les principes de l'article XVIII. toute l'équation par le produit fbd des diviseurs, & l'on aura

$$\frac{edbfx}{f} + \frac{cdbfx}{d} + \frac{axfdb}{b} = bdfg$$

qui se réduit à $edbx + fcbx + adfx = bdfg$, dans laquelle remarquant que $edb + fcb + adf$ doit exprimer le nombre d'x contenus dans le second membre, on aura

$$x = \frac{bdfg}{bde + bcf + adf}.$$

XXVII.

Exemple en nombres.

Pour faire quelqu'application de ce Problême, supposons qu'un Maçon ait pû faire 7 pieds courans d'une muraille en 5 jours, qu'un second Maçon en ait pû faire 10 pieds en 3 jours, &

& un troiſieme 11 en 4 jours, on demande le tems dans lequel ces trois Maçons travaillant enſemble, feront 150 pieds courans de la même muraille.

On aura par ces ſuppoſitions

$a = 7$; $b = 5$; $c = 10$; $d = 3$; $e = 11$, $f = 4$, $g = 150$,

& partant $bdfg = 5 \times 3 \times 4 \times 150 = 9000$ $bde = 5 \times 3 \times 11 = 165$; $bcf = 5 \times 10 \times 4 = 200$; $adf = 7 \times 3 \times 4 = 84$, ce qui donnera pour la valeur de x, $\frac{9000}{449}$, ou $20 + \frac{20}{449}$ nombre de jours dans lequel l'ouvrage propoſé ſera fait.

XXVIII.

Autre exemple.

Suppoſons maintenant qu'on demande en quel temps un réſervoir de 200 pieds cubes ſera rempli par trois tuyaux, dont le premier pourroit remplir 9 pieds cubes en $2\frac{1}{2}$ jours, le ſecond 15 pieds cubes en $3\frac{1}{3}$ jours, & le troiſieme 19 pieds cubes en $5\frac{1}{4}$ jours; on aura $a = 9$; $b = 2\frac{1}{2}$, ou $\frac{5}{2}$; $c = 15$; $d = 3\frac{1}{3}$, ou $\frac{10}{3}$; $e = 19$; $f = 5\frac{1}{3}$; ou $g = 200$.

Par les ſubſtitutions on aura. . . . .

$$x = \frac{\frac{5}{2} \times \frac{10}{3} \times \frac{21}{4} \times 100}{\frac{5}{2} \times \frac{10}{3} \times 19 + \frac{5}{2} \times 15 \times \frac{21}{4} + 9 \times \frac{10}{3} \times \frac{21}{4}}$$

qui devient
$$\frac{\frac{210000}{2 \times 3 \times 4}}{\frac{950}{3 \times 3} + \frac{1575}{2 \times 4} + \frac{1890}{3 \times 4}}$$

Pour réduire cette quantité, je multiplie le numérateur & le dénominateur de la premiere fraction du diviseur par 4; le numérateur & le dénominateur de la seconde par 3; & le numérateur & le dénominateur de la troisiéme par 2, ce qui change la quantité

$$\text{en } \frac{\frac{210000}{2 \times 3 \times 4}}{\frac{3800}{2 \times 3 \times 4} + \frac{4725}{2 \times 3 \times 4} + \frac{3780}{2 \times 3 \times 4}}$$

$$\text{ou } \frac{\frac{210000}{2 \times 3 \times 4}}{\frac{12305}{2 \times 3 \times 4}}, \text{ ou } \frac{210000}{12305}, \text{ ou } 17 + \frac{163}{2461}$$

nombre cherché des jours qu'il faudroit pour remplir le réservoir donné, en laissant couler les trois tuyaux à la fois.

XXIX.

Les regles des art. X. & suiv. suffisent pour les équations littérales.

On voit par les deux Problêmes précédens, que les régles qu'on a données (art. X. & suiv.) pour résoudre les équations numériques du premier degré, peuvent également s'appliquer aux équations littérales; mais on voit en même-temps que ces régles sont trop succintes pour que les Commençans n'ayent pas besoin qu'on les conduise encore dans la maniere de les employer, nous nous croyons d'autant plus obligés à les aider par un grand nombre de ces applications, que c'est probablement à un pareil travail qu'on doit plusieurs opérations d'Algebres très-utiles, que nous allons pour ainsi dire, découvrir chemin faisant.

L'application de ces regles a donné naissance à plusieurs opérations de l'Algebre.

Soit proposé de résoudre l'équation $2ac + ab - ax = 3ac + 2ax - 5ab - dx$.

Je commence par passer les termes $3ac$ & $-5ab$ dans l'autre membre de l'équation en les changeant de signe, ce qui me donne $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab = 2ax - dx$. Je passe de même le terme $-ax$ de l'autre côté, en observant aussi de changer son signe, ce qui me donne $2ac + ab - 3ac + 5ab, = 2ax - dx + ax$. Je réduis ensuite cette équation, 1°. En ajoutant ab avec $5ab$, ce qui me donne $6ab$; 2°. En mettant $-ac$ au lieu des termes $2ac$ & $3ac$; 3°. En mettant $3ax$ au lieu de $2ax + ax$; ainsi l'équation proposée devient $6ab - ac = 3ax - dx$ qui donne $x = \frac{6ab - ac}{3a - d}$.

Premier exemple de résolution d'équations littérales.

XXX.

Soit $5ab + 2ax - 3bd = 2ab - 5ax + 7bd - ac - dx$; les termes $5ab - 3bd$ deviendront $-5ab + 3bd$ en passant dans le second membre & les termes $-5ax - dx$ deviendront $+5ax + dx$ en passant dans le premier; on aura donc $2ax + 5ax + dx = 2ab + 7bd - ac - 5ab + 3bd$ qui se réduit à $7ax + dx = 10bd - 3ab - ac$ en mettant $7ax$ à la place de $2ax + 5ax$, $10bd$ à la place de $7bd + 3bd$, & $-3ab$ à la place de $2ab - 5ab$.

Deuxieme exemple de résolution d'équations littérales.

Dégageant présentement x de cette équation on aura $x = \frac{10bd - ac - 3ab}{7a + d}$.

XXXI.

Dans la résolution des deux équations précédentes on a eu besoin de réduire à une plus simple expression différens termes de même es-

Réduction des quantités à leur plus simple expression.

pece, tels que $2ac$ & $-3ac$; $5ab$ & ab, &c. comme cette opération est presque toujours nécessaire dans les équations à résoudre & dans les autres parties de l'Algébre, les Commençans doivent chercher à la pratiquer facilement. Pour leur en donner le moyen; voici quelques exemples.

On appelle termes positifs ceux qui sont précédés de + négatifs, ceux qui sont précédés de —.

Soit $15abc - 13bcd - 7abc + 29bcd - 5abf + 9abc + chi$ à réduire.

On prendra d'abord les termes $15abc$, $-7abc$ & $9abc$ qui sont de même espèce, & on ajoutera les deux termes $15abc$ & $9abc$, qui sont l'un & l'autre positifs, c'est-à-dire, affectés du signe +; on retranchera ensuite de leur somme laquelle est $24abc$, le terme $7abc$ à cause qu'il est négatif ou précédé du signe —, par ce moyen $17abc$ sera ce que deviennent les trois termes $15abc - 7abc + 9abc$. De la même maniere, au lieu de $29bcd - 13bcd$, on mettra $16bcd$. Quant aux termes $-5abf$ & $6chi$ qui sont seuls de leurs especes, on les écrira tels qu'ils sont, ainsi la quantité réduite sera $17abc + 16bcd - 5abf + 6chi$.

Soit $\frac{5}{3}ab - \frac{4}{5}ac + \frac{3}{4}ax - ad + 7ab + \frac{5}{7}ax$, on aura en réduisant $\frac{26}{3}ab + \frac{41}{28}ax - \frac{4}{5}ac - ad$.

La quantité $2acd - 5ach - 3acd + 3ach - 6bfi$ deviendra en réduisant $-acd - 2ach - 6bfi$, qui étant entiérement négative, montre que la quantité qu'on vouloit réduire renfermoit plus de négatif que de positif.

XXXII.

Il est à propos d'avertir ici que la réduction qu'on vient d'apprendre dans les exemples précédens, est absolument la même regle que celle qu'on appelle l'addition ; car lorsqu'on se propose d'ajouter deux quantités quelconques, il suffit de les écrire de suite & de les reduire après à leur plus simple expression : qu'on ait besoin, par exemple, d'ajouter la quantité $6ab - 2ac - 3ad$ avec $3ab + ac - 2ad + bf$, il n'y a autre chose à faire que de réduire la quantité $6ab - 2ac - 3ad + 3ab + ac - 2ad + bf$, ce qui donnera donc $9ab - ac - 5ad + bf$ pour la somme des deux proposées.

L'Addition Algébrique est la même opération que la précédente.

Si on veut ajouter les deux quantités $2ac - 3ad + af$ & $ad - 5ac - 2af$, il ne s'agira que de réduire la quantité $2ac - 3ad + af + ad - 5ac - 2af$. La réduction faite, il viendra $-3ac - 2ad - af$. On s'étonnera peut-être d'abord qu'une Addition puisse mener à une quantité négative ; mais l'on trouvera bientôt le dénouement de cette difficulté en remarquant qu'il faut nécessairement, ou que les deux quantités $2ac - 3ad + af$ & $ad - 5ac - 2af$ soient toutes deux négatives, ou qu'au moins l'une des deux soit négative & plus grande que l'autre.

C'est ce qu'on reconnoîtra plus facilement en faisant quelques exemples en nombres. Supposons d'abord que $a = 2$, $c = 3$, $d = 4$; $f = 5$, dans ce cas, au lieu de $2ac - 3ad + af$ nous aurons $12 - 24 + 10$ ou simplement -2, & au lieu de $ad - 5ac - 2af$ il viendra $8 - 30 - 20 = -42$. Ainsi leur somme sera -42, & on ne sera pas étonné que la somme de deux quantités négatives soit négative.

Supposons ensuite que $a = 6$; $c = 5$; $d = 3$; $f = 2$, on aura $2ac + 3ad + af = 18$ & $ad - 5ac - 2af = -156$. Or, comme la seconde quantité est négative, & plus grande que la premiere, la somme doit être négative.

XXXIII.

Comment on peut dire que l'on ajoute une quantité négative.

On demandera peut-être si on peut ajouter le négatif avec le positif, ou plutôt si on peut dire qu'on ajoute une quantité négative. A quoi je réponds que cette expression est exacte quand on ne confond point ajouter avec augmenter. Que deux hommes, par exemple, joignent leurs fortunes, quelles qu'elles soient, je dirai qu'ils ajoutent leurs biens; que l'un ait des dettes & des effets réels, si ses dettes surpassent ses effets, il ne possédera qu'un bien négatif, & la jonction de sa fortune à celle du premier, diminuera le bien de celui-ci, ensorte que la somme se trouvera, ou moindre que ce que possédoit le premier, ou même entiérement négative.

XXXIV.

On tire encore de l'opération précédente la soustraction algébrique.

La réduction enseignée dans les articles précédens, donne encore naissance à une autre regle d'Algébre, la Soustraction; car, par exemple, lorsque dans l'équation $2ac + ab - ax = 3ac + 2ax - 5ab - dx$ (art. XXIX.) on a passé les termes $3ac - 5ab$ de l'autre côté, en les changeant de ſigne, & qu'on eſt arrivé à l'équation $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab = 2ax - dx$, ou $- ac + 6ab - ax = 2ax - dx$, je dis qu'on a retranché la quantité $3ac - 5ab$ de la quantité $2ac + ab - ax$ & que le reſte eſt $- ac + 6ab - ax$. Car, en faiſant diſparoître $3ac - 5ab$ du ſecond membre de l'équation, c'eſt une Souſtraction qu'on a faite de cette quantité : or, pour que l'égalité ſoit conſervée, il faut qu'on ait fait une pareille Souſtraction de l'autre côté ; donc $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab$, ou $- ac + 6ab - ax$ eſt ce qui reſte de la quantité $2ac + ab - ax$ lorſqu'on en a ôté $3ac - 5ab$.

Ainſi lorſqu'on a deux quantités dont l'une doit être ſouſtraite, il faut changer les ſignes de celle qu'on veut ſouſtraire, l'écrire à la ſuite de l'autre, puis faire la réduction des quantités de même eſpece, ce qui, indépendamment de ce qu'on vient de dire, pourroit ſe démontrer de la maniere ſuivante. *Procédé de la Souſtraction.*

Soit la quantité $2ac + ab - ax$ dont on ſe propoſe de retrancher la quantité $3ac - 5ab$. Il eſt évident que ſi on vouloit retrancher de la premiere quantité ſimplement $3ac$, il faudroit écrire $2ac + ab - ax - 3ac$, mais en retranchant la quantité $3ac$ au lieu de $3ac - 5ab$ on retranche une quantité trop grande de $5ab$: donc il faut ajouter les $5ab$ qu'on a ôté de trop en ôtant $3ac$. Donc il faut écrire $2ac + ab$

$-ax-3ac+5ab$ pour le reſte de $2ac+ab-ax$ lorſqu'on a ôté $3ac-5ab$.

Afin de s'exercer dans cette regle qu'on ſent bien devoir être employée ſouvent, j'ajouterai les exemples ſuivans.

De $5ab+10fg-3ac+2de$ ſi on retranche $2ab-5fg+6ac+de$, il reſtera $5ab+10fg-3ac+2de-2ab+5fg-6ac-de$, ou $3ab+15fg-9ac+de$.

De la quantité $6aeb+3agh-10bcd$ ſi on retranche $abc-10aeb-8agh$, on aura $16aeb-abc-10bcd+11agh$.

De la quantité $3ac+ab+be$ ſi on retranche la quantité $-ac-3ab$, il viendra $4ac+4ab+be$.

XXXV.

On augmente une quantité lorſqu'on en ſouſtrait une quantité négative.

Si on s'étonne que dans cette Souſtraction le reſte $4ac+4ab+be$ ſoit plus grand que la quantité $3ac+ba+be$ dont on ſe propoſoit de ſouſtraire $-ac-3ab$, ce ne pourra être qu'en confondant, ſouſtraire & diminuer; car ſi on reconnoît, au contraire, que ſouſtraire une quantité quelconque, a, par exemple, d'une autre b, c'eſt ſçavoir de combien b ſurpaſſe a, on trouvera très-poſſible qu'une quantité augmente par une ſouſtraction. Qu'on demande, par exemple, de combien un homme eſt plus riche qu'un autre, ſi ce dernier n'a que des dettes, on verra bientôt que l'excès de richeſſe du premier ſera ce qu'il poſſéde plus une ſomme égale aux dettes de l'autre.

XXXVI.

Soit proposé de résoudre présentement l'équation $\frac{cx}{2a} - \frac{ac}{2b} = x - \frac{4ad}{3c}$ pour faire disparoîrre d'abord le diviseur $2a$, on le fera servir, suivant l'art XV. de multiplicateur à tous les termes de l'équation, & l'on aura $cx - \frac{ac \times 2a}{2b} = 2a \times x - \frac{4ad \times 2a}{3c}$, mais au lieu de $ac \times 2a$ il est clair qu'on peut mettre $2aac$, puisque le produit de $2a$ par ac doit être double de celui de a par ac, & que le produit de a par ac doit être aac. De même $2a \times x$ sera $2ax$ & $4ad \times 2a$ sera $8aad$; car le produit de ad par a est aad & celui de $4ad$ par $2a$ doit être octuple de celui de ad par a.

Troisieme exemple de résolution d'équations littérales.

L'équation est donc changée en $cx - \frac{2aac}{2b} = 2ax - \frac{8aad}{3c}$, ou $cx - \frac{aac}{b} = 2ax - \frac{8aad}{3c}$ à cause que $\frac{2aac}{2b}$ ou $\frac{aac}{b}$ sont la même chose; multipliant alors tous les termes de cette équation par b, elle deviendra $b \times cx - aac = 2ax \times b - \frac{8aad}{3c} \times b$ ou $bcx - aac = 2abx - \frac{8aabd}{3c}$ qui se changera encore en $cbx \times 3c - aac \times 3c = 2abx \times 3c - 8aabd$, ou $3bccx - 3aacc = 6abcx - 8aabd$, car les produits de c par cbx, aac & $2abx$ feroient $bccx$, $aacc$, $2abcx$, & par conséquent ceux de $3c$ par les mêmes quantités, doivent être triples, c'eſt-à-dire, $3bccx$, $3aacc$, $6abcx$; tranſpoſant préſentement, on aura $3bccx - 6abcx = 3aacc - 8aabd$ qui donne enfin $x = \frac{3aacc - 8aabc}{3bcc - 6abd}$.

XXXVII.

Un chiffre placé au-deſſus & à droite d'une lettre, déſigne ce qu'elle auroit été répétée de fois par la multiplication.

Et dans ce cas la lettre eſt dite élevée à la puiſſance exprimée par ce chiffre qu'on appelle expoſant.

Dans l'exemple précédent, la multiplication de quelques quantités qui contenoient les mêmes lettres, a donné la répétition de ces lettres dans les produits: or, comme les Algébriſtes cherchent toujours à s'exprimer de la maniere la plus courte, ils ont imaginé au lieu de répéter une lettre pluſieurs fois de ſuite, de ne l'écrire qu'une ſeule fois, en plaçant au-deſſus de cette lettre & à ſa droite un chiffre, qui déſigne le nombre de fois que cette lettre devroit être répétée. Par-là, au lieu de l'expreſſion précédente $x = \frac{3aacc - 8aabd}{3bcc - 6abc}$ on écrira $x = \frac{3a^2c^2 - 8a^2bd}{3bc^2 - 6abc}$.

Lorſque dans une opération on aura beſoin de aaa, c'eſt-à-dire, du produit de aa par a, ou de a multiplié par lui-même deux fois de ſuite, on mettra ſimplement a^3. De même au lieu de $cccc$, c^4. Lorſqu'une lettre eſt ainſi répétée ou plutôt cenſée répétée à l'aide d'un chiffre, on dit qu'elle eſt élevée à la puiſſance exprimée par ce chiffre, & que ce chiffre est son exposant. Ainsi c^4 ou $cccc$ qui est le produit de c trois fois par lui-même est dit c élevé à la quatrieme puissance, & 4 est son exposant. Il faut bien prendre garde de confondre les chiffres qui servent d'exposant avec ceux qui sont à la gauche des lettres & sur la même ligne, ceux-ci sont nommés coëfficiens; dans $4a^2c$, par exemple, 4 est le coëfficient du terme, 2 est l'exposant de a.

Les chiffres qui sont à gauche & sur la même ligne sont nommés coëfficiens.

XXXVIII.

Quatrieme exemple de résolution d'équations littérales.

Soit l'équation $\frac{2ab^2x}{3c^2d} + \frac{5ac^2}{b^2} = \frac{6cd^2}{a^2} - 3x$, en multipliant tous ses termes par le diviseur $3c^2d$, on aura $2ab^2x + \frac{5ac^2 \times 3c^2d}{b^2} = \frac{6cd^2 \times 3c^2d}{a^2} - 3x \times 3c^2d$.

Pour faire ensuite les multiplications indiquées par les signes $\times$, nous remarquerons d'abord que ac^2 multiplié par c^2d doit donner pour produit ac^4d; car si au lieu de ac^2 & de c^2d on écrivoit acc & ccd, ainsi qu'on le pourroit, on verroit tout de suite que le produit de acc par ccd seroit $accccd$; c'est-à-dire, suivant l'article précédent ac^4d. Ayant donc ac^4d pour le produit de ac^2 par c^2d, il est clair que $15ac^4d$ sera celui de $5ac^2$ par $3c^2d$.

De la même maniere, on trouvera $18c^3d^3$ pour le produit de $6cd^2$ par $3c^2d$ & $9c^2dx$ pour celui de $3x$ par $3c^2d$. Donc l'équation précédente se changera en $2ab^2x + \frac{15ac^4d}{b^2} = \frac{18c^3d^3}{a^2} - 9c^2dx$.

Multipliant ensuite cette nouvelle équation par b^2 elle devient $2ab^4x + 15ac^4d = \frac{18b^2c^3d^3}{a^2} - 9b^2c^2dx$, & multipliant de même celle-ci par a^2, on a $2a^3b^4x + 15a^3c^4d = 18b^2c^3d^3 - 9b^2a^2c^2dx$ qui donne en transposant $2a^3b^4x + 9b^2a^2c^2dx = 18b^2c^3d^3 - 15a^3c^4d$ d'où l'on tire enfin $x = \frac{18b^2c^3d^3 - 15a^3c^4d}{2a^3b^4 + 9a^2b^2c^2d}$.

XXXIX.

Les quantités incomplexes sont celles qui n'ont qu'un terme.

Multiplication des quantités incomplexes, tirée des deux exemples précédens.

Dans les deux exemples précédens, on a eu besoin de sçavoir multiplier des quantités exprimées par un simple terme telle que $4ad$, $9c^2d$, &c. qu'on appelle communément quantités incomplexes ou monomes, & l'on a trouvé en même-temps ce qu'il falloit pour faire cette opération. La méthode générale qui résulte des raisonnemens qu'on a employés dans ces exemples particuliers, c'est de commencer par multiplier les coëfficiens; d'ajouter ensuite les exposans des mêmes lettres, & d'écrire de suite celles qui sont différentes. Ainsi, suivant cette regle, $3a^5b^3d \times 7a^2bd^2 = 21a^7b^4d^3$; $\frac{9}{3}a^2cd \times \frac{2}{5}ac^3bd = \frac{18}{15}a^3c^4bd^2 = \frac{6}{5}a^3c^4bd^2$; $\frac{2}{3}ac^2de \times 9a^4fg = 6a^5c^2defg$.

XL.

Soit l'équation $\frac{a^2 c}{2 b} + \frac{4 c x}{3 a} = \frac{5 a b}{c}$ $- 3 a$, en multipliant tous les termes par $2 b^2$ j'aurai $a^2 c + \frac{8 b^2 c x}{3 a} = \frac{10 a b^3}{c}$ $- 6 a b^2$, multipliant ensuite tous les termes par $3 a$, j'aurai $3 a^3 c + 8 b^2 c x = \frac{30 a^2 b^3}{c}$ $- 18 a^2 b^2$, & faisant encore la même opération pour chasser le diviseur c, il vient $3 a^3 c^2$ $+ 8 b^2 c^2 x = 30 a^2 b^3 - 18 a^2 b^2 c$, d'où l'on tire $x = \frac{30 a^2 b^3 - 18 a^2 b^2 c - 3 a^3 c^2}{8 b^2 c^2}$ qu'on peut encore écrire ainsi $x = \frac{30 a^2 b^3}{8 b^2 c2}$ $- \frac{18 a^2 b^2 c^2}{8 b^2 c^2} - \frac{3 a^3 c^2}{8 b^2 c^2}$; puisque $8 b^2 c^2$ divisant toute la quantité $30 a^2 b^3$ $- 18 a^2 b^2 c - 3 a^3 c^2$ divise chacune de ses parties.

Cinquieme exemple de résolution d'équations littérales.

Or, la valeur d'x, ainsi écrite, peut avoir une plus simple expression en réduisant chaque terme. Car, 1°. au lieu de $\frac{30 a^2 b^3}{8 b^2 c^2}$ on peut mettre $\frac{15 a^2 b}{4 c^2}$, parce qu'on peut regarder le numérateur, comme le produit $2 b$ par $15 a^2 b$, & le dénominateur comme celui de la même quantité $2 b^2$ par $4 c^2$; divisant donc l'un & l'autre par la même quantité $2 b^2$, il vient $\frac{15\,a^2\,b}{4\,c^2}$; 2°. au lieu de $\frac{18\,a^2\,b^2\,c}{8\,b^2\,c^2}$ on peut mettre $\frac{9\,a^2}{4\,c}$; car le numérateur eſt le produit de $2\,b^2\,c$ par $9\,a^2$, & le dénominateur eſt le produit de la même quantité $2\,b^2\,c$ par $4\,c$. Au lieu de $\frac{3\,a^3\,c^2}{8\,b^2\,c^2}$ on peut mettre $\frac{3\,a^3}{8\,b^2}$. Donc la valeur d'x réduite eſt $\frac{15\,a^2\,b}{4\,c^2} - \frac{9\,a^2}{4\,c} - \frac{3\,a^3}{8\,b^2}$.

XLI.

Diviſion des quantités incomplexes, tirée de cet exemple.

La méthode qu'il faudra ſuivre généralement dans toutes les opérations de même nature que les précédentes, c'eſt-à-dire, dans les diviſions des quantités incomplexes, eſt aiſée à tirer de ce qu'on vient de dire, ſurtout après avoir vû la multiplication des quantités incomplexes. On peut énoncer ainſi cette méthode.

Diviſer d'abord les coëfficiens ſi la diviſion eſt poſſible, ôter les lettres qui ont les mêmes expoſans aux numérateurs & aux dénominateurs, diviſer enſuite les lettres qui auront des expoſans différens dans le dénominateur & dans le numérateur, en retranchant les plus petits expoſans des plus grands, & en laiſſant les expoſans réſidus du côté où étoient les expoſans les plus grands. Quant aux lettres différentes, il n'y a autre choſe à faire qu'à les copier.

Comme cette opération eſt très-ſouvent néceſſaire, il eſt bon de joindre ici quelques exemples pour en faciliter l'uſage aux Commençans.

$$\frac{9a^5d^2b^2}{3a^4c^2d^2} = \frac{3ab^2}{c^2}, \quad \frac{18a^4bcd}{14ab^2} = \frac{9a^3cd}{7b}$$
$$\frac{27a^3b^2c^5}{3a^2bc^2} = 9abc^3, \quad \frac{5a^2b^4c^2}{15ab^3} = \frac{abc^2}{3}.$$

XLII.

Sixieme exemple de résolution d'équations littérales.

Soit l'équation $\frac{a^2x}{b-c} + dc = bx - ac$. Pour faire évanouir le diviseur $b-c$, il faudra ainsi que ci-dessus, multiplier tous les termes par ce diviseur, ce qui donnera $aax + \overline{b-c} \times dc = \overline{bx-ac} \times \overline{b-c}$, où j'ai observé, 1°. de mettre une barre au-dessus de $b-c$ dans le premier membre, parce que sans cela on pourroit croire qu'il n'y auroit que c qui dût multiplier dc; 2°. de mettre des barres au-dessus de $bx-ac$ & de $b-c$ dans le second membre, afin qu'on voye que ce sont ces deux quantités entieres qui doivent se multiplier.

Usage des barres au-dessus des quantités, le même que celui des parentheses.

C'est une attention qu'il faut avoir toutes les fois qu'on veut désigner des produits ou des puissances de quantités complexes; au lieu d'une barre, on se sert quelquefois de parentheses. Ainsi $a^4(a+b)$; ou $a^4 \times \overline{a+b}$ signifient également le produit de a^4 par $a+b$; $(a+b) \times (b+d)$ ou $\overline{a+b} \times \overline{b+d}$ le produit de $a+b$ par $a+d$; $(ff+gg)^3$, ou $\overline{ff+gg}^3$ la quantité $ff+gg$ élevée à la puissance dont l'exposant est 3, c'est-à-dire (art. XXXVII.) multipliée deux fois par elle-même.

Il s'agit maintenant de faire les multiplications indiquées par les signes $\times$. Soit proposé d'abord de multiplier dc par $b - c$, il est clair qu'il faudra multiplier dc par b & en retrancher le produit de dc par c; car $b - c$ étant plus petit que b de c, son produit par dc doit être plus petit que celui de b par cd, de la quantité $c \times dc$. Donc le produit de $b - c$ par dc est $bdc - ccd$.

Venons présentement au produit de $bx - ac$ par $b - c$; pour le trouver, je commence par remarquer qu'en prenant les deux termes $bx - ac$ pour une seule quantité, son produit par $b - c$ doit être, suivant ce qu'on vient de voir, la quantité dont le produit de $bx - ac$ par b surpasse le produit de $bx - ac$ par c. La question est donc réduite à deux multiplications de la nature de celles qu'on vient de faire & à une soustraction.

La premiere de ces deux multiplications, celle de $bx - ac$ par b, donnera $bbx - abc$; la seconde celle de $bx - ac$ par c, donnera $bxc - acc$; reste donc à retrancher cette derniere quantité de la premiere, ce qui donnera, suivant l'art. XXXIV. $bbx - abc - bcx + ac^2$, & c'est-là le produit de $bx - ac$ par $b - c$.

De sorte que l'équation $\frac{a^2 x}{b - c} + cd = bx - ac$, ou $a^2 x + \overline{b - c} \times cd = \overline{bx - ac} \times \overline{b - c}$ est devenue $a^2 x + bcd - c^2 d = b^2 x - abc - bcx + ac^2$, qui,

qui, par les transpositions ordinaires, donnera $bcd - c^2d + abc - ac^2 = b^2x - bcx - a^2x$, ou enfin ....

$$x = \frac{bcd - ccd + abc - ac^2}{b^2 - bc - a^2}.$$

XLIII.

Multiplication des quantités complexes ou Polynomes, tirée de l'article précédent.

Dans cet exemple, nous avons eu besoin de former une regle d'Algebre, dont nous ne nous étions pas encore servis, & qui pouvant être souvent utile, mérite que nous nous y arrêtions. On appelle cette regle multiplication des polynomes. Polynome ou quantité composée de plusieurs termes. Si on veut spécifier le nombre de termes d'une quantité, on l'appelle binome, lorsqu'elle en a deux; trinome, lorsqu'elle en a trois, &c.

Exemple de multiplication des Polynomes

Afin de s'exercer à la multiplication de ces sortes de quantités, il sera bon de prendre quelques exemples: soit premiérement $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ & $3ab^2 - 4bcd$ dont on demande le produit.

En raisonnant comme dans l'article précédent, on verra que, puisque la quantité $3ab^2 - 4bcd$ est plus petite que $3ab^2$ de $4bcd$, son produit par $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ doit être plus petit que celui de $3ab^2$ par $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ du produit de $4bcd$ par $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$.

En conséquence, j'écris d'abord ainsi le produit demandé $\overline{2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5}$

$\times\ 3\,a\,b^2 - 2\,a^3\,c^2 - 5\,a^4\,b + 6\,a^5$
$\times\ 4\,b\,c\,d$.

Faisant présentement les deux multiplications indiquées par les signes $\times$, de la même maniere que celles des quantités incomplexes, on aura $6\,a^4\,b^2\,c^2 - 15\,a^5\,b^3 + 18\,a^6\,b^2$ pour la valeur du premier produit $\overline{2\,a^3\,c^2 - 5\,a^4\,b + 6\,a^5} \times 3\,a\,b^2$. On aura de même $8\,a^3\,b\,c^3\,d - 20\,a^4\,b^2\,c\,d + 24\,a^5\,b\,c\,d$ pour la valeur du second produit $\overline{2\,a^3\,c^2 - 5\,a^4\,b + 6\,a^5} \times 4\,b\,c\,d$. Retranchant alors le second du premier, ainsi qu'il est indiqué dans l'expression précédente, on aura $6\,a^4\,b^2\,c^2 - 15\,a^5\,b^3 + 18\,a^6\,b^2 - 8\,a^3\,b\,c^3\,d + 20\,a^4\,b^2\,c\,d - 24\,a^5\,b\,c\,d$ pour le produit des deux quantités proposées.

XLIV.

Si le multiplicateur de la quantité précédente, outre les deux termes $3\,a\,b^2 - 4\,b\,c\,d$, avoit encore contenu un autre terme, $-5\,a\,b\,c$, par exemple, il est évident que pour avoir le produit total, il auroit fallu retrancher de la quantité précédente, le produit de $2\,a^3\,c^2 - 5\,a^4\,b + 6\,a^5$ par $5\,a\,b\,c$. Car on auroit dit, de même, que le multiplicateur $3\,a\,b^2 - 4\,b\,c\,d - 5\,a\,b\,c$ étant plus petit de $5\,a\,b\,c$ que le multiplicateur $3\,a\,b^2 - 4\,b\,c\,d$, son produit par $2\,a^3\,c^2 - 5\,a^4\,b + 6\,a^5$ doit être plus petit de $5\,a\,b\,c \times \overline{2\,a^3\,c^2 - 5\,a^4\,b + 6\,a^5}$ que le produit de $3\,a\,b^2 - 4\,b\,c\,d$ par $2\,a^3\,c^2 - 5\,a^4\,b + 6\,a^5$. Par la même raison, s'il

Case 1.

$$\begin{array}{r} 2ab - 4ac + ad \\ 3ab - 5ac + 2ad \\ \hline 6a^2b^2 - 12a^2bc + 3a^2bd \\ -10a^2bc + 20a^2c^2 - 5a^2cd \\ +4a^2bd - 8a^2cd + 2a^2d^2 \\ \hline 6a^2b^2 - 22a^2bc + 7a^2bd + 20a^2c^2 - 13a^2cd + 2a^2d^2 \end{array}$$

Case 2.

$$\begin{array}{r} 5a^3b - 2ab^3 + 4a^2c^2 \\ 2a^3b - ab^3 + 3a^2c^2 \\ \hline 10a^6b^2 - 4a^4b^4 + 8a^5bc^2 \\ -5a^4b^4 + 2a^2b^6 - 4a^3b^3c^2 \\ +15a^5bc^2 - 6a^3b^3c^2 + 12a^4c^4 \\ \hline 10a^6b^2 - 9a^4b^4 + 23a^5bc^2 + 2a^2b^6 - 10a^3b^3c^2 + 12a^4c^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2a^4x^2 - 3b^4y^2 \\ 2a^4x^2 + 3b^4y^2 \\ \hline 4a^8x^3 - 6a^4b^4x^2y^2 \\ +6a^4b^4x^2y^2 - 9b^8y^4 \\ \hline 4a^8x^4 - 9b^8y^4 \end{array}$$

Case 4.

$$\begin{array}{r} 5ab + 3ac - cc \\ -5ab + 3ac - cc \\ \hline -25a^2b^2 - 15a^2bc + 5abcc \\ +15a^2bc + 9a^2c^2 - 3ac^3 \\ -5abc^2 - 3ac^3 + c^4 \\ \hline -25a^2b^2 + 9a^2c^2 - 6ac^3 + c^4 \end{array}$$

Case 5.

$$\begin{array}{r} 2abx - bxy + aax + 3aay \\ 2ax - 3ay \\ \hline 4a^2bx^2 - 2abx^2y + 2a^3x^2 + 6a^3xy \\ -6a^2bxy + 3abxy^2 - 3a^3xy - 9a^3y^2 \\ \hline 4a^2bx^2 - 2abx^2y + 2a^3x^2 + 6a^3xy - 6a^2bxy + 3abxy^2 + 3a^3xy - 9a^3y^2 \end{array}$$

y avoit eu un autre terme, $3\,acc$, par exemple, au multiplicateur avec le ſigne $+$, il auroit fallu ajouter le produit $3\,acc \times \overline{2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5}$ aux produits précédens.

En général, on voit qu'un multiplicande quelconque, c'eſt-à-dire, une quantité quelconque à multiplier, étant donné avec la quantité qui doit lui ſervir de multiplicateur, il faudra former tous les produits du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur, & ajouter ou retrancher ces produits, ſuivant que les termes qui les auront donnés, auront le ſigne $+$ ou le ſigne $-$. Principe fondamental des multiplications

Pour exécuter cette opération avec autant d'ordre qu'il eſt néceſſaire, voici le procédé qu'on ſuit.

XLV.

On commence par écrire le multiplicateur ſous le multiplicande, & l'on tire une barre ſous le multiplicateur. Pour former enſuite la premiere ligne du produit que l'on doit écrire ſous cette barre, on multiplie le premier terme du multiplicateur par chacun des termes du multiplicande, en obſervant de laiſſer à chacun de ces produits, le ſigne du terme du multiplicande, ſi le premier terme du multiplicateur n'a aucun ſigne, & eſt par conſéquent cenſé avoir le ſigne $+$. Méthode qu'il faut ſuivre dans la multiplication.

Pour former enſuite la ſeconde ligne qui doit être écrite ſous la premiere, on multiplie le ſecond terme du multiplicateur par tous les termes du multiplicande, & ſi ce ſecond terme du multiplicateur a encore le ſigne $+$, c'eſt abſolument la même opération que pour la premiere ligne ; mais s'il a le ſigne $-$, à chacun des produits dont cette ligne eſt compoſée, on met un ſigne contraire à celui du terme du multiplicande auquel il a rapport. Toutes les autres lignes du produit étant formées de la même maniere, par le moyen des autres termes du multiplicateur multipliés par tous ceux du multiplicande, on tire une barre, & l'on fait l'addition ou réduction de tous ces produits particuliers ; la quantité qui vient alors eſt le produit demandé.

Nous venons de ſuppoſer que le premier terme du multiplicateur avoit le ſigne $+$, ſi cependant il avoit le ſigne $-$: on voit bien qu'à l'égard de ce terme, comme à l'égard des autres qui auroient auſſi le ſigne $-$, il faudroit obſerver de prendre les ſignes contraires à ceux des termes du multiplicande, en écrivant le produit de ces termes.

XLVI.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Afin d'éclaircir cette méthode, appliquons-la à un exemple. Soit propoſé de multiplier les deux quantités $2ab - 4ac + ad$ & $3ab - 5ac + 2ad$. La premiere étant priſe pour le multiplicande, & la ſeconde pour le multiplicateur, on écrit cette derniere ſous l'autre, & on tire enſuite une barre ſous ces deux quantités ; voyez la premiere caſe de la table ci-jointe.

Cela fait, on remarque que le premier terme du multiplicateur est censé positif, & que par conséquent tous les signes des termes de la premiere bande du produit doivent être les mêmes que ceux du multiplicande. On écrit donc, suivant cette remarque, à la premiere ligne sous la barre, le premier terme $6\,a^2\,b^2$ que donne le produit de $3\,a\,b$ par $2\,a\,b$, sans l'affecter d'aucun signe, ce qui est la même chose que si on lui donnoit le signe $+$.

On met ensuite $-$ pour le signe du second terme de la même bande, parce que c'est le signe du second terme du multiplicande, & on fait suivre ce $-$ de $12\,a^2\,b\,c$ produit de $4\,a\,c$ & de $3\,a\,b$. On conserve de même le signe $+$ du troisieme terme du multiplicande pour le troisieme terme de la premiere bande du produit, & l'on écrit pour le terme $3\,a^2\,b\,d$ produit de $a\,d$ & de $3\,a\,b$. La premiere bande du produit étant ainsi achevée, on remarque que le second terme du multiplicateur a le signe $-$, & que par conséquent il faut changer tous les signes du multiplicande pour former les termes de la seconde bande du produit. Ainsi le premier terme de cette seconde bande doit avoir $-$ qu'on écrit donc devant le produit $10\,a^2\,b\,c$ des deux termes $2\,a\,b$, $5\,a\,c$.

Le second terme de la même bande devant avoir $+$, puisque le second terme du multiplicande a le signe $-$, on écrit ce signe $+$ devant le produit $20\,a^2\,c^2$ des deux termes $4\,a\,c$, $5\,a\,c$.

Le troisieme terme $a\,d$ du multiplicande étant précedé du signe $+$, le troisieme terme de la seconde bande sera donc affecté du signe — qu'on écrit devant le produit $5\,a^2\,c\,d$ des deux termes $a\,d$, $5\,a\,c$.

Quant à la troisieme bande du produit cherché, comme le troisieme terme du multiplicateur a le signe $+$, il faudra garder tous les signes du multiplicande, & par conséquent le premier terme, c'est-à-dire le produit de $2\,a\,b$ & de $2\,a\,d$, sera $4\,a^2\,b\,d$ précédé du signe $+$; le second, c'est-à-dire, le produit de $4\,a\,c$ & de $2\,a\,d$, sera $8\,a^2\,c\,d$ précédé du signe $-$; & le troisieme, c'est-à-dire, le produit de $2\,a\,d$ par $a\,d$, sera $2\,a^2\,d^2$ précédé du signe $+$.

Afin que les Commençans puissent se fortifier dans la pratique de cette regle, j'ai joint dans la Table quelques autres exemples.

XLVII.

Sixieme exemple de résolution d'équations littérales.

Soit l'équation $\frac{a\,b^2 + a\,b\,d - a\,b\,x}{d - c} = a\,x - a\,c$, on fera d'abord évanouir le diviseur $d - c$ en multipliant $a\,x - a\,c$ par $d - c$; & l'on aura $a\,b^2 + a\,b\,d - a\,b\,x = \overline{a\,x - a\,c} \times \overline{d - c}$, ou $a\,b^2 + a\,b\,d - a\,b\,x = a\,d\,x - a\,c\,d - a\,c\,x + a\,c\,c$, qui, en passant tous les termes affectés d'x d'un côté, & les termes connus de l'autre, deviendra $a\,b^2 + a\,b\,d + a\,c\,d - a\,c\,c = a\,b\,x + a\,d\,x - a\,c\,x$, d'où l'on tire $x = \frac{a\,b^2 + a\,b\,d + a\,c\,d - a\,c^2}{a\,b + a\,d - a\,c}$.

Dans cette expreſſion, une certaine relation qu'on apperçoit entre les termes du dividende & ceux du diviſeur, peut faire ſoupçonner que la diviſion ſe feroit exactement, & invite par conſéquent à tenter cette opération, qui doit paroître aſſez aiſée à faire, après avoir vu celle de la multiplication dont elle eſt l'inverſe.

Maniere de faire la diviſion indiquée dans cet exemple.

Pour reconnoître donc ſi en effet $a b + a d - a c$ peut diviſer exactement $a b^2 + a b d + a c d - a c^2$. Soit d'abord diviſé un des termes de cette derniere quantité par un de ceux de la premiere, ſoit diviſé $a b^2$ par $a b$, par exemple, & ſoit écrit à part le quotient b. Soit enſuite multiplié ce quotient b, ou plutôt cette premiere partie du quotient cherché, par le diviſeur total $a b + a d - a c$, & ſoit retranché le produit $a b^2 + a b d - a b c$ du dividende, le reſte $a b^2 + a b d + a c d - a c^2 - a b^2 - a b d + a b c$, ou $a c d - a c^2 + a b c$, ſera encore à diviſer par le même diviſeur, & ſon quotient devra être ajouté au précédent b pour former le quotient total cherché.

Pour faire cette diviſion je prends encore un des termes de la quantité $a c d - a c c + a b c$ qui reſte à diviſer, & je le diviſe par un de ceux du diviſeur. Je choiſis $a c d$, par exemple, pour le diviſer par $a d$. Or, cette diviſion me donne c; je multiplie donc encore ce nouveau quotient par le diviſeur total $a b + a d - a c$, & je retranche le produit $a b c + a c d - a c^2$ du dividende reſtant $a c d - a c^2 + a b c$; & comme les deux quantités ſont les mêmes,

& qu'il ne reste par conséquent rien à diviser, je vois par-là que $b + c$ est exactement le quotient de la division de $a b^2 + a b d + a c d - a c^2$ par $a b + a d - a c$ & partant la valeur d'x.

XLVIII.

Méthode générale pour les diviseurs des quantités complexes.

Après avoir fait la division précédente, on voit à peu près comment on doit se conduire dans les autres exemples. Pour opérer dans la division avec un certain ordre, on écrit ordinairement le diviseur à droite du dividende en les séparant d'une barre verticale, ainsi que dans la division arithmétique. Ayant choisi dans le dividende un terme qui puisse se diviser par un de ceux du diviseur, on écrit le quotient de ces deux termes sous le diviseur, & on lui donne $+$ pour signe, si les deux termes qu'on a divisé l'un par l'autre ont le même signe, on lui donne, au contraire, le signe $-$, si ces deux termes sont de signes différens. Cela fait, on multiplie ce quotient par tous les termes du diviseur, & on écrit le produit qui en vient sous le dividende. Mais comme l'usage de ce produit doit être de le retrancher du dividende, on observe, en l'écrivant sous ce dividende, de mettre à chaque terme le signe contraire de celui que donneroit la multiplication.

Ce produit étant ainsi écrit, on tire une barre, & l'on fait la réduction avec le dividende, & la quantité qui reste, est à diviser de nouveau par le même diviseur. On y choisit de même un terme qui puisse se diviser par un de ceux du diviseur, & on écrit le terme qui en vient pour quotient à côté du premier, en observant de lui donner le ſigne +, ou le ſigne −, ſuivant que les deux termes qu'on aura diviſés, feront de mêmes ou de différens ſignes. On multiplie enſuite ce terme par tous ceux du diviſeur, & on écrit le produit ſous la quantité à diviſer, en obſervant de même que la premiere fois, de changer les ſignes que la multiplication donne. Tirant alors une barre & réduiſant, ſi tous les termes ne ſe réduiſent pas, on écrit le reſte ſous cette barre, & on pouſſe l'opération de la même maniere, juſqu'à ce que tous les termes du dividende ſoient évanouis.

Dans cette opération, on pourroit quelquefois être embarraſſé à choiſir parmi les termes du dividende & du diviſeur, ceux qui doivent ſervir à former les termes du quotient. Afin d'éviter tout tâtonnement dans ce choix, voici ce qu'on a imaginé.

Maniere d'éviter tout tâtonnement dans la diviſion.

On choiſit d'abord à volonté une lettre qui ſe trouve dans le dividende & dans le diviſeur, & l'on diſpoſe les termes de ces deux quantités de maniere que les premiers ſoient ceux où cette lettre a le plus grand expoſant, que le ſecond ſoit celui où la même lettre a le plus grand expoſant après le premier, & ainſi des autres termes. Ayant donc ordonné les deux quantités propoſées par rapport à la même lettre (c'eſt ainſi qu'on appelle cette opération) on n'a plus aucun tâtonnement à faire pour choiſir les termes qui doivent ſe diviſer, c'eſt toujours les premiers termes du dividende & du diviſeur qu'il faut prendre.

Ce que c'eſt qu'ordonner une quantité par rapport à une lettre.

Lorſqu'on aura formé par ces deux premiers termes du diviſeur & du dividende, le premier terme du quotient, & qu'on aura écrit avec des ſignes différens, le produit ſous le dividende, s'il arrive que cette opération ait introduit des termes qui n'ayent point de ſemblables dans le dividende ; il faudra, en écrivant la quantité qui vient après la réduction, avoir l'attention de les placer de maniere que la quantité qui reſte à diviſer, reſte toujours ordonnée par rapport à la même lettre que le diviſeur.

XLIX.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Afin de faciliter aux Commençans l'uſage de cette méthode, prenons quelques exemples. Suppoſons d'abord qu'il s'agiſſe de diviſer la quantité $31\,aabb + 2\,a^4 + 24\,b^4 - 38\,ab^3 - 13\,a^3b$ par la quantité $-3\,ab + 2\,aa + 4\,bb$.

Ayant écrit ces deux quantités, comme on le voit dans la Table ci-jointe (caſe premiere) où elles ſont ordonnées par rapport à la lettre a, je diviſe le premier terme $2\,a^4$ du dividende par le premier $2\,aa$ du diviſeur, & j'écris le quotient aa ſous le diviſeur, ſans lui donner aucun ſigne, c'eſt-à-dire que je le fais poſitif à cauſe que les termes $2\,a^4$ & $2\,aa$ ſont précédés des mêmes ſignes. Le quotient aa étant écrit, je le multiplie par tous les termes du diviſeur, & comme cette multiplication doit me donner pour premier terme $2\,a^4$ produit de aa par $2\,aa$ avec le ſigne $+$, je porte ce terme ſous le dividende avec le ſigne $-$ à cauſe qu'il doit être retranché.

De même le second terme $3\,b\,a^3$ produit de $a\,a$ par $3\,b\,a$ devant avoir le signe $-$ par la multiplication, j'écris sous le dividende $+\,3\,b\,a^3$ par la raison qu'il doit être soustrait. Enfin, parce que le troisieme terme $4\,b^2\,a^2$ produit de $a\,a$ par $4\,b\,b$ devroit avoir par la multiplication le signe $+$, je lui donne le signe $-$, en l'écrivant sous le dividende.

Cela fait, je tire une barre & je réduis, la quantité qui reste alors est $-\,10\,b\,a^3 + 27\,b^2\,a^2 - 38\,b^3\,a + 24\,b^4$ qu'il faut diviser par le même diviseur $2\,a^2 - 3\,b\,a + 4\,b\,b$. Pour faire cette division, je prends le premier terme $10\,b\,a^3$ de cette quantité à diviser, & je le divise par le premier terme $2\,a^2$ du diviseur, il vient $5\,b\,a$ pour quotient auquel je donne le signe $-$, à cause que les termes $10\,b\,a^3$ & $2\,a^2$ ne sont pas précédés des mêmes signes. Ayant écrit $-\,5\,b\,a$ à côté de a^2, il s'agit de multiplier ce nouveau terme du quotient par tous ceux du diviseur, & d'en changer les signes en les écrivant sous la quantité à diviser.

Je multiplie donc d'abord $5\,b\,a$ par $2\,a^2$, & comme le produit devroit être négatif à cause que le signe $-$ de $5\,b\,a$ doit changer, suivant les regles de la multiplication, les signes du multiplicande $2\,a^3 - 3\,b\,a + 4\,b^2$, & que, suivant ce que nous venons de dire, les produits doivent être changés de signe lorsqu'on les écrit sous la quantité à diviser, j'écris $+\,10\,b\,a^3$ sous cette quantité. De même au lieu de donner à $15\,b\,b\,a\,a$, produit de $3\,b\,a$ par $5\,b\,a$, le signe $+$ que l'on auroit par la multiplication, je l'écris avec le ſigne — ſous la quantité à diviſer. Enfin, au lieu de donner à $20\,b^3\,a$ produit de $3\,b\,a$ par $4\,b\,b$ le ſigne — que demanderoit la multiplication, je l'écris avec le ſigne + ſous la quantité à diviſer. Je tire alors une barre & je réduis, ce qui me donne $12\,b^2\,a^2 - 18\,b^3\,a + 24\,b^4$, quantité qu'il faut encore diviſer par $2\,a^2 - 3\,b\,a + 4\,b\,b$.

Pour faire cette nouvelle diviſion, je diviſe le terme $12\,b^2\,a^2$ par $2\,a^2$, & j'ai, pour troiſieme terme du quotient, $6\,b\,b$, que j'écris à côté des deux premiers en lui donnant le ſigne +, à cauſe que $12\,b^2\,a^2$ & $2\,a\,a$ ont le même ſigne.

Multipliant préſentement $6\,b^2$ par $2\,a^2$, j'ai $12\,b^2\,a^2$ auquel je donne le ſigne — en l'écrivant ſous la quantité à diviſer, à cauſe que la multiplication lui auroit donné le ſigne +. De même multipliant $6\,b^2$ par $3\,b\,a$, j'ai $18\,b^3\,a$ auquel je donne le ſigne + en l'écrivant ſous la quantité à diviſer, à cauſe que la multiplication lui auroit donné le ſigne —. Enfin, multipliant $6\,b\,b$ par $4\,b^2$, j'ai $24\,b^4$ auquel je donne le ſigne — contraire à celui que donneroit la multiplication. Réduiſant alors, je vois que tous les termes ſe détruiſent. Donc la diviſion eſt exacte. Donc le quotient cherché eſt $a\,a - 5\,b\,a + 6\,b\,b$.

L.

Autre exemple.

Qu'on ſe propoſe maintenant de diviſer $6\,b^3\,c - b^4 - 9\,c\,c\,b\,b + 4\,c^4$ par $-3\,c\,b + b\,b + 2\,c\,c$. J'écris ces deux quantités ſous la forme qu'on voit dans la ſeconde caſe de la Table ſuivante, en les ordonnant par rapport à la lettre c.

Diviſant alors les deux premiers termes, j'ai $2cc$ pour le premier terme du quotient, lequel étant multiplié par le diviſeur, donne, en changeant les ſignes, la quantité $-4c^4 + 6bc^3 - 2bbcc$, qui étant placée ſous le dividende, donne pour reſte $6bc^3 - 11bbcc + 6b^3c - b^4$, dans laquelle j'ai obſervé que le terme $6bc^3$ affecté de c^3 introduit par la multiplication, fut placé le premier, afin que la quantité reſtât ordonnée par rapport à c. Diviſant alors ce premier terme $6bc^3$ par $2cc$, j'ai $3bc$ pour quotient avec le ſigne $+$. Je multiplie de même ce nouveau terme du quotient par le diviſeur, & je porte les termes qui en viennent ſous le dividende, en changeant leurs ſignes. Faiſant la réduction enſuite, je n'ai plus que $-2bbcc + 3b^3c - b^4$ à diviſer. Le premier terme de cette quantité étant diviſé par celui du diviſeur, donne pour troiſieme terme du quotient b^2 affecté du ſigne $-$, à cauſe que les termes $2b^2c^2$ & $2c^2$ ſont de différens ſignes; & comme le produit de ce troiſieme terme par le diviſeur détruit tous ceux de la quantité à diviſer, je conclus que la diviſion eſt exacte, & que $2cc + 3bc - b^2$ eſt le quotient demandé.

L I.

Lorſqu'on veut ordonner le dividende & le diviſeur par rapport à une même lettre, ſi on trouvoit pluſieurs termes où cette lettre fût élevée à la même puiſſance, on tomberoit

Attention qu'il faut avoir en ordonnant, lorſqu'il y a pluſieurs lettres.

encore dans l'inconvénient du tâtonnement, à moins qu'on n'ordonnât encore ces termes par rapport à une autre lettre commune aux deux quantités.

Suppoſons, par exemple, que le dividende étant ordonné par rapport à la lettre d, on eût de ſuite $3\,a\,c\,c\,d^3 - c^3\,d^3 - 3\,a\,a\,c\,d^3 + a^3\,d^3$ pour les premiers termes du dividende, & que dans le diviſeur on eût de même $a\,a\,d^2 + c\,c\,d^2 - 2\,a\,c\,d^2$ pour les premiers termes, en arrangeant ainſi ces deux quantités $a^3\,d^3 - 3\,c\,a\,a\,d^3 + 3\,c\,c\,a\,d^3 - c^3\,d^3$; $a^2\,d^2 - 2\,c\,a\,d^2 + c\,c\,d^2$, c'eſt-à-dire, en les ordonnant par rapport à la lettre a, il n'y auroit aucun tâtonnement à craindre en faiſant la diviſion, pourvu qu'on obſervât, à chaque fois qu'on voudroit trouver un terme du quotient, que la quantité à diviſer fût toujours ordonnée de la même maniere. Pour exercer les Commençans à ces attentions dans la diviſion, j'ai joint encore quelques exemples dans la Table ſuivante.

L I I.

Dans la ſolution des Problêmes précédens, nous n'avons eu beſoin que d'une ſeule inconnue, parce qu'il n'y avoit, à proprement parler, dans ces Problêmes qu'une quantité à trouver. Mais, comme en avançant dans la ſcience de l'Algébre, on trouve des Problêmes où l'on eſt obligé d'employer pluſieurs inconnues, nous allons voir comment on les traite.

Problême *Etant données les peſanteurs ſpécifiques de*

Case 1.

$$\begin{array}{l|l}
2a^4 - 13ba^3 + 31b^2a^2 - 38b^3a + 24b^4 & 2a^2 - 3ba + 4b^2 \\
-2a^4 + 3ba^3 - 4b^2a^2 & a^2 - 5ba + 6b^2 \\
\hline
-10ba^3 + 27b^2a^2 - 38b^3a + 24b^4 & \\
+10ba^3 - 15b^2a^2 + 20b^3a & \\
\hline
+12b^2a^2 - 18b^3a + 24b^4 & \\
-12b^2a^2 + 18b^3a - 24b^4 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Case 2.

$$\begin{array}{l|l}
4c^4 - 9bbcc + 6b^3c - b^4 & 2cc - 3bc + bb \\
-4c^4 + 6bccc - 2bbcc & 2cc + 3bc - bb \\
\hline
6bc^3 - 11b^2c^2 + 6b^3c - b^4 & \\
-6bc^3 + 9b^2c^2 - 3b^3c & \\
\hline
-2b^2c^2 + 3b^3c - b^4 & \\
+2b^2c^2 - 3b^3c + b^4 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Case 3.

$$\begin{array}{l|l}
a^3d^3 - 3ca^2d^3 + 3c^2ad^3 - c^3d^3 + c^2a^2d^2 - c^3ad^2 & a^2d^2 - 2cad^2 + c^2d^2 + a^2c^2d \\
-a^3d^3 + 2ca^2d^3 - c^2ad^3 \qquad - c^2a^2d^2 & ad - cd \\
\hline
-ca^2d^3 + 2c^2ad^3 - c^3d^3 - c^3ad^2 & \\
+ca^2d^3 - 2c^2ad^3 + c^3d^3 + c^3ad^2 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Case 4.

$$\begin{array}{l|l}
a^2b^4 - c^2b^4 - ca^2b^3 + 5c^2ab^3 - 6ccaabb + 2c^3abb - c^4ab + c^6 & ab^2 - cb^2 + 2cab + c^3 \\
-a^2b^4 + cab^4 - 2c^2ab^3 \qquad - c^3abb & ab^2 + cb^2 - 3cab + c^3 \\
\hline
cab^4 - c^2b^4 - 3ca^2b^3 + 5c^2ab^3 - 6ccaabb + c^3abb - c^4ab + c^6 & \\
-cab^4 + c^2b^4 \qquad - 2c^2ab^3 \qquad - c^4bb & \\
\hline
-3ca^2b^3 + 3c^2ab^3 - 6c^2a^2b^2 + c^3ab^2 - c^4bb - c^4ab + c^6 & \\
+3ca^2b^3 - 3c^2ab^3 + 6c^2a^2b^2 \qquad + 3c^4ab & \\
\hline
c^3ab^2 - c^4bb + 2c^4ab + c^6 & \\
-c^3ab^2 + c^4bb - 2c^4ab - c^6 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Case 5.

$$\begin{array}{l|l}
6b^2a^2 - dba^2 - d^2a^2 + cb^2a + 7dcba - 12c^2b^2 & 2ba - da + 3cb \\
-6b^2a^2 + 3dba^2 \qquad - 9cb^2a & 3ba + da - 4cb \\
\hline
2dba^2 - d^2a^2 - 8cb^2a + 7dcba - 12c^2b^2 & \\
-2dba^2 + d^2a^2 \qquad - 3dcba & \\
\hline
-8cb^2a + 4dcba - 12c^2b^2 & \\
+8cb^2a - 4dcba + 12c^2b^2 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

deux matieres qui entrent dans un mixte, le volume & le poids total du mixte, trouver ce qu'il entre de chacune de ces deux matieres dans le mixte.

dans lequel on emploie deux inconnues.

Que le nombre de pouces cubes contenus dans ce mixte, ou, en général, ſon volume de quelque maniere qu'il ſoit meſuré, ſoit exprimé par . . . . a.

Que ſon poids total ſoit exprimé par . . b.

Que la quantité de la premiere matiere contenue dans le mixte, par exemple, ce qu'il a de pouces cubes de cette matiere, ſoit exprimé par . . . . x.

Que le poids d'un pouce cube de cette matiere, ou, en général, ſa peſanteur ſpécifique ſoit c.

La quantité de la ſeconde matiere . . . y.

Sa peſanteur ſpécifique . . . . d.

On aura pour le poids de la quantité de la premiere matiere qui entre dans le mixte $c\,x$.

Car, ſi x exprime le nombre de pouces cubes de cette matiere, & c le poids de chaque pouce cube, leur poids total ſera le produit de ces deux nombres. On aura de même pour le poids de la quantité de la ſeconde matiere $d\,y$.

