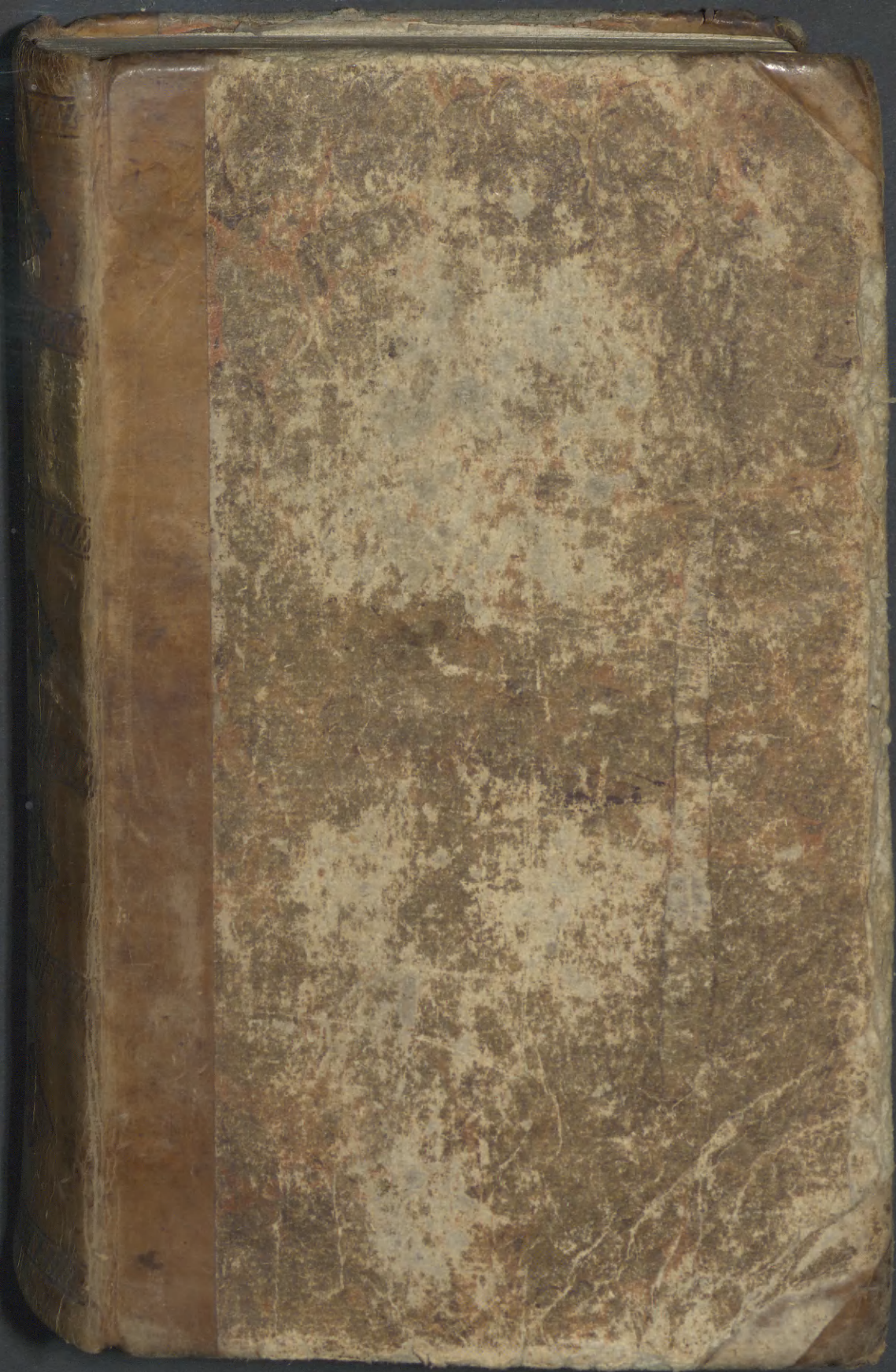




Suppl



TRAKTAT
POCZĄTKOWY
RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO
I CAŁKOWEGO,

Dozwala się drukować pod tym warunkiem, aby po wydrukowaniu nie pierwiej zaczęto wydawać, aż będą złożone w komitecie cenzury exemplarze téj księgi: jeden dla tego Komitetu, dwa dla Departamentu Ministerium oświecenia, dwa exemplarze dla CESARSKIEJ Publicznej Biblioteki, jeden dla CESARSKIEJ Akademii nauk, i jeden dla Biblioteki uniwersytetu abowskiego. Dan Włilno dnia 9 listopada 1822 r.

Rad. Stan. K. C. Czł. Ign. Reszka.

* —

TRAKTAT POCZĄTKOWY RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO,

PRZEZ

S. F. LACROIX,

przełożony na język polski z drugiego wydania r. 1806,

PRZEZ

Ś. P. ZACHARYASZA NIEMCZEWSKIEGO,

RADCĘ KOLLEGIALNEGO, PROFESSORA MATEMATYKI WYŻSZEJ
STOSOWANEJ W CESARSKIM UNIWERSYTECIE WILEŃSKIM,

a podług trzeciego wydania, w 1820 powiększonego przez
samego autora,

POPRAWIONY I WYDANY,

PRZEZ

MICHAŁA PEŁKĘ POLIŃSKIEGO,

DOKTORA FILOZOFII, PROFESSORA MATEMATYKI WYŻSZEJ STOSOWANEJ, DZIE-
KANA ODDZIAŁU NAUK FIZYCZNYCH I MATEMATYCZNYCH W CESARSKIM
UNIWERSYT. WILEŃ. I WIELU TOWARZYSTW UCZONYCH CZŁONKA.

Władysław Tyszkiewicz

WILNO. NAKŁADEM I DUKIEM A. MARCINOWSKIEGO.

1 8 2 4.



202118z

541

KRÓTKA WIADOMOŚĆ O ŻYCIU
ZACHARYASZA
NIEMCZEWSKIEGO.

ZACHARYASZ NIEMCZEWSKI, Radca Kollegialny, Professor publiczny zwyczajny matematyki wyższej stosowanej w CESARSKIM Uniwersytecie wileńskim, urodził się r. 1766, w księstwie na ówczas żmudzkiem, a teraz w gubernii wileńskiej, powiecie rosińskim, parafii wojnuckiej. Po ukończeniu nauk w szkole akademickiej krońskiej, wszedł do seminarium nauczycielskiego przy szkole wtedy głównej litewskiej r. 1788; otrzymał stopień doktora filozofii i nauk wyzwolonych, i został przeznaczony na nauczyciela do szkoły grodzieńskiej r. 1794; przeniesiony do szkoły głównej litewskiej na wice-professora matematyki wyższej