Or, comme ces deux poids doivent, étant ajoutés, faire le poids total du mixte, on a donc l'équation

$$c\,x + d\,y = b$$

mais cette équation ne ſauroit ſuffire pour réſoudre le Problême; car ſi on veut en dégager l'une des inconnues, x, par exemple, on trouve

$$b = \frac{b - d\,y}{c}$$

qui ne peut apprendre à connoître x qu'en ſuppoſant qu'on connoiſſe y. Il y a donc quelqu'autre opération à faire pour connoître y. Pour y parvenir, il faut voir ſi on a fait attention à tout ce qu'on demandoit dans l'énoncé de la queſtion, ou, pour parler comme les Algébriſtes, ſi on a rempli toutes les conditions du Problême ; pour peu qu'on y réfléchiſſe, on verra qu'on n'a exprimé qu'une des deux conditions, celle que le poids total du mixte ſoit b, & qu'on n'a pas employé celle qui nous apprend que la quantité de la premiere matiere ajoutée avec la quantité de la ſeconde doit faire le volume total. On aura donc, par cette ſeconde condition, l'équation

$$x + y = a$$

qui, ainſi que la premiere, ne nous apprend la valeur de x, qu'au moyen de celle de y, en nous donnant

$$x = a - y.$$

Mais ſi on ne peut pas, par aucune de ces deux équations priſes ſéparément, trouver x indépendamment de y, on trouve bientôt, en ſe ſervant à la fois de l'une & de l'autre, le moyen d'avoir y entiérement connu. Car, puiſque chacune de ces deux équations donne une valeur de x, on peut égaler ces deux valeurs, ce qui donne l'équation

$$\frac{b - dy}{c} = a - y$$

de laquelle on tire, par les méthodes précédentes, $b - dy = ac - cy$, ou $ac - b = cy$

$= cy - dy$, ou enfin $y = \frac{ac - b}{c - d}$.

y étant connu, on voit bien que x, qui est également $a - y$, ou $\frac{b - dy}{c}$, est aussi connu. On n'a donc qu'à mettre dans celle qu'on voudra de ces deux quantités, dans la premiere $a - y$, par exemple, à la place de y, $\frac{ac - b}{c - d}$, & l'on aura $a - \frac{ac - b}{c - d}$ pour la valeur de x.

En examinant la valeur précédente $a - \frac{ac - b}{c - d}$, on découvre bientôt qu'on peut la réduire; car si on veut mettre a au même dénominateur que la fraction $\frac{ac - b}{c - d}$, il faut le multiplier par $c - d$, ce qui donne $\frac{ac - ad}{c - d}$ au lieu de a; ainsi il ne s'agit plus que de retrancher de cette fraction la seconde $\frac{ac - b}{c - d}$. Retranchant pour cela leurs numérateurs, & divisant le reste par le dénominateur commun, on aura $\frac{ac - ad - ac + b}{c - d}$ ou $\frac{b - ad}{c - d}$ pour la valeur réduite de x.

Les quantités demandées, tant de la premiere, que de la seconde matiere qui entrent dans le mixte, sont donc exprimées, l'une par $\frac{ac - b}{c - d}$

& l'autre par $\frac{b - ad}{c - d}$, ainſi le Problême eſt réſolu.

LIII.

Si au lieu de ſubſtituer la valeur $\frac{ac - b}{c - d}$ de y dans $a - y$, on l'avoit ſubſtituée dans $\frac{b - dy}{c}$ qui eſt également la valeur de x, on auroit eu $\frac{b - d \times \overline{\frac{ac - b}{c - d}}}{c}$ qui d'abord ne paroît guères être la même valeur que $\frac{b - ad}{c - d}$. Mais comme on ſait que les valeurs $a - y$ & $\frac{b - dy}{c}$ de x ſont égales, & que ce n'eſt même que parce qu'elles le ſont qu'on a déterminé la valeur de y, on doit être ſûr qu'en examinant ces deux dernieres valeurs de x exprimées en quantités connues, on trouvera leur identité. Voici comment on peut parvenir à réduire l'une à l'autre.

On donnera d'abord le dénominateur $c - d$ à la lettre b, ce qui ſe fera en le multipliant par $c - d$, c'eſt-à-dire, en mettant $\frac{bc - db}{c - d}$ au lieu de b, & alors la quantité précédente $\frac{b - \frac{d \times \overline{ac - b}}{c - d}}{c}$ ſe changera en $\dfrac{\dfrac{bc - bd - d \times \overline{ac - b}}{c - d}}{c}$, ou $\dfrac{bc - bd - d \times \overline{ac - b}}{cc - dc}$; mais au lieu de $d \times \overline{ac - b}$, on peut écrire $acd - bd$, & comme cette quantité doit être retranchée de $bc - bd$, la quantité précédente $\dfrac{bc - bd - d \times \overline{ac - b}}{cc - dc}$ deviendra donc en réduisant $\dfrac{bc - dca}{c^2 - dc}$, qui, en divisant le numérateur & le dénominateur par la même quantité c, devient enfin $\dfrac{b - da}{c - d}$ même valeur que ci-dessus.

L I V.

Application de la solution précédente à un exemple.

Pour faire présentement une application de la solution générale qu'on vient de trouver, supposons que le mixte soit composé d'or & d'argent, * que son poids total soit de 30 onces, son volume de 3 pouces cubes, le poids du pouce cube d'or de 12 $\frac{2}{3}$ onces, celui du pouce cube d'argent de 6 $\frac{8}{9}$ onces.

* Le Problême qu'Archimede eut à résoudre, lorsqu'on lui proposa de déterminer la quantité d'argent qui étoit allié avec l'or dans la Couronne du Roi Hiéron, ne pouvoit pas être autre chose que celui qu'on vient de voir aussi-tôt qu'il eut déterminé la pesanteur spécifique du métal de cette Couronne, ce qu'il fit en examinant combien elle perdoit de son poids en la pesant dans l'eau.

on aura $a = 3$, $b = 30$, $c = 12\frac{2}{3}$, $d = 6\frac{8}{9}$; ſubſtituant donc ces valeurs dans les deux formules générales $x = \frac{b - da}{c - d}$ & $y = \frac{ac - b}{c - d}$ elles deviendront $x = \frac{21}{13}$ & $y = \frac{18}{13}$, c'eſt-à-dire, que le mixte contiendra $\frac{21}{13}$ pouces cubes d'or & $\frac{18}{13}$ pouces cubes d'argent.

L V.

On découvre aiſément, par ce qu'on a vu dans le Problême précédent, que toutes les fois qu'on aura employé deux inconnues dans une queſtion, il faudra deux équations pour les dégager; & que lorſqu'on demande deux quantités dans un Probléme, il faut auſſi qu'on donne deux conditions pour les déterminer, afin qu'on puiſſe tirer de ces deux conditions les deux équations néceſſaires. Pour montrer la maniere d'employer ces conditions, nous donnerons encore le Problême ſuivant.

L V I.

Autre Problême, où l'on emploie deux inconnues.

Deux ſources qui coulent chacune uniformément, ont rempli enſemble un réſervoir a, *l'une en coulant pendant un temps* b, *l'autre pendant un temps* c; *les deux mêmes ſources ont rempli un autre réſervoir* d; *la premiere coulant pendant le temps* e, *la ſeconde pendant le temps* f: *on demande la dépenſe de chacune de ces ſources.*

Soient x & y ces dépenſes, c'eſt-à-dire, par exemple, ce que chacune de ces deux ſources fourniroit de muids d'eau par jour, en ſuppoſant que les réſervoirs a & d fuſſent meſurés en muids, pendant que les temps b, c, e, f seroient comptés en jours.

On aura bx pour la quantité d'eau fournie par la premiere source pendant le temps b; & de même cy pour la quantité d'eau fournie par la seconde source dans le temps c. Mais ces deux quantités d'eau par la premiere condition du Problème doivent être égales au réservoir a, on a donc l'équation

$$bx + cy = a.$$

On aura de même ex, fy pour les quantités d'eau fournies par les mêmes sources pendant les temps e, f, & par conséquent la seconde condition donnera

$$ex + fy = d.$$

Il ne s'agit plus maintenant que de tirer de ces deux équations les valeurs de x & de y, ce qui se fera, ainsi que dans le problême précédent, en tirant une valeur de x en y de chacune de ces deux équations & en les égalant ensuite. La premiere sera $\frac{a - cy}{b}$, la seconde $\frac{d - fy}{e}$ égalant donc ces deux valeurs, on aura $\frac{a - cy}{b} = \frac{d - fy}{e}$, ou $ae - cey = bd - bfy$, ou $ae - bd = cey - bfy$, ou enfin

$$y = \frac{ae - bd}{ce - bf}.$$

Substituant cette valeur de y dans l'une des deux valeurs précédentes de x, dans $\frac{a - cy}{b}$ par exemple, il viendra $x = \dfrac{a - c \times \dfrac{\overline{ae - bd}}{\overline{ce - bf}}}{b}$

ou $x = \dfrac{a \times \overline{ce - bf} - c \times \overline{ae - bd}}{b \times \overline{ce - bf}}$

en mettant le premier terme a au même dénominateur que le ſecond, & en multipliant les deux dénominateurs l'un par l'autre.

Faiſant enſuite les multiplications indiquées dans cette valeur & réduiſant, on aura

$$x = \frac{cd - af}{ce - bf}.$$

Il n'eſt donc plus queſtion maintenant que d'avoir les valeurs particulieres de a, b, c, d, e, f, pour les ſubſtituer dans ces deux valeurs générales de x & de y, afin d'en tirer telle ſolution particuliere qu'on voudra.

Au lieu de commencer par dégager x dans les deux équations précédentes, & d'égaler les deux valeurs qu'elles donnent, afin d'avoir y, il eſt clair qu'on pouvoit également commencer par dégager y, en égalant enſuite ſes deux différentes valeurs pour en tirer x, & que par cette opération on ſeroit parvenu néceſſairement au même réſultat.

Exemple du Problême précédent en nombres.

LVII.

Pour faire préſentement quelque application de ce Problême, ſuppoſons que la premiere ſource ayant coulé deux jours, & la ſeconde trois, elles ayent rempli un réſervoir de 195 muids. Enſuite la premiere ſource ayant coulé cinq jours, & la ſeconde quatre, elles ayent rempli un réſervoir de 330 muids.

On aura donc $a = 195$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 330$, $e = 5$, $f = 4$, & par conſéquent $dc - af = 210$, $ce - bf = 7$, $ae - db = 315$, d'où $x = \frac{dc - af}{ce - bf}$ $= \frac{210}{7} = 30$

$$\& \; y = \frac{ae - bd}{ce - bf} = \frac{315}{7} = 45\,;$$

ainſi la premiere ſource, dans cet exemple, fournit 30 muids par jour, & la ſeconde 45.

LVIII.

Suppoſons préſentement que la premiere ſource ayant coulé pendant 4 jours, & la ſeconde pendant 6 jours, elles ayent rempli un réſervoir de 120 muids. Enſuite que la premiere ayant coulé 3 jours, & la ſeconde 7, elles ayent rempli un réſervoir de 190 muids.

Autre exemple.

On aura, dans ce cas, $a = 120$, $b = 4$, $c = 6$, $d = 190$, $e = 3$, $f = 7$, & par conſéquent $dc - af = 300$, $ce - bf = -10$, $ae - bd = -400$, ce qui donnera

$$x = \frac{dc - af}{ce - bf} = \frac{300}{-10}$$

$$\& \; y = \frac{ae - bd}{ce - bf} = \frac{-400}{-10}.$$

La premiere fois qu'on aura trouvé de ſemblables valeurs, c'eſt-à-dire, des quantités négatives diviſées par des quantités négatives, & des poſitives, diviſées par des poſitives; on aura dû être embarraſſé à ſavoir ce qu'elles

Singularité des expreſſions où l'on arrive dans cet exemple.

devoient ſignifier, & ceux qui auront craint de faire de mauvais argumens métaphyſiques, auront cherché à reprendre la queſtion un peu plus haut, afin d'éviter ces ſortes de diviſions : voici, par exemple, ce qu'on aura pû faire pour cela dans cette queſtion-ci.

Maniere de reconnoître ce qu'elles peuvent ſignifier.

On aura repris les deux équations générales $bx + cy = a$, & $ex + fy = d$, & ſubſtituant, dans ces équations pour a, b, c, d, e, f, les valeurs que ces lettres ont dans cet exemple, on aura eu $4x + 6y = 120$, & $3x + 7y = 190$. Tirant, de ces équations, $x = 30 - \frac{3y}{2}$, & $x = \frac{190}{3} - \frac{7}{3}y$, on aura égalé ces deux valeurs, ce qui aura donné $30 - \frac{3y}{2} = \frac{190}{3} - \frac{7y}{3}$, ou $\frac{7}{3}y - \frac{3}{2}y = \frac{190}{3} - 30$, ou $y = 40$.

Subſtituant enſuite cette valeur de y dans $30 - \frac{3}{2}y$ valeur de x, on aura eu $x = 30 - 60$, c'eſt-à-dire, $x = - 30$. Par cette voie, on aura vu, ſans en pouvoir douter, que le quotient de $- 400$ par 10 eſt $+ 40$, & que celui de $+ 300$ par $- 10$ eſt $- 30$.

LIX.

Théorêmes généraux concernant les ſignes des quotiens ou des produits.

On aura bientôt après regardé comme des principes généraux que
le $+$ diviſé par le $+$ donnoit le $+$,
le $+$ diviſé par le $-$ donnoit le $-$,
le $-$ diviſé par le $+$ donnoit le $-$,
le $-$ diviſé par le $-$ donnoit le $+$,
& de même pour la multiplication.

Ces principes auront été d'autant plus faciles à imaginer qu'on y étoit comme conduit, par les réflexions qu'on avoit dû faire ſur les ſignes qu'on trouvoit aux termes des produits & des quotiens, en pratiquant les préceptes donnés pour la multiplication & pour la diviſion des quantités complexes.

Mais s'il eſt facile qu'on ſe doute, pour ainſi dire, de ces principes, on ſent bien auſſi qu'on ne ſauroit les affirmer qu'après y avoir fait beaucoup de réflexions, & il y a apparence que les premiers Analiſtes n'en auront été ſûrs qu'après les avoir vérifiés dans beaucoup d'exemples.

L X.

Pour nous aſſurer que la multiplication de $-$ par $-$ doit toujours donner $+$ au produit, voyons quelle lumiere nous pouvons tirer de la méthode générale des multiplications donnée, art. X L V. Suivant cette méthode, on voit très-clairement que le produit d'une quantité telle que $a - b$ par une autre $c - d$, doit être $ac - bc - ad + bd$; & on voit par conſéquent en même-temps que le terme bd qui eſt venu par la multiplication de b & de d a le ſigne $+$, tandis que ſes produiſans b & d ont le ſigne $-$. Il ne reſte donc plus qu'à ſavoir ſi lorſque deux quantités négatives telles que $-b$ & $-d$ ne ſeront précédées d'aucune quantité poſitive, leur produit ſera encore $+bd$. Or, c'eſt ce dont il eſt facile de reconnoître la vérité, puiſque la méthode par laquelle on a découvert que le produit de $a - b$ par $c - d$ étoit $ac - bc - ad$

On démontre que $-b$ par $-d$ eſt $+bd$, quoique ces quantités ne ſoient précédées de rien.

$+ b d$, ne ſpécifiant aucune grandeur particuliere ni à a ni à c, doit avoir encore lieu lorſque ces quantités ſont égales à zéro : or, en ce cas, le produit $a c - b c - a d + b d$ ſe réduit à $+ b d$, donc $- b \times - d = + b d$.

L X I.

Les autres cas ſe démontreroient de même.

Quant aux autres cas, c'eſt-à-dire, à la multiplication & à la diviſion de $+$ par $-$, on les juſtifieroit de la même maniere.

L X I I.

Comment la valeur négative qu'on a trouvée réſout le Problême.

Pour revenir préſentement à notre derniere application du Problême précédent, remarquons qu'après avoir trouvé que $x = - 30$ & $y = + 40$, on a dû avoir encore une autre eſpece d'embarras, c'étoit de ſavoir ce que ſignifioit cette valeur de x : pour le découvrir ſûrement, le chemin qu'il eſt vraiſemblable qu'on aura tenu, c'eſt de remonter aux conditions du Problême, ou, ce qui revient au même, aux équations $4 x + 6 y = 120$ & $3 x + 7 y = 190$ qui les expriment alors, & de voir comment les valeurs $- 30$ & $+ 40$ de x & de y conviennent à ces équations. On trouve, premiérement, que $4 x$ doit être, en ce cas, $- 120$ & que $6 y$ eſt 240, d'où par conſéquent $4 x + 6 y$ eſt $- 120 + 240$, qui eſt en effet égal à 120. On trouve de même que $3 x + 7 y$ eſt $- 90 + 280$ qui ſe réduit à 190.

Voyant donc comment les valeurs $- 30$ & $+ 40$ de x & de y, ſatisfont aux équations $4 x + 6 y = 120$ & $3 x + 7 y = 190$, on découvre en même-temps comment elles ſatiſsont aux conditions du Problême; car puisque l'usage que l'on fait des quantités $4x$ & $3x$, qui expriment alors les quantités d'eau dépensées par la premiere source, dans la premiere & dans la seconde opération, est de les retrancher de $6y$ & de $7y$, qui expriment les quantités d'eau fournies dans les mêmes opérations par la seconde source, il faut que dans ce cas, on regarde la premiere source comme dérobant de l'eau aux réservoirs, au lieu d'en fournir, comme elle faisoit dans l'autre exemple, & comme on l'avoit supposé en exprimant les conditions du Problême.

L'on voit, en cette occasion, un exemple de la généralité de l'analyse, qui fait trouver dans une question des cas que l'on n'avoit pas prévû d'abord pouvoir y être renfermés.

LXIII.

Les inconnues devenant négatives, doivent être prises dans un sens différent de celui de l'énoncé du Problême.

Dans presque toutes les questions résolues généralement, on a trouvé des cas de même nature que le précédent; & l'on en a toujours conclu, que lorsque la valeur de l'inconnue devenoit négative, la quantité qu'elle exprimoit devoit être prise dans un sens contraire à celui suivant lequel on l'avoit employée, en exprimant les conditions du Problême.

Il en est de même des connues.

Ce qu'on vient de dire des inconnues, se doit dire aussi des connues, c'est-à-dire, que dans les applications qu'on fera d'une solution générale, si on fait négatives quelques-unes des quantités données a, b, &c. dans les Problêmes, cela signifiera que dans l'application particuliere, ces quantités doivent être prises dans un ſens contraire à celui ſuivant lequel on les prenoit dans un ſens contraire.

LXIV.

Exemple de l'uſage des quantités connues faites négatives.

Qu'on ſe propoſe, par exemple, de trouver quelles doivent être, dans le Problême précédent, les dépenſes des deux ſources, pour que la ſeconde fourniſſant de l'eau pendant ſix jours, tandis que la ſeconde en dérobe pendant trois jours, un réſervoir de 180 muids ſoit rempli; & que la premiere ſource enſuite fourniſſant de l'eau pendant 3 jours, & la ſeconde pendant 4 jours, un réſervoir de 320 muids ſoit rempli.

On n'aura qu'à faire dans la ſolution générale $a = 180$, $b = -3$, $c = 6$, $d = 320$, $e = 3$, $f = 4$.

Et l'on aura $dc = 1920$, $af = 720$, $ce = 18$, $bf = -12$, $ae = 540$, $db = -960$, & par conſéquent $dc - af = 1200$, $ce - bf = 30$, $ae - db = 1500$, qui donnent $x = \frac{de - af}{ce - bf} = 40$ & $y = \frac{ae - db}{ce - bf} = 50$, par leſquelles on apprend que la dépenſe de la premiere ſource eſt de 40 muids par jour, ſoit pour dérober comme elle fait dans la premiere opération, ſoit pour fournir, ainſi qu'il arrive dans la ſeconde; & que la dépenſe de la ſeconde eſt de 50 muids par jour qu'elle fournit dans chacune des deux opérations. Il étoit ſi naturel d'imaginer que b devoit être négatif dans cette application, & ſi aiſé de s'en aſſurer en remontant à l'uſage qu'on fait de cette lettre, en exprimant les conditions du Problême, qu'il eſt inutile de s'arrêter à le faire voir.

LXV.

Pour faciliter aux Commençans la maniere d'étendre les ſolutions des Problêmes aux cas où les quantités données ſont priſes dans un ſens contraire à celui où elles avoient été priſes d'abord, nous prendrons encore un exemple dans un autre Problême que le précédent, nous reviendrons au Problême de l'art. XXIV. où il s'agit de trouver la rencontre de deux Courriers, & nous chercherons à tirer de la ſolution générale celle du cas ſuivant.

Autre exemble du même uſage des quantités connues faites négatives.

Deux Courriers ſont à la diſtance de 50 lieues, l'un étant, par exemple, à Lille, l'autre à Paris. Le premier part de Lille à 8 heures du ſoir pour aller à Paris en faiſant 4 lieues par heure. Le ſecond part le même jour de Paris à 11 heures du matin pour aller à Lille, & fait 3 lieues par heure; on demande à quelle diſtance de Paris ils ſe rencontreront.

En comparant cet énoncé avec celui du Problême général, on voit d'abord que la lettre c, qui exprimoit la marche du premier Courrier dans un temps donné, doit être négative, puiſque dans la ſolution générale on ſuppoſoit que le premier Courrier s'éloignoit, & qu'il vient, dans ce cas-ci, au devant du ſecond. On voit enſuite que la lettre b, qui exprimoit le nombre d'heures d'avance du premier Courrier, doit être auſſi négative, puiſqu'il eſt parti plus tard.

Ainsi on n'aura qu'à faire dans la formule générale $x = \frac{ade + bce}{de - cf}$, $= 50$, $b = -9$ $c = -4$, $d = 1$, $e = 3$, $f = 1$, & l'on aura $x = \frac{50 \times 1 \times 3 - 9 \times -4 \times 3}{1 \times 3 + 4 \times 1}$ $= \frac{150 + 108}{3 + 4} = \frac{258}{7} = 36 \frac{6}{7}$ qui apprend que lorsque le Courrier de Paris aura fait $36 \frac{6}{7}$ lieues, il aura joint celui de Lille.

LXVI.

Un des usages des plus étendus de l'Algébre & qui montre le mieux l'avantage qu'on a de prendre à volonté, ainsi qu'on vient de faire, les signes des quantités données en général dans les Problêmes, c'est de rapporter à la solution des équations qu'on a prises généralement, toutes celles dans lesquelles les inconnues sont disposées de la même maniere, mais avec des signes & des coëfficiens quelconques. Par exemple, avec les deux é uations $bx + cy = a$ & $ex + fy = d$ qu'on a résolues dans l'article LVI. on résoudra toujours deux équations du premier degré quelles qu'elles soient, pourvû qu'elles ne renferment que deux inconnues.

Deux équations du premier degré à deux inconnues, peuvent toujours être rapportées aux précédentes.

Exemple.

Qu'on ait, par exemple, à résoudre les deux équations $mnx = ppy - hhg$ & $mny = p^3 - nnx$. Pour les comparer aux premieres, on commencera par les écrire ainsi $mnx - p^2 y = -hhg$ & $nnx + nmy = p^3$, les comparant alors terme à terme avec les deux équations

$$bx + cy = a \ \& \ ex + fy = d.$$

La premiere avec la premiere, & la seconde avec la seconde, on aura
$b = mn$, $c = -p^2$, $a = -hhg$, $e = n^2$
$f = mn$, $d = p^3$.

Ce qui donnera
$cd = -p^5$, $af = -mnhhg$, $ce = -p^2n^2$, $bf = mmnn$, $ae = -h^2n^2g$, $bd = mnp^3$, & par conséquent $cd - af = -p^5 + mnhhg$, $ce - bf = -m^2n^2 - p^2n^2$, $ae - bd = -h^2n^2g - mnp^3$.

Or, substituant ces valeurs dans les formules générales $x = \frac{cd - af}{ce - bf}$ & $y = \frac{ae - bd}{ce - bf}$, on aura enfin $x = \frac{p^5 - mnh^2g}{m^2n^2 + p^2n^2}$ & $y = \frac{h^2gn^2 + mnp^3}{m^2n^2 + p^2n^2}$.

LXVII.

Supposons présentement qu'on ait les équations $\frac{3mpx}{p-q} = \frac{ppy}{p+q} - \frac{2nq}{p-q}$ & $mx + \overline{p+q} \times y = \frac{nq}{p-q}$ en mettant la premiere sous cette forme.........
$\frac{3mpx}{p-q} - \frac{pp}{p+q}y = -\frac{2nq}{p-q}$, on aura, en la comparant à l'équation générale, $bx + cy = a$, $b = \frac{3mp}{p-q}$, $c = -\frac{pp}{p+q}$, $a = -\frac{2nq}{p-q}$, & en comparant la se- Autre exemple.

conde à l'équation $ex + fy = d$, on aura $e = m$, $f = p + q$, $d = \frac{nq}{p - p}$, & ces valeurs étant substituées dans la formule $x = \frac{cd - af}{ce - bf}$, donneront . . . .

$$x = \frac{-\frac{pp}{p+q} \times \frac{qn}{p-q} + \frac{2nq}{p-q} \times \overline{p+q}}{-\frac{pp}{p+q} \times m - \frac{3mp}{p-q} \times \overline{p+q}}.$$

Pour réduire cette quantité, je commence par multiplier le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{2nq \times \overline{p+q}}{p-q}$ par $p+q$, ce qui la change en $\frac{2nq \times \overline{p+q}^2}{\overline{p-q} \times \overline{p+q}}$, par ce moyen le numérateur entier de la valeur de x devient $\frac{-pp \times qn + 2nq \times \overline{p+q}^2}{\overline{p-q} \times \overline{p+q}}$, ou $\frac{qn \times 2 \times \overline{p+q}^2 - pp}{\overline{p-q} \times \overline{p+q}}$, ou $qn \times \frac{pp + 4pq + 2qq}{\overline{p-q} \times \overline{p+q}}$.

Je travaille ensuite sur le dénominateur de la valeur de x, en mettant ses deux parties

ties au même dénominateur, ce qui donne

$$\frac{-p^2\times\overline{p-q}\times m-3mp\times\overline{p+q}^2}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}},$$

ou $\dfrac{-mp\times\overline{pp-pq+3\times\overline{p+q}^2}}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}$, ou

enfin $-\dfrac{mp\times\overline{4pp+5pq+3qq}}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}$.

Ces deux opérations changent la valeur précé-

dente de x en $\dfrac{qn\times\dfrac{\overline{pp+4pq+2qq}}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}}{-mp\times\dfrac{\overline{4pp+5pq+3qq}}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}}$;

mais comme le numérateur & le dénominateur de cette fraction sont chacun divisés par $\overline{p+q}\times\overline{p-q}$, j'ôte ce diviseur, & la valeur de x devient

$\dfrac{qn\times\overline{pp+4pq+2qq}}{-mp\times\overline{4pp+5pq+3qq}}$, ou

$-\dfrac{qn\times\overline{pp+4pp+2qq}}{mp\times\overline{4pp+5pq+3qq}}$, ou

$-\dfrac{qn}{mp}\times\dfrac{pp+4pq+2qq}{4pp+5pq+3qq}$, ou enfin

$$x = \frac{-nqpp - 4pqqn - 2nq^3}{4mp^3 + 5mp^2q + 3mpqq}$$

ſubſtituant maintenant les mêmes valeurs de a, b, c, &c. dans la formule générale $y = \frac{ae - bd}{ce - bf}$, on aura............

$$y = \frac{-\frac{2nq}{p-q} \times m - \frac{3mp}{p-q} \times \frac{nq}{p-q}}{-\frac{pp}{p+q} \times m - \frac{3mq}{p-q} \times \overline{p+q}}$$

au numérateur de laquelle je donne cette forme

$$\frac{-2mnq \times (p - q) - 3mpqn}{\overline{p - q}^2},$$

en multipliant le numérateur & le dénominateur de la fraction $-\frac{2nqm}{p-q}$ par $p - q$. Je réduis enſuite cette nouvelle forme, & elle devient $\frac{mnq \times \overline{-5p + 2q}}{\overline{p-q}^2}$.

Quant au dénominateur de la valeur de y, comme il eſt le même que celui de la valeur de x, il ſe réduira de même, & l'on aura partant

$$y = \frac{\frac{\overline{2q - 5p}}{\overline{p-q}^2}}{-mp \times \frac{4pp + 5pq - 3qq}{\overline{p+q} \times \overline{p-q}}},$$

ou en effaçant les diviſeurs communs $p - q$, & en réduiſant, ...

$$y = \frac{qn \times \frac{\overline{5p - 2q}}{p - q}}{p \times \frac{4pp + 5pq + 3qq}{p + q}}$$ qui,

en faiſant paſſer le diviſeur $p + q$ en haut, & le diviſeur $p - q$ en bas, ſuivant les regles des diviſions des fractions, devient enfin

$$y = \frac{qn \times \overline{p + q} \times \overline{5p - 2q}}{p \times \overline{p - q} \times \overline{4p^2 + 5pq + 3qq}}$$, ou

$$y = \frac{-2q^3n + 5p^2qn + 3pq^2n}{-2p^2q^2 + 4p^4 + p^3q - 3pq^3}.$$

LXVIII.

Si pour réſoudre les équations propoſées dans cet exemple, on avoit commencé par délivrer des fractions ces équations, le calcul qu'on auroit fait de la maniere ſuivante, auroit donné moins d'embarras de la part des diviſeurs.

Autre maniere de réſoudre le même exemple.

Soient multipliés d'abord les deux membres de l'équation $\frac{3mpx}{p-q} = \frac{ppy}{p+q} - \frac{2qn}{p-q}$, ou $\frac{3mpx}{p - q} - \frac{ppy}{p+q} = -\frac{2nq}{p-q}$ par $pp - qq$ produit des deux diviſeurs $p - q$, $p + q$, & l'on aura l'équation $\overline{3mpp + 3mpq}$

$\overline{xx + ppq - p^3} \times y = -2npq - 2nqq$.

Soient multipliés de même les deux membres de l'équation $mx + \overline{p + q} \times y = \frac{nq}{p - q}$ par $\overline{p - q}$, & l'on aura $\overline{mp - mq} \times x$ $+ \overline{pp - qq} \times y = qn$.

Comparant présentement ces deux nouvelles équations avec les deux formules générales, on a $b = 3mpp + 3mpq$, $c = ppq - p^3$, $a = -2npq - 2nq^2$, $e = mp - mq$, $f = p^2 - q^2$, $d = qn$.

D'où l'on tire $cd = p^2q^2n - p^3qn$, $af = -2np^3q - 2np^2q^2 + 2pq^3n + 2nq^4$, $ae = 2nmq^3 - 2nmp^2q$, $bd = 3mnp^2q + 3mnpq^2$; $ce = 2p^3qm - mp^4 - mp^2q^2$; $bf = 3mp^3q + 3mp^4 - 3mpq^3 - 3mp^2q^2$

& partant.............................

$cd - af = qnp^3 + 3p^2q^2n - 2npq^3 - 2nq^4$

$ce - bf = 2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^2q + 3mpq^3$

$ae - bd = 2nmq^3 - 5mnp^2q - 3mnpq$

qui donnent.............................

$$x = \frac{qnp^3 + 3ppqqn - 2npq^3 - 2nq^4}{2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3} \text{ \&}$$

$$y = \frac{2nmq^3 - 5mnp^2q - 3mnpqq}{2mppqq - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3}.$$

LXIX.

Comparaison de deux solutions précédentes.

Si on compare présentement ces deux valeurs de x & de y avec celles qu'on avoit trouvées précédemment, on voit d'abord sans aucune difficulté l'identité des deux valeurs de y. Quant aux valeurs de x, pour savoir comment la premiere peut être la même chose que la seconde, il faut remarquer que l'égalité qui doit être entre ces deux expressions, suppose nécessairement que le numérateur $qnp^3 + 3nppqq - 2npq^3 - 2nq^4$ de la seconde contienne le numérateur $-qnpp - 4pq^2n - 2q^3n$ de la premiere, de la même maniere que le dénominateur $2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3$ de la seconde contient le dénominateur $4p^3m + 5p^2qm + 3mpq^2$ de la premiere. Or, prenant la peine de diviser le second numérateur par le premier, on trouve en effet le même quotient $p - q$ qu'en divisant le second dénominateur par le premier. C'est-à-dire, que l'expression........

$$\frac{qnp^3 + 3ppqqn - 2npq^3 - 2nq^4}{2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3}$$

se change en..............................

$$\frac{\overline{p-q} \times \overline{-nqpp - 4pqqn - 2nq^3}}{\overline{p-q} \times \overline{4mp^3q + 5mp^2q + 3mpq^2}},$$

ou en $\dfrac{-nqpp - 4pqqn - 2nq^3}{4mp^3 + 5mp^2q + 3mpq^2}$

en ôtant les diviseurs communs $p - q$.

LXX.

La maniere dont on vient de réduire la plus composée des deux valeurs de x à la plus simple, étoit aisée à imaginer, lorsqu'on savoit l'une & l'autre de ces deux expressions; mais si on n'eût connu que la plus composée & qu'on eût voulu la simplifier, on auroit été beaucoup plus embarrassé, puisqu'on n'auroit pas su par quelle quantité il falloit diviser le numérateur & le dénominateur de la fraction. Or comme ce seroit un vice dans la solution d'un Problême qu'une quantité réductible & non réduite, il faut chercher une méthode pour réduire toute fraction qui peut se simplifier, ou, ce qui revient au même, il faut chercher une méthode pour trouver quel est le plus grand diviseur commun que puissent avoir deux quantités données.

Supposons d'abord, pour aller du plus simple au plus composé, que ces deux quantités ne soient que des nombres; que l'on ait, par exemple, à chercher le plus grand diviseur commun des nombres 637 & 143, ou, ce qui revient au même, que l'on se propose de réduire la fraction $\frac{637}{143}$ à sa simple expression.

Divisant d'abord 637 par 143, il vient 4 pour quotient, & 65 pour reste, c'est-à-dire, que la fraction $\frac{637}{143}$ se change en $4 + \frac{65}{143}$, d'où la question est réduite à abbaisser la fraction $\frac{65}{143}$, ou, ce qui revient au même, à chercher le nombre qui est le plus grand commun diviseur des nombres 143 & 65. Car lorsque ce nombre sera trouvé, il est évident qu'il sera aussi le plus grand commun diviseur des nombres 637 & 143, puisqu'on ne sauroit réduire la fraction $\frac{65}{143}$ à sa plus simple expression, qu'on ne réduise en même-temps $4 + \frac{65}{143}$, ou $\frac{637}{143}$ à sa plus simple expression.

Les deux nombres 143 & 65, sur lesquels il s'agit d'opérer présentement, étant plus simples que les deux premiers 637 & 143, je vois que la difficulté est diminuée, & qu'en s'y prenant de la même maniere, on la diminuera encore. Au lieu de la fraction $\frac{65}{143}$ à réduire, j'écris $\frac{143}{65}$, non que je prétende que ces fractions soient les mêmes ; mais parce qu'on ne sauroit réduire l'une, que l'autre ne se réduise de la même maniere. Ensuite, pour réduire $\frac{143}{65}$, je divise 143 par 65, ce qui me donne 2 pour quotient, & 13 pour le reste. Il ne faut donc plus, par le même principe, que chercher le plus grand commun diviseur de 13 & de 65. Car on voit que le plus grand commun diviseur de ces deux nombres, sera aussi celui de 143 & de 65, à cause que la fraction $\frac{143}{65}$ se change en $2 + \frac{13}{65}$.

Présentement le plus grand commun diviseur de 13 & de 65 est 13 lui-même, puisqu'il divise exactement 65. Donc 13 est aussi le plus grand commun diviseur de 143 & de 65, donc il est aussi celui des nombres proposés 637, 143. En effet, 637 est 49×13 & 143, 11×13, d'où l'on tire $\frac{637}{143} = \frac{49}{11}$, fraction irréductible.

LXXI.

Méthode générale de trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres.

On peut s'assurer facilement que la méthode qu'on vient de suivre dans l'exemple précédent, peut s'appliquer à quelques nombres que ce soit. Qu'on ait, en général, deux nombres A & B, & que le quotient de la division du premier par le second soit a, & le reste C, la question ſera réduite à trouver le plus grand commun diviſeur de B & de C; b étant ſuppoſé alors le quotient de B par C, & D le reſte, il ne s'agira plus que de trouver le plus grand commun diviſeur de C & de D, c'eſt-à-dire, de diviſer C par D, & de ſe ſervir du reſte pour diviſer D. Allant ainſi de diviſion en diviſion juſqu'à ce qu'on arrive à deux nombres, dont le plus petit ſoit contenu exactement dans le plus grand; ce nombre contenu exactement, ſera le plus grand diviſeur commun des deux premiers nombres A & B.

Cette regle dans toute ſa généralité, comme dans l'exemple précédent, eſt fondée ſur ce que la fraction $\frac{A}{B}$ devenant $a+\frac{C}{B}$ ne ſauroit s'abbaiſſer que lorſque $\frac{C}{B}$ s'abbaiſſe, que $\frac{C}{B}$ ne ſauroit ſe réduire que de la même maniere que $\frac{B}{C}$, & que $\frac{B}{C}$ étant $b+\frac{D}{C}$ ne ſauroit ſe réduire ſans que $\frac{D}{C}$ ſe réduiſe, & ainſi de ſuite.

LXXII.

Voyons préſentement quels ſont les changemens qu'il faut faire à cette méthode pour l'appliquer aux quantités Algébriques; & pour plus de clarté, prenons d'abord un exemple.

Suppoſons qu'il s'agiſſe de trouver le plus grand commun diviſeur des quantités $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ & $4aa - 5ba + bb$. il faudroit, ſuivant la méthode précédente, diviſer la premiere de ces deux quantités par la ſeconde; mais comme la diviſion ne ſauroit ſe faire à cauſe que le premier terme $3a^3$ du dividende ne contient pas exactement le premier terme du diviſeur, je multiplie toute la premiere quantité par 4, & je remarque que 4 n'étant point un des diviſeurs de la ſeconde quantité $4aa - 5ba + bb$, il ne peut pas y avoir d'autre plus grand commun diviſeur entre $12a^3 - 12baa + 4bba - 4b^3$ & $4aa - 5ba + bb$ qu'entre $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ & $4aa - 5ba + bb$.

Je diviſe alors, ſuivant les regles précédentes, $12a^3 - 12ba^2 + 4b^2a - 4b^3$ par $4a^2 - 5ba + bb$; j'ai pour quotient $3a$, & pour reſte $3baa + bba - 4b^3$, ce qui, ſuivant les mêmes regles, demanderoit qu'on diviſât $4a^2 - 5ba + bb$ par $3baa + bba - 4b^3$; mais comme la diviſion de ces quantités ne ſauroit ſe faire ſans les préparer auparavant, je remarque d'abord que b étant commun à tous les termes de la derniere quantité, & ne l'étant pas à ceux de la ſeconde, il ne ſauroit être partie du plus grand commun diviſeur de ces quantités, ainſi je l'ôte de tous les termes de cette ſeconde quantité, & je prends à la place $3aa + ba - 4b^2$. Je remarque enſuite qu'en multipliant la premiere quantité $4aa - 5ba + bb$

par 3, qui n'eſt point un diviſeur de $3aa + ba - 4b^2$, la diviſion ſera poſſible ; je fais donc cette diviſion de $12aa - 15ab + 3bb$ par $3aa + ba - 4bb$, ce qui me donne 4 pour quotient, & pour reſte $-19ab + 19bb$.

Il n'eſt donc plus queſtion préſentement que de trouver le plus grand commun diviſeur de $3aa + ba - 4bb$, & de $-19ab + 19bb$. Comme il faudroit, pour cette opération, diviſer la premiere de ces deux quantités par la ſeconde, & que pour pouvoir diviſer les deux premiers termes de ces quantités, il faudroit multiplier la premiere par $19b$, qui eſt un diviſeur exact de la ſeconde, j'ôte ce diviſeur de la ſeconde, ce qui la réduit à $-a + b$.

Mais le plus grand commun diviſeur de $3aa + ba - 4bb$ & de $-a + b$, eſt $-a + b$ lui-même, puiſque la diviſion de ces deux quantités ſe fait exactement. Donc $-a + b$ eſt le plus grand commun diviſeur de $3aa + ba - 4bb$ & de $-19ab + 19bb$; donc il eſt auſſi le plus grand commun diviſeur de $12aa - 15ab + 3bb$ & de $3aa + ba - 4bb$, donc il l'eſt encore de $4aa - 5ba + bb$, & de $3baa + bba - 4b^3$ auſſi-bien que de $12a^3 - 12baa + 4bba - 4b^2$ & de $4aa - 5ba + bb$. Donc il eſt enfin le plus grand diviſeur commun des quantités propoſées $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ & $4aa - 5ba + bb$.

LXXIII.

Il n'eſt pas difficile maintenant de voir qu'on réuſſiroit à peu près de la même maniere, quelles que fuſſent les quantités dont on voulût trouver les plus grands communs diviſeurs. Le ſeul principe qu'on ſoit obligé d'ajouter dans cette recherche, à la méthode de l'art. LXXI, c'eſt que deux quantités quelconques A & B conſerveront leur plus grand commun diviſeur, ſi on multiplie ou diviſe l'une de ces deux quantités, A, par exemple, par une quantité qui n'ait aucun diviſeur commun avec B.

Méthode générale pour trouver le plus grand commun diviſeur des quantités Algébriques.

On peut énoncer ainſi le procédé de la méthode générale de déterminer les plus grands communs diviſeurs. Soient A & B les deux quantités propoſées, on commencera par ordonner ces deux quantités par rapport à une des lettres quelconques qu'elles ont de commun. On verra enſuite par quelle quantité m il faudroit multiplier A pour que les termes affectés de la plus haute puiſſance de la lettre ſuivant laquelle on l'a ordonnée, puiſſent ſe diviſer par les termes de B affectés de la plus haute puiſſance de la même lettre ; ſi ce multiplicateur m n'a aucun commun diviſeur avec B, on s'en ſervira pour multiplier A ; mais s'il a un commun diviſeur n, on ôtera ce commun diviſeur tant de m que de B, & on ne multipliera A que par $\frac{m}{n}$, ce qui formera une nouvelle quantité C que l'on prendra à la place de A. On prendra de même à la place de B

la quantité D qui en vient lorſqu'on l'a diviſé par le diviſeur n qu'il a de commun avec m.

Cela fait, on diviſera C par D, & la diviſion faite, ſi elle eſt exacte, D ſera le plus grand commun diviſeur cherché de A & de B; mais s'il y a un reſte E, on fera, à l'égard de D & de E la même opération qu'à l'égard de A & de B, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on arrive à deux quantités qui ſe diviſent exactement. Lorſqu'on y ſera parvenu, celle de ces deux quantités qui ſera contenue exactement dans l'autre, ſera le plus grand commun diviſeur cherché.

Il eſt bon de faire remarquer que ſi, avant d'entreprendre l'opération dont on vient de voir la méthode, on apperçoit dans l'une des quantités propoſées A ou B quelque quantité qui en ſoit un diviſeur exact, & qui ne le ſoit point de l'autre, il faudra commencer par ôter ce diviſeur pour que ce calcul ſoit plus ſimple.

Afin que les Commençans puiſſent acquérir quelque facilité dans l'application de cette méthode, j'ai joint les exemples ſuivans.

LXXIV.

Premier exemple.

Soient les quantités $qnp^3 + 3np^2q^2 - 2npq^3 - 2nq^4$ & $2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3$, dans leſquelles nous n'avons trouvé (art. LXIX.) le diviſeur commun $p - q$, que parce que nous ſavions d'avance que la premiere de ces deux quantités, diviſée par la ſeconde, devoit donner le même quotient que la quantité $- nqp^2 - 4pq^2$

$n - 2nq^3$ divisée par $4mp^3 + 5mp^2q + 3mpq^2$.

Pour réduire présentement ces deux quantités, sans employer autre chose que la méthode précédente, on commencera par ôter qn qui est commun à tous les termes de la premiere de ces deux quantités, & qui n'est point contenu dans la seconde; on ôtera même pm qui est commun à tous les termes de la seconde, sans être contenu dans la premiere; & par-là l'opération sera réduite à trouver le plus grand diviseur commun des quantités $(A)\ -4p^3 - p^2q + 2pq^2 + 3q^3$ & $(B)\ p^3 + 3ppq - 2pq^2 - 2q^3$.

Divisant A par B, j'ai -4 pour quotient, & pour reste $(C)\ 11p^2q - 6pq^2 - 5q^3$, comme il faudroit alors multiplier B par $11q$, pour que son premier terme pût être divisé par le premier terme de C, & que q est contenu dans tous les termes de C, je multiplie simplement B par 11, & je divise C par q, d'où je n'ai plus à comparer que les deux quantités $(D)\ 11p^3 + 33p^2q - 22pq^2 - 22q^3$, & $(E)\ 11p^2 - 6pq - 5q^2$.

Je divise la premiere par la seconde, & j'ai pour quotient p & pour reste $(F)\ 39p^2q - 17pq^2 - 22q^3$. Comme il faudroit alors multiplier (E) par $39q$, afin que son premier terme fût divisible par celui de cette nouvelle quantité F, & que q est commun à tous les termes de F, je ne multiplie donc E que par 39, & je divise son produit $(G)\ 429p^2 - 234$

$pq - 195\,q^2$ par $[H]$ $39\,p^2 - 17\,pq - 22\,q^2$. Le quotient est 11, & le reste $[I]$ $-47\,pq + 47\,q^2$.

Pour diviser alors H par I, il faudroit multiplier tous ses termes par $47\,q$; mais cette quantité est un diviseur de H, je l'ôte donc de H & il me reste $q - p$ pour servir de diviseur à $39\,p^2 - 17\,pq - 22\,q^2$. Or, la division se fait exactement ; donc $q - p$ est le plus grand diviseur commun cherché des quantités proposées.

LXXV.

Second exemple.

Soient proposées présentement les deux quantités $ab + 2aa - 3bb - 4bc - ac - cc$ & $9ac + 2aa - 5ab + 4cc + 8bc - 12bb$, ordonnant ces deux quantités par rapport à a, j'ai $2aa + ba - ca - 3bb - 4bc - cc$ & $2aa + 9ca - 5ba - 12bb + 8bc + 4cc$, ou $[A]$ $2aa + \overline{b - c} \times a - 3bb - 4bc - cc$ & $[B]$ $2aa + \overline{9c - 5b} \times a - 12bb + 8bc + 4cc$.

Divisant la premiere par la seconde, j'ai 1 pour quotient, & pour reste (C) $\overline{6b - 10c} \times a + 9bb - 12bc - 5cc$. Pour diviser B par cette quantité, je vois qu'il faudroit auparavant la multiplier par $3b - 5c$. Mais avant d'en faire l'opération, je tente la division de C par $3b - 5c$, elle réussit, & donne pour quotient (D) $2a + 3b + c$; je n'ai donc plus qu'à chercher le plus grand commun diviſeur de B & de D; mais B eſt diviſible exactement par D; donc D, ou $2a + 3b + c$, eſt le plus grand commun diviſeur cherché de $ab + 2aa - 3bb - 4bc - ac - cc$ & de $9ac + 2aa - 5ab + 4cc + 8bc - 12bb$. En effet, la premiere de ces deux quantités eſt le produit de $2a + 3b + c$ par $a - b - c$, la ſeconde le produit de $2a + 3b + c$ par $a - 4b + 4c$, & ces deux quantités $a - b - c$ & $a - 4b + 4c$ n'ont plus aucun commun diviſeur.

LXXVI.

Troiſieme exemple.

Soient les deux quantités (A) $\overline{dd - cc} \times a^2 + c^4 - ddcc$ & (B) $4da^2 - \overline{2cc + 4cd} \times a + 2c^3$ ordonnées par rapport à a. Je change d'abord B en (C) $2da^2 - \overline{cc + 2cd} \times a + c^3$, en ôtant de tous les termes le diviſeur qui n'eſt pas commun avec A. Je multiplie enſuite A par $2d$, afin de rendre la diviſion poſſible, ce qui me donne pour quotient $dd - cc$ & pour reſte (D) $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2cd} \times a - \overline{dd - cc} \times c^3 + 2dc^4 - 2d^3cc$, ſi on vouloit alors que cette quantité ſervît de diviſeur à C, il faudroit multiplier auparavant C par $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2cd}$, afin que ſon premier terme permît la diviſion.

Mais avant de faire cette multiplication, il faut savoir si $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2cd}$ ne seroit point ou un diviseur, ou un multiple de quelque diviseur de D. Pour le savoir, je cherche le plus grand commun diviseur de $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2cd}$ & de $-\overline{dd - cc} \times c^3 + 2dc^4 - 2d^3cc$, c'est à-dire, de $ddcc - c^4 + 2cd^3 - 2c^3d$ & de $-ddc^3 + c^5 + 2dc^4 - 2d^3cc$; mais je vois tout de suite que la seconde de ces quantités n'est autre chose que le produit de la premiere par $-c$, & partant que la quantité D se réduit au produit de $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2dc}$ par $a - c$; donc au lieu de multiplier C par $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2dc}$, je divise D par cette quantité, & il vient (E) $a - c$ dont il faut chercher le plus grand commun diviseur avec C; or, $a - c$ divise exactement C, donc $a - c$ est le plus grand diviseur cherché.

LXXVII.

Autre maniere de résoudre le même exemple.

Au reste, avec un peu d'habitude dans le calcul, on découvre souvent le plus grand commun diviseur de deux quantités plus facilement que par la méthode générale qu'on vient d'expliquer. Par exemple, les deux quantités précédentes $\overline{dd - cc} \times aa + c^4 - ddcc$ & $4daa - \overline{2cc + 4cd} \times a + 2c^3$ étant ordonnées par rapport à d, & par conséquent étant

étant sous cette forme $\overline{aa - cc} \times dd + c^4 - aacc$ & $\overline{4aa - 4ac} \times d + 2c^3 - 2c^2a$, il est aisé de découvrir que $aa - cc$ est un diviseur de la premiere, & $c - a$ un diviseur de la seconde. Mais $aa - cc$ est divisible par $c - a$, donc $c - a$ est un diviseur des deux quantités proposées; je les divise donc l'une & l'autre par $c - a$, & j'ai pour leurs quotiens $\overline{cc - dd} \times \overline{c + a}$; & $4ad + 2cc$ qu'on voit assez facilement n'avoir plus de commun diviseur, donc $c - a$, ou $a - c$ étoit le plus grand commun diviseur des quantités proposées.

LXXVIII.

Autres quantités dont on trouve le plus grand commun diviseur sans la méthode précédente.

Qu'on se propose maintenant de chercher le plus grand commun diviseur des deux quantités $6a^5 + 15a^4b - 4a^3cc - 10aabcc$ & $9a^3b - 27aabc - 6abcc + 18bc^3$, je commence par ôter aa de tous les termes de la premiere; & $3b$ de tous ceux de la seconde. J'ai alors $6a^3 + 15a^2b - 4acc - 10bcc$ & $3a^3 - 9aac - 2acc + 6c^3$; mais comme la seconde de ces deux quantités ne contient aucun b, je conclus que si elle a un commun diviseur avec la premiere, il faut qu'elle l'ait séparément avec ses deux parties $6a^3 - 4acc$ & $5ab - 10bcc$, & que ces deux parties doivent aussi avoir entr'elles le même commun diviseur. Or, on voit tout de ſuite que $3aa - 2cc$ eſt le diviſeur commun de ces deux parties, donc il eſt le plus grand commun diviſeur des quantités propoſées, ſi elles en ont un. Le prenant donc pour diviſer ces deux quantités, on voit qu'en effet il les diviſe, & qu'il eſt par conſéquent leur plus grand commun diviſeur.

LXXIX.

Lorſqu'il y a trois inconnues dans un Problême, il faut trois équations pour le réſoudre.

On a vû ſuffiſamment, par ce qui précéde, que pour trouver les deux inconnues que renferme un Problême, il faut avoir deux équations. Il n'eſt pas difficile d'imaginer en partant de-là, que lorſqu'il y aura trois inconnues dans un Problême, il faudra trois équations, & ainſi de ſuite. Quant à la maniere de dégager les inconnues de ces équations, elle ne ſera pas difficile non plus à imaginer, après ce qu'on a vû pour celles qui ne renferment que deux inconnues.

Comment on dégage les inconnues de ces équations.

Car qu'on ait trois équations contenant chacune les trois inconnues x, y, z; ſi on tire la valeur de x de chacune de ces équations exprimée par le moyen des connues & des deux autres inconnues y, z, de ces équations, il eſt évident qu'en égalant les unes aux autres ces différentes valeurs de x, on aura deux nouvelles équations qui ne contiendront plus que les deux inconnues y & z, & qui ſeront par conſéquent dans le cas de celles dont nous venons de parler. Il en ſeroit de même des équations à quatre, cinq, &c. inconnues.

Comme la méthode générale qu'on vient d'expliquer, peut offrir des difficultés lorſque l'on en fait usage, nous allons en montrer l'application dans le Problême suivant, qui renfermera la plus grande complication que peuvent avoir les équations du premier degré à trois inconnues.

L X X X.

On sçait que ces trois magasins, contenant chacun trois sortes de denrées, ont coûté les uns & les autres séparément ; on sçait de plus le nombre de mesures que chaque magasin contient de ces trois différentes denrées ; on demande à combien revient une mesure de chaque denrée. Problême dans lequel on emploie trois inconnues.

Soient a, b, c, les nombre de mesures de chaque denrée contenue dans le premier magasin, soit d le prix de ce magasin.

Soient de plus e, f, g, les mesures des mêmes denrées contenues dans le second magasin dont le prix est supposé h.

Soient encore i, k, l, les mesures des mêmes denrées contenues dans le troisieme magasin, dont le prix est supposé m.

Soient enfin x, y, z, ce que coûte une mesure de chaque denrée.

Il est évident que la quantité de la premiere denrée contenue dans le magasin d coûtera $a\,x$, puisque a est le nombre des mesures de cette denrée, & x le prix de la mesure de cette denrée. De même la quantité de la seconde denrée contenue dans le même magasin coûtera $b\,y$, & la quantité de la troisieme denrée contenue dans le même magasin coûtera $c z$. Ajoutant donc ces trois sommes pour les égaler au prix d de ce magasin, on aura l'équation

$$a x + b y + c z = d,$$

on formera de même les équations

$$e x + f y + g z = h, \; i x + k y + l z = m.$$

en exprimant les conditions mentionnées pour les deux autres magasins.

Il est question maintenant de tirer de ces équations les valeurs de x, y, z. Dans cette vûe on tirera d'abord la valeur de x de la premiere équation, qui sera $\frac{d - b y - c z}{a}$, & égalant cette valeur de x à celle qu'on tire de la seconde équation, on aura l'équation

$$\frac{d - b y - c z}{a} = \frac{h - f y - g z}{e}.$$

Égalant ensuite la même valeur $\frac{d - b y - c z}{a}$, à celle qu'on tire de la troisieme équation, on aura l'équation

$$\frac{d - b y - c z}{a} = \frac{m - k y - l z}{i}.$$

De la premiere de ces deux équations entre y & z, on tirera $d e - b e y - c e z = a h - a f y - a g z$,

ou $z = \frac{d e - a h + a f y - b e y}{c e - a}$.

De la ſeconde on tirera $di - biy - icz$
$= am - aky - alz$,
ou $z = \frac{di - am + aky - biy}{ci - al}$.

En égalant ces deux valeurs de z, il eſt clair qu'on auroit une équation où il n'entreroit plus d'autre inconnue que y, & qu'en réſolvant cette équation on connoîtroit y. Comme les calculs que l'on auroit par cette opération ſeroient aſſez conſidérables, je vais faire voir la maniere de les éviter en employant quelques abbréviations, que les premiers Analyſtes, qui ont eu de grands calculs à faire, ont aiſément imaginées.

LXXXI.

Maniere d'abréger les calculs par des dénominations particulieres.

Ces abbréviations conſiſtent à mettre de nouvelles lettres à la place de pluſieurs termes compoſés de connues.

Au lieu de . . . $de - ah$ je mettrai . . . α
de . . . $af - be$ . . . . β
de . . . $ce - ag$ . . . . γ
de . . . $di - am$ . . . . δ
de . . . $ak - bi$ . . . . ϵ
de . . . $ci - al$ . . . . φ

Par ces nouvelles dénominations les équations précédentes deviendront $z = \frac{\alpha + \beta y}{\gamma}$

& $z = \frac{\delta + \varepsilon y}{\varphi}$ lesquelles donneront $\alpha\varphi + \beta\varphi y = \delta\gamma + \gamma\varepsilon y$ d'où l'on tire $y = \frac{\alpha\varphi - \delta\gamma}{\gamma\varepsilon - \beta\varphi}$ substituant ensuite cette valeur de y dans l'une des deux valeurs précédentes de z, dans la premiere, par exemple, on aura

$$z = \frac{\alpha + \frac{\beta\alpha\varphi - \beta\gamma\delta}{\gamma\varepsilon - \beta\varphi}}{\gamma}$$

qui se réduit à $z = \frac{\alpha\varepsilon - \beta\delta}{\gamma\varepsilon - \beta\varphi}$.

Cela fait, on mettra ces valeurs de y & de z dans l'une des valeurs précédentes de x, dans $\frac{d - cz - by}{a}$ par exemple, & l'on aura $x = \frac{d}{a} - \frac{c}{a} \times \frac{\overline{\alpha\varepsilon - \beta\delta}}{\gamma\varepsilon - \beta\varphi}$ $- \frac{b}{a} \times \frac{\overline{\alpha\varphi - \delta\gamma}}{\gamma\varepsilon - \beta\varphi}$, ou . . . .

$$x = \frac{d \times \overline{\gamma\varepsilon - \beta\varphi} - c \times \overline{\alpha\varepsilon - \beta\delta} - b \times \overline{\alpha\varphi - \delta\gamma}}{\alpha \times \overline{\gamma\varepsilon - \beta\varphi}}$$

LXXXII.

Pour montrer présentement l'application de cette méthode, supposons que le premier magasin contienne 30 mesures de seigle, 20 d'orge & 10 de froment, & qu'il ait coûté 230 ℔. Exemple du Problême précédent en nombres.

Que le second magasin contienne 15 mesures de seigle, 6 d'orge & 12 de froment, & qu'il ait coûté 138 ℔.

Que le troisieme magasin contienne 10 mesures de seigle, 5 d'orge, 4 de froment, & qu'il ait coûté 75 ℔. Pour sçavoir à combien revient la mesure de seigle, celle d'orge & celle de froment, il faudra faire

$a = 30$, $b = 20$, $c = 10$, $d = 230$, $e = 15$, $f = 6$, $g = 12$, $h = 138$, $i = 10$, $k = 5$, $l = 4$, $m = 75$, ce qui donnera $de - ah = \alpha = -690$, $af - be = \beta = -120$, $ce - ag = \gamma = -210$, $di - am = \delta = 50$, $ak - bi = \varepsilon = -50$, $ci - al = \varphi = -20$,

substituant ensuite ces valeurs dans les qualités $\alpha\varphi - \gamma\delta$, $\gamma\varepsilon - \beta\varphi$, $\alpha\varepsilon - \beta\delta$, on aura 24300, 8100, 40500 pour ces trois quantités, ce qui donnera par conséquent

$y = \frac{24300}{8100} = 3$, $z = \frac{40500}{8100} = 5$, &

$$x = \frac{230 \times 8100 - 10 \times 40500 - 20 \times 24300}{30 \times 8100} = 4$$

Ainsi le prix de la mesure de seigle est de 4 ℔.

Celui de la mesure d'orge de . . . . . . 3 ℔.
Et celui de la mesure de froment de . . 5 ℔.

LXXXIII.

Tous les Problêmes du premier degré à trois inconnues, peuvent, étant mis en équations, être compris dans le Problême précédent.

Comme les équations du Problême précédent sont les plus générales du premier degré à trois inconnues puisque chacune contient les trois inconnues combinées avec des connues quelconques, il s'ensuit que tout Problême du premier degré à trois inconnues, sera renfermé, dans le précédent, aussi-tôt qu'il sera exprimé analytiquement. Pour en donner un exemple, soit proposé le Problême suivant.

On a trois lingots composés de différens métaux fondus ensemble.

La livre du premier contient . . . .

	onces		onces		onces	
. . . .	7	d'arg.	3	de cuiv.	6	d'étain,
celle du 2d	12		3		1,	
celle du 3eme	4		7		5.	

On demande ce qu'il faut prendre de chacun de ces lingots pour en former un quatrieme qui contienne

onces		onces	gros		onces	gros	
8	d'arg.	3	6	de cuiv.	4	2	étain.

Soient x, y, z les nombres d'onces qu'il faut prendre de chacun de ces métaux.

Il est évident que $\frac{7}{16}x$ sera ce qu'il y aura d'argent dans ce qu'on tirera du premier lingot que $\frac{12}{16}y$ sera ce qu'il y en aura dans le morceau tiré du second lingot, & que $\frac{4}{16}z$ sera ce qu'il y en aura dans le morceau tiré du troisieme, Ajoutant donc ces trois quantités, leur somme devra être 8 onces d'argent; donc on a l'équation $\frac{7}{16}x + \frac{12}{16}y + \frac{4}{16}z = 8$, ou $7x + 12y + 4z = 128$.

On aura de même pour ce qu'on tirera de cuivre des trois métaux, $\frac{3}{16}x$, $\frac{3}{16}y$ & $\frac{7}{16}z$ dont la somme doit faire $\overset{\text{onces}}{3}\ \overset{\text{gros}}{6}$ ou $\overset{\text{onces}}{\frac{15}{4}}$ ce qui donnera $\frac{3}{16}x + \frac{3}{16}y + \frac{7}{16}z = \frac{15}{4}$, ou $3x + 3y + 7z = 60$.

Ce qu'on tirera d'étain des trois métaux sera pareillement $\frac{6}{16}x$, $\frac{1}{16}y$, $\frac{5}{16}z$ dont la somme doit faire $\overset{\text{onces}}{4}\ \overset{\text{gros}}{2}$ ou $\overset{\text{onces}}{4\frac{1}{4}}$ donc

$$\frac{6}{16}x + \frac{2}{16}y + \frac{5}{16}z = 4 + \frac{1}{4}$$

$$\text{ou } 6x + y + 5z = 68.$$

Il ne s'agit donc plus que de résoudre ces trois équations, c'est ce que l'on tirera facilement de la solution précédente, en faisant

$$\begin{array}{llll} a = 7 & b = 12 & c = 4 & d = 128, \\ e = 3 & f = 3 & g = 7 & h = 60, \\ i = 6 & k = 1 & l = 5 & m = 68, \end{array}$$

par lesquelles on trouvera

$de - ha = \alpha = -36$; $af - be = \beta = -15$; $ce - ag = \gamma = -37$

$di - am = \delta = 292$, $ak - bi = \varepsilon = -65$;

$$ci - al = \varphi = -11,$$

substituant ensuite ces valeurs dans les quantités $\alpha\varphi - \gamma\delta$, $\gamma\varepsilon - \beta\varphi$, $\alpha\varepsilon - \beta\delta$, on aura 11200, 2240, 6720 pour ces trois quantités, ce qui donnera par conséquent

$y = \frac{11200}{2240} = 5$, $z = \frac{6720}{2240} = 3$, &

$$x = \frac{128 \times 2240 - 4 \times 6720 - 12 \times 11200}{7 \times 2240} = 8,$$

c'eſt-à-dire, qu'il faut prendre 5 onces du premier lingot, 3 onces du ſecond, & 8 du troiſieme pour former le lingot demandé.

ÉLÉMENS D'ALGEBRE.

SECONDE PARTIE.

De la réſolution des Équations du ſecond degré.

NOUS avons préſentement aſſez traité des Problêmes du premier degré pour paſſer à ceux des autres degrés, & particuliérement aux Problêmes du ſecond degré, que nous allons examiner dans cette ſeconde Partie. Quant à la maniere d'exprimer analytiquement leurs conditions, elle eſt la même que dans les Problêmes du premier degré, ce n'eſt que pour réſoudre les équations auſquelles on arrive en exprimant les Problêmes, qu'il faut employer des méthodes différentes, ſuivant les degrés de ces équations. On en peut voir un exemple dans le Problême ſuivant, qui dans ſa généralité renferme des Problêmes de tous les degrés, & n'eſt pas plus difficile à exprimer analytiquement pour le degré le plus compoſé, que pour le plus ſimple.

I.

Problême qui contient dans ſa généralité des Problêmes de tous les degrés.

Un homme ayant placé une ſomme a *dans un commerce où il perd, veut ſe retirer dès la premiere année; mais en ayant manqué l'occaſion, & ne l'ayant pû retrouver qu'à la deuxieme ou à la troiſieme, ou, en général, à la* n^{eme} *année, il trouve que la ſomme eſt diminuée de la quantité* b *de ce qu'elle étoit après la premiere année. On demande à combien pour cent montoit ſa perte par an.*

Soit x le nombre cherché, c'eſt-à-dire, ce que chaque cent livres perd après la premiere année. En faiſant cette proportion $100 : 100 - x = a : a \times \frac{\overline{100 - x}}{100}$, le quatrieme terme $a \times \frac{\overline{100 - x}}{100}$, ou $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}$ exprimera ce que devient la ſomme a après la premiere année.

Si on continue enſuite cette proportion en diſant

$$100 : 100 - x = \frac{a \times \overline{100 - x}}{100} :$$

$\frac{a \times \overline{100 - x}^2}{10000}$: le quatrieme terme $\frac{a \times \overline{100 - x}^2}{10000}$, ou $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^2$ sera ce que devient la même somme a après la seconde année.

On exprimera de même ce que cette somme devient après la troisieme année par

$a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^3$, &c, en général, ce qu'elle devient après la n^{eme} année sera . . . . . .

$a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^n$, c'est-à-dire a multiplié par la quantité $1 - \frac{x}{100}$ élevée à la puissance n.

II.

Présentement si on veut sçavoir quelle sera l'équation à résoudre, en supposant que le Négociant se soit retiré à la seconde année, il faudra égaler la quantité $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^2$ à la quantité $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}$ diminuée de la quantité b, ce qui donnera . . . .

Équation du Problême précédent pour le cas du second degré.

$$a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^2 = a \times \overline{1 - \frac{x}{100}} - b,$$

ou en multipliant $1 - \frac{x}{100}$ par lui-même, ainsi que l'indique l'exposant 2,

$$a \times \overline{1 - \frac{2x}{100} + \frac{xx}{10000}} = a \times \overline{1 - \frac{x}{100}} - b$$

qui se réduit à $x^2 - 100x = -10000\frac{b}{a}$, équation du second degré à laquelle les méthodes précédentes ne sçauroient atteindre.

III.

Si on suppose que ce ne soit qu'à la troisieme année, l'équation à résoudre sera

$$a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^{3} = a \times \overline{1 - \frac{x}{100}} - b,$$ qui en multipliant $1 - \frac{x}{100}$ deux fois par lui-même, ainsi que l'indique l'exposant 3, devient

Pour le troisieme degré.

$$a \times \overline{1 - \frac{3x}{100} + \frac{3x^2}{10000} - \frac{x^3}{1000000}}$$

$$= a \times \overline{1 - \frac{x}{100}} - b,$$ ou enfin

$$x^3 - 300x^2 + 20000x = 1000000\frac{b}{a},$$

équation qui doit naturellement promettre plus de difficulté que la précédente.

IV.

Quant aux autres cas, on voit aisément comment on parviendroit successivement à former les équations qu'ils donnéroient, & l'induction montre que l'équation seroit toujours du degré exprimé par le nombre n. Si on veut avoir cette équation, en général, sans spécifier le nombre n, on n'aura qu'à employer l'expresſion générale $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^{\,n}$ de la quantité que devient a après la n^{eme} année, & l'équation ſera $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^{\,n} = a \times \overline{1 - \frac{x}{100}} - b$, ou $\overline{1 - \frac{x}{100}}^{\,n} = 1 - \frac{x}{100} - \frac{b}{a}$.

V.

Contentons-nous préſentement de réſoudre le Problême dans le cas où ſon équation eſt du ſecond degré, c'eſt-à-dire, lorſqu'elle eſt $x^2 - 100\,x = -10000\,\frac{b}{a}$, ou plutôt cherchons une méthode pour réſoudre généralement toutes les équations du ſecond degré. Ceux qui voudront réſoudre des cas plus élevés du même Problême, y parviendront facilement auſſi-tôt qu'ils auront vû dans la ſuite, les méthodes générales qui conviennent aux degrés que ces équations donnent.

Maniere d'arriver à la ſolution générale des équations du ſecond degré.

Ce qui ſe préſente plus naturellement en cherchant une méthode pour réſoudre généralement les équations du ſecond degré, c'eſt de voir la liaiſon qu'il peut y avoir entre ces équations & celles du premier : or, il eſt clair que toute équation du premier degré deviendra du ſecond, ſi on quarre les deux membres, par exemple, $x + a = b$ donne étant quarré $x^2 + 2\,a\,x + a^2 = b^2$; reſte donc à ſçavoir ſi, par une opération contraire, on pourroit rappeller toute équation du ſecond degré à une du premier. Prenons, par exemple, l'équation $x^2 + p x = q$ qui exprimera toute équation du ſecond degré ſelon les valeurs qu'auront p & q; ces lettres pouvant déſigner toutes ſortes de quantités poſitives ou négatives. Suivant ce que nous venons de dire, il n'y a qu'à voir ſi $x^2 + p x$ ne ſeroit pas le quarré de quelque quantité dont la premiere partie ſeroit x, & dont la ſeconde ſeroit une connue, afin de trouver, par ce moyen, l'équation du premier degré, qui, étant quarrée, ſeroit devenue $x^2 + p x = q$. Or, on voit facilement que $x^2 + p x$ n'eſt pas un quarré, mais on voit en même temps qu'il peut le devenir par quelque addition, & l'on a, comme on ſçait, la liberté de faire cette addition, pourvû qu'on ajoute la même quantité de l'autre côté de l'équation.

Afin de trouver ce qui manque à $x^2 + p x$ pour en faire un quarré, il n'y a autre choſe à faire qu'à comparer cette quantité avec le quarré $x x + 2 a x + a a$; le terme $p x$ répondant à $2 a x$; p répondra à $2 a$ & partant a à $\frac{1}{2} p$: or, comme a^2 eſt ce qui manque à $x^2 + 2 a x$ pour en faire un quarré, le quarré de $\frac{1}{2} p$, c'eſt-à-dire, $\frac{1}{4} p^2$ ſera ce qui manque à $x x + p x$ pour en faire un quarré, c'eſt-à-dire, que $x x + p x + \frac{1}{4} p^2$ ſera un quarré; il l'eſt en effet, & c'eſt celui de $x + \frac{1}{2} p$. Ayant donc ajouté $\frac{1}{4} p p$ au premier membre de l'équation, il faut en ajouter autant de l'autre côté, & l'équation ſera $x x + p x + \frac{1}{4} p p = q + \frac{1}{4} p p$.

$+\frac{1}{4}pp$. Or, la quantité $x+\frac{1}{2}p$ multipliée par elle-même donne $xx+px+\frac{1}{4}pp$; il faut donc que cette quantité soit aussi égale au nombre qui, multiplié par lui-même donnera $q+\frac{1}{4}pp$. Pour exprimer ce nombre, ou plutôt cette quantité en général, on écrit $\sqrt{q+\frac{1}{4}pp}$. Employant le signe $\sqrt{\ }$, qu'on appelle signe radical, pour faire * ressouvenir qu'il faut prendre la racine quarrée de la quantité qui le suit, laquelle doit être toujours, pour éviter la confusion, surmontée d'une barre, ou renfermée entre des parentheses. Le signe $\sqrt{\ }$ indique la racine quarrée.

On a donc, en employant cette dénomination $x+\frac{1}{2}p=\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, d'où l'on tire $x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, valeur de x dans l'équation proposée $xx+px=q$, & cette valeur servira pour toute équation donnée aussitôt qu'en comparant cette équation avec $xx+px=q$, on aura déduit les valeurs particulieres de p & de q.

V I.

Si on se souvient présentement que l'on a trouvé (I. Part. art. LX.) qu'en multipliant une quantité négative par une quantité négative, il en résulte une quantité positive, de même que si on avoit multiplié deux quantités positives l'une par l'autre, on verra que la racine d'une quantité positive pourra toujours être La racine quarrée d'une quantité

* Le nombre qui, multiplié par lui-même, en a formé un autre est dit sa racine quarrée, ou simplement sa racine; cette définition connue en arithmétique est aussi admise en Algébre pour toutes sortes de quantités.

est aussi-bien négative que positive.

affectée du signe que l'on voudra; ainsi au lieu de l'équation $x + \frac{1}{2}p = + \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, on peut écrire $x + \frac{1}{2}p = - \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, ce qui donneroit alors $x = - \frac{1}{2}p - \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$;

Une équation du second degré a deux racines, c'est-à-dire, deux valeurs d'x.

d'où l'on tire ce principe général qu'une équation quelconque du second degré, a toujours deux racines. On entend alors par racine d'une équation la valeur de l'inconnue dans cette équation, il faut bien prendre garde de confondre cette expression avec celle de la racine quarrée.

VII.

Formule contenant ces deux racines.

Pour renfermer dans une seule & même expression les deux racines, ou valeurs de x dans l'équation précédente $xx + px = q$, on se sert du signe $\pm$, & l'on écrit ainsi ces deux valeurs $x = - \frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$.

VIII.

Application de la formule précédente à l'équation de l'article II.

Appliquons maintenant cette solution générale à l'équation $xx - 100x = 10000\frac{b}{a}$ à laquelle nous étions arrivés dans le Problême précédent. En comparant cette équation avec $x^2 + px = q$, nous aurons $p = -100$; $q = -10000\frac{b}{a}$, & faisant les substitutions de ces valeurs à la place de p & de q dans la formule générale $x = - \frac{1}{2}p + \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, il viendra $x = 50 \pm \sqrt{2500 - 10000\frac{b}{a}}$.

IX.

On peut donner une forme un peu plus ſimple à la partie radicale $\sqrt{2500 - 10000 \frac{b}{a}}$ de cette valeur de x en partant de ce principe que la racine quarrée du produit de deux, ou de pluſieurs quantités, eſt le produit des racines quarrées de ces quantités ; car, décompoſant alors $2500 - 10000 \frac{b}{a}$ en ſes deux produiſans 2500 & $1 - \frac{4b}{a}$, & prenant les racines de ces deux quantités, on aura 50 & $\sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$, dont le produit $50\sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$, ſera la valeur de $\sqrt{2500 - 10000 \frac{b}{a}}$, c'eſt-à-dire, que la valeur de x ſera $50 \pm 50\sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$.

Réduction de la valeur d'x en formant la racine du produit par celle des produiſans.

Quant à la démonſtration de ce principe que la racine d'un produit quelconque, ſe trouve en multipliant les racines de ſes produiſans, elle eſt bien facile à imaginer, lorſqu'on ſe rappelle l'inverſe de ce principe, c'eſt-à-dire, que pour quarrer un produit, comme ab, on multiplie l'un par l'autre, les quarrés aa & bb de ſes produiſans a & b.

X.

Pour faire uſage de cette valeur de x, il n'eſt plus beſoin que de ſçavoir quel eſt le rapport

Exemple de ce Problême.

qu'on veut qu'il y ait entre b & a. Supposons, par exemple, que b soit la partie $\frac{6}{25}$ de a, c'est-à-dire, que le Négociant ait trouvé à la seconde année la somme diminuée de ce qu'elle étoit après la premiere d'une quantité égale au $\frac{6}{25}$ du total, on aura par cette supposition $\frac{4b}{a} = \frac{24}{25}$ & $1 - \frac{4b}{25} = \frac{1}{25}$, d'où la racine $\sqrt{1 - \frac{4b}{25}}$ sera $\frac{1}{5}$ & donnera par conséquent $x = 50 \pm 50 \times \frac{1}{5}$ qui exprime à la fois 60 & 40.

Or ces deux valeurs de x résolvent en effet également l'équation $xx - 100x = -2400$ dans laquelle l'équation générale $xx - 100x = -10000 \frac{b}{a}$ se change par la supposition de $\frac{b}{a} = \frac{6}{25}$: car, $xx - 100x$ devient également -2400, soit qu'on fasse $x = 60$; ou que l'on prenne $x = 40$.

On peut encore, d'une maniere plus convaincante, reconnoître la nécessité des deux solutions 60 & 40. Car, qu'on suppose d'abord $x = 60$, c'est-à-dire, que la somme de 100000 ℔, par exemple, perde 60 pour cent par an, il est évident qu'après la premiere année elle sera réduite à 40000 ℔.

A la seconde année elle sera de 16000 ℔ en perdant encore 60 pour cent; or 16000 ℔ sont plus petits que 40000 ℔ de 24000 ℔ qui sont les $\frac{6}{25}$ de 100000.

Qu'on ſuppoſe à préſent que la même ſomme de 100000 ℔ perde 40 pour cent par an, après la premiere année elle ſera réduite à 60000 ℔, & après la ſeconde à 36000 ℔: or 36000 ℔ ſont encore plus petits que la ſomme 60000 ℔ de la quantité de 24000 ℔, ou des $\frac{6}{25}$ de 100000 ℔.

X I.

Si on veut que b ſoit les $\frac{4}{25}$ de a, on aura $x = 50 \pm 50 \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = 50 \pm 50 \sqrt{\frac{9}{25}} = 50 \pm 30$, c'eſt-à-dire, ou 80, ou 20 qu'on trouvera encore réſoudre également le Problême. Autre exemple.

X I I.

Mais ſi l'on ſuppoſe $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$, on trouvera $x = 50 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{3}}$, ou $50 \pm 50 \sqrt{-\frac{1}{3}}$. Or, comme on ne ſçauroit trouver aucune quantité qui, étant multipliée par elle-même, donne —, il s'enſuit que la quantité $\sqrt{-\frac{1}{3}}$ ne ſçauroit être réelle, ou, ce qui revient au même, que le Problême eſt impoſſible dans ce cas. Troiſieme exemple, qui demandant la racine d'une quantité négative, eſt impoſſible.

Ainſi on peut être aſſuré qu'il n'y a aucune valeur poſſible à ſubſtituer pour x dans l'équation $xx - 100x = -\frac{10000}{3}$ qui faſſe que les deux membres en deviennent égaux; ou, ce qui revient au même, que la ſomme a ne ſçauroit être altérée chaque année, ſuivant aucune proportion donnée qui ſoit telle que de la ſeconde à la troiſieme année la diminution ſoit d'une quantité égale au tiers du total. Les

Géometres regardent cependant comme une eſpece de ſolution ou de racine de l'équation $x x - 100 x = - \frac{10000}{3}$, la valeur $50 \pm 50 \sqrt{-\frac{1}{3}}$ qu'ils trouvent alors, mais ils l'appellent une racine imaginaire, & cette racine imaginaire à cauſe du ſigne $\pm$ eſt toujours cenſée une double ſolution.

Ces racines ſont dites imaginaires.

XIII.

Quelles ſont les équations du ſecond degré, dont les racines ſont imaginaires.

On voit, par la valeur générale $-\frac{1}{2} p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4} p p}$ de x, que toutes les fois que la quantité déſignée par q, ſera négative & plus grande que $\frac{1}{4} p p$, les deux racines de l'équation $x x + p x = q$, ſeront toutes deux imaginaires.

XIV.

Réſolution des équations du ſecond degré ſans les comparer à la formule générale.

Lorſqu'on a une équation quelconque du ſecond degré, on peut la réſoudre ſans la comparer terme à terme avec l'équation générale $x x + p x = q$; car on peut, ſans augmenter le calcul, répéter le même procédé qu'on a ſuivi en réſolvant cette équation générale. Il ne faut pour cela qu'ajouter aux deux membres le quarré de la moitié de ce qui multiplie x dans le ſecond terme du premier membre, & prendre enſuite la racine quarrée des deux membres. Qu'on ait, par exemple, à réſoudre l'équation $x x + 8 x = 9$, en ajoutant des deux côtés 16, quarré de la moitié de 8, on a $x x + 8 x + 16 = 9 + 16 = 25$. Et prenant enſuite la racine des deux côtés, on a $x + 4 = \pm 5$, c'eſt-à-dire, $x = -4$

± 5, ou $x = -9$ & $x = 1$, & ces deux valeurs résolvent également l'équation $xx + 8x = 9$.

X V.

Pour accoutumer les Commençans aux difficultés qu'on rencontre dans les Problêmes du second degré, nous leur proposerons encore le Problême suivant.

Trouver sur la ligne qui joint deux lumieres quelconques le point où ces deux lumieres éclairent également, en supposant ce principe de Physique, que l'effet d'une lumiere est quatre fois plus grand, lorsqu'elle est deux fois plus proche, neuf fois plus grand, lorsqu'elle est trois fois plus proche, ou pour s'exprimer comme les Géometres, que son effet est en raison renversée du quarré de la distance. Autre Problême du second degré.

Que a exprime la distance qui est entre les lumieres données, & que le rapport de m à n soit celui qui est entre l'effet de la plus petite lumiere à une certaine distance, & l'effet de la plus grande lumiere à la même distance.

De plus, que x exprime la distance de la plus petite des deux lumieres à un point pris à volonté sur la ligne qui joint les deux lumieres, est clair que $a - x$ sera la distance du même point à l'autre lumiere, que les quarrés de ces deux distances seront x^2 & $x^2 - 2ax + a^2$, & par conséquent que les quantités qui seront en raison renversée de ces quarrés ſeront entr'elles comme $\frac{1}{xx}$ * & $\frac{1}{xx - 2ax + aa}$.

De-là il ſuit que ſi les lumieres étoient égales, les effets qu'elles produiroient chacune dans ce même point, ſeroient entr'elles comme $\frac{1}{xx}$ à $\frac{1}{xx - 2ax + aa}$; mais ces lumieres ayant des quantités abſolues qui ſont entr'elles dans la raiſon de m à n, leurs effets doivent donc être entr'eux comme $\frac{m}{xx}$ à $\frac{n}{xx - 2a + aa}$.

Préſentement pour que le point pris à volonté devienne le point demandé, il n'y a autre choſe à faire qu'à égaler ces deux quantités, ce qui donnera à l'équation $maa - 2amx + mxx = nxx$, qu'on réſoudra ainſi.

On commencera par paſſer les termes mxx & $2amx$ dans l'autre membre, ce qui me donnera $\overline{n - m} \times xx + 2amx = maa$, ou $xx + \frac{2am}{n - m}x = \frac{aam}{n - m}$.

* Ceci doit être facile à entendre à ceux qui auront vû dans l'Arithmétique ce que c'eſt que des raiſons renverſées. Il n'y a pas plus de difficulté à voir que $\frac{1}{xx}$ & $\frac{1}{xx - 2ax + aa}$ ſont en raiſon renverſée de xx & de $xx - 2ax + aa$, qu'à voir que $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ſont en raiſon renverſée de 3 & 4.

On ajoutera ensuite aux deux membres de cette équation le quarré de la moitié du coëfficient du second terme, & l'on aura

$$x^2 + \frac{2amx}{n-m} + \frac{aamm}{\overline{n-m}^2} = \frac{aam}{n-m}$$

$+ \dfrac{aamm}{\overline{n-m}^2}$ dont le second membre devient $\dfrac{aamn}{\overline{n-m}^2}$ en mettant les deux termes $\dfrac{aam}{n-m} + \dfrac{aamm}{\overline{n-m}^2}$ au même dénominateur & en réduisant.

Cela fait, on prendra la racine des deux membres de l'équation, & l'on aura . . . . .

$x + \dfrac{am}{n-m} = \pm \sqrt{\dfrac{aamn}{\overline{n-m}^2}}$, ou

$x = - \dfrac{am}{a-m} \pm \dfrac{a}{n-m} \sqrt{mn}$, en prenant la racine de la partie $\dfrac{aa}{\overline{n-m}^2}$ qui est un quarré parfait, & laissant sous le signe radical son multiplicateur mn, qui n'est pas un quarré, du moins dans toutes les valeurs de m & de n. Donc les deux valeurs d'x qui résolvent l'équation précédente, & par conséquent le Problême qui a conduit à cette équation, ſont exprimées par la formule $x = -\frac{am}{n-m} \pm \frac{a}{n-m}\sqrt{mn}$, ou

$$x = \frac{a}{n-m} \times \overline{-m \pm \sqrt{mn}}.$$

XVI.

Des deux valeurs précédentes l'une eſt néceſſairement poſitive, l'autre négative.

On voit par cette expreſſion que l'une des valeurs eſt néceſſairement négative, & l'autre poſitive. Car, 1°. ſi on prend le ſigne $-$ pour la quantité radicale $\sqrt{mn}$, il n'eſt pas douteux que la quantité totale ne ſoit négative. 2°. Si on fait $\sqrt{mn}$ poſitive, $-m + \sqrt{mn}$ qu'on a alors ſera poſitive, parce qu'ayant fait par la ſuppoſition n plus grand que m, $\sqrt{mn}$ doit être plus grand que m.

XVII.

Uſage de la valeur négative.

Si on cherche préſentement l'uſage qu'on doit faire de la valeur négative, on trouvera, en ſe rappellant, ce qu'on a vû (I. Part. art. LXIII.) ſur ces valeurs dans les équations du premier degré, qu'elle doit être priſe dans un ſens oppoſé à la premiere, c'eſt-à-dire, que le point qu'elle donne pour réſoudre ce Problême, au lieu d'être placé entre les deux lumieres, ſera placé ſur le prolongement de la ligne qui les joint du côté de la lumiere la plus foible.

On n'aura aucune difficulté à admettre cette poſition de la valeur négative de x, lorſqu'on remarquera que cette même valeur n'a été trouvée négative, que parce qu'on a réſolu le Problême, en regardant le point cherché comme placé entre les deux lumieres ; car si on avoit fait attention à la possibilité de prendre ce point sur le prolongement de la ligne qui les joint, on auroit eu un autre calcul rélatif à cette position, & l'x qui auroit été alors placé naturellement sur le prolongement de la ligne qui joint les lumieres, auroit été positif.

XVIII.

Pour nous faire mieux entendre, nous allons rechercher le Problême en entier, en supposant le point cherché sur le prolongement de la ligne qui joint les lumieres. La distance de ce point à la plus petite lumiere étant toujours nommée x, sa distance à la plus grande lumiere sera alors $a + x$, les quarrés de ces distances xx & $aa + 2ax + xx$; les deux quantités de lumiere $\frac{m}{xx}$ & $\frac{n}{aa + 2ax + xx}$, lesquelles étant égales par les conditions du Problême, donneront $\frac{m}{xx} = \frac{n}{aa + 2ax + xx}$, ou $maa + 2amx + mxx = nxx$, ou $\overline{n - m} \times xx - 2amx = maa$, ou $xx - \frac{2amx}{n - m} = \frac{m}{n - m}aa$ qui étant résolue donnera

$x = \frac{a \times \overline{m \pm \sqrt{mn}}}{n - m}$ dont la premiere valeur $\frac{a \times \overline{m + \sqrt{mn}}}{n - m}$ sera positive, & la seule qui résoudra exactement le Problême dans le sens où il est proposé alors.

Quant à la seconde valeur $\frac{a \times \overline{m - \sqrt{mn}}}{n - m}$ qui est négative, elle doit être alors prise dans un sens opposé à la premiere, c'est-à-dire, que le point qu'elle donne doit être placé, non comme on l'a supposé dans le calcul, sur le prolongement de la ligne qui joint les deux lumieres, mais sur cette ligne elle-même.

Ainsi dans cette nouvelle solution on a, par rapport aux signes, tout le contraire de ce qu'on avoit dans la premiere, & ces deux solutions confirment ce que nous avons déja vû dans la premiere Partie, art. LXIII. que les inconnues qui deviennent négatives, doivent toujours être prises dans un sens opposé à celui qu'on leur a donné en exprimant le Problême.

XIX.

Nous ôterons, je crois, tout embarras aux Lecteurs, sur ce Problême, en prenant un exemple. Supposons que $n = 4\,m$, c'est-à-dire, que la plus grande lumiere ait quatre fois plus de force que l'autre, en substituant cette valeur de n dans la formule générale de l'art. XV. $x = \frac{a}{n-m} \times m \pm \sqrt{mn}$; elle deviendra $x = \frac{a}{3} \times \pm \overline{2-1}$, c'est-à-dire, ou $+ \frac{1}{3} a$, ou $- a$, qui fournissent deux points également propres à résoudre le Problême, l'un placé entre les deux lumieres deux fois plus près de la foible que de la forte, & l'autre sur le prolongement de la ligne qui joint ces lumieres, & à une distance de la foible égale à celle qui est entre les deux lumieres. Or, il est très-facile de voir sans Algébre que ces deux points résolvent également le Problême, puisqu'ils sont l'un & l'autre deux fois plus près de la lumiere foible que de la forte, & que la forte est quadruple de la foible.

X X.

Les principes que nous venons de donner sont suffisans pour toutes les équations du second degré; mais comme les Commençans ne peuvent gueres les posséder qu'en les pratiquant, nous allons les exercer à la résolution de plusieurs équations : il en résultera cet avantage, qu'outre qu'ils en sçauront mieux la méthode, ils apprendront en même-temps de nouvelles opérations d'Algébre, qui sont sans doute dûes aux recherches que les premiers Analystes ont fait sur les équations du second degré.

Soient $bxx = 2c^2x + 2cca$, en or- Nouveaux exemples de résolutions d'équations du second degré.

donnant cette équation, c'est-à-dire, en passant les termes affectés de x du même côté, & divisant tous les termes par le coëfficient de xx, on aura $x^2 - \frac{2ccx}{b} = \frac{2cca}{b}$, aux deux membres de laquelle ajoutant $\frac{c^4}{bb}$, & prenant ensuite la racine quarrée, on aura $x - \frac{cc}{b} = \pm\sqrt{\frac{2ccab + c^4}{bb}}$ $= \pm\frac{c}{b}\sqrt{2ab + cc}$, c'est-à-dire, $x = \frac{cc \pm c\sqrt{2ab + cc}}{b}$.

Soit $ff + gg - 2gx + xx = \frac{mmxx}{nn}$ qui devient d'abord $\frac{\overline{mn - nn}}{nn} \times xx + 2gx = ff + gg$, & ensuite $xx + \frac{2gnn}{mm - nn}x = \frac{ffnn + ggnn}{mm - nn}$, ou $xx + \frac{2gnnx}{mm - nn} + \frac{ggn^4}{\overline{mm - nn}^2} = \frac{ffnn + ggnn}{mm - nn} + \frac{ggn^4}{\overline{mm - nn}^2}$.

$$= \frac{ffnnmm + ggnnmm - ffn^4}{\overline{mm - nn}^2},$$

d'où l'on tire $x + \frac{gnn}{mm - nn}$

$$= \pm \frac{n\sqrt{ffmm + ggmm - ffnn}}{mm - nn}, \text{ ou}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots x = \frac{n}{mm - nn}$$

$$\overline{\times - gn \pm \sqrt{ffmm + ggmm - ffnn}}.$$

Soit $abc - aff + 2afz = azz - bzz$ qui étant d'abord ordonnée deviendra

$$zz - \frac{2af}{a-b}z = \frac{abc - aff}{a-b},$$

ensuite $zz - \frac{2af}{a-b}z + \frac{aaff}{\overline{a-b}^2}$

$$= \frac{abc - aff}{a-b} + \frac{aaff}{\overline{a-b}^2}$$

$$= \frac{aabc - abbc + abff}{\overline{a-b}^2} \text{ qui donne}$$

$$z = \frac{af \pm \sqrt{aabc - abbc + abff}}{a-b}.$$

Soit à présent l'équation $4a^2 - 2x^2 + 2ax = 18ab - 18bb$, en l'ordonnant on aura $xx - ax = 2aa - 9ab + 9bb$, ou $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{9}{4}aa$

$- 9ab + bb$ qui donne $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb}$.

On réduira aisément cette quantité si on a vû, & on ne pouvoit guéres manquer de le voir dans tout ce que nous venons de dire, que le quarré d'une quantité composée de deux termes, devoit être égal à la somme des quarrés de chacun de ces deux termes, & au double produit de ces deux termes.

Car, trouvant dans la quantité $\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb$ les termes $\frac{9}{4}aa$ & $9bb$ qui sont les quarrés de $\frac{3}{2}a$ & de $3b$, & le terme $9ab$ qui est le double produit de $\frac{3}{2}a$ & de $3b$, on voit aisément que cette quantité $\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb$ est le quarré de $\frac{3}{2}a - 3b$. Donc au lieu de l'expression $\sqrt{\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb}$, on peut écrire simplement $\frac{3}{2}a - 3b$: donc la valeur de x est alors $\frac{1}{2}a \pm \frac{3}{2}a \mp 3b$, c'est-à-dire, ou $2a - 3b$, ou $-a + 3b$. En effet, l'on voit que ces valeurs résolvent également l'équation donnée.

XXI

Comme dans les différentes équations du second degré qu'on peut avoir à résoudre, il arrivera souvent des cas de même nature que celui qu'on vient de trouver; il faut avoir quelque méthode sûre & générale pour reconnoître les quantités qui son des quarrés, & pour trouver leurs racines; cette méthode est aisée à tirer des principes que nous venons d'employer dans l'exemple précédent; en voici le procédé sur un autre exemple.

Soit

Soit la quantité $30\,ab + 9\,bb + 25\,a^2$ dont on demande la racine quarrée.

Procédé de l'extraction de la racine quarrée expliquée sur un exemple.

J'ordonne d'abord cette quantité par rapport à une des lettres qu'elle contient, par rapport à a, par exemple, & j'écris par conséquent cette quantité, ainsi qu'on la voit dans la Table ci-jointe, case 1.

Je prends ensuite la racine du premier terme $25\,a^2$, laquelle est $5\,a$, que je prends pour premier terme de la racine cherchée, & que j'écris à côté de la quantité proposée $25\,a^2 + 30\,ba + 9\,bb$, ayant tiré auparavant une barre pour éviter la confusion. Je place alors sous la proposée le quarré $25\,a^2$ de $5\,a$, en lui donnant le signe $-$, je tire une barre & je réduis, j'ai, par ce moyen, la quantité $30\,ba + 9\,bb$ que j'écris sous la barre; cela fait, je double $5\,a$, ce qui me donne $10\,a$ que j'écris au-dessus de $5\,a$, & je divise ensuite le premier terme $30\,ba$ de la quantité $30\,ba + 9\,bb$ par $10\,a$, & j'écris le quotient $3\,b$, qui est le second terme de la racine cherchée à côté de $5\,a$, je l'écris en même-temps à côté de $10\,a$, & je multiplie ce nouveau terme $3\,b$ de la racine par la quantité supérieure $10\,a + 3\,b$, en observant, comme dans la division, de changer les signes en écrivant le produit sous la quantité $30\,ab + 9\,bb$; faisant alors la réduction, & voyant que tout se détruit, je conclus que $5\,a + 3\,b$ est la racine cherchée.

XXII.

Pour fortifier les Commençans dans la méthode d'extraire les racines quarrées, il ne sera pas inutile de leur faire parcourir les deux exemples ſuivans.

Autres exemples d'extraction de racine quarrée.

Soit d'abord propoſé d'extraire la racine quarrée de la quantité $4a^2 - 4ba + 4ca + bb - 2cb + cc$ ordonnée par rapport à a.

Je commence par prendre la racine de $4a^2$ laquelle eſt $2a$ que j'écris à côté de la propoſée, (Voyez la ſeconde caſe de la Table ci-jointe) je retranche enſuite le quarré $4aa$, & j'écris le reſte $-4ba + 4ca + b^2$, $- 2cb + cc$, je double $2a$; & j'écris le double $4a$ au-deſſus, je diviſe le terme $-4ba$ par $4a$, & j'écris le quotient $-b$, tant à côté de la racine que du diviſeur $4a$. Multipliant alors $-b$ par $4a - b$, j'ai, en changeant les ſignes, $+4ba - bb$ que je place encore ſous le dividende, & j'ai, après la réduction, $+4ca - 2cb + cc$ qui doit ſervir encore de dividende; je double alors la racine $2a - b$, & j'écris le double $4a - 2b$ au-deſſus, je diviſe $+4ca$ par $4a$, & j'écris le quotient $+c$ à côté de la racine $2a - b$, & à côté du diviſeur. Faiſant enſuite la multiplication de $+c$ par $4a - 2b + c$, & écrivant avec des ſignes différens le produit ſous le dividende, tout ſe détruit, d'où je conclus que la racine eſt poſſible, & qu'elle eſt $2a - b + c$.

Soit enſuite propoſé d'extraire la racine quarrée de la quantité $4x^4 + 8ax^3 + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 16b^2ax + 16b^4$ ordonnée par rapport à x, en ſuivant les opérations qui ſont écrites dans la Table ci-jointe, caſe 3, on verra facilement que la racine quarrée de cette quantité eſt $2xx + 2ax + 4bb$.

Case 1.

$$25a^2 + 30ba + 9b^2 \qquad 10a + 3b$$
$$-25a^2 \qquad 5a + 3b$$
$$30ba + 9b^2$$
$$-30ba - 9b^2$$
$$0$$

Case 2.

$$2a - b + c$$
$$4a - b + c$$
$$4a - 2b$$

$$4a^2 - 4ba + 4ca + b^2 - 2cb + cc$$
$$-4a^2$$
$$-4ba + 4ca + b^2 - 2cb + cc$$
$$+4ba \qquad - b^2$$
$$4ca \qquad - 2cb + cc$$
$$-4ca \qquad + 2cb - cc$$
$$0$$

Case 3.

$$2x^2 + 2ax + 4b^2$$
$$4x^2 + 2ax$$
$$4x^2 + 4ax + 4b^2$$

$$4x^4 + 8ax^3 + a^2x^2 + 16b^2x^2 + 15b^2ax + 16b^4$$
$$-4x^4$$
$$8ax^3 + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + b^2ax + 16b^4$$
$$-8ax^3 - 4a^2x^2$$
$$16b^2x^2 + 16b^2ax + 16b^4$$
$$-16b^2x^2 - 16b^2ax - 16b^4$$
$$0$$

XXIII.

Dans les différens exemples que nous avons donné sur les résolutions des équations du second degré, les Commençans n'ont guéres pû trouver de difficulté que lorsqu'il étoit question de réduire les quantités radicales en ôtant de dessous le signe, les quantités quarrées qui étoient des produisans de la quantité radicale : en effet cette opération est la plus délicate de celles qui peuvent entrer dans la résolution des équations du second degré, il est donc important que les Commençans s'appliquent à la pratiquer facilement. Pour les aider à y parvenir, nous joindrons ici les exemples suivans.

Exemples de réduction de quantités radicales.

$$\sqrt{48\,aabc} = 4a\sqrt{3bc}$$

$$\sqrt{\frac{a^3b + 4aabb + 4ab^3}{cc}} = \frac{a + 2b}{c}\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{\frac{aahhmm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$$

$$= \frac{am}{pz}\sqrt{hh + 4mp}$$

$$6\sqrt{\tfrac{75}{98}\,abb} = \frac{30b}{7}\sqrt{\frac{3a}{2}}$$

XXIV.

Presqu'aussi-tôt que les équations du second

Les quantités qui n'ont

point de racines exactes sont dites incommensurables ou irrationelles.

degré ont fait connoître les quantités irrationelles ou incommensurables (on appelle ainsi les quantités qui n'ont point de racines exactes), on a été obligé de faire sur ces quantités les mêmes opérations que sur les quantités rationelles ou commensurables, c'est-à-dire, qu'on a eu à ajouter, à soustraire, à multiplier, à diviser des quantités, ou toutes incommensurables, ou en partie incommensurables, & en partie commensurables.

L'addition & la soustraction de ces quantités ne supposent que leur réduction.

Quant à l'addition & à la soustraction des quantités radicales, elles ne renferment aucune difficulté que celles de la réduction de ces mêmes quantités à leurs plus simples expressions.

Par exemple, s'il faut ajouter $\sqrt{48abb}$ avec $b\sqrt{75a}$, je change la premiere de ces quantités en $4b\sqrt{3a}$, & la seconde en $5b\sqrt{3a}$, dont la somme est $9b\sqrt{3a}$.

De la même maniere $\sqrt{48c^3} - \sqrt{\frac{16}{27}c^3} = \frac{32}{9}c\sqrt{3c}$.

$$\sqrt{\frac{ab^3}{cc}} + \frac{1}{2c}\sqrt{a^3b - 4aabb + 4ab^3} = \frac{a}{2c}\sqrt{ab}.$$

$$a\sqrt{\frac{a^3b}{3aa + 6ac + 3cc}} - \frac{bc\sqrt{ab}}{a+c} = \overline{\frac{aa}{\sqrt{3}} - bc} \times \frac{\sqrt{ab}}{a+c}$$

XXV.

A l'égard de la multiplication, si les quantités qu'on veut multiplier sont toutes deux incommensurables, il est clair qu'il n'y aura autre chose à faire qu'à multiplier les quantités qui sont sous le signe radical, & mettre le même signe radical à la tête du produit; s'il se trouve alors des réductions à faire, on les fera comme ci-dessus.

Multiplication des incommensurables.

Qu'on ait à multiplier, par exemple, $\sqrt{ab} \times \sqrt{ac}$, on écrira $\sqrt{aabc}$, ou $a\sqrt{bc}$. De même $\sqrt{3cd} \times \sqrt{4fgc} = \sqrt{12fgccd} = 2c\sqrt{3fgd}$.

Lorsque les quantités radicales qu'on aura à multiplier seront égales, il faudra simplement ôter le signe radical. Pour multiplier, par exemple, $\sqrt{a^3cd}$, par $\sqrt{a^3cd}$, on écrit simplement la quantité a^3cd sans signe radical.

Si la quantité qui multiplie un radical est rationelle, il faut se contenter de l'écrire devant le signe avec une barre au-dessus lorsqu'elle a plusieurs termes; si on vouloit la faire entrer sous le signe radical, il faudroit la quarrer auparavant.

Par exemple, le produit de $a+b$ par $\sqrt{\frac{ffg}{aa-bb}}$ est $\overline{a+b}\sqrt{\frac{ffg}{aa-bb}}$, ou $\sqrt{\frac{ffg \times \overline{aa+2ab+bb}}{aa-bb}}$, ou

$$\sqrt{\frac{ffg \times \overline{a+b}}{a-b}}\text{, ou } \frac{f\sqrt{ag+bg}}{\sqrt{a-b}}.$$

$$2a\sqrt{\frac{aa+bb}{c}} \times -3a\sqrt{\frac{aa+bb}{d}}$$

$$= -\frac{6aa \times \overline{aa+bb}}{\sqrt{cd}} = -\frac{6a^4+6aabb}{\sqrt{cd}}.$$

$$\sqrt{a+b} \times \sqrt{a-b} = \sqrt{aa-bb}.$$

S'il eſt queſtion de multiplier des quantités composées de pluſieurs autres, ou toutes radicales, ou en partie radicales & en partie incommenſurables, l'opération ne ſera pas plus difficile que les précédentes, pourvû qu'on ſe rappelle les regles ordinaires des multiplications des quantités complexes.

Par exemple, $(3a\sqrt{bc} - 2b\sqrt{ac}) \times 2c\sqrt{ab} = 6abc\sqrt{ac} - 4abc\sqrt{bc}$.

$$\overline{a+\sqrt{aa-bb}} \times \overline{a+\sqrt{aa-bb}}$$

$$= 2aa - bb + 2a\sqrt{aa-bb}.$$

$$\overline{a+\sqrt{aa-xx}} \times \overline{a-\sqrt{aa-xx}} = xx.$$

XXVI.

Diviſion des incommenſurables.

Lorſqu'il s'agira de diviſer deux quantités irrationelles l'une par l'autre, on diviſera les quantités qui ſont ſous le ſigne, & l'on mettra le ſigne devant le quotient.

S'il faut diviſer une quantité irrationelle par une rationelle, on mettra ſimplement la rationelle ſous l'autre, avec une barre aſſez longue, pour qu'on puiſſe connoître que le ſigne ne porte pas deſſus; ſi on veut, au contraire, que le ſigne radical y porte, il faudra quarrer le diviſeur.

S'il y a des quantités commenſurables devant les radicaux, on les diviſera à l'ordinaire, & on écrira leur quotient à côté du quotient radical. Toutes ces choſes s'entendront ſans aucune peine, par les exemples.

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} = \sqrt{b}; \quad \frac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = c\sqrt{c};$$

$$\frac{12ac\sqrt{6bc}}{4c\sqrt{2b}} = 3a\sqrt{3c};$$

$$\frac{\sqrt{aa-xx}}{\sqrt{a+x}} = \sqrt{a-x};$$

$$\frac{\sqrt{aabb-bbxx}}{a-x} = b\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$$

XXVII.

Ce qu'on vient de dire ſur les équations du ſecond degré, ſuffit lorſque ces équations ne renferment qu'une inconnue; mais comme on rencontre ſouvent des Problêmes dans leſquels il eſt néceſſaire d'en employer pluſieurs, il faut voir comment l'on traite ces Problêmes, nous prendrons dans cette vûe l'exemple ſuivant.

Problême du second degré qui demande plusieurs inconnues.

*Trouver trois quantités en progression * géométrique, dont la somme soit donnée, ainsi que la somme de leurs quarrés.*

Soient les trois quantités cherchées x, y, z, on aura par la nature des progressions $x : y = y : z$, c'est-à-dire, $yy = xz$; de plus, parce que leur somme est donnée, en nommant cette somme a, on aura $x + y + z = a$; enfin en nommant la somme de leurs quarrés bb, on aura, par la derniere condition du Problême, $xx + yy + zz = bb$.

Pour faire usage de ces trois équations, on commencera par chasser z au moyen de sa valeur $a - x - y$ tirée de l'équation $x + y + z = a$; substituant donc cette valeur de z dans les deux autres équations, elles se changeront en $2yy + 2xx + 2xy + aa - 2ax - 2ay = bb$, & $yy = ax - xx - xy$. Pour chasser ensuite celle qu'on voudra des deux inconnues que renferment ces deux équations, on trouvera la valeur que cette inconnue a dans chacune de ces équations, & on égalera les deux valeurs que l'on aura par ce moyen, opérations faciles par les principes précédens. Que x soit cette inconnue à chasser, la premiere équation donnera

* Trois quantités dont la premiere est à la seconde, comme la seconde à la troisieme, telles que 8, 12, 18, par exemple, sont dites en progression géométrique, ou en proportion continue. On ne sçauroit entendre la théorie des proportions, qu'on ne sçache en même temps celle des progressions.

$$x = -\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \tfrac{3}{4}yy + \tfrac{1}{2}ay},$$

& pour la seconde

$$x = -\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}ay - \tfrac{3}{4}yy}.$$ Il n'y a donc plus qu'à égaler ces deux valeurs, ce qui donnera l'équation

$$-\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \tfrac{3}{4}yy + \tfrac{1}{2}ay} = -\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}ay - \tfrac{3}{4}yy}$$

qu'il ne s'agit plus que de résoudre.

On remarquera premiérement, que les termes $-\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}a$ sont communs des deux côtés, & que par conséquent l'équation se réduit à

$$\pm\sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \tfrac{3}{4}yy + \tfrac{1}{2}ay} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}ay - \tfrac{3}{4}yy}.$$ Or, en quarrant les deux membres de cette équation, les deux radicaux disparoissent tout de suite, & l'équation devient en réduisant $ay = \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{2}bb$ qui donne $y = \dfrac{aa - bb}{2a}$, substituant ensuite cette valeur de y dans l'une des précédentes de x, on aura $x = \tfrac{1}{4}a + \dfrac{bb}{4a}$

$$\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}bb - \tfrac{3}{16}aa + \tfrac{3}{8}bb - \frac{3b^4}{16aa}}$$

ou $x = \frac{bb + aa + \sqrt{10bbaa - 3a^4 - 3b^4}}{4a}$

& en ſubſtituant la valeur de x & celle de y dans $z = a - x - y$, on aura enfin

$z = \frac{aa + bb \pm \sqrt{10bbaa - 3a^4 - 3b^4}}{4a}$

XXVIII.

Comme on eſt arrivé, dans cette ſolution, à une valeur extrêmement ſimple pour y, après avoir eu des radicaux aſſez compoſés, on doit ſoupçonner qu'on pouvoit y arriver par une voie plus courte : en effet, avec un peu de réflexion, on trouve facilement la méthode ſuivante.

Autre maniere de réſoudre les équations précédentes.

Soient repriſes les deux équations $x^2 - ax + yx = \frac{bb}{2} - \frac{aa}{2} - y^2 + ay$ & $x^2 + xy - ax = -yy$; en retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on a $0 = \frac{bb}{2} - \frac{aa}{2} + ay$, d'où l'on tire $y = \frac{aa - bb}{2a}$, qui, étant ſubſtitué dans l'une ou l'autre de ces deux équations, donne $x^2 + \frac{aax - bbx}{2a} - ax = \frac{-a^4 + 2aabb - b^4}{4aa}$, ou $x^2 - \frac{\overline{bb + aa} \times x}{2a}$

$$= \frac{-a^4 + 2aabb - b^4}{4aa}$$ d'où l'on tire la même valeur de x que ci-dessus.

XXIX.

Dans ce Problême, on a eu des quantités qui se sont détruites par une espece de hazard, ce qui a extrêmement simplifié les calculs ; mais comme les équations du second degré, à plusieurs inconnues, n'offrent pas toujours de pareilles facilités, il faut sçavoir ce qu'on doit faire dans des cas moins simples. Pour cela soit pris, par exemple, les deux équations

$$x^2 + ax - 2xy = aa + 2yy;$$
$$xx - 2ax + xy = 2aa - yy.$$

Exemple d'équation du second degré à deux inconnues, plus compliqué que le précédent.

La premiere de ces équations donne

$$x = -\tfrac{1}{2}a + y \pm \sqrt{\tfrac{5}{4}aa - ay + 3yy},$$

l'autre donne

$$x = a - \tfrac{1}{2}y \pm \sqrt{3aa - ay - \tfrac{3}{4}yy}$$

égalant ensuite ces deux valeurs & réduisant, on a

$$-\frac{3a}{2} + \tfrac{3}{2}y \pm \sqrt{\tfrac{5}{4}aa - ay + 3yy}$$
$$= \pm\sqrt{3aa - ay - \tfrac{3}{4}yy}.$$

Pour faire ensuite évanouir les radicaux de cette équation, je commence par quarrer les deux membres, ce qui me donne

$$\tfrac{9}{4}yy - \tfrac{9}{2}ay + \tfrac{9}{4}aa \pm \overline{3y - 3a}$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{4}aa - ay + 3yy} + \tfrac{5}{4}aa - ay$$
$$+ 3yy = 3aa - ay - \tfrac{3}{4}yy$$

qui contient encore un radical. Afin de le faire disparoître, j'écris ainsi cette équation

$$\ldots\ldots\ldots\ldots - \tfrac{1}{2}aa + \tfrac{9}{2}ay - 6yy$$
$$= \pm\,\overline{3y - 3a}\sqrt{\tfrac{5}{4}aa - ay + 3yy},$$

en la réduisant & laissant la quantité radicale

$$\pm\,\overline{3y - 3a}\sqrt{\tfrac{5}{4}aa - ay + 3yy}$$

seule d'un côté de l'équation ; cela fait, je quarre les deux membres, & j'ai

$$\tfrac{1}{4}a^4 - \tfrac{9}{2}a^3y + \tfrac{105}{4}aayy - 54ay^3 + 36y^4$$
$$= 9yy - 18ay + 9aa \times \tfrac{5}{4}aa - ay + 3yy$$

ou en réduisant

Équation finale à laquelle conduisent ces équations.

$$9y^4 + 9ay^3 - 30aayy + 27a^3y = 11a^4$$

c'est-là l'équation qui résulte des deux précédentes, & celle qu'il faudroit résoudre pour avoir la solution du Problême qui auroit donné ces deux équations : on voit par-là qu'il n'en est pas des équations du second degré à plusieurs inconnues, comme de celles du premier, qui ne donnent jamais une équation finale d'un autre degré qu'elles.

XXX.

Autre maniere de traiter le même exemple.

On peut, sans avoir la peine de résoudre les équations du second degré, & de chasser ensuite leurs radicaux, parvenir également à l'équation finale.

Soit repris, pour le faire voir, les deux équations précédentes, & soit tirée la valeur de xx de chacune d'elles, la premiere fournira $x^2 = aa + 2yy - ax + 2xy$, la seconde $x^2 = 2aa - yy + 2ax - xy$. Egalant ces deux valeurs, on a $aa + 2yy + 2xy - ax = 2aa - yy - xy + 2ax$, d'où l'on tire $x = \frac{3yy - aa}{3a - 3y}$, dont la substitution dans l'une ou l'autre des deux équations données, dans $xx - 2ax + xy = 2aa - yy$, par exemple, donne $\frac{9y^4 - 6aayy + a^4}{\overline{3a - 3y}^2} + \frac{\overline{y - 2a} \times \overline{3yy - aa}}{3a - 3y} = 2aa - yy$ qui étant réduite, produit la même équation $9y^4 + 9ay^3 - 30aayy + 27a^3y = 11a^4$.

XXXI.

Pour habituer les Commençans à l'usage de cette méthode qui est d'un grand usage dans l'analyse ; nous allons l'appliquer aux deux équations.

$$x^2 + axy + bx = cy^2 + dy + e$$
$$x^2 + fxy + gx = hy^2 + iy + k.$$

qui contiennent chacune la plus grande complication que puissent avoir les équations du second degré à deux inconnues.

Tirant une valeur de xx de chacune de ces équations & les égalant, on aura

$$\overline{a-f}\times xy+\overline{b-g}\times x=\overline{c-h}\times y^2$$
$$+\overline{d-i}\times y+e-k$$

laquelle, en faisant pour abréger les calculs, $a-f=l$; $b-g=m$; $c-h=n$; $d-i=p$; $e-k=q$ se change en $lxy+mx=ny^2+py+q$, d'où je tire $x=\frac{ny^2+py+q}{ly+m}$. Or substituant celle-ci dans l'une ou dans l'autre des deux équations données, dans la premiere, par exemple, j'ai $\frac{\overline{ny^2+py+q}^2}{\overline{ly+m}^2}$

$$+\frac{\overline{ay+b}\times\overline{ny^2+py+q}}{ly+m}$$
$$=cy^2+dy+e$$

ou $\overline{ny^2+py+q}^2+\overline{ay+b}\times\overline{ny^2+py+q}$ $\times\overline{ly+m}=\overline{cy^2+dy+e}\times\overline{ly+m}^2$.

Si on fait alors les opérations indiquées, que l'on réduise & que l'on ordonne, il vient enfin

$$y^4+\frac{bln+amn+alp+2np-2mlc-l^2d}{aln+nn-l^2c}y^3$$
$$+\frac{bmn+qal+pbl+pam+p^2+2nq-m^2c-2mld-el^2}{aln+nn-l^2c}y^2$$
$$+\frac{blq+amq+bmp+2pq-m^2d-2mel}{aln+nn-l^2c}y$$
$$=\frac{m^2e-q^2-bmq}{aln+n^2-l^2c}$$, équation du qua-

trieme degré qui résulte des deux équations du second degré les plus générales.

XXXII.

Si on avoit des équations telles que $xxy + axy = abb$ & $xxyy + ccyx = a^4$, ces équations ne feroient pas comptées parmi celles du fecond degré à caufe que le produit inconnu de x^2 par y eft de trois dimenfions, & que celui de x^2 par y^2 eft de quatre dimenfions ; mais la méthode précédente ferviroit avec la même facilité à chaffer les x de ces deux équations. Pour le faire voir, fuppofons que α repréfente toutes les quantités compofées d'y & de connues, à quelque degré qu'elles montent, qui peuvent multiplier x^2 dans l'une des équations données ; β toutes celles qui multiplient x dans les mêmes équations ; γ les quantités entiérement connues qui font de l'autre côté de la même équation, c'eft-à-dire, que cette premiere équation fera $\alpha x^2 + \beta x = \gamma$. Que la feconde foit de même $\delta x^2 + \varepsilon x = \varphi$.

y étant à un degré quelconque, & x feulement au fecond degré, on traiteroit de même les deux équations.

On tirera de la premiere $x^2 = \frac{\gamma - \beta x}{\alpha}$, & de la feconde $x^2 = \frac{\varphi - \varepsilon x}{\delta}$ lefquelles étant égalées, donnent $\gamma\delta - \beta\delta x = \varphi\alpha - \varepsilon\alpha x$ d'où l'on tire . . . . $x = \frac{\varphi\alpha - \gamma\delta}{\varepsilon\alpha - \beta\delta}$, qui, étant fubftitué dans l'équation $\alpha x^2 + \beta x = \gamma$, donne

$$\alpha \times \overline{\varphi\alpha - \gamma\delta}^2 + \beta \times \overline{\alpha\varepsilon - \beta\delta} \times \overline{\varphi\alpha - \gamma\delta}^2 = \gamma \times \overline{\varepsilon\alpha - \beta\delta}$$

dans laquelle mettant pour α, β, γ, δ, ε, φ leurs valeurs composées de y, & de connues, l'on aura l'équation cherchée.

XXXIII.

Ce qu'il faudroit faire pour arriver à l'équation finale, lorsque x seroit au troisième degré.

Si les x, ainsi que les y, montoient chacune à des degrés plus hauts que le second, on pourroit encore, dans ce cas, employer la méthode précédente : supposons, par exemple, qu'on ait les deux équations $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = \delta$, & $\varepsilon x^3 + \varphi x^2 + \chi x = \eta$ dans lesquelles α, β, γ, δ, ε, φ, χ, η représentent toutes sortes de quantités composées d'y & de connues, on commencera par prendre x^3 dans chacune de ces équations, & on égalera ses deux valeurs, ce qui donnera $\frac{\delta - \beta x^2 - \gamma x}{\alpha} = \frac{\eta - \varphi x^2 - \chi}{\varepsilon}$, ou $\delta\varepsilon - \varepsilon\beta x^2 - \gamma\varepsilon x = \eta\alpha - \varphi\alpha x^2 - \chi\alpha x$, ou $\overline{\varphi\alpha - \varepsilon\beta} \times x^2 = \overline{\gamma\varepsilon - \chi\alpha} \times x + \overline{\eta\alpha - \delta\varepsilon}$ dans laquelle x n'est qu'au second degré. Multipliant ensuite cette équation par αx, ainsi que l'équation $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = \delta$ par $\overline{\varphi\alpha - \varepsilon\beta}$, j'ai les deux équations $\overline{\varphi\alpha^2 - \alpha\varepsilon\beta} \times x^3 = \overline{\gamma\varepsilon\alpha - \chi\alpha^2} \times x^2 + \overline{\eta\varepsilon\alpha - \delta\varepsilon\alpha} \times x$ & $\overline{\varphi\alpha^2 - \alpha\varepsilon\beta} \times x^3 + \overline{\beta\varphi\alpha - \beta^2\varepsilon} \times x^2 + \overline{\gamma\varphi\alpha - \gamma\varepsilon\beta} \times x = \delta \times \overline{\varphi\alpha - \varepsilon\beta}$.

desquelles

desquelles je chasse x^3 comme des deux premieres équations, ce qui me donne

$$\alpha \times \overline{\gamma\varepsilon - \chi\alpha + \beta \times \overline{\varphi\alpha - \beta\varepsilon}} \times x^2$$
$$+ \alpha \times \overline{\overline{\eta\varepsilon - \delta\varepsilon} + \gamma \times \overline{\varphi\alpha - \varepsilon\beta}} \times x$$
$$= \delta \times \varphi\alpha - \varepsilon\beta$$

: dans laquelle x ne monte non plus qu'au second degré. Voilà donc le Problême réduit présentement au cas qu'on a résolu dans l'article précédent, c'est-à-dire, à celui où l'on a deux équations dans lesquelles l'inconnue x ne monte qu'au second degré. Il est inutile d'en achever ici le calcul, puisqu'il n'auroit de difficulté que celle de sa longueur

XXXIV.

Si l'inconnue, qu'on veut chasser des deux équations proposées, s'y trouvoit élevée à un degré plus haut que le troisieme, on voit bien que par une opération semblable à la précédente, on les changeroit d'abord en deux autres équations d'un degré moindre, & que par ce moyen on parviendroit toujours à chasser entiérement l'inconnue.

Ce seroit la même chose si x montoit à des degrés plus élevés.

XXXV.

Si au lieu de deux inconnues on en avoit trois élevées chacune à un degré quelconque, il est clair que pourvû qu'on eût trois équations, on parviendroit par la même méthode, à une équation finale, qui ne contiendroit que celle que l'on voudroit de ces trois inconnues; car, oubliant d'abord une de ces trois incon-

Et s'il y avoit plus de deux inconnues on parviendroit de même à l'équation finale.

nues, deux des trois équations suffiroient pour arriver à une seule, qui ne renfermeroit que l'inconnue oubliée, & que celle que l'on voudroit des deux autres inconnues. Faisant ensuite la même opération avec l'une des deux équations employée dans la premiere opération & la troisieme équation, on parviendroit à une autre équation, entre les deux mêmes inconnues, c'est-à-dire, que le Problême seroit réduit à celui où l'on a deux équations à deux inconnues, d'où l'on parviendroit enfin à une seule inconnue renfermée dans une équation.

Si on avoit quatre équations & quatre inconnues, on réduiroit de même la question à trois équations & trois inconnues, puis à deux équations & deux inconnues, puis enfin à une seule équation & à une inconnue; il en seroit de même pour un plus grand nombre d'équations & d'inconnues.

ÉLÉMENS D'ALGEBRE.

TROISIEME PARTIE.

Où l'on donne quelques principes généraux pour les équations de tous les degrés, avec la méthode de tirer de ces équations celles du premier & du second degré qu'elles peuvent renfermer.

SI les équations plus élevées que le second degré ont présenté de grandes difficultés, lorsqu'on a entrepris de les résoudre dans tous les cas, il a été du moins assez facile de faire sur ces équations de réflexions générales qui pouvoient en faire connoître la nature, & servir à les résoudre dans beaucoup de cas particuliers.

Ayant vû, par exemple, que les équations du premier degré n'avoient qu'une racine, que celles du ſecond en avoient deux, on a été porté à croire que celles du troiſieme en avoient trois, & ainſi de ſuite, & pour s'aſſurer de cette vérité, ou plutôt pour comprendre comment une équation pouvoit avoir autant de racines qu'elle a de degrés, on a cherché l'inverſe du Problême qu'on s'étoit propoſé d'abord, c'eſt-à-dire, qu'au lieu de chercher les racines d'une équation, on a cherché quelle ſeroit l'équation qui auroit pour ſes racines des quantités données, Problême infiniment plus facile que le premier.

I.

Maniere de former une équation par le moyen de ſes racines.

Qu'on demande, par exemple, quelle eſt l'équation dans laquelle x pourra avoir également pour valeur ou 2, ou 3, ou 5; on n'a qu'à former ces trois équations ſimples. $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 5 = 0$, multipliant enſuite les deux premieres l'une par l'autre, & leur produit par la troiſieme, on a $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, dans laquelle on peut ſuppoſer également $x = 2$, ou $= 3$, ou $= 5$. On voit aiſément que chacune de ces valeurs étant ſubſtituée à la place de x dans l'équation $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, doit la réſoudre, ou, ce qui revient au même, en doit faire évanouir tous les termes; car cette équation pouvant s'écrire ainſi $\overline{x - 2} \times \overline{x - 3} \times \overline{x - 5} = 0$, chacune de ſes parties étant égalée à zéro, doit, à cauſe qu'elle multiplie toutes les autres, les faire évanouir en même-temps : or, la ſuppoſition de $x = 2$, ou $= 3$, ou $= 5$ rend toujours zéro l'une des trois parties $x - 2$, $x - 3$, $x - 5$.

II.

Une équation a autant de racines que de degrés.

Par cette méthode on voit comment une équation peut avoir autant de racines que de degrés. Pour traiter la queſtion plus en général ; ſoient a, b, c, d, e, les racines d'une équation, & partant $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, $x - d = 0$, $x - e = 0$, les équations ſimples qui compoſent l'équation dont les racines ſont ces quantités. En multipliant toutes ces équations les unes par les autres, on aura

$$\begin{array}{llllll}
x^5 & -ax^4 & +abx^3 & -abcx^2 & +abcdx & -abcde = 0 \\
 & -b & +ac & -abd & +abce & \\
 & -c & +ad & -abe & +abde & \\
 & -d & +ae & -acd & +acde & \\
 & -e & +bc & -ace & +bcde & \\
 & & +bd & -ade & & \\
 & & +be & -bcd & & \\
 & & +cd & -bce & & \\
 & & +ce & -bde & & \\
 & & +de & -cde & &
\end{array}$$

pour l'équation dans laquelle x peut avoir à la fois les valeurs données a, b, c, d, e.

III.

Propriété des équations de tous les degrés.

Il eſt aiſé de tirer de cette équation, ces remarques générales ſur les équations de tous les degrés.

1°. Que le premier terme n'eſt autre choſe que l'inconnue élevée à la puiſſance exprimée par le nombre des racines ſans coëfficient.

Que le ſecond terme contient l'inconnue élevée à une puiſſance de moins avec un coëfficient égal à la ſomme des racines.

Que dans le troiſieme, l'inconnue ſe trouve élevée à deux puiſſances de moins, & a pour coëfficient la ſomme de tous les produits deux à deux qu'on peut faire de toutes les racines.

Que dans le quatrieme on aura de même l'inconnue élevée à trois puiſſances de moins avec un coëfficient qui exprime la ſomme des produits de toutes les racines priſes trois à trois.

Il ſera ainſi des autres termes juſqu'au dernier, qui n'aura aucune puiſſance de x, mais qui ſera le produit de toutes les racines les unes par les autres. Ces remarques ont ſervi de baſe en beaucoup de rencontres, ſoit pour trouver les racines des équations propoſées, ſoit du moins pour connoître pluſieurs de leurs propriétés.

I V.

Dans une équation ſans ſecond terme, la ſomme des racines poſitives eſt égale à celle des négatives.

On a tiré, par exemple, de ces remarques qu'une équation, comme $x^5 - 3x^3 + 4x^2 + 7x - 3 = 0$ manquant de ſecond terme, doit avoir néceſſairement des racines poſitives & des négatives ; de plus, que la ſomme des unes doit être égale à la ſomme des autres ; car, ſans cette condition elles ne ſe feroient pas détruites pour faire évanouir le ſecond terme. Ainſi, dans une équation du troiſiéme degré, où le ſecond terme manquera, il y aura toujours ou une racine négative égale aux deux positives, ou une racine positive égale aux deux négatives.

V.

On a tiré encore des mêmes remarques que lorsqu'une équation n'aura pas de dernier terme, il faudra qu'il y ait au moins une racine égale à zéro; ce qu'on auroit pû reconnoître aussi, en faisant attention qu'une équation telle que $x^3 + 5x^2 + 3x = 0$ qui manque de terme connu peut toujours se diviser par $x = 0$.

Une équation qui n'a point de terme connu, a au moins une racine égale à zéro.

VI.

Lorsqu'on voudra retrouver dans une équation les propriétés qu'on vient d'énoncer, on voit bien qu'il faudra que tous les termes de cette équation soient du même côté, qu'ils soient ordonnés par rapport à l'inconnue, & que cette inconnue n'ait d'autre coëfficient que l'unité au premier terme. De plus, que si quelqu'une des puissances de x manque dans l'équation, il faudra toujours prendre pour quantiéme des autres termes ceux qu'ils auroient, si ces puissances ne manquoient pas; par exemple, dans l'équation $x^5 - 3x^3 + 4x - 5 = 0$, le terme $3x^3$ n'est que le troisieme, parce que le second manque; & le terme $4x$ est le cinquieme, parce que le quatrieme manque. Si on vouloit donc appliquer les remarques précédentes à une telle équation, on diroit que la somme de ces cinq racines est nulle, c'est-à-dire, qu'elle a nécessairement des racines négatives & des racines positives, & que

Conditions qu'il faut observer dans une équation pour y trouver les propriétés précédentes.

la ſomme des premieres eſt égale à la ſomme des autres. On diroit encore que la ſomme des produits de toutes les racines deux à deux eſt égale à — 3 ; que la ſomme de tous les produits trois à trois eſt o, que la ſomme de tous les produits quatre à quatre eſt + 4, qu'enfin le produit de toutes les racines eſt — 5.

VII.

Méthode pour avoir les racines commenſurables d'une équation.

De la propriété qu'a le dernier terme d'une équation d'être égal au produit de toutes les racines, on peut tirer une méthode d'avoir toutes les racines qui ſont commenſurables dans une équation : car elles doivent toutes ſe trouver en tentant la diviſion de l'équation par x plus ou moins chacun des diviſeurs du dernier terme.

Par exemple, qu'on ait l'équation $x^3 - 5xx + 7x - 3 = 0$, les diviſeurs du terme -3, ne pouvant être que -1, -3, $+1$, $+3$; je tente la diviſion par $x-1$, $x-3$, $x+1$, $x+3$; elle réuſſit par $x-1$ & par $x-3$, & je vois que l'équation auroit pû s'écrire ainſi $\overline{x-1} \times \overline{x-1} \times \overline{x-3} = 0$, qui m'apprend que l'équation propoſée a trois racines, dont l'une eſt $+3$, & les autres, toutes deux égales, ſont chacune $+1$.

Lorſqu'une équation ne pourra pas ſe diviſer par aucune équation ſimple, compoſée de x + ou — quelqu'un des diviſeurs du dernier terme, on ſera ſûr que cette équation n'aura aucune racine commenſurable.

VIII.

Il se présente contre cette méthode de trouver les racines commensurables, une difficulté qui, au premier coup d'œil, paroît assez considérable; c'est que si quelque racine de cette équation étoit une fraction, on ne sçauroit pas comment la trouver parmi les diviseurs du dernier terme: parce qu'en admettant des diviseurs fractionnaires dans un nombre, on en peut trouver à l'infini. Mais il est aisé de répondre à cette difficulté, en faisant remarquer que tous les coëfficiens d'une équation étant des nombres entiers, il est impossible que l'inconnue ait pour valeur une fraction. Je crois que ceux qui possédent un peu d'Arithmétique des fractions reconnoîtroient sans secours la vérité de cette proposition; mais pour leur faciliter les moyens de s'en assurer, prenons pour exemple une équation comme $x^3 + a x^2 + b x + c = 0$, dans laquelle a, b, c, sont supposés des nombres entiers. Il est évident que x étant une fraction, x^3, x^2, en seront aussi, & que jamais la fraction qui exprime x^3 ne pourra se réduire à une qui ait le même dominateur que x^2 ou son multiple $a x^2$. A plus forte raison la même fraction ne pourra pas non plus se réduire au même dénominateur que x, ou son multiple $b x$. Dont $x^3 + a x^2 + b x$ ne pourra jamais faire une fraction plus simple que x^3 qui est irréductible. Dont x ne peut jamais être une fraction dans de telles équations.

Dans une équation dont tous les coëfficiens sont des entiers, l'inconnue ne sçauroit être une fraction.

IX.

Lorsqu'on aura une équation dont les coëfficiens seront des fractions, on ne pourra pas, en la laissant avec ses fractions, trouver par la méthode précédente les racines commensurables qu'elle pourroit avoir; mais on pourra toujours, par une transformation assez simple, changer le Problême en un autre, où l'équation à résoudre n'aura plus de fractions, sans donner de coëfficient au premier terme.

Transformation par laquelle on fait évanouir les fractions d'une équation quelconque.

Soit, par exemple, l'équation . . . .

$$x^3 + \frac{a}{b} x^2 + \frac{c}{d} x + \frac{e}{f} = 0$$

(on voit qu'une équation d'un degré plus élevé n'auroit pas plus de difficulté) en faisant l'inconnue x égale à un autre inconnue y divisée par quelque nombre indéterminé m, je change l'équation en une nouvelle $\frac{y^3}{m^3} + \frac{a y^2}{b m^2} + \frac{c y}{d m} + \frac{e}{f} = 0$, ou

$$y^3 + \frac{a m}{b} y^2 + \frac{c m^2}{d} y + \frac{e m^3}{f} = 0,$$

dans laquelle je vois que si m est divisible à la fois par b, par d & par f; $\frac{a m}{b}$, $\frac{c m^2}{d}$ & $\frac{e m^3}{f}$ seront des nombres entiers. Or, le Problême est réduit par-là à quelque chose de bien aisé; car on est au moins sûr de réussir en prenant pour m le produit des nombres b, d, f, & si ces nombres ne sont pas premiers * en-

* On appelle en Arithmétique nombres premiers, ceux qui n'ont point de diviseurs, tels que 5, 11, 31, &c. &

tr'eux, on trouvera aiſément un nombre plus petit que leur produit qui ſera diviſible par tous les trois.

X.

L'équation étant changée en une autre, ſans fraction, on cherchera les racines commenſurables de cette derniere par la méthode précédente ; & ſi elle n'en a pas, on ſera ſûr que la premiere n'en avoit pas non plus, puiſque x, ſuppoſé commenſurable, ne pourra jamais donner une quantité incommenſurable en le diviſant par le nombre m, qui eſt commenſurable auſſi.

Par cette transformation la méthode précédente s'applique aux équations fractionnaires.

X I.

La méthode précédente a cet inconvénient conſidérable, que lorſqu'il arrive que le dernier terme a beaucoup de diviſeurs, les calculs qu'il faut faire pour tenter toutes les diviſions que cette méthode preſcrit ſont ſi longs, qu'on l'abandonneroit malgré l'avantage infini de s'étendre généralement aux équations de tous les degrés, dont une ou pluſieurs racines ſont commenſurables. C'eſt ce qui a engagé les plus habiles Analyſtes à perfectionner cette méthode, en trouvant des moyens plus faciles que la diviſion pour reconnoître les diviſeurs qui ne doivent pas réuſſir. Voici comment on s'y eſt pris.

Inconvénient de la méthode précédente.

on dit que deux nombres ſont premiers entr'eux lorſqu'ils n'ont aucun commun diviſeur, tels ſont 21 & 16, 18 & 35.

XII.

Réflexions qui ont servi a perfectionner cette méthode.

On a d'abord remarqué que si on faisoit dans la racine $x + a$ d'une équation quelconque, ou, ce qui revient au même, dans le diviseur $x + a$ d'une quantité quelconque, x égal à un nombre donné, le nombre dans lequel se changeoit alors la racine devoit être un diviseur de la quantité proposée, dans laquelle on auroit fait x égal au même nombre : c'est-à-dire, par exemple, que si on a la quantité $x^3 - 2x - 21$ dont on sçait que $x - 3$ est un diviseur, il arrivera qu'en faisant $x = 5$ le nombre 94 que devient $x^3 - 2x - 21$ par cette supposition, est nécessairement divisible par le nombre 2 que devient $x - 3$ par la même supposition.

En partant de-là on a supposé dans la quantité dont on cherchoit un diviseur, x successivement égal à plusieurs nombres, tels, par exemple, que $+1$, 0, -1; suppositions qui devoient être faites les premieres, parce qu'elles donnent les substitutions les plus faciles. Ensuite on a cherché tous les diviseurs des nombres dans lesquels la quantité proposée se change par ces substitutions; & on a fait ces remarques qui se présentoient naturellement après la premiere.

1°. Que parmi tous les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = +1$ dans la quantité, on devoit trouver le nombre $1 + a$, puisque $x + a$ étoit le diviseur cherché.

2°. Que parmi tous les diviseurs venus par la supposition de $x = 0$, qui ne sont autre chose que les diviseurs du dernier terme de la quantité proposée, devoit être le nombre a.

3°. Que parmi tous les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = -1$, devoit être le nombre $-1 + a$.

XIII.

Or, comme le nombre $1 + a$, a, $-1 + a$ sont nécessairement tels que le premier surpasse le second d'une unité, & que le second surpasse le troisieme d'une unité aussi; il étoit aisé de tirer de-là ce principe, que de tous les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = 0$, aucun ne pouvoit être le nombre demandé a, s'il ne se trouvoit en même temps surpassé de l'unité par quelqu'un des diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = 1$, & s'il ne surpassoit en même temps d'une unité quelqu'un des diviseurs du nombre qu'a donné la supposition de $x = -1$. On voit bien qu'un tel principe doit faire éviter beaucoup de divisions inutiles dans la recherche des racines commensurables.

Principe fondamental pour trouver les racines commensurables.

Si on trouve plusieurs nombres, parmi les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = 0$, qui ayent les conditions qu'on vient de remarquer, on fera ensuite $x = 2$, & on verra si parmi les diviseurs des nombres qui viennent alors, on trouve des nombres qui surpassent d'une unité ceux qu'a donné la supposition de $x = 1$, & ainsi de suite.

Au reste, on voit bien que l'examen qu'on fait de tous ces diviseurs doit être double, c'est-à-dire, que chacun d'eux doit être pris aussi-bien en $-$ qu'en $+$.

XIV.

Pour éclaircir cette méthode & pour en faciliter l'uſage, nous allons en donner quelques exemples en faiſant voir l'ordre qu'il faut garder dans le calcul pour ne s'y point tromper, & pour abréger, autant qu'il eſt poſſible, la peine du Calculateur.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Soit l'équation $x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = 0$, dont il s'agit de trouver les racines commenſurables, ou, ce qui revient au même, ſoit la quantité $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$, dont on demande les diviſeurs d'une dimenſion.

Je commence par écrire (Voyez la Table ci-jointe, Caſe 1) l'une ſous l'autre les ſuppoſitions 1, 0, -1 que je veux faire pour x; j'écris enſuite à côté de chacun de ces nombres les nombres -8, $+6$, $+16$, ou ſimplement 8, 6, 16 (à cauſe que les ſignes ſont indifférens pour les diviſeurs) dans leſquels ſe change ſucceſſivement la quantité $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ par ces ſuppoſitions, & je les ſépare des premiers nombres par une barre verticale. J'écris dans une troiſieme colonne les nombres 1, 2, 4, 8; 1, 2, 3, 6; 1, 2, 4, 8, 16, qui ſont les diviſeurs des nombres précédens; les quatre premiers à côté de 8 dont ils ſont les diviſeurs, les quatre ſecond à côté de 6, & les cinq derniers à côté de 16.

Cela poſé, pour trouver parmi les diviſeurs 1, 2, 3, 6 du nombre 6 venu par la ſuppoſition de $x = 0$, celui qu'il faut ajouter ou retrancher à x pour avoir le diviſeur cherché, ou plutôt pour exclure de tous ces diviſeurs ceux qui n'ont pas les conditions requiſes ; je commence par remarquer que 1 qui eſt le premier de ces diviſeurs, ne ſçauroit être admis, ſoit qu'on le prenne en $+$, ſoit qu'on le prenne en $-$; car ſi on le prend en $+$, c'eſt-à-dire, ſi on regarde $x + 1$ comme le diviſeur cherché, 2 ſeroit ce que deviendroit ce diviſeur par la ſuppoſition de $x = + 1$, & 0, ce qu'il deviendroit par la ſuppoſition de $x = - 1$, & par conſéquent il faudroit trouver à la fois 2 dans les nombres de la premiere bande, & 0 dans ceux de la troiſieme : or, la ſeconde de ces conditions n'eſt pas remplie. Quant à ce que $- 1$ ne convient pas non plus, c'eſt-à-dire, que $x - 1$ n'eſt pas le diviſeur cherché, cela ſe tire de ce que ce diviſeur devenant 0 par la ſuppoſition de $x = + 1$, & $- 2$ par la ſuppoſition de $x = - 1$, il faudroit par conſéquent trouver 0 dans les nombres de la premiere bande, & le nombre 2 dans ceux de la ſeconde. Or, il n'y a que la ſeconde de ces deux conditions qui ait lieu. Je vois enſuite que le diviſeur 2 eſt auſſi dans le cas d'être rejetté, parce que ſi on le prend en $+$, c'eſt-à-dire, ſi on regarde $x + 2$ comme le diviſeur cherché, on auroit $+ 3$ par ſuppoſition de $x = 1$, & $+ 1$ par la ſuppoſition de $x = - 1$, ce qui demanderoit qu'on trouvât les nombres 3 dans la premiere bande, & 1 dans la troiſieme : or, la premiere de ces deux conditions ne ſe trouve pas remplie. Et ſi l'on prenoit 2 en $-$, c'eſt-à-dire, qu'on voulût que $x - 2$

fût le diviſeur, on aura alors -1 & -3 pour les ſuppoſitions de $x = +1$ & de $x = -1$, ce qui demanderoit de trouver à la fois 1 dans la premiere bande, & dans la troiſieme, conditions dont il n'y a que la premiere qui ait lieu.

Ayant exclu 1 & 2, je prends le diviſeur 3, & je vois qu'en le prenant en $+$, c'eſt-à-dire, en regardant $x + 3$ comme le diviſeur cherché, il faudra trouver $+4$ par la ſuppoſition de $x = +1$, & $+2$ par la ſuppoſition de $x = -1$. Or, je trouve effectivement 4 dans la premiere bande, & 2 dans la troiſieme. Donc $+3$ a les conditions requiſes, je l'écris alors à la ſeconde bande, c'eſt-à-dire, vis-à-vis le nombre dont il eſt diviſeur, & j'écris en même temps les nombres $+4$ & $+2$ dans les bandes ſupérieures & inférieures; non que ces nombres ſoient à joindre x pour ſervir de diviſeurs à la quantité propoſée; mais parce que n'ayant pas encore achevé l'examen des diviſeurs, il ſe pourroit trouver encore d'autres nombres que $+3$ qui auroient les conditions requiſes; & qu'il faudroit alors faire de nouvelles ſuppoſitions pour reconnoître entre ces nombres ceux qu'il faudroit encore exclure. J'examine maintenant ſi 3 pris en $-$ ne pourroit pas réuſſir auſſi-bien qu'en $+$, c'eſt-à-dire, ſi $x - 3$ ne pourroit pas avoir les mêmes conditions pour être diviſeur de la propoſée, il faudroit pour cela trouver -2 & -4 par les ſuppoſitions de $x = +1$ & de $x = -1$: or, c'eſt ce qui arrive en effet; donc jusqu'à préſent

présent $x - 3$ a aussi-bien les conditions nécessaires pour être diviseur que $x + 3$; j'écris par conséquent dans une cinquieme colonne verticale $- 2, - 3, - 4$.

Je passe enfin à l'examen de 6, & je vois que si je le prends en $+$, il faudroit trouver $+ 7$ & $+ 5$ dans les bandes supérieures & inférieures ; ce qui n'arrive pas, & que si je le prends en $-$ je devrois avoir $- 5$ & $- 7$ dans les mêmes bandes, ce qui ne se trouve pas non plus. Je conclus donc qu'il n'y a que $x - 3$ & $x + 3$ qui puissent être des diviseurs commensurables & d'une dimension de la proposée.

Pour sçavoir si l'on est autant fondé à tenter la division par $x - 3$, que par $x + 3$; je remarque que si on faisoit une quatrieme bande en supposant $x = - 2$, on devroit trouver $- 5$ pour le quatrieme terme de la colonne $- 2, - 3, - 4$; & $+ 1$ pour le quatrieme terme de la colonne $+ 4, + 3, + 2$; car il est clair que le diviseur $x - 3$ deviendroit $- 5$ par la supposition de $x = - 2$, & que le diviseur $x + 3$ deviendroit $+ 1$ par la même supposition. Mais en faisant $x = - 2$ dans la proposée $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$, elle devient 16 qui n'est pas divisible par 5 & qui l'est par 1. Donc $x - 3$ ne sçauroit être un diviseur de cette quantité ; donc s'il y en a un, il ne peut être que $x + 3$, ou, ce qui revient au même ; si $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ a une racine commensurable, elle ne peut être que $- 3$. Pour sçavoir si elle l'a effectivement, je divise $x^3 - 2x^2$

$- 13x + 6$ par $x + 3$, ce qui réuſſit & donne pour quotient exact $xx - 5x + 2$.

X V.

Pour que l'uniformité ſervît à la clarté dans cet exemple, j'ai examiné parmi les diviſeurs 1, 2, 3, 6 du nombre 6 venu par la ſuppoſition de $x = 0$ le nombre 1 comme les autres, mais on peut toujours ſe diſpenſer de faire aucun examen pour ce nombre, parce que s'il avoit à réuſſir, ſoit en $+$, ſoit en $-$, on l'auroit appris déja en ſubſtituant $+ 1$ & $- 1$ à la place de x dans l'équation donnée.

Dans des nombres auſſi ſimples que 8, 6, 16, il étoit aiſé de ne pas oublier aucun de leurs diviſeurs, parce que ces nombres en ont peu. Mais lorſque l'on a des nombres qui ont beaucoup de diviſeurs, il faut les chercher avec un certain ordre pour les avoir tous. Un ſeul exemple ſuffira pour faire voir comment cette opération doit ſe faire.

X V I.

Maniere d'avoir tous les diviſeurs d'un nombre.

Soit propoſé de chercher tous les diviſeurs du nombre 120. Je commence par tracer une barre verticale (Voyez la Caſe 2, Table ſuivante) à gauche de ce nombre, puis je mets à gauche de cette barre à la hauteur de 120, l'unité comme étant ſon premier diviſeur. J'eſſaye enſuite de diviſer 120 par 2, comme la diviſion réuſſit, j'écris 2, & je le mets à gauche de la barre à la même hauteur de 60 quotient de la diviſion que je mets à la droite de la même barre.

J'eſſaye encore la diviſion par 2, qui réuſſit,

& donne 30 pour quotient, je mets alors le nouveau diviſeur 2 ſous le premier; & 30 ſous 60. Je multiplie en même temps le nouveau diviſeur 2 par celui d'en-haut 2, & je mets le produit 4 à gauche du ſecond 2, comme étant un nouveau diviſeur du nombre propoſé 120. La raiſon de cette multiplication eſt que ſi 120 eſt diviſible par 2, & ſa moitié par 2, il doit l'être néceſſairement par 4.

Comme 30 peut ſe diviſer par 2 j'écris encore 2 à gauche de la barre & à la quatrieme ligne, & le quotient 15 à droite ſur la même ligne. Je multiplie en même temps le nouveau diviſeur 2 par 4, ce qui me donne 8 pour un nouveau diviſeur du nombre propoſé. Je ne multiplie pas ce nouveau 2 par les premiers, parce qu'il en viendroit 4 qui eſt déja écrit.

15 ne pouvant ſe diviſer par 2, j'eſſaye de le diviſer par 3, ce qui me réuſſit & me donne 5 pour quotient que j'écris à droite dans la cinquieme ligne auſſi-bien que le diviſeur 3 que j'écris à gauche; je multiplie enſuite 3 par 2, par 4 & par 8 que je trouve dans les bandes ſupérieures, & j'écris à gauche du 3 les produits 6, 12, 24, qui ſont, comme il eſt évident, des nouveaux diviſeurs du nombre propoſé.

5 n'ayant plus d'autre diviſeur que lui-même, je l'écris à gauche de la barre dans la cinquieme ligne, & je mets en même temps le produit de ce nombre par tous les diviſeurs précédens 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, & j'ai 10, 15, 20, 30, 40, 60, 120

que j'écris dans la même ligne à gauche de 5.

Cela fait, tous les nombres qui ſont à gauche de la barre, à compter depuis 1 jusqu'à 120 ſont les diviſeurs de 120. Il en ſeroit ainſi des autres nombres dont on chercheroit tous les diviſeurs.

XVII.

Autre exemple de la méthode de trouver les racines commenſurables.

Soit propoſé préſentement de chercher les racines commenſurables de l'équation $x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 61x^2 + 22x - 120 = 0$.

Ayant écrit dans une premiere colonne verticale 1, 0, — 1 (Table ſuivante, Caſe 3) pour les valeurs à donner ſucceſſivement à x; & dans une autre colonne verticale les nombres 165, 120, 221 qu'on trouve par la ſubſtitution de ces valeurs dans la quantité $x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 61x^2 + 22x - 120$, je place dans une troiſieme colonne les diviſeurs de ces trois nombres, ce qui me donne les trois bandes

1, 3, 5, 11, 15, 33, 55, 165,
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 30, 40, 60, 120,
1, 13, 17, 221

que je place chacune vis-à-vis du nombre qui l'a produite. Cela fait parmi les diviſeurs de 120; j'examine en premier lieu, ſi le nombre 2 a les conditions requiſes, & je vois qu'en le prenant en + il s'accorde avec les nombres 3 & 1 pris en haut & en bas. J'écris donc dans la quatrieme colonne verticale + 3, + 2, + 1.

Je vois enſuite que le même nombre pris en — ne réuſſit pas, parce qu'il faudroit alors — 3 en bas, ce qui ne ſe trouve pas.

Parcourant ensuite de la même maniere tous les autres diviseurs de 120, je trouve encore le nombre 12 qui étant pris en — a les conditions requises, pourvû qu'on prenne en — les nombres 11 & 13 qui sont au-dessus & au-dessous. J'écris donc dans une cinquieme colonne verticale les trois nombres — 11, — 12, — 13.

Pour sçavoir présentement à laquelle des deux dernieres colonnes je dois m'arrêter, ou plutôt, par laquelle des deux quantités $x + 2$ ou $x - 12$ je dois tenter la division; je remarque que si c'étoit la premiere, il faudroit trouver zéro en substituant $- 2$ pour x dans l'équation, ce qui n'arrive pas : donc il n'y a que la division par $x - 12$ à tenter, je la tente, & elle réussit, en me donnant pour quotient $x^4 + 5x^2 - x + 10$. Ainsi $+ 12$ est une des valeurs de x dans l'équation donnée & la seule commensurable.

XVIII.

Soit enfin $x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 5x^2 + 11x + 36$. Ayant écrit (Case 4, Table suivante) dans une premiere colonne verticale les valeurs 1, 0, — 1 à donner à x; dans une seconde les nombres 30, 36, 40, dans lesquels la quantité proposé se change par ces suppositions, & dans une troisieme tous les diviseurs 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 du nombre 30; les diviseurs 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 du nombre 36; les diviseurs 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 du nombre 40; je trouve parmi tous ces diviseurs quatre colonnes qui renferment les conditions requi-

Troisieme application de la méthode de trouver les racines commensurables.

ſes, la premiere, $+3$, $+2$, $+1$, la ſeconde, -2, -3, -5, la troiſieme, -3, -4, -5, la quatrieme, $+10$, $+9$, $+8$.

Pour décider alors entre ces quatre colonnes, je commence par faire $x = 2$, & j'écris 2 au-deſſus de 1 dans la premiere colonne, j'écris enſuite dans la ſeconde colonne 74, nombre dans lequel la quantité propoſée ſe change par la ſuppoſition de $x = 2$. Cela fait, je vois, ſans me donner la peine de chercher les diviſeurs de ce nombre, que les deux colonnes $+3$, $+2$, $+1$, & $+10$, $+9$, $+8$, ſont à rejetter; car ſi la premiere avoit lieu, il faudroit trouver $+4$ parmi les diviſeurs de 74, ce qui n'arrive pas, & ſi c'étoit la ſeconde, il faudroit trouver $+11$ parmi les mêmes diviſeurs, ce qui n'arrive pas non plus.

Je vois, au contraire, que les nombres -1 & -2 que demandent les colonnes -2, -3, -4, & -3, -4, -5 ſont des diviſeurs de 74, j'écris donc les nombres -1 & -2 au-deſſous de -2 & de -3 dans la ſeconde & la troiſieme colonne, & je cherche enſuite à exclure encore une de ces deux colonnes -1, -2, -3, -4; & -2, -3, -4, -5, ce qui devient bien facile, puiſque ſi la premiere étoit à conſerver, il faudroit trouver o par la ſuppoſition de $x = 3$, ce qui n'arrive pas; au lieu que -1 qui, par la colonne -2, -3, -4, -5 doit être un diviſeur du nombre donné dans la ſuppoſition de $x = 3$, ne peut pas manquer de l'être. Donc il n'y a de colonne à eſſayer que -1, -2, -3,

— 4, — 5, c'eſt-à-dire, qu'il n'y a de diviſeur à tenter que $x - 4$. J'eſſaye en effet la diviſion de la quantité propoſée par $x - 4$, ce qui réuſſit & donne pour quotient $x^5 + 3x^3 - 5x - 9$. Ainſi $+ 4$ eſt une des valeurs de x dans l'équation propoſée & la ſeule commenſurable.

XIX.

Après avoir vû comment on pouvoit tirer des équations d'un degré quelconque, les équations commenſurables du premier qui en étoient les racines, il étoit naturel de chercher auſſi à en tirer les équations du ſecond degré qu'elles pouvoient renfermer : on devoit s'en promettre une auſſi grande utilité, la ſolution des équations du ſecond degré étant auſſi complette que celle du premier.

Méthode pour trouver les équations du ſecond degré commenſurables dans une équation donnée.

Voici la méthode qu'on a imaginée pour y parvenir. Que $xx + bx + c = 0$ repréſente l'équation du ſecond degré qui peut être un des produiſans d'une équation donnée, ou, ce qui revient au même, que $xx + bx + c$, ſoit le diviſeur cherché d'une quantité donnée, en faiſant $x = 0$ dans ce diviſeur, il eſt clair qu'il ſe réduira au nombre c, & que ce nombre ſera un des diviſeurs du dernier terme de la quantité donnée.

Si on fait enſuite $x = + 1$ dans le diviſeur $x^2 + bx + c$, il ſe changera en $1 + b + c$ qui ſera un des diviſeurs du nombre que l'on a en faiſant de même dans la propoſée $x = 1$. Donc ſi on cherche tous les diviſeurs de ce nombre, & qu'après les avoir pris tant en +

qu'en $-$, on en retranche l'unité, ce sera parmi tous les nombres, tant positifs que négatifs, que l'on aura par cette opération que devra se trouver le nombre égal à $b + c$.

Si on fait ensuite $x = -1$ tant dans la quantité proposée, que dans le diviseur $xx + bx + c$, qui devient alors $1 - b + c$, on voit qu'en cherchant tous les diviseurs du nombre que devient cette quantité par cette supposition, & retranchant l'unité de tous ces diviseurs, pris tant en $-$ qu'en $+$, on aura parmi tous les nombres que ce calcul donnera, celui qui exprime $- b + c$.

Or, comme c est moyen arithmétique entre $b + c$ & $- b + c$, il s'ensuit que parmi les trois suites des nombres qu'on aura pour représenter $b + c$, c, $- b + c$, il ne faudra s'arrêter qu'à ceux qui seront en progression arithmétique. Lorsqu'on aura trouvé trois nombres en progression arithmétique, il est clair que celui qui répondra à la supposition de $x = 0$, sera celui qu'il faudra prendre pour c; & comme celui qui répondra à la supposition de $x = 1$ représentera $b + c$, il est clair qu'en retranchant le premier du second, on aura b. Substituant ensuite ces deux nombres à la place de b & de c dans $x^2 + bx + c$, on aura un diviseur à tenter pour la quantité donnée, & le seul à essayer si on n'a trouvé qu'une progression arithmétique parmi toutes les suites des nombres qu'ont donné les diviseurs de la quantité où l'on a fait successivement $x = 1, 0, -1$. Si on a trouvé plusieurs progressions arithmétiques, on se déterminera entre ces progressions à peu près comme dans le cas des diviseurs simples, en faisant de nouvelles suppositions pour x, comme -2, -3, ou $+2$, $+3$, &c.

Car qu'on suppose, par exemple, $x = -2$, $x = -3$, &c. dans la quantité proposée, il est clair que tous les diviseurs, tant positifs que négatifs du nombre que l'on aura alors, représenteront la quantité $4 - 2b + c$, ou $9 - 3b + c$, &c. que devient $x^2 + bx + c$, lorsque $x = -2$, ou $x = -3$, &c. & que par conséquent tous ces mêmes diviseurs dont on aura retranché 4, 9, &c. représenteront $-2b + c$, $-3b + c$, &c. Or, $-2b + c$, $-3b + c$, &c. étant d'autres termes de la progression arithmétique $b + c$, c, $-b + c$, on n'aura donc plus qu'à chercher parmi les progressions arithmétiques trouvées précédemment, celle qui se conserve par ces nouvelles valeurs de x, & s'en servir, comme on vient de l'expliquer, pour déterminer les nombres b & c.

XX.

Application de la méthode précédente.

Soit, par exemple, la quantité $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 36x + 21$, dont on cherche un diviseur de deux dimensions.

Je commence par écrire dans une colonne verticale (Table suivante, Case 5) les valeurs 1, 0, -1 que je veux donner à x. J'écris ensuite, dans une seconde colonne verticale, les nombres 1, 21, 65, dans lesquels la quantité proposée se change par ces suppositions.

J'écris de même dans une troisieme colonne, à côté du premier nombre, son unique diviseur 1; à côté de 21, ses diviseurs 1, 3, 7, 21; & à côté de 65 ses diviseurs 1, 5, 13, 65.

Cela fait, j'écris dans une quatrieme colonne les nombres 1, 0, 1 quarrés de 1, 0, — 1 écrits dans la premiere colonne & valeurs de $x\,x$, par conséquent, dans les mêmes suppositions de 1, 0, — 1. Enfin, je forme une cinquieme colonne par ces conditions;

1°. Que la premiere bande — 2, 0 se forme en retranchant 1 de 1 pris en — & de 1 pris en +.

2°. Que la seconde bande soit composée des nombres — 21, — 7, — 3, — 1, + 1, + 7, + 21, les mêmes que les diviseurs qui sont à côté, mais écrits deux fois, l'une pour le signe —, l'autre pour le signe +.

3°. Que les nombres de la troisieme bande soient — 66, — 14, — 6, — 2, 0, + 4, + 12, + 64, dont les premiers — 66, — 14, — 6, — 2 soient trouvés en retranchant 1 des nombres 65, 13, 5, 1 pris en —, & les autres 0, + 4, + 12, + 64 en retranchant 1 des mêmes nombres 1, 5, 13, 65 pris en +.

Pour déterminer ensuite les progressions arithmétiques qui sont dans ces trois suites de nombres, je commence par prendre dans la premiere bande le nombre — 2 pour le premier terme d'une progression, & je prends successivement pour seconds tous ceux de la seconde bande; je cherche en même temps les troisiemes termes que ces premiers donneroient, & j'examine quels sont ceux de ces troisiemes qui se trouvent dans la troisieme bande : or, — 2 & — 21 doivent donner pour troisieme terme — 40 qui n'est point dans la troisieme bande, je rejette donc 21 ; je prends alors — 7 pour second terme, & comme il devroit donner — 12 pour troisieme terme, & que — 12 n'est pas dans la troisieme bande, je rejette encore — 7, & de même — 3, parce que ce dernier devroit donner — 4 qui ne se trouve pas non plus.

A l'égard de — 1, comme il donne 0 pour troisieme, & que 0 se trouve dans la troisieme bande, j'écris dans la sixieme colonne la progression — 2, — 1, 0. De même + 1 pris pour second, donnant + 4 qui se trouve encore, j'écris la seconde progression — 2, + 1, + 4. Et comme + 7 & + 21 devroient donner chacun un troisieme terme qui n'est pas dans la troisieme bande, je les rejette. Les progressions qui peuvent commencer par 2, étant déterminées, je passe à celles dont le premier terme seroit 0, & pour les trouver, je prends, ainsi que j'ai fait pour 2, tous les nombres de la seconde bande l'un après l'autre.

Je vois d'abord que — 21 devroit donner pour troisieme terme — 42, qui n'est pas dans la troisieme bande ; je vois ensuite que — 7 donne — 14 qui se trouve : ainsi j'écris encore la progression 0, — 7, — 14. De même — 3 & — 1 donnant — 6 & — 2 qui se trouvent aussi ; j'écris les progressions 0, — 3,

-6, & 0, -1, -2. A l'égard des nombres $+1$, $+7$, $+21$, ils ne donnent aucun troisieme terme qui se trouve, ainsi je les rejette.

pour voir présentement lesquelles de ces progressions il faut encore rejetter, je fais $x = -2$, & j'écris -2 dans la premiere colonne; en observant de mettre en même temps, 1°. dans la seconde colonne, 125 que donne la quantité proposée par cette valeur de x. 2°. Dans la troisieme les nombres 1, 5, 25, 125 diviseurs de 125. 3°. Dans la quatrieme colonne le nombre 4 quarré de -2 & valeur de xx dans cette supposition. 4°. Dans la cinquieme colonne les nombres -129, -29, -9, -5 que l'on a en retranchant 4 des nombres 125, 25, 5, 1 pris en $-$, & les nombres -3, $+1$, $+21$, $+121$ que l'on a en retranchant 4 des mêmes nombres 1, 5, 25, 125 pris en $+$.

Par ce moyen, je vois que les deux progressions -2, $+1$, $+4$, & 0, -7, -14 sont à rejetter, parce qu'elles devroient donner pour quatrieme terme $+7$ & -21 qui ne se trouvent pas dans la quatrieme bande.

Mais les trois progressions -2, -1, 0; 0, -3, -6; 0, -1, -2, devant donner pour quatriemes termes $+1$, -9, -3 qui se trouvent dans cette quatrieme bande, j'ai besoin d'une nouvelle supposition pour exclure au moins une des trois progressions.

Je fais donc $x = -3$, ce qui me donne 147 pour le nombre dans lequel se change la

Case 1.

$x^3 - 2x^2 - 13x + 6$

1	8	1.2.4.8	+4	−2
0	6	1.2.3.6	+3	−3
−1	16	1.2.4.8.16	+2	−4
−2	16		+1	

Case 2.

1	120
2	60
4.2	30
8.4.2	15
24.12.6.3	5
120.60.40.30.20.15.10.5	1

Case 3.

$x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 61x^2 + 22x - 120$

1	165	1.3.5.11.15.33.55.165	+3	−11
0	120	1.2.3.4.5.6.8.10.12.15.20.24.30.40.60.20	+2	−12
−1	221	1.13.27.221	+1	−13

Case 4.

$x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 5x^2 + 11x + 36$

					−1	
				−1	−2	
2	74		+3	−2	−3	+10
1	30	1.2.3.5.10.15.30	+2	−3	−4	+9
0	36	1.2.3.4.6.9.12.18.36	+1	−4	−5	+8
−1	40	1.2.4.5.8.10.20.40				

Case 5.

$x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 36x + 21$

1	1	1	1	−2, 0
0	12	1.3.7.21	0	−21, −7, −3, −1, +1, +3, +7, +21
−1	65	1.5.13.65	1	−66, −14, −6, −2, 0, +4, +12, +64
−2	125	1.5.25.125	4	−129, −29, −9, −5, −3, +1, +21, +121
−3	147	1.3.7.21.49.147	9	−156, −58, −30, −16, −12, −10, −8, −6, −2 +12, +40, +138

		0	0	0
−2	−2			−1
−1	+1	−7	−3	−2
0	+4	−14	−6	−3
+1			−9	
1			−12	

quantité proposée par cette supposition. J'écris donc 147 dans la seconde colonne, & à côté, dans la troisieme, ses diviseurs 1, 3, 7 21, 49, 147; je mets de même dans la quatrieme colonne 9 quarré de -3, ou valeur de xx dans la nouvelle supposition; enfin j'écris dans la cinquieme colonne les nombres -156, -58, -30, -16, -12 -10 -8, -6, -2, $+12$, $+40$, $+138$, que l'on a en retranchant 9 des nombres 1, 3, 7, 21, 49, 147 pris en $-$ & en $+$.

Par-là je trouve que les progressions -2, -1, 0, $+1$ & 0, -1, -2, -3, doivent être rejettées, & qu'au contraire il faut conserver la progression 0, -3, -6, -9; car les deux cinquiemes termes des premieres progressions doivent être $+2$ & -4 qui ne se trouvent pas dans la cinquieme bande, au lieu que le cinquieme terme de la progression 0, -3, -6, -9 est -12 qui s'y trouve.

Après avoir réduit toutes les progressions à la seule 0, -3, -6, &c. je prends dans cette progression le nombre -3 qui, dans la sixieme colonne, répond à la supposition de $x = 0$, pour exprimer le terme c du diviseur cherché $xx + bx + c$. Je prends ensuite, toujours dans la sixieme colonne, 0 qui répond à la supposition de $x = 1$, & qui, suivant les principes précédens, doit être $b + c$; ainsi retranchant c ou -3 de 0, ou $b + c$, j'ai $+3$ pour b, & partant le diviseur cherché $x^2 + bx + c$ est $xx + 3x - 3$, s'il y en a un de deux dimensions.

Pour sçavoir ce qui en est, je divise la quantité proposée $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 36x + 21$ par $xx + 3x - 3$, & je trouve qu'en effet la division est exacte, & donne pour quotient $x^3 + 5x - 7$.

X X I.

Autre application de la méthode précédente.

Soit présentement la quantité $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 10x + 5$, je commence par écrire (Table ci-jointe, Case 1) dans une premiere colonne verticale les valeurs 2, 1, 0, -1, -2 que je veux donner à x. J'écris ensuite dans la seconde colonne verticale les nombres 133, 33, 5, 1, 3 dans lesquels la quantité se change par ces suppositions.

Dans la troisieme, j'écris vis-à-vis de ces nombres tous leurs diviseurs. Dans la quatrieme les valeurs 4, 1, 0, 1, 4 de xx dans les suppositions faites pour x à la premiere colonne.

Enfin dans la cinquieme colonne j'écris, pour la premiere bande, les nombres -137, -23, -11, -5, -3, $+3$, $+15$, $+129$ trouvée en retranchant 4 des nombres 133, 19, 7, 1 pris d'abord en $-$ & ensuite en $+$. De même dans la seconde bande, les nombres -34, -12, -4, -2, 0, $+2$, $+10$, $+32$, produits en retranchant 1 des nombres 33, 11, 3, 1 pris d'abord en $-$, puis en $+$, & ainsi des autres bandes. Tous ces nombres écrits, je commence par prendre dans la cinquieme bande de la cinquieme colonne, le premier nombre -7 pour servir de premier terme d'une progression, & prenant en même temps -2

dans la quatrieme bande pour servir de second, je vois que le troisieme devroit être $+ 3$, & qu'il ne se trouve pas dans la troisieme bande; ainsi je passe à o qui, en prenant toujours $- 7$ pour premier terme, donneroit $+ 7$ pour troisieme terme, & comme $+ 7$ n'est pas non plus dans la troisieme, je conclus qu'il n'y a point dans les nombres de la cinquieme colonne, de progression qui puisse commencer par $- 7$.

Je prends donc $- 5$ pour premier terme, & je vois qu'en lui donnant $- 2$ pour second, le troisieme seroit $+ 1$ qui se trouve bien dans la troisieme bande, mais qui donne pour quatrieme terme $+ 4$, qui n'est pas dans la seconde bande; ainsi je laisse $- 2$, & prends o pour second terme, ce qui me donne alors $+ 5$, $+ 10$, $+ 15$, pour troisieme, quatrieme & cinquieme termes, & comme tous ces nombres se trouvent dans la troisieme, seconde & premiere bandes, j'écris dans la sixieme colonne les nombres 15, 10, 5, o, $- 5$.

Prenant ensuite $- 3$ pour premier terme, je vois que ni $- 2$, ni o ne peuvent lui servir de seconds termes, parce que le premier donneroit la progression $- 3$, $- 2$, $- 1$, o, $+ 1$ dont le dernier terme n'est point dans la premiere bande; & que le second donneroit la progression $- 3$, o, $+ 3$, &c. qui manque dès le troisieme terme $+ 3$ qui ne se trouve point dans la troisieme bande.

Il ne me reste plus qu'à prendre $- 1$ pour premier terme, je lui donne d'abord -2 pour second qui ne réussit pas, mais lui donnant ensuite 0, j'ai pour troisieme, quatrieme, cinquieme termes, les nombres $+1$, $+2$, $+3$ qui sont dans la troisieme, seconde & premiere bande; j'écris donc dans la sixieme colonne les nombres $+3$, $+2$, $+1$, 0, -1.

Cela fait, je ne cherche point à donner de nouvelles valeurs à x pour exclure une de ces deux progressions; parce que la quantité donnée étant de quatre dimensions, doit ou n'avoir aucun diviseur de deux dimensions, ou en avoir deux à la fois, ce qui se tire de ce qu'aussi-tôt qu'on aura trouvé un diviseur de deux dimensions à une quantité qui a quatre dimensions, le quotient qui est toujours un diviseur en même temps, aura aussi deux dimensions.

Suivant cette réflexion, je prends indifféremment l'une ou l'autre des deux progressions précédentes; la premiere, par exemple, dans laquelle 5 étant ce qui répond à la supposition de $x = 0$, & 10 ce qui répond à la supposition de $x = 1$; j'ai $c = 5$ & $b + c = 10$, c'est-à-dire, $b = 5$. D'où le diviseur que donne cette progression est $xx + 5x + 5$. Je divise donc la quantité proposée par $xx + 5x + 5$, & je vois que la division réussit & donne pour quotient $xx + x + 1$ qui est le diviseur qu'on trouveroit par l'autre progression.

XXII.

XXII.

Lorsqu'il sera question de trouver les diviseurs d'une équation telle que $6\,y^4 - y^3 - 21\,y^2 + 3\,y + 20 = 0$, dont le premier terme aura un coëfficient qui n'aura pas disparu, en divisant toute l'équation par ce coëfficient, on pourra se servir des principes précédens sans être obligé de changer cette équation en une autre qui n'ait point de coëfficient au premier terme, comme on le pourroit faire par la méthode de l'art. IX.

Méthode pour trouver les diviseurs d'une demension, lorsque l'x doit avoir un coëfficient.

Pour le faire voir, examinons d'abord ce qui regarde les diviseurs d'une dimension. Que $m\,x + a$ représente celui qui doit diviser une quantité quelconque donnée. Il est clair que si on fait x successivement égal à $2, 1, 0, -1, -2$, &c. ce diviseur deviendra, dans tous ces cas, $2\,m + a$, $m + a$, a, $-m + a$, $-2\,m + a$, &c. qui sont des quantités en progression arithmétique, dans lesquelles il est aisé de remarquer.

1°. Que la différence m de tous les termes est le coëfficient de x dans le diviseur.

2°. Que cette même différence m est un diviseur du coëfficient du premier terme de la quantité proposée.

3°. Que le terme a répondant à la supposition de $x = 0$, est la partie délivrée d'x du diviseur.

4°. Que les mêmes quantités en progression arithmétique seront les diviseurs de la quantité donnée, dans laquelle on aura fait successivement x égal à $2, 1, 0, -1, -2$, &c.

Cela posé, lorsqu'il faudra chercher les diviseurs d'une dimension d'une quantité quelconque donnée, on suivra d'abord le même procédé que ci-dessus pour les trois premieres colonnes; on cherchera ensuite, parmi tous ces nombres, quelque progression dont la différence soit un diviseur du coëfficient du premier terme de la quantité proposée. Enfin, pour employer cette progression, on substituera dans $mx + a$, à la place de a le terme de la progression qui répondra à la supposition de $x = 0$, & à la place de m le nombre que l'on aura en retranchant un terme quelconque de la progression, de celui qui est au-dessus.

XXIII.

Application de cette méthode à un exemple.

Supposons, par exemple, que l'on cherche les diviseurs de la quantité $6x^4 - x^3 - 21x^2 + 3x + 20$.

Je range à l'ordinaire dans la premiere colonne les suppositions $2, 1, 0, -1, -2$, à faire pour x. Dans la seconde, les nombres $30, 7, 20, 3, 34$, que devient successivement la quantité donnée par ces suppositions, & enfin dans la troisieme tous les diviseurs de ces nombres.

Cela fait, afin de découvrir parmi tous les nombres de la troisieme colonne, quelque progression qui serve à reconnoître le diviseur cherché; je commence par examiner le premier nombre 1 de la premiere bande, & je vois d'abord que si on lui donne pour second le premier nombre 1 de la seconde bande, la progression 1, 1, 1, &c. qui en vient ne peut pas être admise, puisqu'elle ne sçauroit représenter le diviseur cherché $m\,x + a$ qui doit varier nécessairement par les différentes valeurs de x. Je vois de même que 7 ne sçauroit être pris pour second; car le troisieme terme que produiroit cette supposition seroit 13 qui ne se trouve pas dans la troisieme bande.

Prenant ensuite 1 en $-$, je vois que 1 de la seconde ne lui sçauroit servir de second terme, parce que le troisieme seroit 3, qui n'est pas dans la troisieme bande. A l'égard de 7, il est inutile de chercher si le troisieme terme qu'il donneroit se trouve dans la troisieme bande, puisque la différence de -1 à 7 est 8, qui n'est pas un diviseur du coëfficient du premier terme de la quantité proposée. Donc 1, soit qu'on le prenne en $+$, ou qu'on le prenne en $-$, est à rejetter.

Parcourant de la même maniere tous les autres nombres de la premiere bande, je ne trouve que 10 qui puisse avoir les conditions convenables. Lui donnant 7 pour second terme, il donne la progression 10, 7, 4, 1, -2 dont la différence est 3, diviseur du coëfficient de $6\,x^3$.

Ayant donc écrit cette progression dans la quatrieme colonne, je prends le terme $+4$ qui répond à la supposition de $x = 0$ pour exprimer la partie a du diviseur cherché, & retranchant le même teme $+4$ du terme supérieur $+7$ qui représente $m + a$, j'ai $+3$ pour exprimer m, c'est-à-dire, que le diviseur cherché, s'il doit y en avoir un, ne peut être que $3x + 4$. Je tente donc la division par cette quantité, elle réussit, & me donne pour quotient $2x^3 - 3x^2 - 3x + 5$.

XXIV.

Méthode pour trouver les diviseurs de deux dimensions, lorsque l'x doit avoir un coëfficient.

Examinons présentement les cas où les diviseurs doivent avoir deux dimensions. Soit pris $mx^2 + bx + c$ pour représenter le diviseur cherché d'une quantité donnée, il est clair, comme ci-dessus, que le dernier terme c sera un diviseur du dernier terme de la quantité donnée, & que m sera un diviseur du coëfficient de la plus haute puissance de x dans la quantité donnée.

Choisissant donc d'abord pour représenter m un des diviseurs du coëfficient du premier terme de la quantité donnée, & faisant la même opération que dans l'art. XIX. à cela près, qu'au lieu de retrancher le quarrés 16, 9, 4, &c. on retranche le produit de ces mêmes quarrés par le nombre qu'on aura choisi pour m, on trouvera de même b & c.

Si le diviseur que l'on a ainsi, en mettant dans $mx^2 + bx + c$, pour m le nombre choisi, & pour b, c ceux qui auront été déterminés d'après ce choix, ne réussit pas, on prendra un autre des diviseurs du coëfficient du premier terme de la quantité donnée pour représenter m, & l'on achevera le calcul de la même maniere. Si après avoir essayé tous les diviseurs du coëfficient du premier terme, il arrivoit qu'on ne trouvât pas de diviseur par cette méthode, on seroit sûr que la quantité proposée n'en devoit point avoir.

XXV.

Application de cette méthode à un exemple.

Soit pris, pour faire une application de cette méthode, la quantité $4x^5 + 16x^4 - 22x^3 - 14x^2 - 56x + 77$ dont on demande un diviſeur de deux dimenſions. Ayant d'abord placé à l'ordinaire (Table ſuivante, Caſe 3) dans la premiere colonne les nombres 2, 1, 0, — 1, — 2, &c. auxquels on égale ſucceſſivement x; dans la ſeconde, les nombres 117, 5, 77, 153, 437 que devient ſucceſſivement la quantité propoſée par ces valeurs de x; dans la troiſieme, tous les diviſeurs des nombres de la ſeconde : je commence par chercher, ſuivant les regles de l'art. XIX, s'il y a quelque diviſeur de deux dimenſions, dont le premier terme ait l'unité pour coëfficient ; mais n'en trouvant point, je ſuppoſe que m, c'eſt-à-dire, le coëfficient du premier terme du diviſeur, ſoit 2 qui eſt un des diviſeurs du coëfficient 4 du premier terme de la quantité donnée.

Je place alors dans la quatrieme colonne, au lieu des quarrés des nombres de la premiere, le produit de ces mêmes quarrés par 2 valeur ſuppoſée de m, c'eſt-à-dire, que j'écris dans la quatrieme colonne les nombres 8, 2, 0, 2, 8. Je retranche enſuite ces nombres de tous ceux de la troiſieme colonne pris en — & en +, ce qui me donne pour la premiere bande de la cinquieme colonne — 125, — 47, — 21, — 17, — 11, — 9, — 7, — 5, + 1, + 5, + 31, + 109; pour la ſeconde bande — 7, — 3, &c.

Tous ces nombres écrits, je cherche toujours, comme ci-devant, des progressions arithmétiques parmi tous ces termes, & je ne trouve que la progression $+ 5, - 3, - 11, - 19, - 27$ que j'écris dans la sixieme colonne : cela fait, je prends $- 11$ répondant à zéro pour exprimer le nombre c, & retranchant ce nombre de $- 3$ qui est au-dessus, j'ai le reste $+ 8$ pour exprimer b. Le diviseur qui résulte donc de la supposition de $m = 2$ est $2x^2 + 8x - 11$; j'essaye alors la division qui réussit en donnant pour quotient $2x^3 - 7$, & sans prendre la peine de faire le calcul que demanderoit la supposition de $m = 4$, je vois qu'il ne doit pas réussir, parce qu'il faudroit pour cela que le quotient $2x^3 - 7$ pût se décomposer, ce qui est impossible. Ainsi la quantité proposée n'a pas d'autre diviseur de deux dimensions, que $2x^2 + 8x - 11$.

XXVI.

Toute quantité donnée de moins de six dimensions, & qui a des diviseurs, en doit avoir d'au-dessous de trois dimensions.

Lorsqu'on cherchera les diviseurs d'une quantité qui ne passera pas le cinquieme degré, on pourra toujours les trouver par les méthodes précédentes; car aussi-tôt qu'on se sera assuré par ces méthodes que cette quantité n'aura point de diviseur, ni d'une, ni de deux dimensions, on sera sûr aussi qu'elle n'en aura pas de trois.

XXVII.

Si la quantité a six ou plus de dimensions, elle pour-

Mais si la quantité monte à six & à plus de dimensions, elle pourroit n'être décomposable qu'en des quantités de plus de deux dimensions. La méthode qu'il faudroit suivre pour trouver

Case 1.

$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 10x + 5$

2	133	1.7.19.133	4	−137, −23, −11, −5, −3, +3, +15, +129	+15	+3
1	33	1.3.11.33	1	−34, −12, −4, −2, 0, +2, +10, +32	+10	+2
0	5	1.5	0	−5, −1, +1, +5	+5	+1
−1	1	1	1	−2, 0	0	0
−2	3	1.3	4	−7, −5, −3, −1	−5	−1

Case 2.

$6x^4 - x^3 - 21x^2 + 3x + 20$

2	30	1.2.3.5.6.10.15.30	10
1	7	1.7	7
0	20	1.2.4.5.10.20	4
−1	3	1.3	1
−2	34	1.2.17.34	−2

Case [illegible].

$4x^5 + 16x^4 - 22x^3 - 14x^2 - 56x + 77$

2	117	1.3.9.13.39.117	8	−125, −47, −21, −17, −11, −9, −7, −5, −1, +5, +31, +109	+5
1	5	1.5	2	−7, −3, −1, −3	−3
0	77	1.7.11.77	0	−77, −11, −7, −1, +7, +1, +11, +77	−11
−1	153	1.3.9.17.51.153	1	−155, −53, −19, −11, −5, −3, −1, +1, −7, +15, +49, +151	−19
−2	437	1.19.23.437	8	−445, −31, −27, −9, −7, +11, +15, +29	−27

ces diviſeurs, eſt fondée à peu près ſur les mêmes principes que les précédens, je ne m'arrête point à l'expliquer à cauſe de la longueur des calculs.

roit n'avoir de diviſeurs que de trois ou de plus de dimenſions.

XXVIII.

Tout ce que nous venons de dire ſur les diviſeurs commenſurables, ne regarde que les équations numériques; cependant les équations littérales pouvant auſſi avoir des diviſeurs commenſurables, il faut voir ce que l'on doit faire pour les trouver.

Suppoſons d'abord que l'équation ne renferme qu'une lettre connue avec l'x, & que cette équation, ſoit ce qu'on appelle homogene; c'eſt-à-dire, que tous ſes termes montent à la même dimenſion, telle que l'équation $x^3 - a x^2 - 10 a x + 6 a^3$, par exemple. On n'aura qu'à ſubſtituer l'unité à la place de la lettre connue a de cette équation, & chercher ſes diviſeurs de la même maniere que ci deſſus. Ces diviſeurs étant trouvés, s'ils ſont d'une dimenſion, on remettra la lettre a à côté du nombre qui ſert de ſecond terme. Si le diviſeur a deux dimenſions, on placera a après le coëfficient du ſecond terme, & $a\,a$ après le nombre qui ſert de troiſieme terme.

Soit, par exemple, la quantité $x^3 + 4 a x^2 - 17 a^2 x - 12 a^3$; après avoir fait $a = 1$, & trouvé que la quantité $x^3 + 4 x^2 - 17 x - 12$, qui vient par cette opération, a pour diviſeur $x - 3$, je conclus que $x - 3 a$ eſt un diviſeur de la quantité propoſée.

Qu'on ait enſuite $2 x^5 + 5 a x^4 - 3 a^2 x^3$

$-8a^3x^2-20a^4x+12a^5$. En ſuppoſant $a=1$, on aura $2x^5+5x^4-3x^3-8x^2-20x+12$ qui donne pour diviſeur de deux dimenſions $2x^2+5x-3$. Mettant alors dans ce diviſeur a à côté de 5, & aa à côté de 3, il vient $2x^2+5ax-3aa$ pour le diviſeur de deux dimenſions de $2x^5+5ax^4-3a^2x^3-8a^3x^2-20a^4x+12a^5$.

XXIX.

Dans une équation homogene & qui eſt affectée de trois lettres, on pourroit, en ſuivant les méthodes précédentes, parvenir encore à trouver ſes diviſeurs, tant ſimples, que compoſés de deux dimenſions; mais à l'aide de quelques obſervations de calcul qui ſe préſentent aſſez naturellement, on peut réuſſir d'une façon un peu plus commode.

Méthode pour trouver tous les diviſeurs à deux lettres dans une quantité qui en a trois.

Suppoſons d'abord que la quantité donnée qui renferme trois lettres, a, b, x dût avoir pour diviſeur une quantité qui n'en renfermât que deux, que les lettres x, & a, par exemple. Puiſque ce diviſeur, quel qu'il ſoit, pourra, ſans contenir de b, diviſer la quantité donnée où b entre, il faut que la valeur de b ſoit indifférente à la diviſion, & que cette diviſion puiſſe ſe faire de même lorſque b ſera zéro. Donc ſi on fait $b=0$ dans la quantité donnée, il faudra que la quantité donnée par cette ſuppoſition ait pour commun diviſeur avec la quantité entiere, le diviſeur cherché. La queſtion eſt donc, en ce cas, renfermée dans une autre, traitée dans la premiere Partie, art. LXXIII. où l'on a enſeigné à trouver le plus grand commun diviſeur de deux quantité données : de ſorte que par ce qu'on a enſeigné dans cet article, on trouvera le diviſeur cherché de quelque dimenſion qu'il ſoit, pourvû qu'il n'ait que deux lettres.

XXX.

Pour montrer l'application de cette méthode, ſoit pris d'abord la quantité $x^4 + a x^3 + 2 a^2 x^2 + 3 a^3 x + a b b x + a^4 + a a b b$, dont on cherche un diviſeur où les ſeules lettres a, x entrent. Exemple.

En faiſant $b = 0$ il vient $x^4 + a x^3 + 2 a^2 x^2 + 3 a^3 x + a^4$ dont le plus grand commun diviſeur avec la quantité entiere, ou, ce qui revient au même, avec le reſte $a b b x + a a b b$, eſt $x + a$, qui eſt donc néceſſairement un diviſeur de la quantité donnée, & le plus grand qu'elle puiſſe avoir qui ne contienne pas de b.

XXXI.

Soit $x^5 - 4 a x^4 + 6 a a x^3 - a b x^3 + a b b x^2 + 2 a a b x^2 - 4 a^3 x^2 - 2 a a b b x - 2 a^3 b x + 2 a^3 b b$; en faiſant $b = 0$ dans cette quantité, on a $x^5 - 4 a x^4 + 6 a a x^3 - 4 a^3 x^2$ dont il faut chercher le plus grand commun diviſeur avec la quantité propoſée, ou, ce qui revient au même, avec le reſte $- a b x^3 + a b b x^2 + 2 a a b x^2 - 2 a a b b x - 2 a^3 b x + 2 a^3 b b$, c'eſt-à-dire, le plus grand commun diviſeur des quantités $x^3 - 4 a x^2 + 6 a a x - 4 a^3$ & $- x^3 + b x^2 + 2 a x^2 - 2 a b x - 2 a a x + 2 a a b$. Autre exemple.

Or, s'il y a un diviſeur commun entre ces deux quantités qui ne contienne pas de b, il ſera auſſi commun aux deux parties $-x^3 + 2ax^2 - 2a^2x$ & $bx^2 - 2abx + 2a^2b$ de la derniere de ces deux quantités; mais le diviſeur commun de ces deux parties ne peut être que $xx - 2ax + 2a^2$, j'examine donc s'il diviſe auſſi $x^3 - 4ax^2 + 6aax - 4a^3$, & comme il le diviſe en effet, je conclus qu'il eſt le diviſeur cherché de la quantité propoſée.

XXXII.

Méthode pour trouver les diviſeurs de trois lettres & d'une dimenſion.

Suppoſons préſentement que la quantité propoſée, compoſée de trois lettres dont on cherche les diviſeur, n'en ait aucun compoſé ſeulement de deux lettres, ou bien que ſi elle en renferme, on ait commencé par les trouver, & les mettte à part. Pour trouver alors les diviſeurs de trois lettres & d'une dimenſion qu'elle peut avoir, je commence par repréſenter ce diviſeur par $mx + na + pb$; m, n, p étant ſuppoſées déſigner des nombres. Je remarque enſuite que ſi on fait ſucceſſivement, a, x, b égaux à zéro dans ce diviſeur, on a les trois quantités $mx + pb$, $na + pb$, $mx + na$ telles que les deux termes que chacune d'elles renferme, ſe trouvent répétés dans les deux autres quantités. $mx + pb$, par exemple, donné par la ſuppoſition de $a = 0$, eſt compoſé de mx qui ſe trouve dans $mx + na$ donné par la ſuppoſition de $b = 0$, & de pb qui ſe trouve dans $na + pb$ donné par la ſuppoſition de $x = 0$. Je vois en même temps que la ſomme de ces trois quantités $mx + na$, $mx + pb$, $na + pb$, eſt le double du diviſeur entier $mx + na + pb$.

Or, comme ces trois quantités ſont néceſſairement des diviſeurs de celles que l'on auroit en faiſant les mêmes ſuppoſitions de a, x, b égaux à zéro, dans la quantité propoſée; on tire de-là, que pour trouver les diviſeurs de cette quantité qui ne montent qu'à une dimenſion, & contiennent trois lettres, il faut commencer par écrire ſéparement les trois quantités, dans leſquelles la propoſée ſe change par la ſuppoſition de a, x, b égaux à zéro; écrire enſuite à côté de chacune de ces nouvelles quantités tous ſes diviſeurs d'une dimenſion, & à deux lettres. Cela fait, il faut choiſir trois diviſeurs parmi ces trois claſſes de diviſeurs à deux lettres, en obſervant les conditions dont nous venons de parler, que les deux termes dont chacun de ces diviſeurs ſera compoſé, ſe trouvent dans les deux autres diviſeurs. Ces trois diviſeurs étant ainſi trouvés, la moitié de leur ſomme ſera le diviſeur de la quantité propoſée, ſi elle en a un.

Si pour trouver dans un de ces trois diviſeurs de deux lettres, les deux termes qui doivent être la répétition de ceux qui ſont dans les deux autres, il falloit en changer les deux ſignes à la fois; on voit bien que ce changement ſeroit permis, puiſqu'en général, une quantité qui en diviſe une autre, la diviſera encore, ſi on en change tous les ſignes.

XXXIII.

Pour montrer l'application de cette méthode, Aplication de la méthode précedente à un exemple.

soit proposée la quantité $2x^3 + 7ax^2 - 3bx^2 + 5a^2x - 3abx + 4b^2x + 10abb - 6b^3$. Ayant d'abord écrit (Voyez la Table ci-jointe, Case 1) dans une colonne verticale les trois quantités $10ab^2 - 6b^3$; $2x^3 - 3bx^2 + 4bbx - 6b^3$; $2x^3 + 7ax^2 + 5a^2x$, dans lesquelles cette quantité se change par la supposition de x, a, b égaux à zéro; je place dans une seconde colonne verticale vis-à-vis de chacune de ces trois quantités, leurs diviseurs à deux lettres & d'une seule dimension. La premiere fournit $5a - 3b$ & $10a - 6b$; la seconde seulement $2x - 3b$, & la troisieme $2x + 5a$. Cela fait, je vois tout de suite que si des deux diviseurs, $5a - 3b$, $10a - 6b$, on prend le premier $5a - 3b$; il aura avec les deux diviseurs $2x - 3b$, $2x + 5a$, la propriété requise. Car ce premier diviseur $5a - 3b$ contient $5a$ qui est répété dans le diviseur $2x + 5a$, & $-3b$ qui est répété dans $2x - 3b$; de même $2x - 3b$ contient $2x$ qui est répété dans $2x + 5a$, & $-3b$ qui est répété dans $5a - 3b$; enfin, $2x + 5a$ est composé de $2x$ & de $+5a$, qui sont répétés dans les deux autres $5a - 3b$, $2x - 3b$.

J'ajoute donc, suivant la regle précédente, ces trois diviseurs, & j'ai $4x - 6b + 10a$, dont la moitié $2x - 3b + 5a$ est le diviseur cherché. En effet, si on tente la division, on trouve pour quotient $x^2 + ax + 2bb$.

XXXIV.

Autre exemple.

Soit proposé maintenant de trouver les diviseurs d'une dimension, & à trois lettres de la quantité $8x^4 - 2ax^3 - 10bx^3 - 3a^2x^2 - 5abx^2 - 12ab^2x + 9a^2b^2 + 15ab^3$. Ayant fait successivement x, a, b égaux à zéro dans cette quantité, j'ai les trois quantités $9a^2b^2 + 15ab^3$, $8x^4 - 10bx^3$, $8x^4 - 2ax^3 - 3a^2x^2$ que j'écris (Voyez la Case seconde de la Table ci-jointe) l'une sous l'autre dans une colonne verticale. J'écris dans une autre colonne verticale à côté de chacune de ces quantités, leurs diviseurs d'une dimension, & à deux lettres; ceux de la premiere sont $3a + 5b$ & $9a + 15b$; ceux de la seconde $4x - 5b$, $8x - 10b$; & ceux de la troisieme $4x - 3a$ & $2x + a$.

Il n'est pas difficile ensuite de trouver que les trois diviseurs $3a + 5b$, $4x - 5b$, & $4x - 3a$ ont les propriétés requises, pourvû qu'on prenne le premier $3a + 5b$ en changeant ses signes, c'est-à-dire, en l'écrivant ainsi $-3a - 5b$; je mets donc à part ces trois diviseurs dans la quatrieme colonne, je les ajoute, & je prends la moitié de la somme, ce qui me donne $4x - 3a - 5b$ pour le seul diviseur cherché, supposé qu'il y en ait un. Je tente la division, & je trouve pour quotient exact $2x^3 + ax^2 - 3ab^2$.

XXXV.

Dans ces deux exemples nous n'avons point écrit les diviseurs d'une lettre que donnoient chacune des trois quantités de la premiere colonne, parce que ces diviseurs n'auroient jamais pû être les quantités dans lesquelles le diviseur à trois lettres se change par la supposition de x, a, b égaux à zéro, & que nous avons supposé qu'on s'étoit assuré par la méthode de l'article XXIX. que la quantité proposée n'avoit pas de diviseurs à deux lettres. Mais si on avoit des quantités qui eussent de ces sortes de diviseurs, & qu'on ne voulût pas se servir de la méthode de l'art. XXIX. on pourroit les trouver en même temps que ceux à trois lettres, par la même méthode que nous venons d'expliquer, pourvû que ces diviseurs n'eussent non plus qu'une dimension.

Troisieme exemple où l'on trouve les diviseurs à deux lettres en même temps que ceux à trois.

Soit, par exemple, la quantité $16x^3 + 16bxx - 48axx + 35aax - 16abx - 6a^3 + 3a^2b$. Ayant écrit dans une premiere colonne (Voyez la Case 3 de la Table ci-jointe) les trois quantités $-6a^3 + 3a^2b$, $16x^3 + 16bxx$, $16x^3 - 48axx + 35a^2x - 6a^3$, dans lesquelles cette quantité se change par la supposition de x, a, b égaux à zéro; j'écris dans la seconde colonne, & à la premiere bande, a, $3a$, $-2a+b$, $-6a+3b$ diviseurs d'une dimension & à une ou deux lettres de la quantité $-6a^3 + 3ab$. De même, dans la seconde bande, j'écris les diviseurs x, $2x$, $4x$, $8x$, $16x$; $x+b$, $2x+2b$, $4x+4b$, $8x+8b$, $16x+16b$, de la seconde quantité $16x^3 + 16bxx$: & dans la troisieme bande, $a-4x$, $3a-4x$, $x-2a$ diviseurs de la troisieme quantité $16x^3 - 48aax + 35a^2x - 6a^3$.

Cela fait, à cause du grand nombre de ces diviseurs, il faut plus d'attention que dans les exemples précédens, pour n'en laisser aucun qui puisse avoir les conditions réquises. Quant à l'ordre qu'on doit ſuivre, il eſt à peu près le même que celui qu'on a ſuivi dans les diviſeurs numériques. Il faut donc comparer le premier de la premiere bande avec tous ceux des autres bandes, & faire enſuite la même opération pour chacun des autres diviſeurs de la premiere bande. Je vois d'abord que ſi a fait partie d'un diviſeur de la quantité, ce ne peut être que d'un diviſeur qui ne contienne que a & x, parce que, s'il y avoit un terme qui contînt b, ce diviſeur ne ſe ſeroit pas réduit à a par la ſuppoſition de $x = 0$. Ainſi je n'ai à choiſir, dans ce cas, que parmi les cinq premiers diviſeurs x, $2x$, $4x$, $8x$, $16x$. Or, comme de tous ces diviſeur, il n'y a que $4x$ qui ſoit répété dans la troiſieme, (pourvû que ce diviſeur $4x$ ſoit affecté du ſigne $-$), & qu'en même temps de tous les diviſeurs de la troiſieme bande, il n'y a que le premier $a - 4x$ qui renferme le même terme a de la premiere bande; je conclus que ſi a fait partie d'un diviſeur, il faut que ce diviſeur ſoit $a - 4x$ je l'écris donc à part. Je paſſe alors à $3a$, & comme je le trouve répété dans le diviſeur $3a - 4x$ de la troiſieme bande, & que l'autre terme $4x$ du même diviſeur ſe trouve être un des diviſeurs de la ſeconde bande, en changeant le ſigne de ce diviſeur; je conclus que $3a - 4x$ peut être encore un diviſeur de la quantité propoſée, & je le mets à part afin de l'eſſayer.

Quant à $-2a + b$, on voit d'abord qu'il ne peut pas ſeul être un diviſeur de la quantité propoſée, parce qu'il faudroit pour cela que parmi les diviſeurs de $16\,x^3 + 16\,b\,x\,x$, on eût le terme b que deviendroit $-2\,a + b$ par la ſuppoſition de $a = 0$. Reſte donc à ſçavoir s'il ne feroit pas partie d'un diviſeur où x entreroit. Pour m'en aſſurer, je commence par remarquer que de tous les diviſeurs de la ſeconde bande, il n'y a que $x + b$ avec lequel on puiſſe le comparer, parce que c'eſt le ſeul diviſeur qui ait le terme $+ b$ de commun avec lui. Je vois auſſi qu'il n'y a que $x - 2\,a$ de la troiſieme bande avec lequel je puiſſe comparer le même diviſeur $-2\,a + b$, parce qu'il eſt le ſeul qui contienne le terme $-2\,a$. Je remarque enfin que de même que les deux termes du diviſeur $-2\,a + b$ ſont répetés dans les deux autres diviſeurs $x + b$, $x - 2\,a$, le diviſeur $x + b$ a auſſi ſes deux termes répetés dans les deux autres $-2\,a + b$, $x - 2\,a$, & réciproquement que les deux termes du diviſeur $x - 2\,a$ ſont répetés dans les deux autres $x + b$, $-2\,a + b$. De-là, je conclus que les trois diviſeurs $-2\,a + b$, $x + b$, $x - 2\,a$ ont les condions néceſſaires pour former un diviſeur. Je les ajoute donc, & je mets à part la moitié $x - 2\,a + b$ de leur ſomme pour un diviſeur à tenter. Mais avant d'en faire le calcul, j'examine ce que peut me donner le diviſeur $-6\,a + 3\,b$, je vois tout de ſuite qu'il n'y a aucun de ſes deux termes qui ſoit répeté parmi les diviſeurs des autres bandes, & qu'ainſi il faut le rejetter.

Par cet examen, on trouve donc les trois diviſeurs $a - 4\,x$, $3\,a - 4\,x$, $x - 2\,a + b$ à

Case 1.

$$2x^3+7ax^2-3bx^2+5a^2x-3abx+4b^2x+10ab^2-6b^3$$

$10ab^2-6b^3$	$5a-3b,\ 10a-6b$	$5a-3b$
$2x^3-3bx^2+4bbx-6b^3$	$2x-3b$	$2x-3b$
$2x^3+7ax^2+5a^2x$	$2x+5a$	$2x+5a$
		$5a+2x-3b$

Case 2.

$$8x^4-2ax^3-10bx^3-3a^2x^2-5abx^2-12ab^2x+9a^2b^2+15ab^3$$

$9a^2b^2+15ab^3$	$3a+5b,\ 9a+15b$	$-3a-5b$
$8x^4-10bx^3$	$4x-5b,\ 8x-10b$	$4x-5b$
$8x^4-2ax^3-3a^2x^2$	$4x-3a,\ 2x+a$	$4x-5b$
		$4x-3a-5b$

Case 3.

$$26x^3+16bx^2-48ax^2+35a^2x-16abx-6a^3+3a^2b$$

$-6a^3+a^2b$	$a,\ 3a,\ -2a+b,\ -6a+3b$	a	$3a$	$-2a+b$
$16a^3+16bxx$	$x,\ 2x,\ 4x,\ 8x,\ 16x,\ x+b,\ 2x+2b,\ 4x+4b,\ 8x+8b,\ 16x+16b$	$-4x$	$-4x$	$x+b$
$16x^3-48axx+35a^2x-6a^3$	$a-4x,\ 3a-4x,\ x-2a$	$a-4x$	$3a-4x$	$x-2a$
		$a-4x$	$3a-4x$	$x-2a+b$

essayer, je tente la division par le dernier, elle réussit, & me donne pour quotient $3\,a\,a - 16\,a\,x + 16\,x\,x$, que je divise ensuite par $3\,a - 4\,x$. La division réussit encore, & me donne pour quotient le premier diviseur $a - 4\,x$. Ainsi la quantité proposée étoit le produit de ces trois diviseurs.

XXXVI.

Méthode pour trouver les diviseurs de deux dimensions & à trois lettres.

Si la quantité proposée n'a point de diviseur d'une dimension, & qu'on veuille examiner si elle n'en a point de deux, on y parviendra assez facilement à l'aide de quelques observations analogues à celles sur lesquelles la méthode précédente est fondée. Soit pris $m\,x\,x + n\,a\,x + p\,b\,x + q\,a^2 + r\,a\,b + s\,b\,b$ pour représenter le diviseur cherché à deux dimensions; faisant successivement $x = 0$, $a = 0$, $b = 0$, dans ce diviseur, j'ai les trois quantités

$$q\,a^2 + r\,a\,b + s\,b\,b$$
$$m\,x^2 + p\,b\,x + s\,b\,b$$
$$m\,x^2 + n\,a\,x + q\,a^2$$

qui sont toutes trois des diviseurs de celle que devient la proposée, lorsqu'on y fait successivement les mêmes suppositions de x, a, b égaux à zéro. De plus, chacun de ces diviseurs est toujours tel, que les termes affectés de lettres quarrées sont toujours répétés dans les deux autres diviseurs, tandis que les termes, qui contiennent un produit de deux lettres, sont toujours les seuls de leur espece. Voilà donc des conditions pour examiner les trois classes de diviseurs de deux lettres & de deux dimensions qu'on tirera d'une quantité propoſée ; ainſi, quand on en aura trouvé trois qui rempliront ces conditions, on n'aura qu'à les ajouter, prendre enſuite la moitié de tous les termes affectés de quarrés, & laiſſer en entier ceux qui ne ſeront que des rectangles.

XXXVII.

Application de cette méthode à un exemple.

Pour montrer l'application de cette méthode, ſoit la quantité $x^5 - 4ax^4 - 5a^2x^3 + 4b^2x^3 - a^2x^2 - 14ab^2x^2 + 3b^4x - a^4x - 3a^3b^2$, laquelle n'a aucun diviſeur d'une ſeule dimenſion, & dont on cherche quelque diviſeur qui en ait deux.

On reprendra d'abord (Voyez la premiere Caſe de la Table ci-jointe) les trois quantités $-3a^3b^2$, $x^5 + 4b^2x^3 + 3b^4x$; $x^5 - 4ax^4 - 5a^2x^3 - a^3x^2 - a^4x$ qu'on n'aura pas manqué de tirer de cette quantité, en faiſant ſucceſſivement x, a, b égaux à zéro, lorſqu'on aura voulu s'aſſurer qu'elle n'avoit point de diviſeurs d'une dimenſion. On mettra enſuite à côté de ces quantités leurs diviſeurs de deux dimenſions; la premiere fourniſſant a^2, ab, b^2, $3a^2$, $3ab$, $3bb$; la ſeconde $x^2 + 3b^2$, $x^2 + b^2$; la troiſieme ſeulement $x^2 + ax$. Dans cette méthode on ne ſçauroit rejetter les diviſeurs qui n'ont qu'un terme, quand même on ſe feroit aſſuré que la quantité propoſée n'a aucun diviſeur à deux lettres, parce qu'un diviſeur à trois termes & de deux dimenſions, peut ſe réduire à un ſeul terme par la ſuppoſition de l'une des lettres égale à zéro.

Il s'agit présentement d'examiner tous les diviseurs de la premiere bande ; je vois d'abord que le premier a^2 est à rejetter, parce que ce quarré ne se trouve point répété dans les autres bandes. Je passe ensuite à $a\,b$, & de ce que ce diviseur ne contient aucun terme affecté de $a\,a$ & de $b\,b$, je conclus que le diviseur, dont il pourroit faire partie, ne peut avoir, outre ce terme, que des xx, des $a\,x$ & des $b\,x$; & comme cette raison exclut la comparaison qu'on pourroit faire de $a\,b$ avec les diviseurs $x^2 + 3\,b^2$, $x^2 + b^2$, il s'ensuit que si $a\,b$ doit faire partie d'un diviseur de la proposée, ce diviseur ne peut être que $x\,x + a\,x + b\,a$: mais je vois en même temps que $x\,x + a\,x + b\,a$ ne sçauroit être un diviseur de la proposée, puisqu'il deviendroit seulement $x\,x$ par la supposition de $a = 0$, & que $x\,x$ n'est point un des diviseurs de la seconde bande. Donc le diviseur $a\,b$ est encore à rejetter.

Quant au diviseur $b\,b$, je le trouve répété dans le diviseur $x^2 + b^2$ de la seconde bande, & trouvant que le même diviseur $x^2 + b^2$, a x^2 de commun avec le diviseur de la troisieme bande ; je conclus que $x^2 + b^2 + a\,x$ a les conditions requises pour tenter la division. Mais avant de l'entreprendre, je passe aux autres diviseurs de la premiere bande, & je vois d'abord que $3\,a\,a$, & $3\,a\,b$ sont à rejetter par la même raison que a^2 & $a\,b$; je vois ensuite que $3\,b\,b$ étant répété dans le diviseur $x^2 + 3\,b^2$ & x^2 dans $x\,x + a\,x$, il s'ensuit que $x\,x + 3\,b\,b + a\,x$ a aussi les conditions requises pour tenter la division. J'essaye alors ces deux divisions, & je trouve que la seconde seule réussit. Le quotient qu'elle donne, est $x^3 - 5ax^2 + b^2x - a^3$.

Au lieu de parcourir tous les diviseurs de la premiere bande, on auroit pû examiner le seul que la derniere bande contient, & trouver bien plutôt que $x^2 + ax + b^2$ & $x^2 + ax + 3b^2$ étoient les seuls diviseurs à tenter. Car, remarquant alors que le diviseur $x^2 + ax$ contien x^2 qui est répété dans $x^2 + 3b^2$ & $x^2 + b^2$, & que ces deux derniers contiennent l'un $3b^2$ & l'autre b^2 qui sont chacun dans les diviseurs de la premiere bande, il étoit facile d'en conclure que $x^2 + ax + b^2$ & $x^2 + ax + 3b^2$ ont les conditions requises, & qu'ils sont les seuls; puisque, s'il y en avoit d'autres, ou bien ils auroient donné d'autres quantités que $xx + ax$ par la supposition de $b = 0$, ou bien d'autres quantités que $x^2 + 3b^2$ & $x^2 + b^2$ par la supposition de $a = 0$.

XXXVIII.

Autre exemple.

Qu'on ait présentement à chercher les diviseurs de la quantité $2x^5 + 3ax^4 + b^2x^3 - a^2x^3 + 4ab^2x^2 + 6a^2b^2x + 2ab^4 - 2a^3b^2$, soit d'une dimension, soit de deux, soit à deux lettres, soit à trois.

$2ab^4 - 2a^3b^2$, $2x^5 + b^2x^3$, & $2x^5 + 3ax^4 - a^2x^3$ étant les quantités que donne, dans la proposée, la supposition de x, a, b, égaux à zéro, il faut d'abord ranger vis-à-vis de chacune de ces quantités tous les diviseurs qu'elles peuvent avoir, tant d'une dimension, que de deux. Comme la premiere de ces trois quantités en a un aſſez grand nombre, on doit, dans la crainte d'en omettre quelqu'un, les chercher tous avec le même ordre que nous avons ſuivi pour les diviſeurs numériques.

Application de la méthode donnée art. XIV. pour trouver tous les diviſeurs d'un nombre, aux quantités littérales.

Ayant écrit (Voyez la ſeconde Caſe de la Table ci-jointe) cette premiere quantité $2\,a\,b^4 — 2\,a^3\,b\,b$ à part avec une barre à ſa gauche, & à gauche de cette barre l'unité, comme premier diviſeur de la quantité, je poſe 2 au-deſſous de 1, parce que c'eſt après 1 le diviſeur le plus ſenſible que puiſſe avoir cette quantité, & j'écris à droite de la même barre $a\,b^4 — a^3\,b\,b$. Je diviſe enſuite cette quantité par a, & j'écris a à gauche de la barre, en mettant en même temps à droite le quotient $b^4 — a^2\,b^2$; je multiple alors a par 2, ce qui me donne $2\,a$ que j'écris à gauche de a comme un nouveau diviſeur de la quantité; puis je diviſe $b^4 — a^2\,b^2$, par b, & j'écris le diviſeur b à gauche, & le quotient $b^3 — a^2\,b$ à droite. Enfin je multiplie b par 2, par a, par $2\,a$; & je mets à gauche de b, les produits $2\,b$, $a\,b$, $2\,a\,b$, comme de nouveaux diviſeurs de la quantité.

La quantité étant réduite à $b^3 — a^2\,b$, je la diviſe encore par b que j'écris toujours à gauche, ainſi que le quotient $b\,b — a\,a$ à droite; je ne multiplie point enſuite b par 2, ni par a, ni par $2\,a$, parce que cela donneroit des diviſeurs que j'ai déja eu; mais je le multiplie par b & par $2\,b$, ce qui me donne les nouveaux diviſeurs de deux dimenſions $b\,b$ & $2\,b\,b$; ſi j'en voulois admettre de trois dimenſions, ainſi que cela peut être néceſſaire dans d'autres occaſions, je multiplierois, outre cela, b par ab & $2ab$.

Après avoir réduit la quantité à $bb - aa$, je vois qu'elle eſt diviſible par $b - a$, & que le quotient eſt $b + a$, j'écris donc l'un à gauche & l'autre à droite, & je multiplie $b - a$ par 2, par a, par b, par $2a$, & par $2b$, ce qui me donne pour nouveaux diviſeurs d'une & de deux dimenſions, $2b - 2a$, $ba - aa$, $bb - ab$, $2ba - 2aa$, $2bb - 2ab$. Si j'en avois voulu de trois & de quatre dimenſions, j'aurois, outre cela, multiplié $b - a$ par ab, $2ab$, abb, $2abb$. La quantité reſtante $b + a$ n'ayant plus enſuite d'autre diviſeur qu'elle-même, je l'écris à gauche, & je la multiplie par 2, par a, par b, par $2b$, $2a$, $b - a$, $2b - 2a$; ce qui me donne les nouveaux diviſeurs d'une & de deux dimenſions, $2b + 2a$, $ba + aa$, $2ba + 2aa$, $bb + ab$, $2bb + 2ab$, $bb - aa$, $2bb - 2aa$. Si j'en avois voulu admettre de trois, quatre & cinq dimenſions, c'eſt-à-dire, tous les diviſeurs que la quantité propoſée pouvoit avoir, j'aurois multiplié, outre cela, $b + a$ par ab, $2ab$, bb, $2bb$, abb, $2abb$, $ba - aa$, $2ba - 2aa$, $bb - ab$, $2bb - 2ab$, $abb - aab$, $2abb - 2a^2b$, $b^3 - ab^2$, $2b^3 - 2ab^2$, $ab^3 - a^2b^2$, $2ab^3 - 2a^2b^2$.

Cela fait, j'écris (Voyez la troiſieme Caſe de la Table ci-jointe) tous les diviſeurs d'une & de deux dimenſions a, $2a$, b, $2b$, $b - a$, $2b - 2a$, $b + a$, $2b + 2a$, ab, $2ab$,

$ab - aa$, $2ba - 2aa$, $bb - ab$, $2bb - 2ab$, $ba + aa$, $2ba + 2aa$, $bb + ba$, $2bb + 2ab$ à côté de la quantité $2ab^4$, $- 2a^3b^2$ qui les a donnés. J'écris ensuite à côté de la quantité $2x^5 + b^2x^3$, les diviseurs d'une & de deux dimensions x, $2x$, $xx + bb$, & à côté de la quantité $2x^5 + 3ax^4 - a^2x^3$ ses diviseurs d'une & de deux dimensions x, x^2, $2xx + 3ax - aa$.

Parcourant après tous ces diviseurs pour sçavoir ceux qui peuvent être admis, je remarque bientôt qu'il n'y en a aucun d'une seule dimension. Car ne trouvant que x dans la seconde & la troisieme bande qui soit d'une dimension, je conclus qu'il doit être le seul diviseur d'une dimension, s'il y en peut avoir; puisque si le diviseur d'une dimension renfermoit, ou un terme affecté de a, ou un affecté de b, celui qui auroit été affecté de a, seroit resté dans les diviseurs donnés par la supposition de $b = 0$, & que celui qui auroit été affecté de b seroit resté dans les diviseurs donnés par la supposition de $a = 0$. Mais x n'est point un diviseur de la quantité proposée; donc il n'y en a point d'une dimension. Je viens ensuite aux diviseurs de deux dimensions, & je commence par x^2 que je prends dans la troisieme bande; trouvant qu'il est aussi dans la seconde bande, je conclus que, s'il fait partie d'un diviseur, il ne peut lui manquer qu'un terme affecté du rectangle ab. En effet, s'il y en avoit eu qui fussent affectés de aa, de bb, de ax, ou de bx, ceux qui auroient été affectés de bb, ou de bx, n'auroient pas disparu par la supposition de $a = 0$, & ceux qui auroient été affectés de aa, ou de ax, ne se seroient pas évanouis par la supposition de $b = 0$. Mais je trouve dans la premiere bande ab & $2ab$; donc $xx + ab$, $xx + 2ab$, $xx - ab$, $xx - 2ab$, sont des diviseurs à tenter.

Je passe ensuite au diviseur $2x^2 + 3ax - aa$, & je trouve le terme $2x^2$ répété dans le diviseur supérieur $2xx + bb$, je trouve en même temps le terme $- aa$ répété dans plusieurs diviseurs qui sont au-dessus : mais de tous les diviseurs où il est répété, il n'y a que $bb - aa$ qui ait en même temps le terme bb que contient le diviseur $2xx + bb$. Ainsi ce n'est qu'avec $2xx + bb$ & $bb - aa$ que $2x^2 + 3ax - aa$ peut concourir à former un diviseur qui ait les conditions requises, & ce diviseur qui est $2x^2 + 3ax - aa + bb$, & par conséquent à tenter. Je vois qu'il n'y en a plus d'autre à chercher, parce que s'il pouvoit y en avoir un qui n'eût pas été découvert dans l'examen qu'on vient de faire des diviseurs de la troisieme bande, il faudroit que ce fût un seul terme affecté de ab : or, on voit tout de suite que la quantité n'a point de diviseur de cette nature.

Je tente alors la division par $2xx + 3ax - aa + bb$, elle réussit, & me donne pour quotient $x^3 + 2abb$ qui m'apprend qu'aucune des quantités $xx + ab$, $xx - ab$, $xx + 2ab$, $xx - 2ab$, ne peut diviser la proposée.

XXXIX.

Si la quantité proposée avoit plus de cinq dimensions, & qu'après s'être assuré qu'elle n'a aucun diviſeur, ni d'une, ni de deux dimenſions, on voulût chercher ceux du troiſieme, quatrieme, &c. degré qu'elle pourroit avoir, on ſuivroit pour cela une méthode analogue à celles qu'on vient d'expliquer, & qu'il eſt aſſez facile d'imaginer.

Si la quantité dont on cherche les diviſeurs, renfermoit plus de trois lettres, la méthode qu'il faudroit ſuivre pour les trouver, ſeroit, à très-peu de choſe près, la même que lorſqu'il n'y en a que trois; ainſi nous laiſſerons les Commençans s'y exercer.

X L.

Ce qu'il faut faire pour trouver des diviſeurs des quantités qui ne ſont pas homogenes.

Lorſqu'on aura une quantité dont tous les termes ne ſeront pas homogenes, c'eſt-à-dire, élevés à la même dimenſion, on n'aura qu'à commencer par mettre tous ſes termes à la même dimenſion à l'aide d'une nouvelle lettre, & chercher les diviſeurs de cette nouvelle quantité par les regles précédentes. Ces diviſeurs trouvés, on en chaſſera la nouvelle lettre introduite en la ſuppoſant égale à l'unité, & l'on aura par ce moyen les diviſeurs cherchés. Que j'aie, par exemple, la quantité $x^6 + b x^5 - b x^4 + x^2 + b x - b$; je multiplie le terme $b x^4$ par a, afin de le rendre de ſix dimenſions. Par la même raiſon, je multiplie x^2 par a^4, $b x$ par a^4, & b par a^5; ce qui me donne la quantité $x^6 + b x^5 - a b x^4 + a^4 x x + a^4 b x - a^5 b$, laquelle, au moyen des méthodes précédentes, ſe trouve être le produit de $x x - a b + b x$ par $x^4 + a^4$. Je ſuppoſe $a = 1$ dans ces deux produiſans, ce qui me donne $x x - b$

$+ bx$, & $x^4 + 1$ pour les deux produisans de la quantité proposée $x^6 + bx^5 - bx^4 + x^2 + bx - b$.

XLI.

Il y a des cas où les diviseurs se trouvent plus facilement, qu'en suivant les méthodes précédentes, lorsqu'on a un peu d'habitude dans le calcul. Voici un de ces cas sur lequel il est bon de prévenir les Commençans.

Cas où le diviseur se trouve plus facilement que par les méthodes précédentes.

Lorsque quelqu'une des lettres de la quantité proposée ne montera qu'à une dimension, il est aisé de voir qu'il ne peut y avoir qu'un des diviseurs de cette quantité qui contienne cette lettre. Donc il y aura au moins un diviseur qui ne la contiendra pas, & alors, suivant la méthode de l'article XXIX, pour trouver ce diviseur, il faudra chercher le plus grand commun diviseur des termes ou cette lettre se trouve, & des autres termes dans lesquels cette lettre ne se trouve pas.

Soit, par exemple, la quantité $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x + c^2x^3 - acxx - 8a^2cx + ba^2c - 8a^4$; je cherche le plus grand commun diviseur des deux parties $cx^3 - acxx - 8aacx + ba^2c$ & $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x - 8a^4$ de cette quantité, l'une contenant la lettre c, l'autre n'en contenant point, je trouve pour ce plus grand diviseur commun $xx + 2ax - 2aa$; c'est en effet le diviseur cherché de la quantité proposée.

Case 1.

$$x^5 - 4ax^4 - 5a^2x^3 + 4b^2x^3 - a^3x^2 - 14ab^2x^2 + 3b^4x - a^4x - 3a^3b^2$$

$- 3a^3b^2$

$x^5 + 4b^2x^3 + 3b^4x$

$x^5 - 4ax^4 - 5a^2x^3 - a^3x^2 - a^4x$

$a^2,\ ab,\ b^2,\ 3a^2,\ 3ab,\ 3b^2$

$x^2 + 3b^2,\ x^2 + b^2$

$x^2 + ax$

b^2	$3b^2$
$x^2 + b^2$	$x^2 + 3b^2$
$x^2 + ax$	$x^2 + ax$
$x^2 + b^2 + ax$	$x^2 + 3b^2 + ax$

Case 2.

1	$2ab^4 - 2a^3b^4$
2	$ab^4 - a^3bb$
$2a,\ b$	$b^4 - a^2b^2$
$2ab,\ ab,\ 2b,\ b$	$b^3 - a^2b$
$2abb,\ abb,\ 2bb,\ bb,\ b$	$b^2 - a^2$
$2ab^3 - 2a^2b^2,\ ab^3 - a^2b^2,\ 2b^3 - 2ab^2,\ b^3 - ab^2,\ 2abb - 2aab,\ abb - aab,\ 2b^2 - 2ab,\ bb - ab,\ 2ba - 2a^2,\ ba - a^2,\ 2b - 2a,\ b - a$	$b + a$
$\left\{\begin{matrix} 2ab^3 + 2a^2b^2,\ ab^3 + a^2b^3,\ 2b^3 + 2ab^2,\ b^3 + ab^2,\ 2ab^2 + 2a^2b,\ ab^2 + a^2b,\ 2b^2 + 2ab,\ b^2 + ab,\ 2ba + 2a^2,\ ba + a^2,\ 2b + 2a,\ b + a \\ 2ab^4 - 2a^3b^2,\ ab^4 - a^3bb,\ 2b^4 - 2a^2b^2,\ b^4 - aabb,\ 2ab^3 - 2a^3b,\ ab^3 - a^3b,\ 2b^3 - 2a^2b,\ b^3 - a^2b,\ 2bba - 2a^3,\ bba - a^3,\ 2b^2 - 2a^2,\ b - a \end{matrix}\right\}$	1

Case 3.

$$2x^5 + 3ax^4 + b^2x^3 - a^2x^3 + 4ab^2x^2 + 6a^2b^2x + 2ab^4 - 2a^3b^2$$

$2ab^4 - 2a^3b^2$

$2x^5 + b^2x^3$

$x^5 + 3ax^4 - a^2x^3$

$a,\ 2a,\ b,\ 2bb - a,\ 2b - 2a,\ b + a,\ 2b + 2a$

$\left.\begin{matrix} bb,\ 2bb,\ ab,\ 2ab,\ bb - aa,\ 2bb - 2aa,\ ba - aa,\ ba + aa,\ bb - ab \\ bb + ab,\ 2ba - 2aa,\ 2ba + 2aa,\ 2bb - 2ab,\ 2bb + 2ab \end{matrix}\right\}$

$x,\ xx,\ 2xx + bb$

$x,\ x^2,\ 2xx + 3ax - aa$

ab	$2ab$	$bb - aa$
xx	xx	$2xx + bb$
xx	xx	$2xx + 3ax - aa$
$xx + ab$	$xx + 2ab$	$2xx + bb + 3ax - aa$
$xx - ab$	$xx - 2ab$	

ÉLÉMENS D'ALGEBRE.

QUATRIEME PARTIE.

Résolution des équations des degrés quelconques lorsquelles n'ont que deux termes, ou lorsqu'en ayant trois elles peuvent se réduire à celles qui n'en ont que deux par la méthode des équations du second degré : avec différentes opérations relatives à ces équations, comme l'élévation des puissances, l'extraction des racines, la réduction des quantités radicales, &c.

APRÈS avoir vû comment on tiroit d'une équation qui passoit le second degré, celles du premier & du second degré qu'elle pouvoit renfermer ; il faut voir ce qu'on a fait pour résoudre les équations qui échappent à cette méthode.

I.

Des équations du troisieme degré à deux termes.

Pour aller du plus simple au plus composé, nous commencerons par les équations qui ne contiennent que deux termes ; supposons d'abord qu'elles ne montent qu'au troisieme degré, comme $a\,x^3 = b$.

Pour résoudre ces équations, il est bien aisé d'imaginer de délivrer d'abord x^3 de son coëfficient, & de prendre la racine cube des deux membres. Le caractere qu'on employe pour exprimer la racine cube, est le même que celui dont on se sert dans la racine quarrée ; mais l'on met 3 au-dessus pour le distinguer.

On met un 3 sur le caractere $\sqrt{\ }$ pour exprimer la racine cube.

Ainsi, pour exprimer la valeur de x qu'on tire de l'équation $a\ x^3 = b$, ou $x^3 = \frac{b}{a}$, on écrit $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Si, par exemple, $b = 1000$ & $a = 2$ on a $x = \sqrt[3]{500}$.

II.

Les radicaux cubes ne peuvent avoir qu'un signe à la fois.

Il est à observer qu'on n'a pas ici, comme dans les racines quarrées, la liberté de mettre $+$ ou $-$ devant le signe radical ; mais qu'au contraire la racine cube d'une quantité est toujours de même signe que la quantité elle-même : à cause que le cube d'une quantité positive est positif, & que celui d'une quantité négative est négatif.

III.

Cette résolution fournit assez naturellement une réflexion qui paroît contredire celles qu'on a faites précédemment sur les nombres des racines des équations. Car un cube n'ayant qu'une racine, & cette racine n'ayant qu'un signe, il ne paroît pas qu'une équation telle que $a x^3 = b$ donne plus d'une valeur de x, cependant, suivant ce qu'on a vû ci-dessus, on devroit s'attendre à trouver trois racines dans une équation du 3eme degré, de même que de deux dans une du second.

Que conclure de cette réflexion ? Abandonnera-t-on ce principe si satisfaisant par sa généralité, & qui suit naturellement de la formation des équations, exposée dans la III^{eme} Partie, article II ? Voici le dénouement de cette difficulté tiré de la formation même.

Qu'on mette l'équation $a x^3 = b$ sous cette forme $x^3 - \frac{b}{a} = 0$, qu'on mette aussi sa racine $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ sous la forme $x - \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = 0$, qu'on divise alors $x^3 - \frac{b}{a}$ par $x - \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, on trouvera une équation du second degré qui contiendra les deux autres racines.

Pour en faire le calcul plus aisément, soit fait $\frac{b}{a} = c^3$, on aura donc, au lieu des équations précédentes, $x^3 - c^3 = 0$, & $x - c = 0$;

divisant la premiere par la seconde, il vient au quotient $xx + cx + cc = 0$, dont les deux racines sont exprimées par $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{-\frac{3}{4}cc}$, & deviendront la seconde & la troisieme valeur cherchée de x dans l'équation $x^3 = \frac{b}{a}$, aussi-tôt qu'on aura remis à la place de c sa valeur $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$.

I V.

La substitution faite, les deux valeurs de x se trouveront exprimées par $a - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$. Car on voit que le quarré de $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, c'est-à-dire, le produit de $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ par $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ doit être $\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}$; & qu'en général la multiplication des racines cubes, comme celle des racines quarrées, se fait en multipliant d'abord les quantités qui sont sous le signe radical, & en mettant ensuite ce signe devant leur produit.

Comment on multiplie les radicaux cubes.

V.

Racines de l'équation du troisieme degré à deux termes.

Les trois racines de l'équation proposée $ax^3 = b$, sont donc $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$, $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

$-\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$; la premiere réelle, & les deux autres imaginaires, mais cependant toujours telles, qu'on peut dire qu'elles résolvent l'équation proposée.

V I.

Supposons maintenant qu'on ait une équation à deux termes d'un degré quelconque, on la résoudra de la même maniere, en employant un radical dont l'exposant soit celui que l'inconnue a dans cette équation. Soit, par exemple, l'équation $ax^m = b$, ou $x^m = \frac{b}{a}$, on en tirera $x = \sqrt[m]{\frac{b}{a}}$.

Des équations à deux termes & d'un degré quelconque.

Si m est un nombre impair; cette quantité ne pourra être que négative, lorsque $\frac{b}{a}$ sera négatif, & elle ne pourra être que positive, lorsque $\frac{b}{a}$ sera positif. Si m est un nombre pair, la racine aura, comme dans le second degré, le signe $\pm$, & elle ne sera réelle que lorsque $\frac{b}{a}$ sera positif. Dans le cas où $\frac{b}{a}$ sera négatif (m toujours pair) les deux racines exprimées par $\pm\sqrt[m]{\frac{b}{a}}$ seront alors toutes les deux imaginaires. Ainsi toutes les équations exprimées généralement par $x^m = \frac{b}{a}$

Ces équations ne sçauroient jamais

avoir plus de deux racines réelles.

ne pourront, au plus, avoir que deux racines réelles, les autres racines étant néceſſairement imaginaires.

Qu'on ait, par exemple, $x^4 = 256$, les deux racines réelles ſont $+4$ & -4, les deux imaginaires ſont $+\sqrt{-16}$ & $-\sqrt{-16}$. Dans l'équation $x^5 = 243$ la ſeule racine réelle eſt $+3$, & les autres, celles qu'on doit trouver en réſolvant l'équation $x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81 = 0$ qui vient par la diviſion de l'équation $x^5 - 243 = 0$ par l'équation $x - 3 = 0$. Sans réſoudre cette équation, on doit être aſſuré que ſes racines ſont toutes imaginaires, puiſque s'il y en avoit quelqu'une de réelle, elle réſoudroit auſſi $x^5 = 243$, & par conſéquent il y auroit d'autre nombre réel que 3 qui, élevé à la cinquieme puiſſance, donneroit 243.

VII.

Il ne manque préſentement à ce que nous venons de dire ſur les équations à deux termes, que d'abréger ou ſimplifier les expreſſions radicales qu'elles donnent, lorſqu'il y aura une partie de la quantité dont on pourra prendre exactement la racine, ou même d'éviter entiérement le ſigne radical, lorſque la quantité entiere ſera une puiſſance complette.

Réflexions ſur l'élevation des puiſſances.

Pour reconnoître ces cas, il faut commencer par faire quelques réflexions ſur l'inverſe de l'opération qu'on ſe propoſe alors, c'eſt-à-dire, ſur celle par laquelle des quantités propoſées s'élevent à des puiſſances quelconques.

Qu'on

Qu'on ait, par exemple, une quantité telle que $abcd$ à élever à la puiſſance m, on voit bien qu'il viendra par cette opération $a^m b^m c^m d^m$.

Qu'il s'agiſſe d'élever à une puiſſance quelconque, une quantité comme $\frac{abc}{de}$ qui a un diviſeur ; il eſt clair qu'il faudra elever le diviſeur, ainſi que le numérateur à cette puiſſance quelconque, & que s'il y avoit des coëfficiens, il faudroit qu'ils fuſſent auſſi élevés à la même puiſſance. De plus, ſi les facteurs ou produiſans de la quantité donnée ſe trouvoient déja élevés à quelques puiſſances, ils deviendroient alors élevés à une nouvelle puiſſance, dont l'expoſant ſeroit le produit de l'expoſant qu'ils avoient d'abord par celui de la puiſſance à laquelle on les voudroit élever. Ainſi $\frac{2a^2b^3}{3c^4}$ élévé à la puiſſance 3, donnera $\frac{8a^6b^9}{27c^{12}}$; $\frac{a^m b^r}{c^n}$ à la puiſſance q, deviendra $\frac{a^{mq}b^{rq}}{c^{nq}}$. Tout cela eſt fort ſimple, & ſuit entiérement de ce principe, qu'une quantité élevée à une puiſſance quelconque, n'eſt autre choſe que ce qui réſulte de la multiplication de cette quantité par elle-même autant de fois moins une, que l'expoſant de la puiſſance contient d'unités.

VIII.

On voit bien préſentement que l'inverſe de Aplication des réflexions précédentes à l'extraction des racines.

cette opération, c'eſt-à-dire, l'extraction des racines ne demandera autre choſe que de diviſer les expoſans des parties ou facteurs de cette quantité par l'expoſant de la racine; ſoit que ces parties ou facteurs ſoient dans le numérateur, ſoit qu'ils ſoient auſſi dans le dénominateur. Qu'il ſoit queſtion, par exemple, de prendre la racine cube de $\frac{a^3 b^6}{c^9}$, on diviſera par 3 les expoſans 3, 6, 9, & on prendra leurs quotiens 1, 2, 3, pour les nouveaux expoſans des mêmes lettres. Par ce moyen $\frac{a b^2}{c^3}$ ſera la racine cube cherchée.

Si la quantité avoit eu un coëfficient, on en auroit pris la racine cube; $\frac{8 a^3 b^6}{c^9}$, par exemple, auroit donné $\frac{2 a b^2}{c^3}$ pour ſa racine cube.

De la même maniere, ſi on cherche la racine quarrée quarrée, ou quatrieme de $\frac{16 a^4 b^8}{d^4 c^{12}}$, on trouvera $\frac{2 a b^2}{d c^3}$.

IX.

De l'extraction des racines, lorſque les puiſſances ſont incompletes.

Lorſqu'il n'y aura qu'une partie de la quantité qui ſe pourra extraire, on l'extraira, & on laiſſera le reſte ſous le ſigne radical affecté de l'expoſant qui lui convient. Soit propoſé, par exemple, de prendre la racine cinquieme de

$\frac{32\,a^{10}\,b^8}{486\,c^7}$ qui eſt composé du produit de $\frac{32\,a^{10}\,b^5}{243\,c^5}$ par $\frac{b^3}{2\,c^2}$, dont la premiere eſt exactement la cinquieme puiſſance de $\frac{2\,a^2\,b}{3\,c}$, & dont la ſeconde n'a pas de cinquieme racine ; il faudra écrire alors $\frac{2\,a^2\,b}{3\,c}\sqrt[5]{\frac{b^3}{2\,c^2}}$ pour la racine cherchée.

De même la racine cube de $\frac{8\,a^3\,b + 16\,a^3\,c}{54\,d}$ ſera $\frac{2}{3}\,a\sqrt[3]{\frac{b + 2\,c}{2\,d}}$, parce que la quantité $\frac{8\,a^3\,b + 16\,a^3\,c}{54\,d}$ eſt le produit de $\frac{8\,a^3}{27}$ par $\frac{b + 2\,c}{2\,d}$, que la premiere de ces deux quantités eſt un cube parfait, celui de $\frac{2}{3}\,a$, & que la ſeconde n'a point de racine cube. De même $\sqrt[5]{\frac{32\,a^9 + 128\,a^6\,b^3 - 160\,a^5\,b^4}{3\,b^6}}$ $= \frac{2\,a}{b}\sqrt[5]{\frac{a^4 + 4\,a\,b^3 - 5\,b^4}{3\,b}}$.

X.

Lorſque la quantité, dont il faudra extraire la racine, ſera composée, ainſi que les précédentes, de pluſieurs termes, & qu'après avoir séparé de tous ses termes les quantités communes qui sont des puissances complettes, on soupçonnera que le reste pourroit être la puissance complette de quelque quantité commensurable composée de plusieurs termes, l'opération qu'il faudra faire pour s'en assurer, sera plus difficile. Afin de trouver la méthode qu'il faut suivre dans cette opération, nous commencerons par faire quelques réflexions sur le Problême inverse, c'est-à-dire, sur l'élévation des quantités complexes à des exposans donnés, & nous en tirerons ensuite les principes qu'il faut suivre pour extraire les racines de ces sortes de quantités.

Cherchons d'abord comment la méthode d'élever au cube peut donner celle d'extraire la racine cube; on verra ensuite que les autres puissances n'augmentent la difficulté que par la longueur des calculs.

X I.

Soit prise la quantité complexe la plus simple $u + z$, & soit élevée cette quantité au cube. L'on aura premiérement, pour son quarré $uu + 2uz + zz$, qui, multiplié par la simple puissance, donne pour le cube demandé, $u^3 + 3uuz + 3uzz + z^3$. On voit donc qu'une quantité quelconque composée de deux parties, lorsqu'on l'éleve au cube, donne 1°. le cube de la premiere partie; 2°. le triple du quarré de cette premiere partie multiplié par la seconde partie; 3°. le triple de la premiere partie multiplié par le quarré de la seconde; 4°. le cube de la seconde.

En quoi consiste le cube d'un binome.

XII.

Qu'on ait donc une quantité dont on veuille extraire la racine cube, on commencera par y chercher un terme qui ſoit un cube, & ce cube repréſentant u^3, l'on écrira à côté ſa racine qui repréſentera u. On triplera enſuite le quarré de cette racine, & on le fera ſervir de diviſeur à ce qui reſte de la quantité donnée, lorſqu'elle aura été diminuée du cube de la racine premiérement poſée. Le quotient de cette diviſion ſera la ſeconde partie de la racine, & repréſentera z; l'ayant écrit à côté du premier terme, on multipliera enſuite ce dernier terme par la quantité qui repréſente $3uu + 3uz + zz$, c'eſt-à-dire, par le triple du quarré de la premiere partie, plus le triple du produit de la premiere quantité par la ſeconde, plus le quarré de la ſeconde. La multiplication faite, on retranchera le produit qu'elle donnera de la quantité propoſée, dont le premier cube, qui repréſente u^3, a déja été ôté. S'il ne reſte rien, on ſera ſûr que la quantité étoit exactement le cube du binome répondant à $u + z$. S'il reſte encore pluſieurs termes, & qu'on veuille ſçavoir ſi elle ne ſeroit point le cube d'un trinome; pour trouver le troiſieme terme, on ſera des deux termes déja écrits, le même uſage qu'on a fait du premier terme, lorſqu'on a cherché le ſecond.

Méthode qu'il faut ſuivre pour prendre la racine cube des quantités complexes.

XIII.

Quelques exemples éclairciront cette méthode. Soit la quantité $8y^6 + 60y^4b^2 + 150b^4y^2 + 125b^6$; je commence par

Premier exemple.

prendre la racine cube du premier terme $8y^6$, & j'écris cette racine (Voyez la Table ci-jointe, Case 1) $2y^2$ à côté de la quantité proposée ; je recris ensuite le cube de $2y^2$ sous la quantité proposée, en observant d'en changer le signe, c'est-à-dire, en lui donnant le signe —. La soustraction ou réduction faite, j'écris le reste $60 y^4 b^2 + 150 b^4 y^2 + 125 b^6$, & je mets au-dessus de $2y^2$ le triple de son quarré, c'est-à-dire, $12y^4$. Je divise alors le premier terme $60y^4b^2$, par ce triple $12y^4$, & j'écris le quotient $5b^2$, qui vient de cette division, à côté de $2y^2$. J'ajoute ensuite à $12y^4$ le produit $30b^2y^2$ du triple de $2y^2$ par la quantité $5b^2$, que je viens d'écrire, & j'ajoute à ces deux premiers termes $25b^4$ quarré de $5b^2$.

Cela fait, je multiplie $5b^2$ par ces trois termes, & j'écris leurs produits avec des signes différens, sous la quantité $60y^4b^2 + 150 b^4y^2 + 125 b^6$: voyant qu'après la réduction il ne reste rien, je conclus que la quantité proposée étoit un cube parfait, & que sa racine étoit $2y^2 + 5b^2$.

XIV.

Second exemple.

Que j'aie à présent la quantité $x^6 + 6bx^5 + 21b^2x^4 + 44b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6$ qu'on voit bien au premier coup d'œil devoir donner plus de deux termes pour sa racine cube. Opérant d'abord comme dans l'exemple précédent, je trouve avec facilité (Voyez la Table ci-jointe, Case 2) les deux premiers termes $x^2 + 2bx$. Mais comme, au lieu de ne rien reſter, ainſi qu'il eſt arrivé dans cet exemple, il vient pour reſte $9\ b^2\ x^4 + 36\ b^3\ x^3 + 63\ b^4\ x^2 + 54\ b^5\ x + 27\ b^5$, je diviſe le premier terme $9\ b^2\ x^4$ de ce qui reſte par $3\ x^4$ triple du quarré de x^2, parce que ce terme $3\ x^4$ eſt le premier de ceux que l'on a en triplant le quarré de la quantité $x\ x + 2\ b\ x$, laquelle repréſente actuellement la premiere partie (nommée u, art. XI.) de la racine cube cherchée. Ayant fait cette diviſion de $9\ b^2\ x^4$ par $3\ x^4$, j'écris le quotient $3\ b^2$ à côté de $x\ x + 2\ b\ x$. Je forme enſuite la quantité $3\ x^4 + 12\ b\ x^3 + 21\ b^2\ x^2 + 18\ b^3\ x + 9\ b^4$, en ajoutant le triple du quarré de $x\ x + 2\ b\ x$, avec le triple du produit de $x\ x + 2\ b\ x$ par $3\ b^2$, & le quarré de $3\ b^2$. Cela fait, je multiplie cette quantité par $3\ b^2$, & j'écris tous les termes du produit, en changeant leurs ſignes, ſous la quantité $9\ b^2\ x^4 + 36\ b^3\ x^3 + 63\ b^4\ x^2 + 54\ b^5\ x + 27\ b^6$, & comme il ne reſte rien après la réduction, je conclus que $x^2 + 2\ b\ x + b^2$ eſt exactement la racine cube de la quantité propoſée.

X V.

Nous avons vû (II^{eme} Part. art. XXIV, XXV & XXVI), comme on faiſoit, ſur les quantités radicales du ſecond degré, les opérations d'addition, ſouſtraction, multiplication & diviſion. Ces opérations étant également néceſſaires pour les quantités radicales des degrés plus élevés, nous allons examiner ce que demandent ces nouveaux radicaux.

Additions & soustractions des quantités radicales de toute espece.

Quant à l'addition & à la soustraction, elles ne demandent rien de plus que ce qu'on a dit pour les mêmes opérations, en parlant des radicaux du second degré. Il suffit toujours de réduire chaque radical à sa plus simple expression, & de les ajouter ou de les retrancher comme les quantités commensurables.

Qu'on ait, par exemple, $\sqrt[3]{b^4 + 2ab^3}$ à ôter de $\sqrt[3]{8a^3b + 16a^4}$, on change la premiere quautité en $b\sqrt[3]{b + 2a}$, & la seconde en $2a\sqrt[3]{b + 2a}$: or, la soustraction est alors toute simple, & donne $\overline{2a - b}\sqrt[3]{b + 2a}$.

De même, si on ajoute $3a\sqrt[4]{16b^8 + 32b^4a^4}$ avec $4b\sqrt[4]{a^4b^4 + 2a^8}$, on aura . . . . . $10ab\sqrt[4]{b^4 + 2a^4}$.

XVI.

Multiplication & division des quantités radicales qui ont mêmes exposans.

A l'égard de la multiplication & de la division, si les quantités radicales sont de même exposant, c'est encore la même méthode que dans les radicaux du second degré ; il suffit de faire l'opération sur les quantités précédées du signe radical, & de mettre le même signe devant le produit, ou devant le quotient, suivant qu'il sera question d'une multiplication ou d'une division.

Exemples.

C'est ainsi que $\sqrt[3]{5ayy} \times \sqrt[3]{7ayz} = \sqrt[3]{35aay^3z}$, ou $y\sqrt[3]{35a^2z}$.

Que $\sqrt[5]{\frac{9a^2b^3}{4}} \times \sqrt[5]{27a^3b^6} = \sqrt[5]{\frac{243a^5b^9}{4}}$
$= 3ab\sqrt[5]{\frac{b^4}{4}}$.

Que $\sqrt[3]{a^2b^2 + b^4}$ divisé par $\sqrt[3]{\frac{a^2 - b^2}{8b}}$
donne pour quotient $\sqrt[3]{\frac{8a^2b^3 + 8b^5}{a^2 - b^2}}$
$= 2b\sqrt[3]{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}}$.

que $\frac{\sqrt[3]{a^2x^3 - x^5}}{\sqrt[3]{ab^4 + b^4x}} = \frac{x}{b}\sqrt[3]{\frac{a - x}{b}}$.

XVII.

Mais si l'on veut faire ces mêmes opérations sur les quantités radicales de différens signes, & qu'on ne veuille pas se contenter de la simple marque de multiplication, il faut changer ces quantités radicales en d'autres d'un radical plus composé qui soit le même pour chacune des deux quantités à multiplier ou à diviser.

Pour faire ces opérations sur les quantités radicales de différens exposans, il faut les réduire au même exposant.

Qu'on ait, par exemple, $\sqrt[3]{ab}$ & $\sqrt[5]{abb}$ à réduire à un même signe, j'éleve ab à la puissance 5, & j'écris $\sqrt[15]{\ }$, au lieu de $\sqrt[3]{\ }$, & j'ai la quantité $\sqrt[15]{a^5b^5}$ qui est la même chose que $\sqrt[3]{ab}$. J'éleve de même ab^2 à la troisieme puissance, & je mets $\sqrt[15]{\ }$ au lieu de $\sqrt[5]{\ }$; ce qui change la quantité $\sqrt[5]{ab^2}$ en $\sqrt[15]{a^3b^6}$. Ainsi,

Méthode pour cette réduction.

s'il avoit fallu multiplier $\sqrt[3]{a\,b}$ par $\sqrt[5]{a\,b\,b}$, il ſeroit venu pour produit $\sqrt[15]{a^8\,b^{11}}$; & ſi j'avois eu à diviſer la premiere par la ſeconde, j'aurois trouvé pour quotient . . . .
$\sqrt[15]{\frac{a^5\,b^5}{a^3\,b^6}} = \sqrt[15]{\frac{a^2}{b}}$.

De même le produit de $\sqrt[3]{a^2\,b^4}$ par $\sqrt{a^4\,b^5}$ auroit été $\sqrt[6]{a^{16}\,b^{23}} = a^2\,b^3\,\sqrt[6]{a^4\,b^5}$.

En général, pour réduire deux quantités radicales $\sqrt[m]{a^p\,b^q}$ & $\sqrt[n]{a^r\,b^s}$ à un même ſigne, on changera la premiere en $\sqrt[mn]{a^{pn}\,b^{qn}}$, & la ſeconde en $\sqrt[m]{a^{rm}\,b^{sm}}$. S'il eſt queſtion alors de les multiplier, leur produit ſera $\sqrt[mn]{a^{pn+rm}\,b^{qn+sm}}$; & ſi on vouloit diviſer la premiere par la ſeconde, le quotient ſeroit $\sqrt[mn]{a^{pn-rm}\,b^{qn-sm}}$.

Lorſque les deux quantités radicales auront pour expoſans des nombres qui auront un commun diviſeur, on voit qu'il ne ſera pas néceſſaire de changer chaque radical en un autre, dont l'expoſant ſoit le produit des deux premiers expoſans. Que l'on ait, par exemple $\sqrt{a\,b}$ & $\sqrt[4]{a\,b^3}$, on changera le premier en $\sqrt[4]{a^2\,b^2}$. Qu'on ait de même $\sqrt[4]{a^3\,b}$ & $\sqrt[6]{a^5\,b}$, on changera la premiere en $\sqrt[12]{a^9\,b^3}$, & la ſeconde en $\sqrt[12]{a^{10}\,b^2}$.

XVIII.

On peut trouver une autre méthode pour faire les opérations précédentes, en employant une réflexion sur la nature des quantités radicales, qui suit assez naturellement de ce qu'on a dit, art. VIII, pour extraire toutes sortes de racines. C'est que les quantités radicales peuvent être regardées comme des puissances, dont les exposans sont fractionnaires.

Autre maniere de faire les opérations précédentes.

Pour faire voir, non-seulement comment on est arrivé à cette réflexion, mais la maniere dont on en a fait usage; cherchons, par le moyen de ce que nous avons vû précédemment, à trouver ce que peuvent être les quantités $\sqrt[m]{a^p b^q}$ & $\sqrt[n]{a^r b^s}$ employée dans l'exemple précédent.

Suivant ce qu'on a dit, art. VIII, si on avoit les nombres qu'expriment les exposans p & q, on les diviseroit par le nombre que m désigne, & prenant leur quotient pour servir d'exposans à a & à b, on auroit la premiere quantité exprimée par $\sqrt[m]{a^p b^q}$. Mais sans sçavoir les valeurs particulieres de p, q, m, il est évident qu'on peut, en cette occasion, comme en toutes les autres, écrire généralement $\frac{p}{m}$ & $\frac{q}{m}$ pour les quotiens de la division de p & de q par m, c'est-à-dire, pour les exposans de a & de b dans la racine m de $a^p b^q$. Donc $a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}$ est cette racine. De même $\sqrt[n]{a^r\, b^s}$ sera $a^{\frac{r}{n}}\ b^{\frac{s}{n}}$. Pour multiplier présentement les deux quantités $a^{\frac{r}{n}}\ b^{\frac{s}{n}}$ & $a^{\frac{p}{m}}\ b^{\frac{q}{m}}$, dans lesquelles sont changées les quantités qu'on avoit à multiplier, art. XVII, il faut, comme dans toutes les multiplications de quantités incomplexes, ajouter les exposans des mêmes lettres, c'est-à-dire, $\frac{p}{m}$ & $\frac{s}{n}$ avec $\frac{n}{r}$ & $\frac{q}{m}$, ce qui donnera $a^{\frac{p}{m}+\frac{r}{n}}\ b^{\frac{s}{n}+\frac{q}{m}}$, ou $a^{\frac{pn+rm}{mn}}\ b^{\frac{sm+qn}{mn}}$, en mettant les fractions $\frac{p}{m}$ & $\frac{r}{n}$ au même dénominateur aussi-bien que $\frac{s}{n}$ & $\frac{q}{m}$.

Ainsi $a^{\frac{pn+rm}{mn}}\ b^{\frac{sm+qn}{mn}}$, c'est-à-dire, le produit de a élevé à la puissance $\frac{pn+rm}{mn}$ par b élevé à la puissance. . . .

$\frac{sm + qn}{mn}$ est le produit des quantités proposées.

Il est aisé de voir présentement l'identité de cette expression $a^{\frac{pn + rm}{mn}} b^{\frac{sm + qn}{mn}}$, & de l'expression $\sqrt[mn]{a^{pn + rm} b^{sm + qn}}$ qu'on avoit trouvé dans l'art. XVII. Car, par la même raison qu'on vient de voir que $\sqrt[m]{a^p}$ & $a^{\frac{p}{m}}$, ne désignoient que la même quantité, on doit voir que $a^{\frac{pn + rm}{mn}}$ & $\sqrt[mn]{a^{pn + rm}}$ sont la même chose, ainsi que $\sqrt[mn]{a^{sm + qn}}$ & $b^{\frac{sm + qn}{mn}}$.

Si on avoit voulu, au contraire, diviser la premiere quantité $\sqrt[m]{a^p b^q}$ par la seconde $\sqrt[n]{a^r b^s}$, on auroit retranché l'exposant $\frac{r}{n}$ de $\frac{p}{m}$ & l'exposant $\frac{q}{m}$ de $\frac{s}{n}$, & l'on auroit eu $a^{\frac{p}{m} - \frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n} - \frac{q}{m}}$, ou

$a^{\frac{pn - rm}{mn}}$ $b^{\frac{sm - qn}{mn}}$ pour le quotient.

Afin qu'on ſe familiariſe avec cette transformation de quantités radicales en puiſſances fractionnaires, il ſera bon d'en faire encore quelqu'application. Soit propoſé, par exemple, de diviſer $\sqrt[2p]{a^m\, b^{3n}\, c^2}$ par $\sqrt[p]{a^{2m}\, b^n\, c}$. On changera d'abord la premiere quantité en $a^{\frac{m}{2p}}$ $b^{\frac{3n}{2p}}$ $c^{\frac{1}{p}}$, & la ſeconde en $a^{\frac{2m}{p}}$ $b^{\frac{n}{p}}$ $c^{\frac{1}{p}}$, enſuite on retranchera les expoſans $\frac{2m}{p}$, $\frac{n}{p}$, $\frac{1}{p}$, qu'ont les lettres a, b, c dans la ſeconde, des expoſans $\frac{m}{2p}$, $\frac{3n}{2p}$, $\frac{1}{p}$, qu'ont les mêmes lettres dans la premiere, & les reſtes $\frac{3m}{2p}$, $\frac{n}{2p}$, o, ſeront les expoſans à donner aux mêmes lettres dans le quotient, c'eſt-à-dire, que $a^{-\frac{3m}{2p}}$ $b^{\frac{n}{2p}}$ c^{0} eſt ce quotient.

Lorſqu'on trouve une pareille quantité, il eſt naturel qu'on ſoit un peu embarraſſé a ſçavoir ce qu'elle ſignifie ; car n'ayant point encore rencontré d'expoſant qui ſoit un zéro, ou négatif, on ne ſçait ce que deviennent les quantités dont elles ſont les expoſans.

Pour le découvrir, ſoit repriſe la queſtion dans l'endroit où commence à paroître la difficulté, c'eſt-à-dire, lorſqu'on retranche les expoſans $\frac{2m}{p}$ de $\frac{p}{2m}$ & $\frac{1}{p}$ de $\frac{1}{p}$ afin de diviſer $a^{\frac{m}{2p}}$ par $a^{\frac{2m}{p}}$ & $c^{\frac{1}{p}}$ par $c^{\frac{1}{p}}$. C'eſt donc à la place de $\frac{c^{\frac{1}{p}}}{c^{\frac{1}{p}}}$ qu'on met c^{0}; & à la place de $\frac{a^{\frac{m}{2p}}}{a^{\frac{2m}{p}}}$ qu'on met $a^{-\frac{3m}{2p}}$; mais au lieu de $\frac{a^{\frac{m}{2p}}}{a^{\frac{2m}{p}}}$ on peut mettre $\frac{1}{a^{\frac{3m}{2p}}}$ à cause que $a^{\frac{2m}{p}}$ est le produit de $a^{\frac{3m}{2p}}$ par $a^{\frac{m}{p}}$; & au lieu de $\frac{c^{\frac{1}{p}}}{c^{\frac{1}{p}}}$ on peut mettre 1. Donc les deux quantités à examiner $a^{-\frac{3m}{2p}}$ & c^{o} expriment, l'une $\frac{1}{a^{\frac{3m}{2p}}}$, & l'autre 1. Et partant le quotient cherché de $\sqrt[2p]{a^{m}\, b^{3n}\, c^{2}}$ divisé par $\sqrt[p]{a^{2m}\, b^{n}\, c}$ est $\frac{1}{a^{\frac{3m}{2p}}} \times b^{\frac{n}{2p}} \times 1$, ou

$$\frac{b^{\frac{n}{2p}}}{a^{\frac{3m}{2p}}}.$$

XIX.

XIX.

La nouveauté des expreſſions qu'on vient d'employer dans l'article précédent, & la généralité qu'elles apportent dans l'analyſe, méritent qu'on en faſſe une courte récapitulation, en les réduiſant en principes généraux.

1°. A une quantité quelconque, dont l'expoſant ſera une fraction, l'on pourra toujours ſubſtituer la racine d'une quantité dont l'expoſant ſera un entier; pourvû que le dénominateur de cette fraction ſerve d'expoſant au ſigne radical, & que ſon numérateur ſoit l'expoſant de la quantité qui eſt ſous le ſigne, c'eſt-à-dire, en termes algébriques, qu'en général

Ce que c'eſt qu'une puiſſance fractionnaire.

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

2°. Lorſqu'une quantité a un expoſant négatif, on la peut changer en une fraction, dont le numérateur eſt l'unité, & dont le dénominateur eſt la même quantité avec un expoſant égal au propoſé, mais avec le ſigne +, c'eſt-à-dire, qu'en général . . . . ,

Ce que c'eſt qu'une puiſſance négative.

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

3°. Toute quantité, dont l'expoſant eſt zéro, ſe réduit à l'unité, c'eſt-à-dire, que $a^0 = 1$.

La démonſtration de ces trois propoſitions priſes dons leur plus grande généralité, ne demande point d'autres argumens que ceux qu'on a employés dans l'article précédent.

Ce que c'eſt que la puiſſance o.

P

Cependant, pour se ressouvenir plus aisément de ces propositions, & pour s'en servir avec plus de confiance, il est à propos de les considérer à part; ce qui se fera facilement de la maniere suivante.

1°. On démontrera que $a^{\frac{n}{m}}$ est la racine m de a^n, si on fait voir qu'en élevant $a^{\frac{n}{m}}$ à la puissance m, il vient a^n. Or, pour élever $a^{\frac{n}{m}}$ à la puissance m, il est évident qu'il faut multiplier son exposant par m; ce qui donnera $a^{\frac{n}{m} \times m}$, ou a^n.

2°. a^{-m} sera nécessairement égal à $\frac{1}{a^m}$ si, en multipliant ces deux quantités par une même puissance de a, il vient le même produit. Or, qu'on les multiplie l'une & l'autre par une puissance de a plus élevée que m, telle que a^{2m}, par exemple, on aura $a^{2m} \times a^{-m}$, ou a^{2m-m}, ou a^m pour le produit de a^{2m} par a^{-m}; & de même $\frac{a^{2m} \times 1}{a^m}$, ou a^m pour le produit de a^{2m} par $\frac{1}{a^m}$. Donc a^{-m} & $\frac{1}{a^m}$ sont égaux.

Case 1.

$$\begin{array}{r} 8y^6 + 60y^4b^2 + 150b^4y^2 + 125b^6 \\ -8y^6 \\ \hline 60y^4b^2 + 150b^4y^2 + 125b^6 \\ -60y^4b^2 - 140b^4y^2 - 125b^6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 12y^4 + 30y^2b^2 + 25b^4 \\ 2y^2 + 5b^2 \end{array}$$

Case 2.

$$\begin{array}{r} x^6 + 6bx^5 + 21b^2x^4 + 44b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6 \\ -x^6 \\ \hline 6bx^5 + 21b^2x^4 + 44b^3x^3 \\ -6bx^5 - 12b^2x^4 - 8b^3x^3 \\ \hline 9b^2x^4 + 36b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6 \\ -9b^2x^4 - 36b^3x^3 - 63b^4x^2 - 54b^5x - 27b^6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3x^4 + 12bx^3 + 21b^2x^2 + 18b^3x + 9b^4 \\ 3x^4 + 6bx^3 + 4b^2x^2 \\ x^2 + 2bx + 3b^2 \end{array}$$

Case 3.

$$\frac{a^2b^{-3}}{ca^{-1}} = a^3b^{-3}c^{-1} = \frac{a^3}{b^3c}$$

$$\sqrt{\frac{a^{-2}b^2}{ab^{-1}}} = \sqrt{a^{-3}b^3} = \sqrt{\frac{b^3}{a^3}} = \frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b^{-3}}}{\sqrt[3]{a^2}} = a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{3}{2}}a^{-\frac{2}{3}} = a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{b\sqrt{b}\sqrt[3]{a}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}c^5} \times \sqrt[4]{ac^3}}{\sqrt{\frac{abb}{c}}} = a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{3}}a^{\frac{1}{4}}c^{\frac{3}{4}}a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}c^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}-1}c^{\frac{5}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{12}}b^{-\frac{4}{3}}c^{\frac{35}{12}}$$

$$= \frac{a^{\frac{5}{12}}c^{\frac{35}{12}}}{b^{\frac{4}{3}}} = \frac{\sqrt[12]{a^5c^{35}}}{\sqrt[3]{b^4}} = \frac{c^2\sqrt[12]{a^5c^{11}}}{b\sqrt[3]{b}}$$

3°. Par la même raison a^0 & 1 sont égaux, puisqu'en multipliant a^0 par a, il vient $a^{0+1} = a^1 = a$, aussi-bien qu'en multipliant 1 par a.

Comme ces trois seules propositions suffisent pour toutes les réductions, & les transformations de même espece que les précédentes, & pour une infinité d'autres opérations, les Commençans ne sçauroient trop s'éxercer à en faire des applications. Afin de leur en faciliter les moyens, j'ai joint plusieurs exemples dans la troisieme Case de la Table ci-jointe.

X X.

Après avoir résolu toutes les difficultés qu'on pouvoit rencontrer dans les équations à deux termes, il est naturel qu'on ait cherché aussi à résoudre généralement toutes celles qui n'ont que trois termes; mais on est bien loin encore d'avoir trouvé une méthode générale pour toutes les équations de cette nature; on s'est contenté de les résoudre dans quelques cas particuliers. Par exemple, on a trouvé une Classe d'équations assez étendue, qui pouvoit se réduire facilement aux deux cas que nous avons déja vûs, celui des équations du second degré, & celui des équations à deux termes d'un degré quelconque.

Ces équations sont toutes celles qu'on peut mettre sous cette forme générale $x^{2m} + a x^m = b$. Pour les résoudre on ajoutera, ainsi que dans les équations du second degré, ce qui peut faire un quarré du premier membre. On aura donc $x^{2m} + a x^m + \frac{1}{4} a a = b + \frac{1}{4} a a$ dont la ra- Des équations à trois termes qui se résolvent par la méthode du second degré.

cine eſt $x^m + \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$, & par conſéquent $x^m = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$ équation qui n'a que deux termes, & de laquelle on tire $x = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}}$.

Par cette formule on réſoudra toutes les équations à trois termes, dont le premier ſera affecté d'une puiſſance d'x double de celle qui affecte le ſecond terme, & dont le troiſieme ſera une quantité connue. Il eſt clair, par cette expreſſion, & par ce qu'on ſçait déja ſur les racines des équations, que toutes les équations renfermées dans la formule générale $x^{2m} + ax^m = b$ ne peuvent pas avoir plus de quatre racines réelles, & qu'elles n'en auront que deux lorſque m ſera un nombre impair.

XXI.

Exemple de la méthode précédente.

Pour faire quelqu'application de cette méthode, ſuppoſons d'abord qu'on ait l'équation $x^4 - bbxx = bbcc$. En ajoutant des deux côtés $\frac{1}{4}b^4$ quarré de la moitié du coëfficient de xx, on aura $x^4 - bbxx + \frac{1}{4}b^4 = \frac{1}{4}b^4 + bbcc$ dont la racine quarrée eſt $xx - \frac{1}{2}bb = \pm b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}$, d'où l'on tire $xx = \frac{1}{2}bb \pm b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}$, & partant $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}bb \pm b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}}$, ſuſceptible de deux valeurs réelles & de deux

imaginaires. Les deux premieres ſont . . . . .
$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}}$, les deux autres $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}bb - b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}}$, néceſſairement imaginaires à cauſe que . . . . $b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}$ eſt plus grand que $\frac{1}{2}bb$.

XXII.

Soit enſuite l'équation $x^6 - 2a^2bx^3 = a^6$, ajoutant des deux côtés a^4bb, il vient $x^6 - 2aabx^3 + a^4bb = a^4bb + a^6$ dont la racine quarrée eſt $x^3 - aab = a^2\sqrt{aa + bb}$, ou $x^3 = aab \pm a^2\sqrt{aa + bb}$ qui donne enfin $x = \sqrt[3]{aab \pm a^2\sqrt{a^2 + b^2}}$ ſuſceptible de deux valeurs réelles ; l'une poſitive, l'autre négative. Les quatre autres racines de la même équation, qu'on trouveroit facilement en opérant comme dans l'article III, ſeroient imaginaires. Autre exemple.

XXIII.

Soit à préſent $x^4 - \overline{aa + bb} \times xx = -aabb$ en ajoutant des deux côtés $\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}aabb\frac{1}{4} + b^4$, on aura $x^4 - \overline{aa + bb} \times xx + \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}aab^2 + \frac{1}{4}b^4 = \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{2}aabb + \frac{1}{4}b^4$, dont le ſecond membre eſt auſſi-bien un quarré que le premier. Prenant donc la racine quarrée de part & d'au- Troiſieme exemple.

tre, on aura $xx - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb = \pm\frac{1}{2}aa \pm \frac{1}{2}bb$ qui donne $xx = aa$ & $xx = bb$, c'est-à-dire, $x = \pm a$ & $x = \pm b$ qui sont les quatre racines de l'équation $x^4 - \overline{aa + bb} \times xx = -aabb$. On auroit trouvé également ces racines par les méthodes de la troisieme Partie, en cherchant les diviseurs commensurables.

XXIV.

Quatrieme exemple.

Soit encore l'équation $x^4 - \overline{2gh + 4ff} \times xx = -gghh$, on aura, en ajoutant le quarré de la moitié du coëfficient du second terme, & en prenant ensuite la racine quarrée, $x^2 - gh - 2ff = \pm 2f\sqrt{gh + ff}$ qui donne $x = \pm\sqrt{gh + 2ff \pm 2f\sqrt{gh + ff}}$.

Or, en réfléchissant un peu sur cette quantité, il n'est pas difficile de reconnoître que ce qui est sous le signe radical est un quarré, celui de $f \pm \sqrt{ff + gh}$. Car le terme $2f\sqrt{gh + ff}$ est le double du produit de f & de $\sqrt{gh + ff}$, & la quantité $gh + 2ff$ contient le quarré de f & le quarré $ff + gh$ de la partie radicale.

Ainsi la valeur précédente de x se réduit, en supposant qu'on eût choisi le signe $+$ pour le premier radical, à $f \pm \sqrt{ff + gh}$. En supposant au contraire qu'on eût pris le second signe $-$ du même premier radical, elle se seroit réduite à $-f \pm \sqrt{ff + gh}$; ce sont-là les quatre racines de l'équation $x^4 - 2ghxx - 4ffxx = -gghh$.

Dans cet exemple, l'habitude du calcul pouvoit faire facilement ſoupçonner que la quantité $gh + 2ff \pm 2f\sqrt{gh+ff}$ avoit une racine quarrée ; mais il pourroit y avoir beaucoup de cas où les quantités trouvées de la même maniere, ſeroient également des quarrées, ſans qu'on s'en doutât : il eſt donc à propos de chercher une méthode générale pour reconnoître ces ſortes de quantités, & pour trouver leurs racines.

XXV.

Méthode pour trouver les racines quarrées des quantités en partie commenſurables, & en partie radicales.

Pour y parvenir, je commence par remarquer que la racine d'une quantité composée de deux parties, dont l'une eſt commenſurable, & dont l'autre eſt un radical du ſecond degré, doit être elle-même composée de deux parties, & qu'au moins l'une des deux doit être un radical.

Cela poſé, je prends $A + B$ pour exprimer, en général, la quantité proposée, A déſignant la partie rationelle, & B un radical quelconque du ſecond degré; je prends enſuite $p + q$ pour exprimer la racine cherchée.

Je remarque maintenant que ſoit que p déſigne la quantité radicale, ſoit qu'on l'ait exprimée par q, ou que p & q ſoient l'un & l'autre des radicaux, le quarré $p^2 + 2pq + q^2$ ne pourra avoir que le terme $2pq$ de radical. Comparant donc ce quarré avec la quantité donnée, $2pq$ repréſentera B & $p^2 + q^2$, A, c'eſt-à-dire, en termes algébriques, qu'on aura pour déterminer p & q les deux équations $p^2 + q^2 = A$, & $2\,p\,q = B$.

On tire de la seconde $p = \frac{B}{2\,q}$ qui, étant substituée dans la premiere, donne $\frac{B^2}{4\,q^2} + q^2 = A$, ou $q^4 - A\,q^2 = -\frac{B^2}{4}$ ou $q^2 - \frac{1}{2}A = \pm \frac{1}{2}\sqrt{AA - BB}$, & partant $q = \pm\sqrt{\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$. Substituant ensuite cette valeur de q dans l'équation $p^2 + q^2 = A$, ou $p = \pm\sqrt{A - q^2}$, on a $p = \pm\sqrt{\frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$. Donc la racine cherchée de la quantité $A + B$ est $\pm\sqrt{\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$ $\pm\sqrt{\frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$, ou simplement $\pm\sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$ $\pm\sqrt{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$.

Car il est évident que cette expression revient absolument au même, que l'expression $\pm\sqrt{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$ $\pm\sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$ qu'on auroit en prenant en $-$ le signe de $\sqrt{A^2 - B^2}$.

Quant aux ſignes que doivent avoir les deux parties $\sqrt{\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - B^2}}$ & $\sqrt{\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - B^2}}$ de la racine cherchée de $A + B$, ils doivent être les mêmes, ſi le radical B eſt poſitif, & contraires, ſi B eſt négatif. Car il eſt aiſé de voir qu'en général $p + q$, ou $-p - q$ étant la racine de $A + B = pp + qq + 2pq$, $p - q$, ou $-p + q$ eſt celle de $A - B = pp + qq - 2pq$.

XXVI.

La valeur qu'on vient de trouver pour la racine de la quantité $A + B$, pourroit faire craindre qu'il ne reſtât encore une difficulté pareille à celle qu'on avoit d'abord à réſoudre. Car $\sqrt{\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - B^2}}$ & $\sqrt{\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - B^2}}$ ſemblent au premier coup d'œil déſigner des racines de quantités en partie rationelles, & en partie irrationelles ; & ſi cela étoit, la queſtion ne ſeroit pas plus avancée qu'elle n'étoit. Il faut donc, pour que la méthode ſoit de quelqu'utilité, que la quantité $A^2 - B^2$ qui ſe trouve ſous le ſigne radical, ſoit un quarré commenſurable. Or, c'eſt ce qui ne ſçauroit manquer d'arriver toutes les fois que $A + B$ ſera dans le cas d'avoir une racine. Pour s'en aſſurer, il ſuffit de ſe reſſouvenir (article XXV), que

$p - q$ eſt $\sqrt{A - B}$ en même temps que $p + q$ eſt $\sqrt{A + B}$; car on en tirera tout de ſuite que $\sqrt{A - B} \times \sqrt{A + B}$, ou $\sqrt{AA - BB}$ eſt $\overline{p - q} \times \overline{p + q}$, ou $pp - qq$, c'eſt-à-dire, une quantité commenſurable.

XXVII.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Pour montrer préſentement l'application de la méthode précédente, ſoit pris, pour exemple, la quantité $aa + 2c\sqrt{aa - cc}$. En la comparant avec $A + B$, on a $a^2 = A$ & $B = 2c\sqrt{aa - cc}$, & par conſéquent $\sqrt{A^2 - B^2} = aa - 2cc$, d'où l'on tire $\sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}} = \sqrt{aa - cc}$, on trouve de même $\sqrt{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}} = c$; c'eſt-à-dire, que la racine cherchée eſt $c + \sqrt{aa - cc}$, ou $-c - \sqrt{aa - cc}$.

XXVIII.

Autre exemple.

Si on avoit à prendre la racine quarrée de $16 + 6\sqrt{7}$, en faiſant $A = 16$ & $B = 6\sqrt{7}$, on auroit $\sqrt{AA - BB} = 2$, & partant $\sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{AA - BB}} = 3$ &

$\sqrt{\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} \sqrt{AA - BB}} = \sqrt{7}$; d'où $3 + \sqrt{7}$, ou $-3 - \sqrt{7}$ seroit la racine cherchée.

XXIX.

Qu'on demande maintenant la racine de $ap - 2a\sqrt{ap - aa}$. Faisant $A = ap$ & $B = -2a\sqrt{ap - aa}$, on a $\sqrt{AA - BB} = ap - 2aa$ & $\sqrt{\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} \sqrt{AA - BB}} = \sqrt{ap - aa}$, & de même ...... $\sqrt{\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - B^2}} = a$, c'est-à-dire, que la racine cherchée sera $\sqrt{ap - aa} - a$, ou $a - \sqrt{ap - aa}$.

XXX.

Si la quantité proposée est $b^2 - ab + \frac{1}{4} a^2 + 2\sqrt{ab^3 - 2a^2 b^2 + \frac{1}{4} a^3 b}$, on aura $A = b^2 - ab + \frac{1}{4} aa$, $B = 2\sqrt{ab^3 - 2a^2 b^2 + \frac{1}{4} a^3 b}$, & $\sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{b^4 - 6ab^3 + \frac{19}{2} a^2 b^2 - \frac{3}{2} a^3 b + \frac{1}{16} a^4} = bb - 3ab + \frac{1}{4} aa$, ce qui donnera $\sqrt{\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - B^2}} = \sqrt{bb - 2ab + \frac{1}{4} aa}$, & $\sqrt{\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - B^2}} = \sqrt{ab}$

Troisieme exemple.

d'où la racine cherchée est $\sqrt{ab + \sqrt{bb - 2ab + \frac{1}{4}aa}}$, ou $-\sqrt{ab - \sqrt{bb - 2ab + \frac{1}{4}aa}}$. Cet exemple est plus propre que les précédens à faire voir la nécessité d'une méthode particuliere, pour prendre la racine des quantités en partie rationelles & en partie irrationelles. Car, dans les cas précédens, la racine cherchée ne contenant qu'un radical, pouvoit être tirée d'une équation du second degré qui auroit été contenue dans l'équation, pour la résolution de laquelle on avoit cherché à prendre cette racine. Au lieu que dans ce dernier, la valeur de la racine cherchée contenant deux radicaux, il étoit impossible qu'elle vînt d'aucune équation du second degré. En effet, lorsque nous avons eu à prendre (article XXVII) la racine de $aa + 2c\sqrt{aa - cc}$, la question étoit la même, si on avoit dû résoudre l'équation $x^4 - 2aaxx - 4aacc + 4c^4 + a^4 = 0$ de laquelle on pouvoit tirer par la III^eme Partie, article XXXVI, les équations $xx - 2cx + 2cc - aa = 0$, & $xx + 2cx + cc - aa = 0$. Mais la racine quarrée de $b^2 - ab + \frac{1}{4}aa + \sqrt{ab^3 - 2a^2b^2 + \frac{1}{4} = a^3b}$ devoit servir à la résolution de $x^4 + 2 \times \overline{ab - bb - \frac{1}{4}aa} \times x^2 + \frac{19}{2}a^2b^2 - 6ab^3 - \frac{3}{2}a^3b + b^4 + \frac{1}{16}a^4 = 0$ qui n'est point décomposable en deux équations du second degré.

XXXI.

Après avoir appris à distinguer, parmi les quantités qui sont en partie rationelles, & en partie irrationelles, celles qui sont des quarrés, on a dû chercher à distinguer aussi celles qui sont des cubes ou d'autres puissances plus élevées, puisque cela étoit nécessaire pour avoir completement tout ce qui regarde les équations comprises sous la forme $x^{2m} + a x^m = b$, ou $x = \sqrt[m]{- \frac{1}{2} a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4} a a}}$. Voyons d'abord ce que l'on pouvoit faire pour le cas où $m = 3$, c'est-à-dire, pour trouver la racine cube d'une quantité quelconque $A + B$, dans laquelle A est rationel, & B un radical du second degré.

Méthode pour trouver la racine cube des quantités en partie commensurables, & en partie incommensurables.

Nous remarquerons d'abord que la racine cube d'une quantité de cette nature, ne peut pas renfermer plus d'un radical du second degré; car on voit bien que le cube d'une quantité, telle que $\sqrt{m} + \sqrt{n}$, qui contiendroit deux de ces radicaux, ne pourroit pas manquer d'être affecté de ces mêmes radicaux.

Nous remarquerons ensuite que la même racine cube cherchée ne pourra pas contenir d'autre espece de radicaux, à moins que ce ne soit un radical cube, & qu'il ne soit commun aux deux parties de la racine. Telle seroit, par exemple, la quantité $f \sqrt[3]{m} + \sqrt{g} \times \sqrt[3]{m}$ dont le cube $m f^3 + 3 m f f g + 3 m f f + m g \sqrt{g}$, ainsi que la quantité proposée $A + B$, a une partie commensurable, & une partie radicale du second degré.

Cela posé, soit pris $p + q$ pour exprimer la racine cherchée, q étant la partie affectée du radical du second degré, soit qu'il se trouve d'ailleurs, ainsi que p, affecté d'un radical cube, soit qu'ils n'en contiennent ni l'un ni l'autre.

Il est évident que le cube $p^3 + 3\,p^2\,q + 3\,p\,q^2 + q^3$ ne contiendra pas d'autre radical que le radical du second degré qui est dans q, & qu'il n'y aura que les termes $3\,p\,p\,q$ & q^3 qui soient affectés de ce radical. On comparera donc ces deux termes à la quantité donnée B, & les deux autres à A; ce qui donnera les équations $A = p^3 + 3\,p\,q^2$ & $B = 3\,p^2\,q + q^3$.

Pour résoudre ces deux équations, il faut d'abord commencer par chasser l'une des deux inconnues p ou q, ce qui se peut faire aisément par les principes établis dans la seconde Partie, art. XXXIII. Mais on peut abréger le calcul par le secours d'une remarque qui a dû se présenter facilement à des Algébristes un peu exercés, c'est que $A\,A - B\,B$ sera toujours le cube de $p\,p - q\,q$, lorsque $A + B$ sera le cube de $p + q$. Car il est clair premiérement que si $p + q$ est la racine cube de $p^3 + 3\,p\,q^2 + 3\,p^2\,q + q^3$ dont la premiere partie $p^3 + 3\,p\,q^2$ est A, & la seconde $3\,p^2\,q + q^3$ est B, il faut nécessairement que $p - q$ soit la racine cube de $A - B$ qui est alors $p^3 + 3\,p\,q^2 - 3\,p^2\,q - q^3$. Or de-là il suit que $p\,p - q\,q$, ou

$\overline{p-q} \times \overline{p+q}$ eſt $\sqrt[3]{A+B} \times \sqrt[3]{A-B}$, c'eſt-à-dire, $\sqrt[3]{AA-BB}$.

Cela poſé, on a donc l'équation $\sqrt[3]{A^2-B^2} = p^2 - q^2$, ou $n = p^2 - q^2$, dans laquelle n eſt donnée, & ne peut être qu'une quantité commenſurable, ou un ſimple radical cube. De l'équation $n = p^2 - q^2$, ou $q^2 = p^2 - n$, & de l'équation $A = p^3 + 3\,p\,q^2$, on tire tout de ſuite $4\,p^3 - 3\,p\,n - A = 0$, équation qu'il faut réſoudre pour avoir la premiere partie p de la racine cube cherchée. Auſſi-tôt qu'elle ſera réſolue, on aura la ſeconde partie de cette même racine cube cherchée en employant l'équation $q = \sqrt{p^2 - n}$.

Quant au ſigne radical il ſera poſitif, ſi le radical de la propoſée a le ſigne $+$; & de même négatif, ſi le radical de la propoſée a le ſigne $-$. Car on voit aiſément que la partie radicale du cube de $p + q$, laquelle eſt $\overline{3\,pp + q\,q} \times q$ ſera toujours du même ſigne que q.

Si la racine de la quantité propoſée $A + B$ ne doit point avoir de radical cube qui affecte tous ſes termes, n, ou $\sqrt[3]{A^2 - B^2}$ ſera une quantité commenſurable, & par conſéquent l'équation $4\,p^3 - 3\,p\,n - A$ ne contiendra pas de radicaux; & comme p ſera alors commenſurable, on ne pourra pas manquer de le trouver en cherchant tous les diviſeurs de cette équation par la méthode donnée dans la IIIᵉᵐᵉ Partie, art. XXXII.

Si la racine cherchée doit avoir ses deux parties affectées d'un radical cube, ce qu'on aura reconnu, en ne trouvant point un cube parfait pour $A^2 - B^2$, on verra quelle est la quantité par laquelle il faudroit multiplier la quantité proposée pour en former une nouvelle dont les deux parties étant prises pour A & pour B, donneroient pour $AA - BB$ un cube parfait. Trouvant alors la racine cube de cette nouvelle quantité mise à la place à la proposée, il ne faudroit plus que la diviser par la racine cube du multiplicateur dont on se seroit servi, & l'on auroit la racine cherchée.

Quant à la détermination de ce multiplicateur, il est clair qu'il ne demande autre chose que de trouver la quantité quarrée, par laquelle il faudroit multiplier la quantité qu'on a trouvée d'abord pour $AA - BB$, si on vouloit la rendre un cube parfait. Car il est clair que la racine quarrée de ce multiplicateur de $AA - BB$, seroit le multiplicateur qu'on devroit donner aux quantités proposées A & B.

XXXII.

Application de la méthode précedente à un exemple.

Pour montrer l'application de cette méthode, supposons qu'on cherche la racine cube de la quantité $\overline{7a^3 - 3a^2b + 5aa - ab} \times \sqrt{2aa - ab}$.

Par

Par la comparaison de cette quantité avec $A + B$, j'ai $7a^3 - 3a^2b = A$; $\overline{5aa - ab}\sqrt{2aa - ab} = B$, & partant $A^2 - B^2 = -a^6 + 3a^5b - 3a^4b^2 + a^3b^3$, & n, ou $\sqrt[3]{A^2 - B^2} = -aa + ab$. Substituant cette valeur de n, ainsi que celle de A dans l'équation $4p^3 - 3pn - A = 0$, j'ai $4p^3 + 3paa - 3pab - 7a^3 + 3a^2b$ dont il est question de trouver un diviseur d'une dimension. On trouvera facilement par la méthode enseignée dans la III^eme Partie, article XXXII, que ce diviseur est $p - a$, c'est-à-dire, que la valeur de p est a. Substituant cette valeur de p dans l'équation $q = \sqrt{pp - n}$, il vient $q = \sqrt{2aa - ab}$. Donc la racine cherchée est $a + \sqrt{2aa - ab}$.

XXXIII.

Soit présentement proposé de prendre la racine cube de $2aac - abc - bbc - \overline{2a - b}\sqrt{aacc - bbcc}$, je commence par faire $2aac - abc - bbc = A$ & $B = -\overline{2a - b}\sqrt{aacc - bbcc}$, ce qui me donne $A^2 - B^2 = 2b^4cc - 2ab^3cc$ qui n'est point un cube. Pour sçavoir ce qui peut le rendre cube, je le décompose en ses produisans, & il devient $2 \times cc \times \overline{b - a} \times b^3$; d'où je découvre aisément qu'en le multipliant par $\frac{4 \times \overline{b - a}^2}{cc}$ qui est une quantité quarrée, j'aurai un cube

Autre exemple.

parfait, celui de $2 \times \overline{b - a} \times b$, ou de $2bb - 2ab$; & par conſéquent que ſi on multiplie la quantité propoſée par $\frac{2b - 2a}{c}$ racine du quarré $\frac{4 \times \overline{b - a}^2}{cc}$, on aura une nouvelle quantité $\overline{2aa - ab - bb} \times \overline{2b - 2a} - \overline{2a - b} \times \overline{2b - 2a}$ $\sqrt{aa - bb}$, dont la premiere partie repréſentant A, & la ſeconde B, donnera pour $\sqrt[3]{AA - BB}$, c'eſt-à-dire, pour n, $2bb - 2ab$. Je ſuppoſe donc que l'on m'eût en effet donné ces quantités pour A & pour B, & que j'en euſſe tiré cette valeur de n. Dans ce cas, l'équation $4p^3 - 3pn - A = 0$ donneroit $4p^3 - 3p \times \overline{2bb - 2ab} + \overline{bb + ab - 2aa} \times \overline{2b - 2a} = 0$, à laquelle on trouveroit, par la méthode donnée dans la III^{eme} Partie, article XXXII, le diviſeur $p + a - b$, c'eſt-à-dire, que la valeur de p ſeroit alors $b - a$; la ſubſtituant dans $q = \sqrt{pp - n}$, on auroit $q = \sqrt{aa - bb}$, donc $b - a - \sqrt{aa - bb}$ ſeroit la racine cube de la nouvelle quantité, ou, ce qui revient au même, du produit de la quantité propoſée par $\frac{2b - 2a}{c}$. Donc

$\dfrac{\overline{b - a - \sqrt{a - bb}} \times \sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{2b - 2a}}$ est la racine cube cherchée de la quantité proposée.

Dans cet exemple, & dans tous ceux où la racine cherchée se trouvera affectée de radicaux cubes, il est clair qu'on ne sçauroit, pour se dispenser d'employer la méthode précédente, avoir recours à la méthode de la III$^{\text{eme}}$ Partie, article XXXVI, c'est-à-dire, qu'on ne pourra trouver aucun diviseur dans l'équation dont la solution auroit conduit à donner pour valeur d'x la racine cube cherchée. En effet, il est aisé de voir que l'équation $x^6 - 2x^3 \times \overline{2aac - abc - bbc} + 2b^4cc - 2ab^3cc$ qui auroit donné $x = \sqrt[3]{2aac - abc - bbc - \overline{2a - b}\sqrt{aacc - bbcc}}$ n'auroit point été décomposable.

Mais dans tous les cas où la racine cherchée doit être simplement composée d'un terme rationel & d'un irrationel du second degré, on parviendroit toujours à trouver cette racine en décomposant l'équation dont la solution auroit conduit à chercher la racine cube de la quantité proposée. Dans l'article XXXII, par exemple, où il étoit question de réduire l'expression $x = \sqrt[3]{7a^3 - 3a^2b + \overline{5aa - ab}\sqrt{2aa - ab}}$ on auroit pû trouver dans l'équation $x^6 + \overline{6a^2b - 14a^3} \times x^3 - a^6 + 3a^5b$

$-3a^4b^2 + a^3b^3 = 0$, d'où ſeroit venue cette valeur de x, une équation du ſecond degré $xx - 2ax + ab - aa = 0$ qui auroit donné la même valeur de x.

XXXIV.

Si les termes de la quantité, dont on veut prendre la racine cube, ont des diviſeurs, on commencera par les mettre tous au même dénominateur, & on diviſera enſuite la racine cube du numérateur par celle du dénominateur.

XXXV.

Méthode pour trouver les racines cubes des quantités numériques en partie commenſurables, &c.

Lorſque la quantité propoſée en partie commenſurable & en partie incommenſurable ſera ſeulement numérique, on pourra trouver ſa racine cube plus aiſément que par la méthode précédente.

Car, ſuppoſant d'abord que la racine cherchée ne doive point avoir de radical cube; mais qu'elle ſoit compoſée d'un nombre entier & d'une partie radicale ſimple & entiere auſſi, on tire de ce que $p - q$ eſt $\sqrt[3]{A - B}$ lorſque $p + q$ eſt $\sqrt[3]{A + B}$, ou, ce qui revient au même, de ce que . . . .

$$p = \frac{\sqrt[3]{A-B} + \sqrt[3]{A+B}}{2}$$

une maniere ſimple d'avoir la partie commenſurable de la racine cherchée, il ne faut pour cela que calculer en nombres entiers les plus proches les quantités $\sqrt[3]{A - B}$ & $\sqrt[3]{A + B}$, & prendre enſuite la moitié de ces deux nombres pour avoir la valeur exacte de p. Car, en prenant pour $\sqrt[3]{A - B}$ & pour $\sqrt[3]{A + B}$ les nombres entiers qui en approchent le plus, l'erreur qu'on peut commettre sur chacune de ces quantités ne sçauroit être de $\frac{1}{2}$, & par conséquent il ne peut pas arriver que le nombre entier qui en résulte pour . . . . . .

$$\frac{\sqrt[3]{A - B} + \sqrt[3]{A + B}}{2}\text{, c'est-à-dire,}$$

pour p, differe d'une unité de la vraie valeur de p; & comme cette valeur de p doit être un nombre entier, elle sera donc exactement déterminée par ce moyen.

Ayant ainsi la valeur de p, & sçachant déja celle de n, ou de $\sqrt[3]{AA - BB}$, on substituera, comme dans la méthode précédente, les valeurs de p & de n dans $q = \sqrt[3]{pp - n}$, & l'on aura la seconde partie de la racine cube cherchée.

Si la racine cherchée doit avoir ses deux termes affectés d'un même radical cube, ce qu'on aura reconnu en remarquant que $A^2 - B^2$ n'étoit pas un cube parfait; il faudra, en suivant la même méthode que celle qu'on a employée dans les quantités littérales, chercher le nombre par lequel on devroit multiplier $A + B$ afin que $AA - BB$ fût un cube parfait: & ayant trouvé la racine de la nouvelle quantité que devient $A + B$ par cette multiplication, on n'aura qu'à la diviser par la racine cube du nombre dont on s'est servi pour multiplier $A + B$, & le quotient ſera la racine cherchée.

XXXVI.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Suppoſons, pour montrer l'application de cette méthode, qu'on cherche la racine cube de $7 + 5\sqrt{2}$. Ayant fait $A = 7$, $B = 5\sqrt{2}$, je trouve que n, ou $\sqrt[3]{A^2 - B^2} = -1$. Je remarque enſuite que la valeur de $\sqrt[3]{A + B}$, ou de $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$ eſt plus proche de 2 que de 3; ainſi je prends 2 pour l'exprimer; remarquant de même que celle de $\sqrt[3]{A - B}$, ou de $\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$ eſt entre 0 & 1, mais plus proche de 0, je prends 0 pour cette quantité, & j'ai, par ce moyen, p, ou $\frac{\sqrt[3]{A + B} + \sqrt[3]{A - B}}{2} = 1$. Je ſubſtitue alors cette valeur de p dans $q = \sqrt{pp - n}$, & j'ai $q = \sqrt{2}$, d'où je conclus que, ſi la quantité propoſée $7 + 5\sqrt{2}$ a une racine cube, elle eſt $1 + \sqrt{2}$. En effet, cubant $1 + \sqrt{2}$ il vient $7 + 5\sqrt{2}$.

XXXVII.

Autre exemple.

Suppoſons préſentement qu'on eût à prendre la racine cube de $5 + 3\sqrt{3}$; on trouveroit alors $AA - BB = -2$; or, 2 n'étant point cube, il faut chercher le nombre par lequel on auroit dû multiplier $5 + 3\sqrt{3}$ pour que $AA - BB$ eût été cube, ou, ce qui revient au même, il faut chercher le nombre le plus ſimple par le quarré duquel $AA - BB$, c'est-à-dire 2, étant multiplié, on aura un cube. Or, on voit tout de suite que 2 est lui-même ce nombre. Supposons donc que l'on se fût proposé de trouver la racine cube de $10 + 6\sqrt{3}$. On auroit eu alors $n = -2$ & $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$, ou.... $\frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}}{2}$ auroit été 1 en nombre entier le plus proche. Je substitue donc ces valeurs de p & de n dans $q = \sqrt{pp - n}$, & j'ai $q = \sqrt{3}$. J'examine maintenant si $p + q$, ou $1 + \sqrt{3}$ est la racine cube de $10 + 6\sqrt{3}$, & je trouve qu'elle l'est en effet. D'où je conclus que $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ est la racine cube cherchée de $5 + 3\sqrt{3}$.

XXXVIII.

Simplification de la méthode précédente.

On simplifiera le calcul d'approximation par lequel on détermine p, en remarquant qu'au lieu de $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$, on peut écrire $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$ à cause que n, ou $\sqrt[3]{AA - BB} = \sqrt[3]{A-B}$

$\times \sqrt[3]{A+B}$. Or, cette expreſſion eſt en effet plus ſimple que $\frac{\sqrt[3]{A+B}+\sqrt[3]{A-B}}{2}$ parce qu'il eſt plus aiſé de diviſer, par $\sqrt[3]{A+B}$, le nombre n qui eſt ſuppoſé déja trouvé, que de calculer ſéparement $\sqrt[3]{A-B}$.

XXXIX.

Application de la nouvelle méthode.

Pour montrer l'uſage de cette nouvelle formule ; appliquons-la à l'exemple de l'article XXXVI, où A étoit $= 7$, & $B = 5\sqrt{2}$; après avoir trouvé de même que dans cet article, que $n = -1$ & que $\sqrt[3]{A+B}$ en nombres entiers les plus proches étoit 2, au lieu de chercher, comme dans le même article, la racine cube approchée de $7 - 5\sqrt{2}$, je diviſe n, ou -1 par la valeur 2 de $\sqrt[3]{A+B}$, ce qui me donne $-\frac{1}{2}$ que je ſubſtitue dans la formule précédente . . . . . .
$$\frac{\sqrt[3]{A+B}+\frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2},$$
& j'ai $\frac{2-\frac{1}{2}}{2}$, ou 1 (prenant le nombre entier le plus proche) pour la valeur de p, ainſi qu'on l'avoit trouvé dans cet article par la formule $\frac{\sqrt[3]{A+B}+\sqrt[3]{A-B}}{2}$, le reſte s'acheveroit de même.

XL.

Il est à remarquer cependant que cette nouvelle formule pourroit induire en erreur si A & B n'étoient pas de même signe; car, dans le cas où ces quantités seroient de signes différens, la vraie valeur de $\sqrt[3]{A + B}$ pourroit être si petite auprès de n, que le nombre entier le plus proche qu'on prend à la place de cette valeur donneroit pour . . . . . .

Cette nouvelle methode pourroit être fautive dans les cas où A & B sont de signes différens.

$\dfrac{\sqrt[3]{A + B} + \dfrac{n}{\sqrt[3]{A - B}}}{2}$ un nombre qui différoit du vrai d'une ou de plusieurs unités. Qu'on eût, par exemple, à prendre la racine cube de $45 - 29\sqrt{2}$ en faisant $A = 45$ & $B = - 29\sqrt{2}$, on auroit 1 pour le nombre entier le plus proche de $\sqrt[3]{A + B}$, ou $\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$ & comme $\sqrt[3]{AA - BB}$ seroit alors 7, la valeur de p, ou de $\dfrac{\sqrt[3]{A + B} + \dfrac{n}{\sqrt[3]{A + B}}}{2}$ se trouveroit en ce cas de 4, quoiqu'elle ne fût réellement que 3, ainsi qu'on peut voir par l'expression $\dfrac{\sqrt[3]{A + B} + \sqrt[3]{A - B}}{2}$ de la méthode précédente.

Mais pourvû que cette nouvelle méthode d'avoir p, soit d'un usage sûr, toutes les fois

Ce qu'il faut faire en ce cas.

que A & B ſont de même ſigne, il importe peu qu'elle ſoit applicable, lorſque ces quantités ſont de ſignes différens. Car on voit bien que dans ce cas, on n'a qu'à commencer par ſuppoſer A & B tous deux poſitifs, & en prendre la racine $p + q$. Enſuite faire p du même ſigne que A, & q du même ſigne que B.

Il ne s'agit donc plus que de s'aſſurer ſi toutes les fois que A & B ſont de même ſigne, ou, ce qui revient au même, ſi A & B étant tous deux poſitifs, on peut, ſans craindre d'erreur, ſubſtituer dans $\dfrac{\sqrt[3]{A+B} + \dfrac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$ à la place de $\sqrt[3]{A+B}$ le nombre entier le plus proche. Pour nous en convaincre, commençons par ſuppoſer, ce qui ne peut jamais aller ſi loin, qu'on ſe trompât de $\frac{1}{2}$ en prenant pour $\sqrt[3]{A+B}$ le nombre entier le plus proche. Dans ce cas, la quantité qu'on trouveroit au lieu de p, ſeroit $\dfrac{\sqrt[3]{A+B} \pm \frac{1}{2} + \dfrac{n}{\sqrt[3]{A+B} \pm \frac{1}{2}}}{2}$. Pour faire voir que cette expreſſion ne ſçauroit donner un nombre qui differe d'une unité de la vraie valeur de p, mettons dans cette quantité $p + q$ au lieu de $\sqrt[3]{A+B}$, & $pp - qq$ au lieu de n, elle deviendra . . . . $\dfrac{p + q \pm \frac{1}{2} + \dfrac{pp - qq}{p + q \pm \frac{1}{2}}}{2}$ de laquelle retranchant p on tire en réduisant $\frac{\pm q + \frac{1}{4}}{2p + 2q \pm 1}$ pour l'erreur que peut apporter, dans la détermination de p, le choix qu'on a fait du nombre entier, au lieu de $\sqrt[3]{A + B}$. Or, il est clair que cette quantité ne sçauroit jamais égaler $\frac{1}{2}$; car dans la premiere expression $\frac{q + \frac{1}{4}}{2p + 2q \pm 1}$ qu'elle renferme, le numérateur $q + \frac{1}{4}$ étant plus petit que la moitié de $2q + 1$, est à plus forte raison plus petit que la moitié de $2p + 2q + 1$: & dans la seconde expression $\frac{-q + \frac{1}{4}}{2p + 2q - 1}$ qu'elle renferme encore, le numérateur $-q + \frac{1}{4}$ étant plus petit que la moité de $2q$, est par conséquent plus petit aussi que la moitié de $2q + 2p - 1$.

Ainsi on ne sçauroit se tromper d'une unité en déterminant p par la méthode précédente, & par conséquent toutes les fois qu'une quantité comme $A + B$ (dans laquelle il n'entre que des nombres entiers, soit sous le signe radical, soit devant ce signe) devra avoir une racine cube $p + q$, qui ne contienne aucun nombre fractionnaire, on trouvera cette racine par la méthode précédente.

XLI.

Cas où la méthode précédente pourroit induire en erreur.

Mais si la quantité $A + B$, quoique dégagée de toute fraction, tant sous le signe radical, que hors de ce signe, devoit avoir une racine cube qui contînt des nombres fractionnaires, telle que la quantité $2 + \sqrt{5}$, dont la racine cube est $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, la méthode précédente, aussi-bien que celle de l'article XXXV, ne donneroit rien alors, & jetteroit dans l'erreur en faisant croire qu'il n'y auroit point de racine cube à espérer.

Moyen de s'en garantir.

Pour remédier à cet inconvénient, il faut commencer par chercher directement quelles sont toutes les especes de racines fractionnaires dont les cubes pourroient être des nombres entiers.

Pour les trouver, soient représentées toutes ces racines par $\frac{p}{m} + \frac{q}{n}$; p & m étant supposés des nombres entiers qui n'ont aucun commun diviseur, q la racine d'un nombre entier, qui ne permet aucune réduction avec le nombre n. En élevant cette quantité au cube, on aura $\frac{p^3}{m^3} + \frac{3\,p\,q^2}{m\,n^2}$ pour la partie rationelle; & $\overline{\frac{3\,p^2}{n\,m^2} + \frac{q^2}{n^3}} \times q$ pour la partie incommensurable. De plus, par les conditions du Problême que nous cherchons à résoudre, tant la premiere quantité $\frac{p^3}{m^3} + \frac{3\,p\,q^2}{m\,n^2}$, que le coëfficient $\frac{3\,p^2}{n\,m^2} + \frac{q^2}{n^3}$ de la seconde doivent être des nombres entiers.

Soit d'abord égalé $\frac{3\,p^2}{m^2\,n} + \frac{q^2}{n^3}$ à h, que je ſuppoſe exprimer un nombre entier. On aura donc $q^2 = h\,n^3 - \frac{3\,p^2\,n^2}{m^2}$; mais cette quantité doit être un nombre entier par l'hypotheſe; donc $\frac{3\,p^2\,n^2}{m^2}$ doit être auſſi un nombre entier; donc $\frac{3\,n^2}{m^2}$ doit l'être encore, & partant n doit être un multiple de m.

Cela poſé, ſoit fait $n = m\,l$, on aura $q^2 = h\,m^3\,l^3 - 3\,p^2\,l^2$, mettant ces valeurs de n & de q^2 dans $\frac{p^3}{m^3} + \frac{3\,p\,q^2}{m\,n^2}$, cette quantité deviendra après les réductions $-\frac{8\,p^3}{m^3} + 3\,p\,h\,l$, qui doit être un nombre entier. Or, p & m n'ayant aucun commun diviſeur, cette quantité ne ſçauroit être un nombre entier, que m ne ſoit, ou 1, ou 2. Voilà donc m fixé, quant à n, ou à $m\,l$, on voit bientôt qu'il doit être égal à m, parce que l'équation $q^2 = h\,m^3\,l^3 - 3\,p^2\,l^2$ donne $\frac{q}{l} = \sqrt{h\,m^3\,l - 3\,p^2}$ & partant $\frac{q}{m\,l}$, ou $\frac{q}{n} = \frac{1}{m}\sqrt{h\,m^3\,l - 3\,p^2}$, qui apprend que la ſeconde partie de la racine ne peut pas avoir d'autre dénominateur que la premiere, & que ce dénominateur, par conſéquent ne peut jamais être non plus que 2, ou 1.

Ainſi, lorſqu'on n'aura pas réuſſi à trouver, par la méthode précédente, la racine d'une quantité $A + B$, dont la partie rationelle, ou commenſurable A, & l'irrationelle B ſeront des nombres entiers, on n'aura qu'à multiplier cette quantité par 8, & chercher par la même méthode la racine cube de la nouvelle quantité qu'on aura par cette multiplication, & ſi on ne réuſſit pas, on ſera ſûr que la quantité propoſée n'étoit pas cube; ſi on réuſſit, la moitié de la racine cube qu'on aura alors, ſera celle qu'on cherchoit.

XLII.

Lorſque le nombre A & le radical B ſeront fractionnaires, il eſt clair qu'il faudra, ainſi que dans l'article XXXIV, mettre A & B au même dénominateur, puis diviſer la racine cube du numérateur par celle du dénominateur.

XLIII.

Ce qu'il faut faire quand la racine cube doit être la ſomme de deux radicaux.

Si l'on avoit à prendre la racine cube d'une quantité compoſée de deux radicaux du ſecond degré, ſoit que cette quantité ſoit numérique, ou qu'elle ſoit littérale, il n'y auroit qu'à la multiplier par le cube de l'un des radicaux que contiendroit cette quantité. Le produit étant alors dans le cas des quantités qu'on vient de traiter, on en prendroit la racine cube de la même maniere, & on la diviſeroit par le radical dont le cube auroit ſervi de multiplicateur à la propoſée.

XLIV.

Lorſqu'on voudra prendre la racine quatrieme d'une quantité comme $A + B$, on n'aura d'abord qu'à en chercher la racine quarrée; car ſi on n'en trouve pas, à plus forte raiſon n'en trouvera-t-on pas de racine quatrieme, ou quarrée quarrée. Si on en trouve une, il ne ſera plus queſtion que de trouver la racine quarrée de la quantité que la premiere extraction aura donnée.

Comment on prend la racine quatrieme des quantités de même eſpece que les précédentes.

XLV.

Il en ſera de même toutes les fois qu'on aura une racine à prendre, dont l'expoſant ſera pair, il faudra commencer par la racine quarrée, & le Problême ſera réduit à prendre une racine d'un expoſant ſous-double du premier.

Ce qu'il faut faire toutes les fois que l'expoſant de la racine eſt pair.

XLVI.

Si on vouloit la racine cinquieme d'une quantité $A + B$ telle que les précédentes, il faudroit ſuivre une méthode ſemblable à celle qu'on a ſuivie pour la racine cube. Au lieu des deux théorêmes, par leſquels on apprenoit que $p = \frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$, & que $\sqrt[3]{A^2 - B^2} = p^2 - q^2$, on auroit ceux-ci $p = \frac{\sqrt[5]{A+B} + \sqrt[5]{A-B}}{2}$ & $\sqrt[5]{A^2 - B^2} = p^2 - q^2$, dont on feroit le même uſage que des précédens.

Pour les racines cinquiemes.

XLVII.

Il en feroit de même pour les racines plus élevées. Que m foit l'expofant de la racine qu'on fe propofe de prendre de $A + B$, on aura ces deux théorêmes . . . .

$$p = \frac{\sqrt[m]{A+B} + \sqrt[m]{A-B}}{2} \text{ \& } \ldots$$

$\sqrt[m]{A^2 - B^2} = p^2 - q^2$ qu'on employera encore de la même maniere que dans les racines cubes.

Pour démontrer ces théorêmes en général, il ne fera queftion que de faire voir que fi $A + B$ eft la puiffance m de $p + q$, $A - B$ fera celle de $p - q$; car il fuivra de-là néceffairement que $\sqrt[m]{A-B} \times \sqrt[m]{A+B}$ fera $\overline{p+q} \times \overline{p-q}$, ou $pp - qq$, & que $\frac{\sqrt[m]{A+B} + \sqrt[m]{A-B}}{2}$ fera . . . . . .

$\frac{p+q+p-q}{2}$, ou p.

Quant à la démonftration de ce que $A - B$ eft la puiffance m de $p - q$, lorfque $A + B$ & celle de $p + q$, elle feroit aifée à trouver fi on vouloit y arriver par l'induction. Car, en donnant fucceffivement différentes valeurs particulieres à m, & reconnoiffant la vérité de ce théorême dans chaque cas particulier, on ne douteroit pas qu'il ne fût généralement vrai. Mais on ne fçauroit fe contenter d'une pareille maniere de démontrer, qu'au cas que l'on ne ne pût pas trouver une expreſſion générale pour la puiſſance m de $p+q$, & pour celle de $p=q$; il faut donc chercher cette expreſſion générale, qui eſt bien propre d'ailleurs à exciter la curioſité de tous les Analyſtes.

XLVIII.

De la maniere d'élever un binome à une puiſſance quelconque.

Pour parvenir à trouver la valeur générale de $\overline{p+q}^{m}$, ou de $p+q$ multiplié par lui-même autant de fois moins une que l'unité eſt contenue dans m, commençons par chercher dans ce que nous avons vû précédemment, ce qui peut avoir du rapport avec cette opération. Reprenons dans cette vûe ce que nous avons dit dans la III^{eme} Partie, article II, où nous avons formé une équation par le produit de ſes racines $x+a$, $x+b$, $x+c$, &c. où nous avons trouvé la loi ſuivant laquelle devoient être compoſés tous les termes de ce produit. Il eſt aiſé de voir que tous ce que nous avons dit alors pourra s'appliquer au cas préſent, en ſuppoſant que toutes les racines ſont égales. Or, les réflexions données dans la III^{eme} Partie, article II, ſur l'équation dont les racines ſont $x+a$, $x+b$, $x+c$, &c. conſiſtoient en ceci.

1°. Que le premier terme de cette équation n'eſt autre choſe que x élevé à une puiſſance égale au nombre des racines.

2°. Que le ſecond terme contenoit x élevé à une puiſſance moindre d'une unité, avec un coefficient égal à la ſomme des racines.

3°. Que le troiſiéme terme étoit compoſé de x élevé à une puiſſance moindre de deux unités, & avec un coefficient égal à la ſomme de tous les produits des racines priſes deux à deux.

4°. Que le quatriéme terme renfermoit x élevé à une puiſſance moindre des trois unités, avec un coefficient égal à la ſomme de tous les produits des racines priſes trois à trois, & ainſi des autres termes.

Si on applique donc ces remarques dans le cas préſent où toutes ces racines ſont égales, & où leur nombre eſt exprimé généralement par m, on verra

Que le premier terme ſera x^m;

Que le ſecond ſera x^{m-1} multiplié par $m\,a$, puiſque toutes les racines ſont égales à a, & que leur nombre eſt m;

Que le troiſiéme terme ſera x^{m-2} avec un coefficient égal à a^2, pris autant de fois qu'il y aura de rectangles $a\,b$, $a\,c$, $b\,c$, &c. dans le coefficient du troiſiéme terme de l'équation donnée par le produit des racines $x+a$, $x+b$, &c. dont le nombre eſt ſuppoſé m; puiſque tous les produits $a\,b$, $a\,c$, $b\,c$, &c. doivent tous être égaux chacun à a^2, lorſque b, c, &c. ſont égaux à a;

Que le quatriéme terme ſera x^{m-3} avec un coefficient égal à a^3, pris autant de fois qu'il y aura de produits $a\,b\,c$, $a\,b\,d$, $a\,c\,d$, $b\,c\,d$, &c. dans le coefficient du quatriéme terme de l'équation, dont le nombre des racines $x+a$, $x+b$, $x+c$, &c. eſt m, & ainſi des autres termes.

La queſtion eſt donc réduite maintenant à ſçavoir ce qu'un nombre m de lettres peut donner de produits $a\,b$, $a\,c$, $b\,c$, &c. priſes deux à deux ; de produits $a\,b\,c$, $a\,b\,d$, $b\,c\,d$, $a\,c\,d$, &c. priſes trois à trois ; de produits $a\,b\,c\,d$, $a\,b\,d\,e$, $a\,b\,c\,e$, $a\,e\,d\,c$, $b\,c\,d\,e$, &c. priſes quatre à quatre, &c. Car, en ſuppoſant que ces nombres ſoient trouvés, & qu'on les exprime par A, B, C, D, &c. on aura $x^m + m\,a\,x^{m-1} + A\,a^2\,x^{m-2} + B\,a^3\,x^{m-3} + C\,a^4\,x^{m-4} + D\,a^5\,x^{m-5} +$ &c. pour repréſenter la valeur cherchée de $\overline{x+a}^{\,m}$.

Pour trouver, premiérement, ce qu'un nombre m de lettres a, b, c, &c. peut donner de produits de deux lettres $a\,b$, $a\,c$, $b\,c$, &c. en les combinant de toutes les manieres poſſibles ; commençons par remarquer que lorſqu'on aura formé tous ces produits, on aura écrit deux fois plus de lettres que de termes.

Remarquons enſuite que chacune des lettres a, b, c, &c. doit être répétée le même nombre de fois, & que chacune ne pouvant être multipliée que par toutes les autres, & non par elle-même, ne ſçauroit être répétée que $m-1$ de fois : donc le nombre de lettres à écrire, en formant tous ces produits, doit être $m \times m-1$; donc le nombre de tous ces produits doit être $\frac{m \times m-1}{2}$; & c'eſt-là la valeur de A, ou du coefficient du troiſiéme terme de la formule cherchée.

Quant au coefficient du quatriéme terme, c'eſt-à-dire, au nombre de produits à trois lettres *a b c*, *a b d*, *a c d*, *b c d*, &c. que peuvent donner un nombre m de lettres, *a*, *b*, *c*, *d*, &c. priſes de toutes les manieres poſſibles trois à trois, pour le trouver, nous remarquerons d'abord que ce nombre doit être le tiers de celui des lettres qu'on écrit en formant tous ces produits.

Nous remarquerons enſuite que chacune de ces lettres doit être répétée le même nombre de fois, & que ce nombre doit être celui qui exprime combien de produits de deux lettres doivent donner toutes les autres lettres; car il eſt évident que chaque lettre, *a*, par exemple, doit être jointe à tous les produits *b c*, *b d*, *c d*, &c. des autres lettres priſes deux à deux.

Le nombre de fois que chacune des lettres *a*, *b*, *c*, *d*, &c. doit être répétée, eſt donc celui qu'un nombre $m - 1$ de lettres *b*, *c*, *d*, &c. donne de produits de deux lettres. Mais on vient de voir que, lorſque le nombre des lettres étoit m, le nombre de leurs produits deux à deux étoit la moitié du nombre m, multipliée par le nombre $m - 1$, qui eſt moindre d'une unité. Donc, lorſque le nombre des lettres eſt $m - 1$, il faut prendre la moitié $\frac{m-1}{2}$ de ce nombre, & la multiplier par $m - 2$, qui eſt moindre d'une unité que $m - 1$, c'eſt-à-dire, que $\frac{\overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2}$ eſt le nombre de fois que chacune des lettres a, b, c, &c. ſera répétée dans tous les produits en queſtion ; & comme le nombre de ces lettres eſt m, $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2}$ ſera par conſéquent le nombre de toutes les lettres écrites. Donc le nombre cherche des produits à trois lettres abc, abd, &c. ſera $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3}$; & c'eſt-là la valeur de B, ou du coefficient du quatriéme terme.

A l'égard du coefficient C du cinquiéme, c'eſt-à-dire, du nombre de produits de quatre lettres que doit donner le nombre m de lettres, on trouvera de même qu'il doit être $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4}$; parce que ce nombre doit être le quart de toutes les lettres écrites dans ces produits ; que chacune de ces lettres doit être répétée le même nombre de fois, & combinée avec tous les produits de trois lettres que donne le nombre $m - 1$ de lettres ; & qu'enfin ces produits de trois lettres donnés par le nombre $m - 1$ de lettres, doit être $\frac{\overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3}$, par la même raiſon que $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3}$ eſt celui des produits de trois lettres que fournit le nombre m de lettres.

Formant de même tous les autres coefficiens ; & substituant ensuite dans la formule précédente à la place de A, B, C, D, E, &c. leurs valeurs ainsi trouvées, on aura enfin $x^m + ax^{m-1}$

$$+ m \times \frac{\overline{m-1}}{2} a^2 x^{m-2} + \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3}$$

$$a^3 x^{m-3} + \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4} a^4 x^{m-4}$$

$$+ \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}}{2 \times 3 \times 4 \times 5}$$

$a^5 x^{m-5} +$, &c. pour la puissance m de $x + a$.

Formule générale pour l'élévation de $p+q$ à la puissance m.

Par la même raison la valeur de $\overline{p+q}^m$ dont on avoit besoin, article XLVII, sera

$$p^m + mqp^{m-1} + \frac{m \times \overline{m-1}}{2} q^2 p^{m-2}$$

$$+ \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3} q^3 p^{m-3} +, \&c.$$

XLIX.

Quant à celle de $\overline{p-q}^m$, il est évident que pour la trouver, il suffira de faire q négatif dans cette formule ; ce qui la changera en

$$p^m - mqp^{m-1} + \frac{m \times \overline{m-1}}{2} q^2 p^{m-2}$$

$$- \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3} q^3 p^{m-3} +, \&c. ;$$

L.

Si on veut présentement démontrer le théorême de l'article XLVII, on commencera par remarquer que A est la somme de tous les termes p^m, $\frac{m \times \overline{m-1}}{2} q^2 p^{m-2}$, $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4} q^4 p^{m-4}$, &c. dans lesquels il n'entre aucune dimension impaire de q, & que B est la somme de tous les termes . . . . , $m q p^{m-1}$, $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3} q^3 p^{m-3}$, $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}}{2 \times 3 \times 4 \times 5} q^5 p^{m-5}$, où q ne se trouve jamais qu'à une dimension impaire.

Démonstration du théorême de l'article XLVII.

On verra ensuite que $A + B$ est la premiere formule, & $A - B$ la seconde ; ce qui étoit le point où la difficulté étoit réduite, article XLVII.

L I.

Application de la formule précédente à un exemple.

Lorsqu'on voudra employer la formule précédente pour élever un binome quelconque à une puissance donnée, rien ne sera plus facile ; on n'aura qu'à substituer dans la valeur précédente de $\overline{p+q}^{m}$ à la place de p le premier terme du binome donné, à la place de q le second, & à la place de m l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever le binome proposé. Qu'on propose, par exemple, d'élever $3\,a\,c - 2\,b\,d$ à la cinquiéme puissance, je fais

$$3\,a\,c = p$$
$$-2\,b\,d = q$$
$$5 = m$$

& j'ai d'abord $p^{m} = \overline{3\,a\,c}^{5} = 243\,a^{5}\,c^{5}$.

$m\,q\,p^{m-1} = 5 \times -\overline{2\,b\,d} \times \overline{3\,a\,c}^{4} = -810\,a^{4}\,b\,c^{4}\,d$.

$\frac{m \times \overline{m-1}}{2}\,q^{2}\,p^{m-2} = 10 \times 4\,b\,b\,d\,d \times \overline{3\,a\,c}^{3} = 1080\,a^{3}\,b\,b\,c^{3}\,d\,d$.

$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3}\,q^{3}\,p^{m-3} = 10 \times -\overline{2\,b\,d}^{3} \times \overline{3\,a\,c}^{2} = -720\,a^{2}\,b^{3}\,c^{2}\,d^{3}$.

$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4}\,q^{4}\,p^{m-4} = 5 \times -\overline{2\,b\,d}^{4} \times 3\,a\,c = 240\,a\,b^{4}\,c\,d^{4}$.

$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}}{2 \times 3 \times 4 \times 5}$

$q^5 p^{m-5} = 1 \times \overline{-2bd}^5 \times \overline{3ac}^0 = -32 b^5 d^5$.

A l'égard des autres termes, leurs coefficiens ayant tous pour un de leurs produisans $m - 5$, qui est zéro par la supposition de $m = 5$, ils doivent tous être nuls ; ainsi $\overline{3ac - 2bc}^5$ aura pour valeur $243 a^5 c^5 - 810 a^4 b c^4 d + 1080 a^3 b^2 c^3 d^2 - 720 a^2 b^3 c^2 d^3 + 240 a b^4 c d^4 - 32 b^5 d^5$.

L I I.

Lorsqu'on voudra élever à une puissance donnée une quantité composée de plus de deux termes, on le pourra encore facilement par la même méthode. Qu'il s'agisse, par exemple, d'un trinome, en nommant p le premier terme de ce trinome, q la somme des deux autres, la difficulté de l'élévation du trinome sera réduite à celle du binome, puisque chacun des termes $m p^{m-1} q$, $\frac{m \times \overline{m-1}}{2} p^{m-2} q^2$, &c. ne renfermera pas de quantité à élever plus composée que des binomes.

Comment on applique la formule précédente aux quantités de plus de deux termes.

Et lorsqu'on aura un polynome plus composé, on réduira toujours la difficulté à l'élévation d'un polynome plus simple.

L I I I.

Pour donner un exemple de la maniere dont

Exemple.

on employe la formule précédente à l'élévation d'une quantité qui a plus de deux termes, soit proposé d'élever $a + 2b - c$ à la quatriéme puissance. On fera $m = 4$, $p = a$, $q = 2b - c$; & substituant ces valeurs dans la formule, on aura $p^m = a^4$ $m q p^{m-1}$

$= 4 \times \overline{2b - c} \times a^3 = 8a^3 b - 4a^3 c$.

$\frac{m \times \overline{m - 1}}{2} q^2 p^{m-2} = 6 \times \overline{2b - c}^2$

$\times a^2 = 24 a^2 b^2 - 24 a^2 bc + 6a^2 c^2$,

$\frac{m \times \overline{m - 1} \times \overline{m - 2}}{2 \times 3} q^3 p^{m-3} = 4$

$\times \overline{2b - c}^3 \times a = 32 ab^3 - 48 abbc$
$+ 24 abcc - 4ac^3$,

$\frac{m \times \overline{m - 1} \times \overline{m - 2} \times \overline{m - 3}}{2 \times 3 \times 4} q^4 p^{m-4}$

$= \overline{2b - c}^4 = 16 b^4 - 4 \times \overline{2b}^3 \times c$
$+ \frac{4 \times 3}{2} \times \overline{2b}^2 \times c^2 - \frac{4 \times 3 \times 2}{2 \times 3}$
$\times 2b \times c^3 + \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 3 \times 4} c^4$

$= 16b^4 - 32b^3 c + 24bbcc - 8bc^3$
$+ c^4$,

& partant $\overline{a + 2b - c}^4 = a^4 + 8a^3 b$

$- 4a^3c + 24a^2b^2 - 24a^2bc + 6a^2c^2$
$+ 32ab^3 - 48abbc + 24abcc$
$- 4ac^3 + 16b^4 - 32b^3c + 24bbcc$
$- 8bc^3 + c^4.$

LIV.

Après avoir trouvé la formule précédente; on ne pouvoit guères tarder à ſoupçonner qu'elle devoit s'étendre à d'autres puiſſances que celles qui ſont des nombres entiers & poſitifs. Il ſuffiſoit d'avoir reconnu qu'il y avoit d'autres puiſſances que celles-là pour vouloir y appliquer cette formule. Ayant reconnu, par exemple, qu'au lieu de $\sqrt[n]{a}$, on pouvoit écrire $a^{\frac{1}{n}}$; on aura imaginé auſſi-tôt que lorſqu'il étoit queſtion de prendre la racine n d'une quantité complexe quelconque repréſentée par $p + q$, on n'avoit qu'à faire $m = \frac{1}{n}$ dans la formule précédente; ou, ce qui revient au même, on aura penſé que $p^{\frac{1}{n}}$

$$+ \frac{1}{n} p^{\frac{1}{n} - 1} q + \frac{\frac{1}{n} \times \frac{1}{n} - 1}{2}$$

$p^{\frac{1}{n} - 2} q^2 +$ &c. devoit exprimer

$\overline{p+q}^{\frac{1}{n}}$, ou la racine n de $p+q$

De même on aura soupçonné qu'au lieu de $\frac{1}{\overline{p+q}^{n}}$, ou de $\overline{p+q}^{-n}$, on n'avoit qu'à faire $m = -n$ dans la même valeur de $\overline{p+q}^{m}$, ce qui donnoit . . . .

$$p^{-n} - np^{-n-1}q - \frac{n \times \overline{-n-1}}{2} p^{-n-2} q^{2} -$$

&c. En un mot, l'ordre & la généralité qu'on avoit toujours trouvé dans les opérations analytiques, devoit faire penser que, quoique la formule précédente n'eût été d'abord trouvée qu'en supposant m entier & positif, elle pouvoit aussi s'appliquer à toutes autres valeurs de m. Mais si la vraisemblance de cette généralité devoit frapper tous les Géometres, elle ne pouvoit pas seule les contenter. L'effet principal qu'elle devoit produire sur leur esprit, étoit de les engager à chercher une démonstration rigoureuse. Voici une maniere de trouver cette démonstration, qu'il n'étoit pas bien difficile d'imaginer.

Où l'on fait voir que la formule précédente a lieu encore, lorsque l'exposant est fractionnaire.

Soit proposé premiérement de faire voir que la formule en question peut s'appliquer toutes les fois que m est une fraction quelconque positive ; ou, ce qui revient au même, soit proposé de prouver l'équation A (Voyez la Table 1 ci-jointe) laquelle devient l'équation B, en divisant les deux membres par $\overline{p}^{\frac{r}{n}}$ & en faisant $\frac{q}{p} = z$.

Mais pour prouver l'équation B, il suffit de faire voir qu'en élevant les deux membres à la même puissance n, il viendra des quantités égales, c'est-à-dire, en faisant

$$s = \frac{r}{n} z + \frac{\frac{r}{n} \times \overline{\frac{r}{n} - 1}}{2} \times z$$

$$+ \frac{\frac{r}{n} \times \overline{\frac{r}{n} - 1} \times \overline{\frac{r}{n} - 2}}{2 \times 3} \times z^3$$

$+$, &c.) qu'il s'agit de prouver l'équation D.

Or, comme r & n sont deux nombres entiers, on peut faire les élévations indiquées dans cette équation, par le moyen de la valeur générale de $\overline{p + q}^{m}$; ce qui donnera l'équation E.

Le Problême étant réduit à prouver l'équation E, il faut trouver par la valeur de s, celles de s^2, s^3, s^4, &c. multiplier ensuite la valeur de s par n, celle de s^2 par $\frac{n \times \overline{n - 1}}{2}$, celle de s^3 par . . . .

$\frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{2 \times 3}$, celle de s^4 par

$\frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3}}{2 \times 3 \times 4}$, &c.

afin d'avoir les valeurs de tous les termes du ſecond membre de l'équation E. Ces valeurs trouvées & écrites les unes ſous les autres, on formera l'équation F, laquelle en faiſant les réductions que demande le ſecond membre, devient l'équation G, qui eſt la même que l'équation E. Donc l'équation A, qui avoit donné cette équation, eſt prouvée. Donc il eſt vrai en général que la formule de l'article XLVIII s'applique auſſi bien aux puiſſances fractionnaires quelconques poſitives, qu'aux puiſſances entieres poſitives.

L V.

La même formule va encore aux puiſſances négatives.

Pour faire voir préſentement que la même formule s'applique également aux puiſſances négatives, ſoit entieres, ſoit fractionnaires, il s'agit de prouver (Voyez la Table 2 cijointe) l'équation A, dont le ſecond membre eſt celui que donne la formule de l'article XLVIII, en faiſant $m = -\frac{r}{n}$.

Il eſt évident qu'au lieu de prouver l'équation A, on peut ſe contenter de prouver l'équation B, qui revient au même que la premiere en faisant $z = \frac{q}{p}$, & multipliant les deux membres par $p^{\frac{r}{n}}$.

Il est évident, de plus, qu'au lieu de la quantité $\overline{1+z}^{\,-\frac{r}{n}}$, on peut écrire ..., $\frac{1}{\overline{1+z}^{\,\frac{r}{n}}}$, & par conséquent l'équation *B* devient l'équation *C*. Mais comme dans le premier membre de cette équation, on peut substituer à $\overline{1+z}^{\,\frac{r}{n}}$ sa valeur tirée de la formule de l'article LIV, il est clair qu'il suffit de prouver l'équation *D*. Or, pour prouver cette équation, il suffit de multiplier le second membre par le dénominateur du premier, & de s'assurer que le produit qui en vient, est l'unité numérateur du premier membre. C'est ce qui arrive en effet; car faisant la multiplication, il vient pour produit la quantité *E*, dont le premier terme, qui est l'unité, est le seul qui reste après la réduction. Ainsi on est assuré présentement, par une démonstration, que la formule de l'article XLVIII a toute la généralité qu'on ne faisoit d'abord que lui soupçonner.

LVI.

Quelqu'assuré qu'on soit d'une vérité par une démonstration générale, on ne sçauroit guères se défendre de chercher à la voir confirmée dans quelqu'application particuliere. Sçachant, par exemple, que la formule précédente donne l'élévation des quantités quelconques à des puissances fractionnaires, il est naturel qu'on veuille l'appliquer à quelque quantité qu'on sçache avoir exactement une racine ou puissance fractionnaire.

Exemple d'une racine quarrée prise par la formule de l'élévation des puissances.

Soit, par exemple, la quantité $1 + 2b + b^2$, dont on cherche la puissance $\frac{1}{2}$; ou, ce qui revient au même, la racine quarrée. Ayant fait $p = 1$, $q = 2b + b^2$, & $m = \frac{1}{2}$ dans la formule précédente, on trouvera

Le premier terme . . . . $p^m = 1$

Le second . . . . $mp^{m-1}q = b + \frac{1}{2}b^2$

Le 3^{eme}, $\frac{m \times \overline{m-1}}{2} p^{m-2} q^2 = -\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}b^3 - \frac{1}{8}b^4$.

Le 4^{eme}, $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3} p^{m-3} q^3 = \frac{1}{2}b^3 + \frac{3}{4}b^4 + \frac{3}{8}b^5 + \frac{1}{16}b^6$.

Le 5^{eme}, $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4}$ $p^{m-4} q^4$

$$A\quad \overline{p+q}^{\frac{r}{n}} = p^{\frac{r}{n}} + \frac{r}{n}p^{\frac{r}{n}-1}q + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}p^{\frac{r}{n}-2}q^2 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}p^{\frac{r}{n}-3}q^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{n}-3}}{2\times3\times4}p^{\frac{r}{n}-4}q^4 + \&c.$$

$$B\quad \overline{1+z}^{\frac{r}{n}} = 1 + \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^2 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{n}-3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c.$$

$$C\quad \overline{1+z}^{r} = \overline{1 + \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^2 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2\times3\times4}z^4 + \&c.}^{\,n}$$

$$s = \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^2 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2\times3}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{n}-3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c.$$

$$D\quad \overline{1+z}^{r} = \overline{1+s}^{n}$$

$$E\quad 1 + rz + \frac{r\times\overline{r-1}}{2}z^2 + \frac{r\times\overline{r-1}\times\overline{r-2}}{2\times3}z^3 + \frac{r\times\overline{r-1}\times\overline{r-2}\times\overline{r-3}}{2\times3\times4}z + \&c. = 1 + ns + \frac{n\times\overline{n-1}}{2}s^2 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{2\times3}s + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{2\times3\times4}s^4 + \&c.$$

$$F\quad \left\{\begin{array}{l} 1 \\ +\, ns \\ +\, \frac{n\times\overline{n-1}}{2}s^2 \\ +\, \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{2\times3}s^3 \\ +\, \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{2\times3\times4}s^4 \\ \quad +\, \&c. \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 1 \\ +\, n\times\frac{r}{n}z + n\times\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^2 + n\times\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}z^3 + n\times\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{r}-3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c. \\ \qquad +\, \frac{n\times\overline{n-1}}{2}\times\frac{r^2}{n^2}z^2 + \frac{n\times\overline{n-1}}{2}\times\frac{r^2}{n^3}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\,z^3 + \frac{n\times\overline{n-1}}{2}\times\frac{r^2}{n^2}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\frac{\overline{\frac{7r}{n}-11}}{12}z^4 + \&c. \\ \qquad\qquad +\, \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{2\times3}\times\frac{r^3}{n^3}z^3 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{2\times3}\times\frac{3r^3}{2n^3}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\,z^4 + \&c. \\ \qquad\qquad\qquad +\, \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{2\times3\times4}\times\frac{r^4}{n^4}z^4 + \&c. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad z^4 + \&c. \end{array}\right\}$$

$$G\quad 1 + ns + \frac{n\times\overline{n-1}}{2}s^2 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{2\times3}s^3 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{2\times3\times4}s^4 + \&c. = 1 + rz + \frac{r\times\overline{r-1}}{2}z^2 + \frac{r\times\overline{r-1}\times\overline{r-2}}{2\times3}z^3 + \frac{r\times\overline{r-1}\times\overline{r-2}\times\overline{r-3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c.$$

$$A\ \overline{p+q}^{\,-\frac{r}{n}} = p^{-\frac{r}{n}} - \frac{r}{n}\,p^{-\frac{r}{n}-1}\,q + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}\,p^{-\frac{r}{n}-2}\,q^2 - \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2\times3}\,p^{-\frac{r}{n}-3}\,q^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}\times\overline{\frac{r}{n}+3}}{2\times3\times4}\,p^{-\frac{r}{n}-4}\,q^4 - \&c.$$

$$B\ \overline{1+z}^{\,-\frac{r}{n}} = 1 - \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}z^2 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2\times3}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}\times\overline{\frac{r}{n}+3}}{2\times3\times4}z^4 - \&c.$$

$$C\ \frac{1}{\overline{1+z}^{\,\frac{r}{n}}} = 1 - \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}z^2 - \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2\times3}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}\times\overline{\frac{r}{n}+3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c.$$

$$\frac{1}{\qquad} = 1 - \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}z^2 - \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2\times3}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}\times\overline{\frac{r}{n}+3}}{2\times3\times4}z^4 - \&c.$$

$$D\ 1 + \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^2 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{n}-3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c.$$

$$E\ 1 - \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}z^2 - \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2\times3}z^5 + \frac{\frac{r}{n}\times\frac{r}{n}+1\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c.$$

$$+ \frac{r}{n}z - \frac{r}{n}\times\frac{r}{n}z^2 + \frac{\frac{r}{n}\times\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\frac{r}{n}\times\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2\times3\times4}z^4 + \&c.$$

$$+ \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^2 - \frac{\frac{r}{n}\times\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2\times3}z^4 + \&c.$$

$$+ \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}z^3 - \frac{\frac{r}{n}\times\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}z^4 + \&c.$$

$$+ \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{n}-3}}{2\times3\times4}z^4 - \&c.$$

$$+ \&c.$$

$p^{m-4}q^4 = -\frac{5}{8}b^4 - \frac{5}{4}b^5 - \frac{15}{16}b^6 - \frac{5}{16}b^7 - \frac{5}{128}b^8$.

Le 6^{eme}, &c. & c'eſt la ſomme de tous ces termes qui doit être la racine cherchée.

A l'inſpection de cette quantité, on a de la peine à croire qu'elle puiſſe ſe réduire à $1+b$ qu'on ſçait être la racine cherchée. Mais la généralité de la démonſtration précédente, & une certaine expérience du calcul, aſſurent bientôt de cette réduction.

En ajoutant tous ces termes, on remarque que le premier 1 reſte tout entier; que le ſecond $b+\frac{1}{2}b^2$ ſe réduit à b, parce que la partie $\frac{1}{2}b^2$ de ce ſecond terme eſt détruite par la même quantité contenue négativement dans le troiſiéme terme $-\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}b^3 - \frac{1}{8}b^4$; que ce qui reſte du troiſiéme terme $-\frac{1}{2}b^3 - \frac{1}{8}b^4$, après la deſtruction de $\frac{1}{2}b^2$ eſt entiérement détruit auſſi par le quatriéme $\frac{1}{2}b^3 + \frac{3}{4}b^4 + \frac{3}{8}b^5 + \frac{1}{16}b^6$ dont il ne reſte plus alors que $\frac{5}{8}b^4 + \frac{3}{8}b^5 + \frac{1}{16}b^6$. Ce reſte du quatriéme terme ſe trouve détruit de même par le cinquiéme terme; & en pouſſant les réductions plus loin, on voit que tout s'évanouit dans la quantité précédente, excepté $1+b$, ainſi que cela devoit arriver.

LVII.

Outre que cet exemple & tous ceux de même nature, qu'il eſt aiſé de former, confirment, pour ainſi dire, par expérience, la propoſition démontrée, article LI, ils montrent en même temps une utilité réelle de cette propoſition; Lorſque les quantités n'ont point de racines exactes, on en trouve d'approchées par la méthode précédente.

puisqu'il en résulte une méthode pour extraire les racines de toutes les quantités qui sont des puissances complettes. Mais ce n'est pas-là le seul avantage qu'on en puisse retirer. Lorsque la quantité proposée n'aura point de racine exacte, on en pourra trouver une approchée par la formule précédente.

Exemple.

Qu'on cherche, par exemple, la racine 5^{eme} de la quantité $a+b$. En substituant la plus grande des deux parties de cette quantité qu'on suppose être a à la place de p, la plus petite b à la place de q, & $\frac{1}{5}$ à la place de m, on aura pour la racine cherchée . . . .

$$a^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5} a^{-\frac{4}{5}} b - \frac{1 \times 4}{2 \times 25} a^{-\frac{9}{5}} b^2 + \frac{1 \times 4 \times 9}{2 \times 3 \times 125} a^{-\frac{14}{5}} b^3 - \frac{1 \times 4 \times 9 \times 14}{2 \times 3 \times 4 \times 625} a^{-\frac{19}{5}} b^4 + \frac{1 \times 4 \times 9 \times 14 \times 19\, a^{-\frac{24}{5}} b^5}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 3125} - \&c.$$

$$\text{ou } a^{\frac{1}{5}} \times \overline{1 + \frac{b}{5a} - \frac{2bb}{25aa} + \frac{6b^3}{125a^3} - \frac{21b^4}{625a^4} + \&c.}$$

Ce que c'est qu'une série ou suite infinie.

Or, quoiqu'il fallût former de la même maniere une infinité de termes, pour que la quantité précédente, qui est de celles qu'on appelle suite ou série infinie, exprimât exactement la racine cherchée, il est certain néanmoins qu'en se contentant de prendre un grand nombre de ces termes, on approche extrêmement de la valeur de la racine cherchée. S'il arrive même que a ſoit conſidérablement plus grand que b, on n'a beſoin que de peu de termes pour approcher ſenſiblement de la vraie racine.

Qu'on ſuppoſe, par exemple, $b = \frac{1}{10} a$, on aura pour les ſix premiers termes de la ſuite précédente

$$a^{\frac{1}{5}} \times \overline{1 + \frac{1}{50} - \frac{2}{1250} + \frac{3}{62500} - \frac{21}{6250000} + \frac{399}{1562500000}}.$$

Or, ſi on fait attention à la conſidérable diminution ſucceſſive de ces ſix termes, on voit que ceux qu'on pourroit y joindre, ſeroient ſi petits, qu'ils ne valent pas la peine d'être cherchés.

LVIII.

L'utilité de la formule des puiſſances ne ſe borne pas encore à trouver par approximation toutes ſortes de puiſſances fractionnaires ou négatives; elle eſt infiniment plus étendue en ſervant à réduire en ſéries toutes ſortes de quantités où il entre tant de ſignes radicaux, diviſeurs, &c. qu'on voudra. Qu'on ait, par exemple, la quantité . . . .

Toutes ſortes de quantités peuvent être réduites en ſéries par la formule précédente.

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}}}{\sqrt[5]{a+b} - \sqrt[5]{a-b}},$$ en réduiſant d'abord les deux quantités $\sqrt[3]{a+b}$ & $\sqrt[3]{a-b}$ en ſéries, & les ajoutant, puis en élevant la ſérie qui en eſt la ſomme à la puiſſance $\frac{1}{3}$, on formera une nouvelle ſérie, qui étant multipliée enſuite par celle qu'on trouve-

roit de même pour $\frac{1}{\sqrt[5]{a+b} - \sqrt[5]{a-b}}$, ou $\overline{\sqrt[5]{a+b} - \sqrt[5]{a-b}}^{\,-1}$ donneroit enfin une ſeule ſérie pour exprimer la quantité propoſée. Or, indépendamment de l'avantage d'avoir par approximation toutes les quantités compoſées de radicaux & de diviſeurs complexes, il y a une infinité de cas où il eſt très-utile pour des démonſtrations, que les quantités à traiter, ſoient délivrées de radicaux & diviſeurs complexes, ainſi qu'elles le ſont par leurs transformations en ſéries. Mais il eſt tems de retourner à la réſolution des équations.

ÉLÉMENS D'ALGEBRE.

CINQUIÉME PARTIE.

Résolution des équations du troisiéme & du quatriéme degré.

LORSQU'ON aura voulu passer des équations exprimées généralement par $a x^m = b$ & $a x^{2m} + b x^m = c$, à celles qui contenoient, outre ces termes, les intermédiaires, on a bientôt senti des difficultés qui ont fait abandonner l'espérance de résoudre ces équations en général. On n'a pû parvenir jusqu'à présent qu'à la solution de celles du troisiéme & du quatriéme degré, encore la méthode qu'on a trouvée pour les résoudre, souffre-t-elle une exception considérable : voici le chemin qu'on a dû suivre en découvrant cette méthode.

I.

Equation du troisiéme degré la plus composée.

Soient représentées par l'équation $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$, toutes celles du troisiéme degré. Si on pouvoit réduire cette équation à une autre qui n'eût que le premier & que le dernier terme, il est évident que ce seroit l'avoir résolue. Or le moyen le plus naturel de transformer une équation en une autre, dans laquelle on soit libre de faire quelque changement, c'est de substituer dans cette équation à la place de l'inconnue quelque quantité, dans laquelle on laisse une lettre indéterminée, afin de pouvoir s'en servir à volonté.

II.

Transformation par laquelle on fait évanouir un terme quelconque de cette équation.

Soit donc substitué dans cette équation $x + r$ au lieu de y, il viendra $x^3 + \overline{3r + d} \times xx + \overline{3rr + 2dr + e} \times x + r^3 + dr^2 + er + f = 0$, que l'on écrit aussi de cette maniere.

$$\begin{array}{llll} x^3 & +3r\,x^2 & +3rr\,x & +r^3 = 0 \\ & +d & +2dr & +dr^2 \\ & & +e & +er \\ & & & +f \end{array}$$

Comme on est le maître de r dans cette équation, il est aisé de voir qu'on peut par son moyen faire évanouir celui des termes qu'on voudra, mais aussi on n'en sçauroit faire disparoître qu'un à-la-fois.

Qu'on fasse, par exemple, $3r + d = 0$,

ou $r = -\frac{1}{3}d$, le ſecond terme s'évanouira, & l'équation deviendra

$$\begin{array}{l} x^3 + e x + \frac{2}{27} d^3 = 0 \\ \quad - \frac{d^2}{3} \quad - \frac{d e}{3} \\ \quad + f \end{array}$$

Si on fait au contraire $3rr + 2dr + e = 0$; ou $r = -\frac{1}{3}d \pm \sqrt{-\frac{e}{3} + \frac{1}{9}dd}$, le troiſiéme terme s'évanouira; mais les deux autres reſteront.

Si on vouloit faire évanouir le dernier terme, il faudroit faire $r^3 + dr^2 + er + f = 0$; & alors pour avoir r, il faudroit réſoudre une équation pareille à la propoſée.

Avec un peu de connoiſſance du calcul, on devoit bien s'attendre que la ſubſtitution de $x + r$ à la place de y ne pouvoit pas faire évanouir pluſieurs termes à-la-fois, parce que l'introduction d'une inconnue ne peut ſervir qu'à réſoudre une ſeule équation; ou, ce qui revient au même, à remplir une condition : or l'évanouiſſement de chaque terme fait une condition. Mais ſi par cette transformation on n'eſt pas parvenu entiérement au but que l'on avoit eu de réduire l'équation propoſée à deux termes, on a du moins changé la queſtion en une nouvelle qui paroît plus ſimple, puiſqu'il ne s'agit plus que d'une équation à trois termes.

Des deux équations transformées qu'on peut avoir en faiſant évanouir, ou le premier, ou le ſecond terme; la premiere, c'eſt-à-dire,

$$\begin{array}{llllll} x^3 & + e & x & + \frac{2}{27} d^3 & = 0 \\ & -\frac{d^2}{3} & & -\frac{de}{3} & \\ & & & + f & \end{array}$$

eſt la plus ſimple ; auſſi eſt-ce celle que nous allons chercher à réſoudre, en tâchant de diminuer encore ſes termes : mais nous ſuſpendrons un moment cette recherche ; parce que la méthode qu'on vient d'employer pour transformer les équations du troiſiéme degré, offre ſi naturellement de nouvelles vérités ſur les équations de tous les autres degrés, qu'il eſt à propos de s'y arrêter un peu.

III.

On voit d'abord qu'à l'aide de la même transformation de y en $x + r$, on peut auſſi faire évanouir le terme qu'on voudra d'une équation d'un degré quelconque.

Transformation précédente appliquée à une équation du quatriéme degré.

Qu'on ait, par exemple, l'équation du quatriéme degré la plus générale $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$, en y ſubſtituant $x + r$ au lieu de y, on aura

$$\begin{array}{lllll} x^4 + 4r x^3 & + 6r^2 x^2 & + 4r^3 x & + r^4 & = 0 \\ + a & + 3ar & + 3ar^2 & + ar^3 & \\ & + b & + 2br & + brr & \\ & & + c & + cr & \\ & & & + d & \end{array}$$

dans laquelle faiſant $4r + a = 0$, ou $r + \frac{1}{4}a$, on aura une équation du quatriéme degré qui n'aura point de ſecond terme.

De même en déterminant r par l'équation du second degré $6r^2 + 3ar + b = 0$, on aura une équation du quatriéme degré qui n'aura point de troisiéme terme. Et en faisant r tel qu'il conviendroit pour résoudre l'équation du 3eme degré $4r^3 + 3ar^2 + 2br + c = 0$, on auroit une équation du 4eme degré qui n'auroit point de quatriéme terme. Le cinquiéme s'en iroit de même par le moyen d'une équation du 4eme degré. Mais on ne s'arrête pas ordinairement à faire évanouir d'autres termes que le second, parce que l'évanouissement des autres termes amene presque toujours des calculs compliqués de radicaux & fort pénibles.

Ce n'est ordinairement que le second terme qu'on fait évanouir.

IV.

Dans une équation générale du cinquiéme degré $y^5 + ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0$, la transformée $y = x + r$ donne l'équation $x^5 + \begin{matrix} 5r \\ +a \end{matrix} x^4 +$, &c. dont le second terme s'évanouira par l'équation du premier degré $5r + a = 0$, ou $r = -\frac{1}{5}a$.

Evanouissement du second terme dans une équation du cinquiéme degré.

V.

Et en général dans une équation d'un degré quelconque m représentée par $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} +$ &c. $= 0$, il sera aisé de trouver par la formule des puissances donnée dans la IV^{eme} Partie, article XLVIII, que le second terme s'évanouira en faisant l'inconnue $x = y - \frac{a}{m}$.

Dans une équation du degré quelconque m.

VI.

Après cette petite digression, remettons-

Résolution

de l'équation générale $x^3 + px + q = 0$.

nous à chercher la solution de l'équation du troisiéme degré.

$$x^3 + ex + \frac{2}{27}d^3 = 0$$
$$- \frac{d^2}{3} - \frac{de}{3}$$
$$+ f$$

à laquelle l'équation générale $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$, s'étoit réduite par la supposition de $y = x - \frac{1}{3}d$; & pour abréger les calculs, écrivons-la ainsi, $x^3 + px + q = 0$.

En suivant l'idée que nous avons déja employée, faisons encore une transformée. Substituons, par exemple, $u + z$ à la place de x; non dans la vûe de faire évanouir un terme de cette équation, ainsi qu'on se l'étoit proposé la premiere fois; car on verroit bientôt que le terme qui avoit disparu reviendroit, mais pour décomposer cette équation en d'autres qui soient plus simples. Sans voir distinctement qu'un tel moyen doit réussir, on sent bien que la transformation d'une équation en une autre, où l'on a une lettre à déterminer à volonté, ne peut guères manquer d'être utile.

La substitution de $x = u + z$ étant faite, il vient $u^3 + 3uuz + 3uzz + z^3 + pu + pz + q = 0$. Supposons maintenant que l'une des inconnues u ou z soit telle que $u^3 + z^3 + q = 0$, on aura, en ce cas, l'équation $3u^2z + 3uz^2 + pu + pz = 0$, qui étant divisée par $u + z$, donne $3uz + p = 0$, ou $u = -\frac{p}{3z}$. Voilà donc une équation avec laquelle on chaſſera facilement une des inconnues introduites ; il ne s'agit plus que de ſçavoir quelle ſera l'équation qui déterminera l'autre inconnue. Pour cela, il faut remettre cette valeur de u dans la premiere équation $u^3 + z^3 + q = 0$; ce qui donnera $-\frac{p^3}{27 z^3} + z^3 + q = 0$, ou $z^6 + q z^3 = \frac{p^3}{27}$. Or, cette équation, quoique d'un degré plus haut que la propoſée, eſt cependant bien plus facile à réſoudre ; car elle eſt de la claſſe de celles que nous avons réſolues dans la quatriéme partie, article XX, & la valeur qu'elle donne pour z eſt

$$\sqrt{-\tfrac{1}{1} q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} q^2 + \tfrac{1}{27} p^3}}.$$

Donc u, ou $-\frac{p}{3z}$ ſera $-\frac{\frac{1}{3} p}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3}}}$ qui ſe réduit facilement à . . . .

$$-\sqrt[3]{\tfrac{1}{2} q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} q^2 + \tfrac{1}{17} p^3}}\,;$$

car on peut voir aſſez facilement que le produit de $-\frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3}$ par . . . , ... $+\frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3}$ eſt $\frac{1}{27} p^3$ & partant que $\frac{1}{3} p$ eſt le produit des racines cubes de ces quantités. Ajoutons préſentement ces valeurs de u & de z, & nous aurons $u + z$, ou

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2} q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} q^2 + \tfrac{1}{27} p^3}}$$

$$-\sqrt[3]{+\tfrac{1}{2} q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} q^2 + \tfrac{1}{27} p^3}}\,,$$ ou ſim-

plement $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}.$

$-\sqrt[3]{+\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$; car en prenant le radical $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ en $-$, on n'a pas une valeur de x différente de celle qu'on a en le prenant en $+$.

VII.

La formule précédente ne donne qu'une des trois racines.

Par cette valeur de x, on voit qu'il n'en eſt pas des équations du troiſiéme degré comme de celles du ſecond, où la même expreſſion d'une racine marquoit, à l'aide du ſigne $\underline{+}$, les deux racines à-la-fois; ici on trouve une expreſſion qui ne ſçauroit déſigner qu'une des trois valeurs de x.

Maniere d'avoir les deux autres.

Pour trouver les deux autres, il faut diviſer l'équation $x^3 + px + q = 0$, par la racine que donne la valeur précédente de x, & l'équation du ſecond degré qui en ſera le quotient, donnera par ſa réſolution les deux autres racines cherchées.

Si on veut trouver la valeur générale de ces deux racines, il faut faire pour abréger les calculs $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} = m$,

& $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} = n$, & faire attention qu'en ce cas $mn = \frac{1}{3}p$ & $m^3 - n^3 = q$. Cela poſé, la diviſion de l'équation $x^3 + px + q = 0$ par $x + m - n$, qui eſt alors la racine qu'on vient de trouver, donnera pour quotient $xx + nx - mx + mm + nn + mn = 0$, dont les deux racines, c'eſt-à-dire celles qui nous reſtent à trouver dans l'équation $x^3 + px + q = 0$, ſont $x = \frac{m - n}{2} \pm \frac{1}{2} \times \overline{m + n} \sqrt{-3}$, ou

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt[3]{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt[3]{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

$$\pm \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} \times \sqrt{-3}$$

qui ſont néceſſairement imaginaires toutes les fois que $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ eſt une quantité réelle. On auroit pû reconnoître dès l'article V de la quatriéme Partie, où il n'étoit queſtion que des équations à deux termes, l'eſpéce d'imperfection que donne à la ſolution des équations du troiſiéme degré la différence de forme des trois racines, mais cette eſpéce d'imperfection eſt ici plus frappante, en ſe trouvant dans la ſolution générale.

VIII.

Ce déſavantage de la ſolution précédente des équations du troiſiéme degré n'en peut paroître un qu'à ceux qui conſiderent, pour ainſi-dire, métaphyſiquement l'Algebre; mais il y en a un autre bien plus frappant pour tout le monde, & qui a extrêmement exercé tous les Calculateurs. C'eſt que cette ſolution n'apprend rien du tout pour la valeur de x toutes les fois que $\frac{1}{27}p^3$ eſt plus grand que $\frac{1}{4}qq$, & qu'il eſt en même-temps négatif. Dans ce cas, qui eſt très-étendu, la valeur de la quantité $\sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}$ eſt imaginaire, & par conſéquent les deux quan-

Cas où la formule précédente ne ſçauroit faire connoître x à cauſe des imaginaires qu'elle renferme.

tités $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ & $-\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ qui composent la valeur de x sont imaginaires aussi ; mais on n'en sçauroit conclure pour cela que la valeur de x soit imaginaire ; ce qui, bien loin d'être regardé comme un vice de la solution, la rendroit une solution complette ; & on ne sçauroit non plus, du moins par les méthodes connues jusqu'à présent, déterminer quelle est la quantité réelle qu'exprime cette valeur de x.

IX.

Non-seulement on ne sçauroit conclure de l'expression que x a dans ce cas, que la racine cherchée est imaginaire ; mais on s'est assuré par divers moyens que cette valeur étoit toujours réelle alors : voici de tous ces moyens celui * qui m'a paru le plus direct.

On démontre cependant que dans ce cas x est réel.

Soit repris la valeur ....

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}} \ldots\ldots$$

$$-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$$ de x, & soit mis dans cette valeur à la place de $\frac{1}{2}q$, a, & à la place de $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ supposé imaginaire, $b\sqrt{-1}$, on aura ....

$$x=\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}-\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}.$$

* Je l'ai tiré d'un Mémoire de M. Nicole, Mém. de l'Acad. année 1738, p. 99 & 102.

Cherchons maintenant les valeurs de .... $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}$ & de $-\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$ par la formule donnée dans la quatriéme Partie, article XLVIII, pour l'élévation du binome.

La premiere de ces deux quantités deviendra $-a^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b\sqrt{-1}-\frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2-\frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^3\sqrt{-1}+\frac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4+$ &c.

Et la ſeconde,

$-a^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}a^{-\frac{1}{3}}b\sqrt{-1}-\frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2+\frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^3\sqrt{-1}+\frac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4-$ &c. & par conſéquent la valeur de x ſera la ſuite infinie $-2a^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2+\frac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4-\frac{308}{6561}a^{-\frac{17}{3}}b^6+$ &c. ou ....

$$-2a^{\frac{1}{3}}\times\overline{1+\frac{b^2}{9a^2}-\frac{10b^4}{243a^4}+\frac{154b^6}{6561a^6}-}$$

&c. qui ne contient aucune racine imaginaire. Donc dans le cas où $\frac{1}{27}p^3$ eſt négatif & plus grand que $\frac{1}{4}qq$ la valeur ....

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}q^2}}$$

$-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{17}p^3+q^2}}$ de x, qui eſt alors ſous une forme imaginaire, eſt cependant une quantité toujours réelle. Malheureuſement on n'a pu juſqu'à préſent lui trouver une forme réelle qu'en admettant, ainſi qu'on vient de faire, une infinité de termes dans ſon expreſſion ; ce qui ne peut ſervir qu'à prouver que cette valeur eſt réelle, mais non à la faire connoître exactement.

X.

Par la même méthode on trouvera une valeur approchée de x.

Si on veut ſe contenter d'une approximation, on pourra faire uſage de la ſérie précédente ; car, en ſuppoſant a plus grand que b, les termes de cette ſérie iront en diminuant, & par conſéquent on pourra négliger les derniers, quand ils ſeront parvenus à n'être que de très-petites quantités. S'il arrive, au contraire, que a ſoit plus petit que b, il faudra en employant la formule du binome pour trouver $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}$ & $\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$, avoir l'attention de prendre $b\sqrt{-1}$ pour le premier terme du binome, & a pour le ſecond ; l'on aura alors pour la valeur de x ou de $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$ la quantité $+\frac{2}{3}b^{-\frac{2}{3}}a - \frac{10}{81}b^{-\frac{8}{3}}a^3 + \frac{44}{729}b^{-\frac{14}{3}}a^5 - \frac{748}{19693}b^{-\frac{20}{3}}a^7 +$ &c. ou ....

$$-\frac{2a}{3b^{\frac{2}{3}}} \times -1 \overline{\left(+\frac{5a^2}{27b^2} - \frac{22a^4}{243b^4} + \frac{374a^6}{6501b^6} - \text{\&c.}\right)}$$

, &c. qui eſt auſſi réelle que l'autre expreſſion, & dont tous les termes décroiſſent, quand a eſt plus petit que b.

XI.

XI.

Les deux autres valeurs d'x sont aussi réelles dans le même cas.

Nous avons vû, article VII, que des trois racines de l'équation $x^3+px+q=0$ celles qui sont exprimées par . . . .

$$x=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}$$
$$\pm\overline{\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}}\times\sqrt{-3}$$

sont toutes deux imaginaires toutes les fois que $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ étoit une quantité réelle. Nous allons voir présentement que ces deux racines sont toujours réelles toutes les fois que $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ est imaginaire, c'est-à-dire, toutes les fois que p est négatif, & tel que $\frac{1}{27}p^3$ est plus grand que $\frac{1}{4}qq$.

Car, si on change à l'aide des dénominations qu'on vient d'employer l'expression de ces deux valeurs de x en . . . .

$$\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}\pm$$
$$\overline{\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}}\times\sqrt{-3}$$

& qu'on réduise, ainsi qu'on vient de faire, les quantités $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}$ & $\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$ en séries, on aura pour ces deux valeurs de x,

$$a^{\frac{1}{3}}\times\overline{1+\frac{bb}{9aa}-\frac{10b^4}{243a^4}+\frac{154b^6}{6561a^5}-\&c.}$$
$$\pm\frac{b}{a^{\frac{2}{3}}\sqrt{3}}\times\overline{1-\frac{5bb}{27aa}+\frac{22b^4}{243a^4}-\frac{374b^6}{6561a^6}}$$
$+$ &c. expression entiérement réelle.

XII.

Comment des racines de l'équation $y^3 + px + q = 0$, on tire celles de l'équation $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$.

Comme l'équation la plus générale du troisiéme degré, représentée par $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$ s'est réduite à . . . .

$$\begin{array}{rrr} x^3 + & e\,x & + \frac{2}{27}d^3 = 0 \\ & -\frac{d^2}{3} & -\frac{de}{3} \\ & & + f \end{array}$$

ou ſimplement $x^3 + px + q = 0$, par la ſuppoſition de $y = x - \frac{1}{3}d$, il s'enſuit que les valeurs de y dans l'équation générale $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$ ſont celles qu'on a en réſolvant cette derniere équation $x^3 + px + q = 0$, & en retranchant de ſes trois racines $\frac{1}{3}d$.

XIII.

Une équation du troiſiéme degré a ſes trois racines réelles, ou une réelle avec deux imaginaires.

De-là, il ſuit qu'une équation quelconque du troiſiéme degré, ſera entiérement dans le même cas par rapport aux racines réelles ou imaginaires, que l'équation qu'elle produit par l'évanouiſſement du ſecond terme.

Ainſi on voit, en ſe rappellant les articles VII & IX, que toute équation du troiſiéme degré doit au moins avoir une racine réelle, & que les deux autres ſont toujours, ou toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires.

XIV.

Comment on diſtingue ces cas.

Pour diſtinguer lequel de ces deux cas arrive dans une équation du troiſiéme degré donnée, on commencera par en faire évanouir le ſecond terme, afin de la pouvoir comparer à l'équation $x^3 + px + q = 0$; & lorſque cette opération ſera faite, ſi p eſt poſitif, ou qu'étant négatif il soit tel que $\frac{1}{27}p^3$ ne soit pas plus grand que $\frac{1}{4}qq$, il n'y aura qu'une racine réelle, laquelle sera déterminée exactement par la formule de l'art. VI.

Si, au contraire, p est négatif & tel que $\frac{1}{27}p^3$ soit plus grand que $\frac{1}{4}qq$, les trois racines seront réelles ; mais aucune d'elles ne pourra être déterminée par la formule de l'article VI, à moins qu'on ne se contente d'une approximation comme celle qu'on a en transformant cette formule en une suite infinie.

X V.

S'il arrivoit que $\frac{1}{27}p^3$ fût négatif & égal à $\frac{1}{4}qq$, on pourroit trouver de la difficulté à déterminer auquel des deux cas précédens l'équation se rapporteroit, c'est-à-dire, qu'on ne sçauroit s'il devroit y avoir seulement une racine réelle, ou si toutes les trois le seroient, à cause que $\sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}qq}$ qui est alors zéro, peut également se compter parmi les quantités positives, ou parmi les négatives ; mais l'inspection des trois racines ou valeurs d'x trouvées précédemment, décide bientôt la question. Car la premiere valeur exprimée par . . . .

Quelles sont les racines, lorsque $\frac{1}{27}p^3$ est négatif & $=\frac{1}{4}qq$.

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

$-\sqrt{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$ se réduit alors à $-2\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$, & les deux autres valeurs exprimées généralement par . . . .

$$\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{4}q + \sqrt{\tfrac{1}{2}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

$$\pm\overline{\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}} \times \sqrt{-3}$$

ſe réduiſent alors à $+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm 0}$, c'eſt-à-dire, qu'elles ſont toutes deux égales à $+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$. Ainſi les équations où $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ eſt zéro, ſont comptées parmi celles dans leſquelles les trois racines ſont réelles.

XVI.

Application des méthodes précédentes à un exemple.

Pour faire préſentement quelques applications des régles précédentes, ſuppoſons d'abord qu'on ait l'équation $y^3+3yy-3y+25=0$ à réſoudre; on commencera par faire évanouir le ſecond terme de cette équation; ce qui ſe fera ſuivant l'art. II, en ſuppoſant $y=x-1$ & l'équation délivrée du ſecond terme que l'on aura par cette ſubſtitution, ſera $x^3-6x+30=0$ qui étant comparée à $x^3+px+q=0$ donne $p=-6$, & $q=30$.

Ces valeurs étant ſubſtituées dans ..... $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$, cette quantité devient $\sqrt{217}$ qui eſt une quantité réelle, ainſi la formule de l'article VI doit donner, en ce cas, la valeur cherchée de x.

Si l'on fait donc dans cette formule ....

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$ les ſubſtitutions de 15 pour $\frac{1}{2}q$ & de $\sqrt{217}$ pour $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$, cette valeur générale de x devient $\sqrt[3]{-15+\sqrt{217}}-\sqrt[3]{15+\sqrt{217}}$ qui eſt la ſeule racine réelle que contienne l'équation $x^3-6x+30=0$, & qui ne ſçauroit être réduite à une plus ſimple expreſſion. Subſtituant enſuite la valeur de x dans l'équation $y=x-1$, on aura ....

$y = \sqrt[3]{-15 + \sqrt{217}} - \sqrt[3]{15 + \sqrt{217}} - 1$, pour la ſeule racine réelle de l'équation propoſée $y^3 + 3yy - 3y + 25 = 0$.

XVII.

Si on avoit une équation du ſixiéme degré, où l'inconnue ne ſe trouvât à aucune dimenſion impaire, il eſt évident qu'on la réſoudroit par la même méthode que la précédente, puiſque cette équation ſe réduiroit tout de ſuite au troiſiéme degré par une transformation. Qu'on eût, par exemple, $z^6 + 9z^4 + 39zz + 55 = 0$; en regardant zz comme l'inconnue de cette équation, & ſuppoſant, ſuivant les principes précédens, zz égal à une nouvelle inconnue x moins un tiers du coëfficient du ſecond terme, c'eſt-à-dire $zz = x - 3$, on changera cette équation en $x^3 + 12x - 8 = 0$ qui n'eſt que du troiſiéme degré, & qui n'a point de ſecond terme.

Autre exemple contenant une équation du ſixiéme degré qui ſe réduit au troiſiéme.

Comparant alors cette équation avec $x^3 + px + q = 0$, on a $p = 12$, $q = -8$, & partant $\sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}qq} = \sqrt{80}$; d'où x, ou $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}qq}} = \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{\sqrt{80} - 4}$, & comme, par la ſuppoſition $zz = x - 3$, ou $z = \sqrt[2]{x - 3}$, on aura alors l'inconnue cherchée $x = \pm\sqrt{\sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{\sqrt{80} - 4} - 3}$ & les deux valeurs que cette expreſſion donne en prenant le radical en $+$ & en $-$ sont les seules réelles des six que doit avoir l'équation proposée.

En général, qu'on ait une équation telle que $z^{3m}+az^{2m}+bz^{m}+c=0$ on la réduira tout de suite à une du troisiéme degré & sans second terme, en faisant $z^m = x - \frac{1}{3}a$.

XVIII.

Equations plus élevées qui s'y réduiroient aussi.

Supposons présentement qu'on ait l'équation $x^3+3x-4=0$, à résoudre; cette équation n'ayant point de second terme, on peut tout de suite la comparer à $x^3+px+q=0$, & l'on a par cette comparaison $p=3$ & $q=-4$, & comme p est positif, on voit, par l'article XIV, que la formule générale de l'article VI doit encore réussir dans ce cas. Substituant en effet ces valeurs de p & de q dans la formule générale $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}qq}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}qq}}$ on a pour la seule valeur réelle de x, ... $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{5}}$. Si l'on applique présentement à cette expression la méthode de la quatriéme Partie, article XXXV, XXXVIII & XLI, on verra qu'elle se peut aisément réduire, parce que $2+\sqrt{5}$ est le cube de $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, & que $-2+\sqrt{5}$ est celui de $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$. D'où cette valeur de x se réduit à 1.

On auroit pû parvenir à cette même valeur de x sans la formule précédente, en employant la régle de la troisiéme Partie, articles XII & XIII; car on auroit trouvé que $x - 1$ étoit un diviseur exact de la quantité $x^3 + 3x - 4$.

XIX.

Soit maintenant proposé de résoudre l'équation $x^3 - 90x - 98 = 0$. En comparant cette équation à l'équation générale $x^3 + px + q = 0$, on a $p = -90$ & $q = -98$: or, p étant négatif & tel que $\frac{1}{27}p^3$ est plus grand que $\frac{1}{4}qq$ l'équation proposée est de celles qui ne peuvent pas se résoudre par la formule précédente. Je cherche alors par la méthode de la troisiéme Partie, articles XII & XIII, si elle n'aura pas quelque diviseur, & ayant reconnu qu'elle n'en a point, je me sers de la méthode enseignée, article X, pour trouver une valeur approchée.

Quatriéme exemple, dans lequel la formule de l'article VI est insuffisante.

Pour cela, je commence par substituer pour p & q leurs valeurs -90 & -98 dans la formule générale . . . .

Application de la méthode de l'article X, pour approcher des racines.

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}qq}} - \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}qq}}$$

& j'ai . . . .

$$x = \sqrt[3]{49 + \sqrt{-24599}} - \sqrt[3]{-49 + \sqrt{-24599}}$$

qui étant comparé à l'expression . . . . . .

$\sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$, laquelle étoit devenue (article X,) la suite infinie

$$-\frac{2a}{3b^{\frac{2}{3}}} \times \sqrt{-1} + \frac{5a^2}{27b^2} - \frac{22a^4}{243b^4} + \frac{374a^6}{6561b^6}$$

$-$ &c. donne $a = -49$, $bb = +24599$,

qu'il ne s'agit plus que de ſubſtituer dans cette ſuite infinie.

Pour faire cette ſubſtitution, je commence par prendre la racine cube de 24599, afin d'avoir $b^{\frac{2}{3}}$, l'opération faite, j'ai environ 29, 08 pour cette racine cube, & partant $\frac{2a}{3b^{\frac{2}{3}}}$, ou $\frac{98}{3\sqrt[3]{24599}}$ eſt environ $\frac{10000}{8902}$.

Quarrant enſuite a & le diviſant par bb, j'ai pour $\frac{aa}{bb}$ environ 0,0976, dont le quarré 0,00952 eſt la valeur de $\frac{a^4}{b^4}$; quant à la valeur de $\frac{a^6}{b^6}$, & des puiſſances plus élevées, elle eſt inutile dans cette ſuite dont la marche eſt aſſez prompte.

Faiſant alors les ſubſtitutions des valeurs de $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^4}{b^4}$ à la place de ces quantités, j'ai environ $-$ 1, 104 pour la valeur de x donnée par la formule de l'article VI; ſi on veut avoir les deux autres valeurs de x qui doivent auſſi être réelles, ſuivant l'article XIV, il n'y a qu'à diviſer l'équation $x^3 - 90x - 98 = 0$ par $x + 1$, 104 qui eſt à très-peu de choſe près, ſuivant ce que l'on vient de voir, une de ſes racines. La diviſion faite; on a pour quotient $xx - 1, 104\, x - 88, 781$, & pour reſte 0,0142 quantité aſſez petite pour être négligée; de ſorte qu'on peut regarder l'équation $xx - 1, 504\, x - 88, 781 = 0$, comme le quotient exact de la division de $x^3 - 90x - 98 = 0$ par $x - 1, 104$, & comme le produit des deux racines cherchées. Résolvant donc cette équation, on a pour les deux valeurs de x qu'elle donne $x = 0, 552 \pm \sqrt{89, 0857}$, c'est-à-dire $+9, 990$ & $-8, 886$.

Ainsi les trois valeurs de x dans l'équation proposée $x^3 - 90x - 98 = 0$ sont à peu près $-1, 104$; $+9, 990$; $-8, 886$. Quant aux valeurs exactes, aucunes des méthodes connues jusqu'à présent ne sçauroient les faire trouver, & toute équation, qui ayant, comme la précédente, ses coëfficiens rationnels n'aura aucun diviseur rationnel, sera de même irrésoluble par ces méthodes lorsque $\frac{1}{27}p^3$ sera négatif & plus grand que $\frac{1}{4}qq$. Cas irréductible du troisiéme degré.

X X.

La méthode que nous venons d'employer pour résoudre par approximation les équations du troisiéme degré dont les trois racines sont réelles, a cet inconvénient, que lorsque a differe peu de b, les termes de la série qui exprime la valeur de x décroissent si lentement, qu'il en faut un très-grand nombre pour approcher un peu exactement de la vraie valeur de x, & que par conséquent les calculs deviennent extrêmement pénibles. Il est donc à propos de chercher quelque méthode plus généralement commode dans la pratique. Inconvénient de l'approximation enseignée, article X.

XXI.

Autre méthode d'approximation générale & facile dans la pratique.

Dans cette vûe, je reprends l'équation $x^3 + px + q = 0$, ou plutôt $x^3 - px + q = 0$ (les cas qui échappent à la méthode de l'article VI ne se trouvant jamais que parmi ceux où p est négatif) & je me propose de lui donner cette forme $z^3 - z = r$ qui est plus simple à cause qu'elle ne renferme qu'un terme d'indéterminé.

Afin de faire cette transformation, je fais $x = mz$, ce qui change l'équation $x^3 - px + q = 0$ en $z^3 - \frac{p}{mm} z = -\frac{q}{m^3}$ qui m'apprend qu'en faisant $m = -\sqrt{p}$, si q est positif, & $m = \sqrt{p}$, si q est négatif, je donnerai toujours à l'équation $x^3 - px + q = 0$ la forme $z^3 - z = +r$.

Je remarque présentement que si cette équation est de celles que la formule de l'article VI ne sçauroit résoudre, il faudra nécessairement que r soit plus petit que $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}$, ou $\sqrt{\frac{4}{27}}$; & qu'en même-temps il y ait une des racines qui soit positive, & plus grande que l'unité, mais moindre que $\sqrt{\frac{4}{3}}$. Car si z surpassoit $\sqrt{\frac{4}{3}}$ on auroit pour r, c'est-à-dire, pour $z^3 - z$ un nombre plus grand que $\sqrt{\frac{4}{27}}$, & par conséquent l'équation $z^3 - z = r$ seroit du nombre de celles où la formule de l'art. VI réussit.

Cela posé, je fais $z = 1 + \delta$, & substituant cette valeur dans l'équation $z^3 - z = r$, elle donne $2\delta + 3\delta\delta + \delta^3 = r$, dans laquelle je remarque que δ étant une quantité toujours plus petite que $\sqrt{\frac{4}{3}} - 1$, c'eſt-à-dire, plus petite que 0, 155, ſon cube eſt plus petit que 0, 0037. Or, ce cube étant donc ſi petit, je vois qu'on ne peut pas commettre une grande erreur en négligeant le terme δ^3 dans l'équation $2\delta + 3\delta\delta + \delta^3 = r$, c'eſt-à-dire, en ſe contentant de réſoudre l'équation $2\delta + 3\delta\delta = r$. Je réſous donc cette équation, & elle me donne . . . . . .

$$\delta = \pm\sqrt{\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{3}r} - \tfrac{1}{3} = \pm\frac{\sqrt{1+3r} - 1}{3}$$

& par conſéquent z, ou . . . .

$$1 + \delta = \frac{2 \pm \sqrt{1+3r}}{3},$$ ou ſimplement

$$z = \frac{2 + \sqrt{1+3r}}{3},$$ puiſque des valeurs de z, on ne cherche que celle qui ſurpaſſe l'unité & qui eſt poſitive.

Pour ſçavoir à quoi peut monter l'erreur qu'on commet dans cette méthode, en négligeant le terme δ^3, prenons le cas où ce terme eſt le plus grand, ſuppoſons que z ou $1 + \delta$ ſoit $\sqrt{\frac{4}{3}}$, ce qui ne peut jamais arriver, tant que l'équation propoſée eſt de celles qui échappent à la méthode de l'article VI. Nous aurons alors $r = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}$, & notre méthode nous donnera pour valeur de z,

$$\frac{2 + \sqrt{1 + \sqrt{\frac{4}{3}}}}{3}$$ au lieu de la vraie valeur $\sqrt{\frac{4}{3}}$. Or, il eſt aiſé de reconnoître que ces

deux quantités ne different entr'elles que d'environ un milliéme, voilà donc la plus grande erreur qu'on puisse craindre, en prenant $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$ pour la racine positive de l'équation $z^3 - z = r$, si cette équation est de celles où la formule de l'article VI ne peut s'appliquer.

La méthode qu'on vient d'enseigner donne d'abord x à un milliéme près.

Ayant calculé la valeur de z par l'expression $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$, il faudra la multiplier par m pour avoir la valeur approchée de x.

XXII.

Si on ne trouve pas que cette résolution de l'équation proposée approche assez de la véritable, c'est-à-dire, qu'on regarde les erreurs qui pourroient aller aux environs d'un milliéme comme trop considérables, rien ne sera plus aisé que de trouver une autre valeur de la racine beaucoup plus exacte, par une opération fondée sur les mêmes principes. Après avoir calculé cette premiere valeur de x, & l'avoir nommée pour abréger k, on imaginera que la correction qu'il faut lui faire soit ε, c'est-à-dire, qu'on supposera que le véritable x soit $k+\varepsilon$. Substituant alors cette quantité pour x dans l'équation $x^3 - px + q = 0$, l'on aura $k^3 + 3k^2\varepsilon + 3k\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - pk - p\varepsilon + q = 0$, ou simplement $k^3 + 3k^2\varepsilon + 3k\varepsilon^2 - pk - p\varepsilon + q = 0$ en négligeant le terme ε^3 qui est bien plus négligeable que ne l'étoit le terme δ^3 à la premiere opération, puisqu'il est infiniment plus petit. Résolvant ensuite cette équation, la valeur de ε qu'elle donnera, sera la correction, qui, étant faite à la premiere valeur de x, en donnera une seconde infiniment plus exacte.

Si on n'étoit pas encore content de cette seconde, on en trouveroit une troisiéme en nommant la seconde valeur l, & substituant $l + \phi$ à la place de x dans l'équation proposée $x^3 - px + q = 0$, & ainsi de suite.

Mais bien loin qu'on ait communément besoin d'employer des corrections si rigoureuses, on pourra très-souvent se contenter de la valeur de x trouvée en premier lieu, ou tout au plus il suffira, après la substitution de $k + \varepsilon$ pour x dans l'équation $x^3 - px + q = 0$, de résoudre l'équation $k^3 + 3k^2\varepsilon - pk - p\varepsilon + q = 0$, c'est-à-dire, qu'on pourra non-seulement négliger le terme ε^3, mais le terme $3k\varepsilon^2$, parce que ce terme est déja très-petit.

XXIII.

Faisons présentement quelqu'application de cette méthode. Soit, par exemple, l'équation $z^3 - z = \frac{1}{3}$. En substituant $\frac{1}{3}$ pour r dans l'expression $\frac{2 + \sqrt{1 + 3r}}{3}$, elle deviendra $\frac{2 + \sqrt{2}}{3}$, c'est-à-dire, environ 1, 138 qui est un peu plus grande que la vraie valeur Application de cette méthode à un exemple.

de z; mais qui l'eſt de bien peu, puiſque 1, 137, comme on le peut voir aiſément par le calcul, ſeroit trop petit.

Pour approcher plus exactement de la vraie valeur de z, on ſubſtituera $1,138 + \varepsilon$ à la place de z dans l'équation $z^3 - z = \frac{1}{3}$, & l'on aura $0,002426739 + 2,885132\,\varepsilon = 0$ en négligeant les termes affectés de ε^2 & de ε^3. Cette équation étant réſolue, elle me donne $\varepsilon = -0,000841$, & partant pour la valeur de z corrigée, $1,137159$. Si on avoit voulu faire cette correction plus exacte en ne négligeant que le terme affecté de ε^3, on auroit réſolu l'équation $0,002426739 + 2,885132\,\varepsilon + 3,414\,\varepsilon^2 = 0$, ce qui auroit donné la correction $\varepsilon = -0,000841836$, c'eſt-à-dire, pour z corrigé $1,137158164$.

XXIV.

Autre exemple. Suppoſons préſentement qu'il s'agiſſe de réſoudre de l'équation $x^3 - 13x + 5 = 0$, je fais $x = -z\sqrt{13}$, & elle ſe change en $z^3 - z = \frac{5}{13\sqrt{13}}$, égalant donc r à $\frac{5}{13\sqrt{13}}$ dans la premiere valeur approchée $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$ de z, cette valeur devient

$$\frac{2+\sqrt{1+\frac{15}{13\sqrt{13}}}}{3},$$

& elle donne

par conféquent pour x . . . .

$$\frac{-2\sqrt{13}-\sqrt{13+\frac{15}{\sqrt{13}}}}{3}$$, c'eft-à-dire, environ $-3,784$ Si on veut avoir une valeur de x plus exacte, on fuppofera $x = -3,784 + \varepsilon$, & on fubftituera cette valeur dans l'équation $x^3 - 13x + 5 = 0$, & l'on aura en négligeant les termes affectés de ε^2 & de ε^3 l'équation $0,01020 5696 + 29,95597\,\varepsilon = 0$, qui donnera $\varepsilon = -0,000341$, & par conféquent $x = -0,784341$ valeur plus exacte que la premiere.

XXV.

Réfolution de l'équation générale du quatriéme degré.

Après avoir montré la maniere dont on parvient à la folution des équations du troifiéme degré, voyons maintenant les moyens qu'il faut employer pour réfoudre celles du quatriéme degré.

Prenant d'abord une équation générale $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ pour repréfenter toutes les équations du quatriéme degré, on réduit bientôt la difficulté à ne réfoudre qu'une équation repréfentée par $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ en faifant $y = z - \frac{1}{4}a$. Enfuite, pour réfoudre cette équation, ce qui paroît le plus fimple, c'eft de la regarder comme le produit de deux équations du fecond degré, & de faire enforte que la détermination des coëfficiens que doivent avoir les termes de ces équations du fecond ne dépendent que d'équations plus aiſées à réſoudre que la propoſée.

Soit pris d'abord $zz + xz + t = 0$ pour l'une de ces équations ; il eſt évident que l'autre devra avoir pour ſecond terme $-xz$, puiſque le produit de ces deux équations doit donner une équation dénuée du ſecond terme : ſoit donc pris pour cette ſeconde équation $zz - xz + s = 0$, en multipliant ces deux équations l'une par l'autre, on aura . . . .

$$\begin{aligned} z^4 + s\,zz &+ s\,x\,z + t\,s = 0 \\ - x^2 &- t\,x \\ + t & \end{aligned}$$

qui étant comparée avec la propoſée, donne, pour déterminer s, t, x, les trois équations $s - xx + t = p$; $sx - tx = q$; $ts = r$.

Pour faire uſage de ces trois équations, je multiplie la premiere par x, & je l'ajoute enſuite avec la ſeconde équation, j'ai alors $2sx - x^3 = px + q$, d'où je tire . .
$s = \frac{q + px + x^3}{2x}$ que je ſubſtitue dans l'équation $ts = r$, ce qui me donne . . .
$t = \frac{2rx}{x^3 + px + q}$.

Or ces deux valeurs de s & de t étant miſes dans l'équation $sx - tx = q$, j'ai enfin
$\frac{x^3 + px + q}{2} - \frac{2rx^2}{x^3 + px + q} = q$;

ou

ou $x^6 + 2px^4 + ppx^2 - q^2 = 0$
$- 4r$

La résolution d'une équation du quatriéme degré dépend d'une équation du troisiéme.

équation du sixiéme degré, qui, par la méthode de l'article XVII, se change en une du troisiéme, d'où la difficulté des équations du quatriéme degré est réduite à celle du troisiéme. Car cette derniere équation (qu'on appelle la réduite) étant résolue, on n'aura qu'à substituer la valeur de x qu'elle donne dans les équations $zz - xz + s = 0$, $zz + xz + t = 0$, ou plutôt $zz - xz + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x} = 0$ & $zz + xz + \frac{2r}{xx + p + \frac{q}{x}} = 0$, & résoudre ensuite ces équations; ou, ce qui revient au même, substituer la valeur de x dans les racines

Cette équation s'appelle la réduite.

$$z = \frac{1}{2}x \mp \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2x}} \quad \&$$

$$z = -\frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{2r}{xx + p + \frac{q}{x}} + \frac{1}{4}xx}$$

de ces deux équations, & l'on aura les quatre racines cherchées de l'équation $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$, & partant celles de l'équation proposée $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ qui l'avoit produite.

XXVI.

Il paroît d'abord par l'expression de ces valeurs, que dans le quatriéme degré, ainsi que dans le troisiéme, on ne sçauroit arriver à une seule expression pour toutes les racines de l'équation. Cependant si on remarque que la quantité x que renferment les deux expressions précédentes est nécessairement un radical quarré, puisqu'elle est venue de la résolution d'une équation où x a toujours une dimension paire, on verra sans peine que chacune des expressions précédentes peut désigner quatre racines, la premiere s'écrivant alors ainsi . . . .

Dans le quatriéme degré on peut exprimer les quatre racines par une seule formule.

$$z = \pm \tfrac{1}{2} x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}},$$

& la seconde . . . .

$$z = \mp \tfrac{1}{2} x \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}xx - \frac{2r}{xx + p \pm \frac{q}{x}}}.$$

Ces deux équations paroissant d'abord différentes, on peut craindre de s'être trompé dans le raisonnement précédent, puisqu'il semble mener à une absurdité, qui seroit d'avoir huit racines pour une équation du quatriéme degré; mais il est aisé de voir qu'elle n'est qu'apparente; car l'identité de ces deux expressions se réduit à celle de . . . .

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}xx - \frac{2r}{xx + p \mp \frac{q}{x}}} \text{ \& de . .}$$

$$\sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}, \text{ c'est-à-}$$

dire, de $-\frac{1}{2}xx-\frac{1}{2}p\mp\frac{q}{2x}$, & de $-\frac{2r}{xx+p\mp\frac{q}{x}}$. Or l'identité de ces deux dernieres quantités ne ſçauroit manquer d'avoir lieu auſſi-tôt que x a été déterminée par l'équation $x^6+2px^4+p^2x^2-q^2=0$,
$-4r$
puiſque cette équation ſe tire évidemment de l'égalité de $-\frac{1}{2}xx-\frac{1}{2}p\mp\frac{q}{2x}$ & de $\frac{-2r}{xx+p\mp\frac{q}{x}}$.

XXVII.

Des deux expreſſions précédentes, la premiere $z=\pm\frac{1}{2}x\pm\sqrt{-\frac{1}{4}xx-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2x}}$ étant la plus aiſée à employer, ſera celle qu'il faudra choiſir, & les quatre valeurs générales de z qu'elle exprime à-la-fois ſont. . . .

$$z=\frac{1}{2}x+\sqrt{-\frac{1}{4}xx-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2x}}$$
$$z=\frac{1}{2}x-\sqrt{-\frac{1}{4}xx-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2x}}$$
$$z=-\frac{1}{2}x+\sqrt{-\frac{1}{4}xx-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2x}}$$
$$z=-\frac{1}{2}x-\sqrt{-\frac{1}{4}xx-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2x}}$$

XXVIII.

Comme l'équation d'où l'on tire la valeur de x, donne néceſſairement trois valeurs de x précédées du ſigne $\pm$, & qu'on n'a aucune raiſon pour préférer l'une de ces valeurs aux autres; que d'ailleurs on ſçait qu'une équation du quatriéme degré ne ſçauroit avoir plus de quatre racines, il vient aſſez naturellement dans l'eſprit qu'on peut indifféremment employer celle qu'on voudra de ces trois valeurs de x précédée de $\pm$, & en tirer cependant toujours la même expreſſion pour les quatre valeurs de z.

On arrive aux mêmes racines d'une équation du quatriéme degré quelle que ſoit celle des racines de la réduite qu'on ait priſe.

Mais quoiqu'après avoir un peu réfléchi ſur la théorie des équations, on ne puiſſe guères douter que cela ne ſoit ainſi, on doit ſouhaiter de s'en aſſurer par le détail du calcul.

Pour y parvenir, ce qui ſe préſente le plus naturellement, c'eſt de trouver les trois valeurs de x précédées de $\pm$ que donne l'équation $x^6 + 2px^4 + \begin{matrix} pp \\ -4r \end{matrix} x^2 - q^2 = 0$, & les ſubſtituer enſuite l'une après l'autre dans l'expreſſion . . . .

$$z = \pm \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$$

afin de reconnoître l'identité des trois différentes expreſſions qu'on auroit par ces ſubſtitutions; mais le calcul que cette méthode demanderoit eſt ſi long, qu'on ne ſçauroit ſe réſoudre à le ſuivre juſqu'au bout. Voici une autre maniere de parvenir au même réſultat.

Je remarque d'abord que quelle que ſoit

la valeur de x que je substitue dans l'expression générale. . . . .

$$z = \pm \tfrac{1}{2} x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4} xx - \tfrac{1}{2} p \mp \frac{q}{2x}},$$

les quatre valeurs de z exprimées à-la-fois par cette quantité, pourront être représentées par $i + k$, $i - k$, $-i + l$, $-i - l$: ou, ce qui revient au même, que les quatre racines de l'équation $z^4 + pzz + qz + r = 0$ pourront être représentées par $z - i - k$, $z - i + k$, $z + i - l$, $z + i + l$; i désignant alors la partie $\frac{1}{2} x$ de la valeur de z, & k & l les deux quantités. . . . .

$$\sqrt{-\tfrac{1}{4} xx - \tfrac{1}{2} p - \frac{q}{2x}} \text{ \& } \ldots\ldots$$

$$\sqrt{-\tfrac{1}{4} xx - \tfrac{1}{2} p + \frac{q}{2x}},$$ multipliant donc ces quatre racines les unes par les autres, j'ai l'équation . . . .

$$\begin{array}{llll} z^4 - 2ii\,z^2 & - 2ikk\,z + & i^4 & = 0 \\ \quad - kk & + 2ill & - iikk & \\ \quad - ll & & - iill & \\ & & + kkll & \end{array}$$

qui étant comparée à $z^4 + pzz + qz + r = 0$ donne les équations. . . . .

$$p = -2ii - kk - ll, \quad q = -2ikk + 2ill$$
$$r = i^4 - iikk - iill + kkll$$

par lesquelles l'équation. . . . .

$$\begin{array}{l} x^6 + 2px^4 + ppx^2 - q = 0 \\ \qquad\qquad\quad - 4r \end{array}$$

se change en. . . . .

$$\begin{array}{llll} x^6 - 4ii\,x^4 & + 8iikk\,x^2 & - 4iik^4 & = 0 \\ \quad - 2kk & + 8iill & + 8iikkll & \\ \quad - 2ll & + k^4 & & \\ & - 2kkll & - 4iil^4 & \\ & + l^4 & & \end{array}$$

dont ls racines sont

$$x = \pm 2i;\ x = \pm k \pm l;\ x = \pm k \mp l;$$

or, si on substitue présentement celle qu'on voudra de ces valeurs de x dans les quatre expressions contenues dans . . . .

$$z = \pm \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \frac{p}{2} \mp \frac{q}{2x}}$$

ou plutôt dans. . . . .

$$z = \pm \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx + ii + \tfrac{1}{2}kk + \tfrac{1}{2}ll \pm \frac{ill - ikk}{x}}$$

on verra qu'il en viendra également les quatre valeurs de z; . . . .

$$i + k,\ i - k,\ -i + l,\ -i - l.$$

XXIX.

La méthode précédente fournit non-seulement le moyen de démontrer que les trois racines de la réduite. . . . .

$$\begin{array}{l} x^6 + 2p\,x^4 + pp\,xx - qq = 0, \\ \qquad\qquad - 4r \end{array}$$

donnent le même résultat par leur substitution dans l'équation $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$; elle met de plus à portée de remarquer une vérité importante sur les équations du quatriéme degré;

c'eſt que leurs racines ſont toujours ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, ou bien que des quatre racines deux ſont réelles, & les deux autres imaginaires. Car il n'eſt pas poſſible de faire d'autres ſuppoſitions pour les quatres racines de l'équation donnée, auſſi-tôt qu'on eſt aſſuré, comme on vient de l'être, que ces quatre racines ſont toutes exprimées à-la-fois par la formule. . . . .

Les racines d'une equation du quatriéme degré ſont toutes réelles ou toutes imaginaires ou deux réelles & deux imaginaires.

$$\pm \tfrac{1}{2} x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4} xx - \tfrac{1}{2} p \mp \frac{q}{2x}}.$$

XXX.

En jettant les yeux ſur cette valeur des racines des équations du quatriéme degré, on croiroit volontiers, à cauſe que x eſt un radical quarré, que lorſque quelques-unes de ces racines ſont imaginaires, elles pourroient être des quantités imaginaires d'une autre nature que celles qu'on rencontre dans le ſecond degré; c'eſt-à-dire, qu'au lieu d'être ſimplement la ſomme d'une quantité réelle, & de la racine d'une quantité réelle, mais négative, telle, par exemple, qu'eſt $a + \sqrt{-b}$, elles pourroient être des quantités compoſées de racines imaginaires ſimples, & de la racine d'autres quantités en partie réelles & en partie imaginaires, comme ſeroit $\sqrt{-b} + \sqrt{a + \sqrt{-b}}$: mais il eſt aiſé de s'aſſurer que toutes les racines imaginaires du quatriéme degré peuvent ſe réduire, ainſi que celles du ſecond, à la ſomme de quantités réelles & de la racine de quantités réelles négatives. Car

Les racines imaginaires du quatriéme degré, ſont de même nature que celles du ſecond.

ayant vû dans les articles précédens que, lorsqu'on veut trouver la valeur de z, on peut choisir à volonté entre les valeurs de xx que donne la réduite, & remarquant d'ailleurs par la théorie des équations que cette réduite qui a toujours pour dernier terme ou produit des racines, une quantité qq négative, doit par conséquent avoir nécessairement une valeur de xx positive, on verra que x pourra toujours être une quantité réelle, & que, dans ce cas, lorsque $\sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$ sera imaginaire, ce ne sera autre chose que la racine d'une quantité réelle & négative.

XXXI.

Lorsque des quatre racines deux sont réelles & deux imaginaires, on résout exactement l'équation.

Une autre remarque que peut fournir encore l'article XXVIII, c'est que toutes les fois que des quatre racines deux seront imaginaires & deux réelles, la réduite. . . . .

$$x^6 + 2px^4 + \begin{matrix} pp \\ -4r \end{matrix} x^2 - qq = 0$$

sera du nombre des équations exactement résolues par la formule de l'article VI, c'est-à-dire, qu'on arrivera alors à la solution complette de l'équation. . . . .

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0.$$

C'est le contraire lorsque les quatre racines sont toutes réel-

Au contraire, lorsque les quatre racines seront, ou toutes réelles, ou toutes imaginaires, l'équation réduite ne pourra pas se résoudre par la formule de l'article VI, & par conséquent l'on ne parviendra pas en ce cas à la solution de l'équation . . . . les ou toutes imaginaires.

$$z^4 + p z^2 + q z + r = 0.$$

Ces deux vérités se tirent de ce que la réduite

$$\begin{array}{llll} x^6 - 4iix^4 & + 8iikkx^2 & - 4iik^4 & = 0 \\ \quad - 2ll & + 8iill & + 8iikkll & \\ \quad - 2kk & + k^4 & - 4iil^4 & \\ & - 2kkll & & \\ & + l^4 & & \end{array}$$

est le produit des trois racines $xx - 4ii$, $xx - kk - 2kl - ll$, $xx - kk + 2kl - ll$, or, si l'une des deux quantités k ou l seulement est imaginaire, les deux racines. . . . . $xx - kk - 2kl - ll$, $xx - kk + 2kl - ll$ sont imaginaires, & par conséquent la réduite est alors résoluble par la formule de l'article VI.

Si, au contraire, k & l sont toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires, les trois racines $xx - 4ii$, $xx - kk - 2kl - ll$, $xx - kk + 2kl - ll$, de la réduite seront toutes trois réelles, & par conséquent la formule de l'article VI ne pourra pas les donner ; ainsi dans le quatriéme degré, comme dans le troisiéme, les formules de la résolution ne sçauroit s'appliquer qu'aux équations qui ont deux racines imaginaires.

XXXII.

Lorsqu'on aura une équation du quatriéme Maniere de distinguer le cas des quatre racines réelles de celui des quatre imaginaires.

degré à résoudre, & qu'on aura formé par son moyen la réduite. . . . .

$$x^6 - 2px^4 + ppx^2 - qq = 0,$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad - 4r$$

si on trouve qu'elle échappe à la formule de l'article VI, & qu'on se propose de sçavoir si alors les quatre racines sont réelles, ou si elles sont toutes quatre imaginaires, on y parviendra aisément en partant des deux réflexions suivantes qui se présentent assez naturellement lorsqu'on examine la réduite de l'article XXVIII.

1°. Dans le cas où les quatre racines sont réelles, la réduite . . . .

$$\begin{array}{llll} x^6 - 4ii\,x^4 & + 8iikk\,x^2 & - 4iik^4 = 0, & \text{ou} \\ \quad - 2kk & + 8iill & + 8iikkll & \\ \quad - 2ll & + k^4 & - 4iil^4 & \\ & - 2kkll & & \\ & + l^4 & & \end{array}$$

Conditions des quatre racines réelles.

$x^6 - 2 \times \overline{2ii + kk + ll} \times x^4 + \overline{8ii \times \overline{kk + ll} + \overline{kk - ll}^2}$ $\times x^2 - 4ii \times \overline{kk - ll}^2 = 0$ a nécessairement un second terme négatif & un troisiéme terme positif, puisque $- 2 \times \overline{2ii + kk + ll}$ ne sçauroit être ni zéro, ni positif, tant que i, k, l, sont des quantités réelles, & que $8ii \times \overline{kk + ll} + \overline{kk - ll}^2$ ne sçauroit non plus être ni zéro, ni négatif dans les mêmes conditions.

2°. Si, au contraire, les quatre racines ſont imaginaires ; ou, ce qui revient au même, ſi kk & ll ſont négatifs, la réduite qui doit alors s'écrire ainſi . . . .

$$\begin{array}{llll} x^6 & -4iix^4 & -8iikkx^2 & -4iik^4 = 0, \\ & +2kk & -8iill & +8iikkll \\ & +2ll & +k^4 & -4iil^4 \\ & & -2kkll & \\ & & +l^4 & \end{array}$$

ou, ce qui revient au même. . . . .

Conditions des quatre racines imaginaires.

$$\overline{x^6 + 2\times\overline{kk+ll-2ii}\times x^4 + \overline{kk+ll}\times\overline{kk+ll}-8ii-4kkll}$$

$\times x^2 - 4ii\times\overline{kk-ll}^2$ ne ſçauroit jamais avoir à-la-fois, & le ſecond terme négatif & le troiſiéme poſitif. Car, ſi $kk+ll$ eſt plus petit que $2ii$, ce qui rendroit le ſecond terme négatif, le troiſiéme terme, dont le coëfficient eſt $\overline{kk+ll}\times\overline{kk+ll-8ii}-4kkll$ ſera néceſſairement négatif.

XXXIII.

Toute équation du quatriéme degré ſans ſecond terme, & qui a le troiſiéme poſitif, a des racines imaginaires.

L'inſpection de l'équation. . . . .

$$\begin{array}{lll} z^4 & -2iiz^2 & -2ikkz - \&c. \\ & -kk & +2ill \\ & -ll & \end{array}$$

donnée dans le même article XXVIII fournit une remarque, par laquelle on peut reconnoître en quelques rencontres ſi une équation qui doit avoir ſes quatre racines, ou toutes réelles, ou toutes imaginaires, eſt dans le premier de ces deux cas, ou dans le ſecond. C'eſt que toute équation du quatriéme degré dont le ſecond terme eſt évanoui, & dont le troiſiéme eſt poſitif, doit avoir néceſſairement des racines imaginaires, puiſque le troiſiéme terme de toutes ces équations repréſenté par .... $\overline{-2ii+kk+ll} \times zz$, ne ſçauroit jamais être poſitif tant que ii, kk, ll, ſeront poſitifs : c'eſt-à-dire, tant que les racines ſeront réelles. Or, dès qu'on ſçaura qu'une équation du quatriéme degré a des racines imaginaires, & qu'on aura reconnu d'ailleurs qu'elle doit avoir ſes quatre racines ou toutes réelles, ou toutes imaginaires, on ne ſera plus embarraſſé à ſçavoir lequel de ces deux cas a lieu.

XXXIV.

Lorſqu'on aura reconnu que les quatre racines d'une équation du quatriéme degré ſont réelles, avant d'entreprendre de réſoudre par approximation ſa réduite pour avoir la valeur de x à ſubſtituer dans celle de z, il ſera à propos d'examiner par les méthodes de la troiſiéme Partie, ſi quelques-unes de ces racines ne ſeroient pas commenſurables. S'il n'y en avoit qu'une, on n'en ſeroit guères plus avancé pour avoir les trois autres, puiſqu'alors il reſteroit à réſoudre une équation du troiſiéme degré, dont les trois racines ſeroient réelles. Mais si l'équation du quatriéme degré avoit deux racines commensurables, elle n'offriroit plus aucune difficulté, aussi-tôt que ces deux racines seroient trouvées, parce qu'alors il ne resteroit plus qu'une équation du second degré à résoudre.

XXXV.

Avantage qu'on trouve à chercher les diviseurs commensurables dans la réduite plutôt que dans la proposée.

Lorsqu'une équation du quatriéme degré a deux racines commensurables, on peut les reconnoître plus aisément par sa réduite, que par elle-même ; car il est clair alors que dans les quatre valeurs de z représentées généralement par $i+k$; $i-k$; $-i+l$; $-i-l$; i ne pourra jamais être qu'une quantité commensurable, & partant dans la racine $xx-4ii$ de la réduite, $4ii$ représentera une quantité quarrée & commensurable : or, par cette réflexion on peut diminuer beaucoup les tentatives néceſſaires dans la méthode de la troisiéme Partie, articles XII & XIII, puisqu'il ne faudra chercher dans les diviseurs du dernier terme qu'une quantité quarrée, & prise avec le signe $-$.

Il en seroit de même si l'équation $z^4+pzz+qz+r=0$ devoit se décomposer en deux équations du second degré dont les coëfficiens fussent commensurables, au lieu d'employer alors la méthode de la troisiéme Partie, article XIX, il faudra employer celle des articles XII & XIII, pour chercher les diviseurs de la réduite, & ne choisir parmi les diviseurs du dernier terme que les quantités quarrées & affectées du signe $-$.

XXXVI.

Lorſqu'une équation où x eſt au quatriéme degré, a deux racines commenſurables, ou qu'elle eſt ſimplement compoſée de deux diviſeurs de deux dimenſions, on peut dire qu'elle n'eſt pas véritablement du quatriéme degré, & il eſt bien ſimple alors qu'elle ſe réſolve par la méthode du ſecond degré; mais il y a des équations néceſſairement du quatriéme degré, qui ſe réduiſent cependant à la méthode du ſecond degré. Telles ſont les équations traitées dans la quatriéme Partie, article XX, & les équations ſemblables à . . . .

$$\begin{array}{l} z^4 + 2aazz - 8aabz + a^4 = 0, \\ \quad - 4a^3bzz \qquad\qquad - 4a^3b \end{array}$$

qui eſt le produit des deux équations . . . $zz - 2z\sqrt{ab} + aa - 2a\sqrt{ab} = 0$ & $zz + 2z\sqrt{ab} + aa + 2a\sqrt{ab} = 0$, & qui a pour ſes quatre racines. . . . . . $\pm\sqrt{ab} \pm \sqrt{ab - a^2 \pm 2a\sqrt{ab}}$, dans leſquels il n'entre point d'autres radicaux que ceux du ſecond degré.

Maniere de connoître les équations du quatriéme degré, dont les racines n'ont point d'autres radicaux que ceux du ſecond degré.

On peut diſtinguer aiſément toutes les équations qui ſont dans ce cas; car, puiſque dans ces équations la partie $\pm \frac{1}{2}x$ de l'expreſſion $\pm \frac{1}{2}x + \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$ de la valeur de z; ou, ce qui revient au même la partie i commune aux quatre racines $i+k$, $i-k$, $-i+l$, $-i-l$, doit être un ſimple radical du ſecond degré, à cauſe que x ne monte qu'à des dimenſions paires dans la réduite ; il faut néceſſairement que dans toutes les équations de cette nature, la réduite ſoit diviſible par $xx \pm$ une quantité commenſurable : or les diviſeurs de cette eſpéce ſont aiſés à trouver par la méthode des articles XII & XIII de la troiſiéme Partie.

XXXVII.

Lorſqu'on aura reconnu que les quatre racines d'une équation du quatriéme degré ſont toutes réelles, & que cette équation n'a aucun diviſeur commenſurable ni affecté de radicaux du ſecond degré ; on cherchera une des racines de ſa réduite par la méthode d'approximation enſeignée article XXI, & après l'avoir ſubſtituée à la place de x dans la formule générale. . . . .

Ce qu'il faut faire pour avoir les valeurs approchées des quatre racines, lorſqu'elles ſont réelles.

$$z = \pm \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}},$$

on aura les valeurs approchées des quatre racines cherchées.

XXXVIII.

Dans la vûe d'appliquer les régles précédentes, ſoit pris pour exemple l'équation $z^4 + 3z^2 + 2z - 3 = 0$. En comparant cette équation à l'équation générale

Application des methodes precedentes à un exemple.

$z^4 + p z^2 + q z + r = 0$, on aura $p = 3$, $q = 2$, $r = -3$. Et ces valeurs étant subſtituées dans la réduite générale

$$x^6 + 2pp x^4 + pp x x - qq = 0,$$
$$\qquad\qquad\qquad - 4r$$

la changeront en . . . .

$$x^6 + 6 x^4 + 21 x^2 - 4 = 0.$$

Pour réſoudre cette équation, ſoit d'abord fait $x^2 = u - 2$, afin de faire évanouir le ſecond terme, & la réduite ſe changera en $u^3 + 9u - 30 = 0$; laquelle, ſuivant l'article XIV, eſt de celles qui n'ont qu'une racine de réelle, & eſt par conſéquent dans le cas d'être réſolue par la formule générale de l'article VI, d'où l'on voit que l'équation propoſée aura deux racines réelles & deux imaginaires, & qu'on parviendra par conſéquent à les exprimer toutes les quatre par les formules précédentes.

On auroit pû reconnoître (article XXXIII) que cette équation devoit avoir des racines imaginaires par cela ſeul, que ſon troiſiéme terme $2z$ avoit un coëfficient poſitif.

Réſolvant maintenant l'équation $u^3 + 9u - 30 = 0$, par la formule de l'article VI, on a pour ſa racine réelle $u = \sqrt[3]{15 + 6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15 - 6\sqrt{7}}$. Donc $\pm\sqrt{u - 2}$, ou

$$x = \pm\sqrt{\sqrt[3]{15 + 6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15 - 6\sqrt{7}} - 2}.$$

Si on ſubſtitue enſuite cette valeur de x dans la valeur générale . . . .

$z = \pm\frac{1}{2}x$

$$z = \mp \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \frac{p}{2} \mp \frac{q}{2x}}$$

qui est dans le cas présent . . . .

$$x = \pm \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{3}{2} \mp \frac{1}{x}}$$

on aura pour les deux racines réelles de l'équation proposée . . . .

$$z = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{15+6\sqrt{7}} + \sqrt{15-6\sqrt{7}} - 2}$$

$$\pm\sqrt{-\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}} - \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{15-6\sqrt{7}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15-6\sqrt{7}} - 2}}}$$

& pour les deux imaginaires . . . .

$$z = +\tfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15-6\sqrt{7}} - 2}$$

$$\pm\sqrt{-\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}} - \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{15-6\sqrt{7}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15-6\sqrt{7}} - 2}}}.$$

XXXIX.

Soit présentement l'équation $z^4 - 6z^2 + 8z - 1 = 0$, en la comparant à l'équation générale, on en tirera $p = -6$, $q = 8$, $r = -1$. Et partant, la réduite sera $x^6 - 12x^4 + 40x^2 - 64 = 0$, dans laquelle faisant $x^2 = u + 4$, afin que le second terme disparoisse, on aura $u^3 - 8u - 32 = 0$ qui étant comparée à la for- Autre exemple.

mule générale de l'article VI donnera une ſeule valeur réelle, laquelle ſera . . . . . .

$$\sqrt[3]{16+\frac{80}{3\sqrt{3}}}+\sqrt[3]{16-\frac{80}{3\sqrt{3}}}\text{, ou}$$

$$u=\frac{2\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}+2\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}}$$

qui en ſe ſervant de la méthode de la quatriéme Partie, article XXXV, ſe réduit à

$$u=\frac{2\times\overline{1+\sqrt{3}}-2\times\overline{1-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}=4.$$

Subſtituant préſentement cette valeur de u dans $x=\sqrt{u+4}$, on aura $x=\sqrt{8}$, par laquelle on changera l'équation générale . . .

$$z=\pm\tfrac{1}{2}x\pm\sqrt{-\tfrac{1}{4}xx-\frac{p}{2}\mp\frac{q}{2x}}$$

en $z=\mp\sqrt{2}\pm\sqrt{1\mp\sqrt{2}}$ qui donne pour les deux racines réelles de l'équation propoſée $-\sqrt{2}\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$, & pour les deux imaginaires $+\sqrt{2}\pm\sqrt{1-\sqrt{2}}$. Ainſi l'équation propoſée $z^4-6z^2+8z-1=0$ eſt de celles qui peuvent ſe décompoſer en deux équations du ſecond degré, dont les coëfficiens ſont incommenſurables ; car chacune des doubles racines précédentes ſont les racines des équations $zz+2z\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=0$ & $zz-2z\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=0$.

On auroit pû, ſans appliquer la formule de l'article VI, & par conſéquent ſans avoir beſoin de la méthode de la quatriéme Partie, article XXXV, réſoudre l'équation $x^6 - 12x^4 + 40x^2 - 64 = 0$, en employant la méthode de la troiſiéme Partie, articles XII & XIII. Car on auroit trouvé, par cette méthode, que cette équation avoit pour diviſeur $xx - 8 = 0$.

XL.

Soit l'équation $y^4 + 16y^3 + 99y^2 + 228y + 144 = 0$. En ſubſtituant dans cette équation $z - 4$ pour y, afin de faire évanouir le ſecond terme, on la changera en $z^4 + 3z^2 - 52z + 48 = 0$, qui étant comparée à l'équation générale $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ donnera $p = 3$; $q = -52$; $r = 48$, & partant la réduite . . . . $x^6 + 6x^4 - 183x^2 - 2704 = 0$, de laquelle faiſant évanouir le ſecond terme par la ſubſtitution de $u - 2$ à la place de x^2, on tirera $u^3 - 195u - 2322 = 0$ qui eſt réſoluble par la formule de l'article VI, & fait voir par conſéquent que l'équation propoſée eſt de celles qu'on peut réſoudre exactement, c'eſt-à-dire, de celles qui ont deux racines réelles & deux racines imaginaires. Pour les trouver, ſoit donc employée la formule de l'article VI, à réſoudre l'équation $u^3 - 195u - 2322 = 0$,

Troiſiéme exemple.

on aura pour la seule valeur réelle qu'elle donne . . . .

$$u = \sqrt[3]{1161 + \sqrt{1073296}} - \sqrt[3]{-1161 + \sqrt{1073296}}$$

qui se réduit à . . . .

$$\sqrt[3]{1161 + 1036} - \sqrt[3]{-1161 + 1036},$$

ou à $\sqrt[3]{2197} + \sqrt[3]{-125}$, ou enfin à 18; substituant présentement cette valeur de u dans $x = \sqrt{u - 2}$ on a $x = \sqrt{10} = 4$ qu'il ne s'agit plus que de substituer dans la valeur générale de . . . .

$$z = \pm \tfrac{1}{2} x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4} xx - \frac{p}{2} \mp \frac{q}{2x}}$$

on aura par cette substitution pour les deux racines réelles de l'équation . . . .

$$z^4 + 3 z^2 - 52 z + 48 = 0;$$

$z = 2 \pm \sqrt{-4 - \frac{3}{2} + \frac{13}{2}}$, ou $z = 2 \pm 1$, c'est-à-dire, ou 3, ou 1, & pour les deux racines imaginaires . . . .

$z = -2 \pm \sqrt{-4 - \frac{3}{2} - \frac{13}{2}}$, ou $z = -2 \pm \sqrt{-12}$. Substituant ensuite ces quatre valeurs dans $y = z - 4$, on aura pour les quatre racines de l'équation proposée $y^4 + 16 y^3 + 99 y^2 + 228 y + 144 = 0$; $y = -1$; $y = -3$; $y = -6$

$+\sqrt{-12}$. On auroit pû trouver ces racines, tant par la méthode de la troisiéme Partie, articles XII & XIII, que par celle de l'article XXIV de la même Partie, en les cherchant dans l'équation $y^4+16y^3+99y^2+228y+144=0$. Car, par la premiere de ces méthodes, on auroit trouvé les diviseurs simples $y+1$; $y+3$, & pour quotient $yy+12y+48$; & la seconde auroit donné les deux diviseurs de deux dimensions $yy+4y+3$, & $yy+12y+48$. On auroit encore pû trouver ces racines bien facilement en cherchant les diviseurs de la réduite par le moyen de la méthode des articles XII & XIII de la troisiéme Partie, & en ajoutant à cette méthode l'attention de ne choisir parmi les diviseurs du nombre 2704, que des nombres quarrés, & de ne les employer qu'avec le signe —. On auroit trouvé alors que la réduite a pour diviseur de cette espéce $xx-16=0$ qui donne $x=4$.

XLI.

Soit l'équation $z^4+11z^2-2z+56=0$. En la comparant à $z^4+pz^2+qz+r=0$, il vient $p=11$, $q=-2$, $r=56$. D'où la réduite est $x^6+22x^4-103x^2-4=0$ qui devient $u^3-\frac{793}{3}u+\frac{41582}{27}=0$, après avoir fait évanouir le second terme. Cette équation étant de celles qui échappent à la formule de l'article VI, l'équation proposée doit être, ou de celles qui ont leurs quatre racines réelles, ou de celles qui les ont toutes quatre imaginaires; mais à cause du terme positif $11\, z^2$, il faut (article XXXIII), qu'il y ait des racines imaginaires: donc toutes les quatre racines le sont. On parvient ensuite à réduire ces quatre racines imaginaires à de simples racines imaginaires du second degré, en cherchant par la méthode des articles XII & XIII de la troisiéme Partie, les diviseurs de la réduite. Car trouvant $xx - 4$ pour diviseur de cette réduite, il suit que les quatre racines de l'équation proposée sont $z = +1 \pm \sqrt{-6}$ & $z = -1 \pm \sqrt{-7}$.

XLII.

Soit maintenant l'équation $z^4 - 5\, z^2 + 4\, z + 29 = 0$, qui donne par sa comparaison avec $z^4 + p\, z^2 + q\, z + r = 0$; $p = -5$; $q = 4$; $r = 29$, & par conséquent la réduite $x^6 - 10\, x^4 - 91\, x^2 - 16 = 0$; laquelle, en faisant $x^2 = u + \frac{10}{3}$, se changera en $u^3 - \frac{373}{3}\, u - \frac{10622}{27} = 0$. Or, comme cette équation est de celles que la formule de l'article VI ne sçauroit résoudre, c'est-à-dire de celles qui ont leurs trois racines réelles, il s'ensuit que les racines cherchées de l'équation $z^4 - 5\, z^2 + 4\, z + 29 = 0$ sont ou toutes quatre réelles, ou toutes imaginaires. Et si on se rappelle qu'on a vû, article XXXII, que lorsque les racines sont toutes réelles, la réduite a le second terme négatif, le troisiéme positif, &c. on en conclura que la proposée est dans le cas d'avoir toutes ses racines imaginaires à cause que le troisiéme terme $-91\,x^2$ de sa réduite est négatif.

Mais par aucune méthode connue, on ne sçauroit parvenir, ainsi que dans l'exemple précédent, à donner à ces quatre racines imaginaires, la forme ordinaire des racines imaginaires du second degré; parce que la réduite n'ayant aucun diviseur commensurable, la proposée ne sçauroit avoir ni des diviseurs commensurables, ni des diviseurs affectés de simples radicaux du second degré.

XLIII.

Soit l'équation $z^4 - 32zz - 16z - 2 = 0$, qui donne $p = -32$, $q = -16$, $r = -2$, & par conséquent la réduite $x^6 - 64\,x^4 + 1032\,x^2 - 256 = 0$. Sixiéme exemple.

Cette réduite ayant, comme on peut aisément s'en assurer, ses trois racines réelles, fait voir que la proposée doit avoir toutes ses racines réelles ou toutes imaginaires; on s'assurera facilement, par l'article XXXII, que c'est le premier de ces deux cas qui a lieu. Qu'on cherche maintenant, par la méthode des articles XII & XIII de la troisiéme Partie, les diviseurs de cette réduite, & l'on trouvera $xx - 32$; qui, au moyen de l'expression générale . . . .

$$z = \pm \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$$

donne pour les quatre racines cherchées . .

$$2\sqrt{2} + \sqrt{8+\sqrt{2}},\ 2\sqrt{2} - \sqrt{8+\sqrt{2}},$$
$$-2\sqrt{2} + \sqrt{8-\sqrt{2}},\ -2\sqrt{2} - \sqrt{8-\sqrt{2}}.$$

XLIV.

Septiéme exemple.

Soit présentement l'équation $z^4 - 18z^2 + z + 70 = 0$, qui donne la réduite $x^6 - 36x^4 + 44x^2 - 1 = 0$, ou $u^3 - 388u - 2929 = 0$, en faisant évanouir le second terme par le moyen de la transformée $x^2 = u + 12$.

Or, comme cette équation a ses trois racines réelles, & que le second terme $36x^4$ est négatif, tandis que le troisiéme $44x^2$ est positif, il s'ensuit par l'article XXXII, que la proposée a ses quatre racines réelles. De plus la réduite n'ayant aucun diviseur commensurable, ainsi qu'on peut s'en assurer, par la méthode des articles XII & XIII de la troisiéme Partie, il faut se contenter de trouver par approximation les racines cherchées.

Pour cela, on commencera par employer la méthode de l'article XXI, à la résolution de l'équation $u^3 - 388u - 2929 = 0$, & ayant trouvé 22, 74 pour la valeur de u, on la substituera dans l'équation . . . . . . $x = \sqrt{u+12}$, ce qui donnera 5, 894 pour x, & en substituant cette valeur de x dans

$$z = \pm \tfrac{1}{2} x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4} x x - \tfrac{1}{2} p \mp \tfrac{q}{2x}}$$

on aura pour les quatre racines cherchées ; $+ 3, 426$; $+ 2, 467$; $- 2, 315$; $- 3, 579$ qui ſeront fort proches des vraies ; on en auroit eu de plus exactes, ſi on avoit pouſſé plus loin la méthode de l'article XXI, pour réſoudre l'équation $u^3 - 388\, u = 2929$.

X L V.

Après avoir vû dans les réſolutions des équations, tant du ſecond, que du troiſiéme & du quatriéme degré, comment, à l'aide des ſignes radicaux, on parvient à exprimer la valeur de l'inconnue dans ces équations, il peut venir dans l'eſprit de chercher par quelle opération on retrouveroit les équations qui auroient amené une expreſſion radicale propoſée. On peut ſe propoſer, par exemple, de ſçavoir quelle eſt l'équation dont la racine ſeroit $x = \sqrt[3]{a\, b^3} + \sqrt[3]{a^2 b} + \sqrt[3]{a^2 c}$, celle dans laquelle x ſeroit $\sqrt[3]{a^3 + b^3} - \sqrt[3]{a^3 - b^3}$, &c.

Pour réſoudre tous les Problêmes de ce genre ; ou, ce qui revient au même, pour faire évanouir les radicaux d'une équation quelconque, on s'y prendra de la maniere ſuivante, qui étoit bien aiſée à imaginer, après ce qui a été enſeigné dans la deuxiéme Partie, article XXXV.

Maniere de faire évanouir les radicaux d'une équation quelconque.

On mettra à la place de chaque radical une inconnue, & l'on aura, par ce moyen; 1°. Au lieu de l'équation donnée, une nouvelle équation qui ne contiendra plus de radicaux; 2°. Autant d'équations à deux termes qu'il y avoit de radicaux dans l'équation proposée. Or chacune de ces équations à deux termes sera délivrée tout de suite de ses radicaux, en élevant ses deux membres à la puissance indiquée par l'exposant du signe radical que l'un de ses deux termes contiendra. Donc il n'y aura plus qu'à chasser de toutes ces équations délivrées de radicaux les inconnues introduites, opération que l'on a enseignée à l'article XXXV de la seconde Partie.

Exemple.

Pour éclaircir ce qu'on vient de dire par un exemple, soit proposé de faire évanouir les radicaux de l'équation $x = \sqrt[3]{a b^2} + \sqrt[3]{add}$, ayant fait $\sqrt[3]{a b^2} = y$ & $\sqrt[3]{a d d} = z$, on aura les trois équations $x = y + z$; $y^3 = a b^2$, $z^3 = a d^2$. Tirant de la premiere $y = x - z$, & la substituant dans la seconde, il viendra $x^3 - 3 x^2 z + 3 x z^2 - z^3 = a b^2$, de laquelle, avec le secours de l'équation $z^3 = a d^2$, il ne s'agit plus que de chasser z.

Pour cela, je commence par mettre dans la premiere de ces deux équations $x^3 - 3 x^2 z + 3 x z^2 - z^3 = ab^2$ à la place de z^3, $a d^2$ que donne la seconde; & elle devient $x^3 - 3 x^2 z + 3 x z^2 - a d^2 = a b^2$, de laquelle je tire . . . .

$$z^2 = \frac{a d^2 + a b^2 - x^3 + 3 x^2 z}{3 x}$$; mul-
tipliant ensuite les deux membres de cette équation par z, & mettant à la place de z^3 sa valeur $a d^2$ j'ai une nouvelle équation . . .

$$a d^2 = \frac{a d^2 z + a b^2 z - x^3 z + 3 x^2 z z}{3 x}$$

qui donne . . . .

$$z z = \frac{3 a d^2 x - a d^2 z - a b^2 z + x^3 z}{3 x^2}.$$

J'égale alors ces deux valeurs de zz, & j'en tire une équation où z n'est plus qu'au premier degré, je la résous, & j'ai . . . .

$$z = \frac{x^4 + 2 a d^2 x - a b^2 x}{a b^2 + a d^2 + 2 x^3}$$ qui étant substitué dans l'une des précédentes, par exemple, dans $x^3 - 3 x^2 z + 3 x z^2 - a d^2 = a b^2$, donne enfin l'équation . . . .

$x^9 - 3 a d^2 x^6 - 3 a b^2 x^6 + 3 a^2 b^4 x^3 + 3 a^2 d^4 x^3 - 21 a^2 d^2 b^2 x^3 = a^3 b^6 + 3 a^3 b^4 d^2 + 3 a^3 d^4 b^2 + a^3 d^6$, qui ne contient d'autre inconnue que celle qui étoit dans la proposée, & qui est délivrée de toute quantité radicale. On se tireroit de la même maniere de quelque équation qu'on eût.

Quelquefois les équations proposées sont si aisées à délivrer des radicaux, qu'il est inutile d'avoir recours à la méthode précédente, & qu'il suffit de transposer les termes, & d'élever les deux membres à la puissance indiquée par le radical qui est seul alors dans un des membres. Par exemple, ſi on avoit l'équation $x = y + \sqrt[3]{a^3 + \sqrt{a^5 x}}$, en paſſant y dans le premier membre, & élevant l'un & l'autre à la troiſiéme puiſſance, on aura une équation qui ne contiendra plus d'autre radical que $\sqrt{a^5 x}$. Mettant alors ce terme ſeul d'un côté & élevant les deux membres au quarré, on aura une équation qui ne contiendra plus de radicaux. Il en ſeroit de même dans beaucoup de rencontres.

FIN.

TABLE DES MATIERES.

PREMIERE PARTIE.

De la méthode Algébrique d'exprimer les Problêmes par des équations, & de la résolution des équations du premier degré.

LIV,

SECONDE PARTIE.

De la résolution des équations du second degré.

TROISIÉME PARTIE.

Où l'on donne quelques principes généraux pour les équations de tous les degrés, avec la méthode de tirer de ces équations, celles du premier & du second degré qu'elles peuvent renfermer.

QUATRIÉME PARTIE.

Réſolution des équations de degrés quelconques, lorſqu'elles n'ont que deux termes, ou lorſqu'en ayant trois, elles peuvent ſe réduire à celles qui n'en ont que deux, par la méthode des équations du ſecond degré, avec différentes opérations néceſſaires pour ces équations, comme l'extraction des racines, la réduction des quantités radicales, &c.

CINQUIÉME PARTIE.

Résolution des équations du troisiéme & du quatriéme degré.

Fin de la Table.

De l'Imprimerie de CHARDON.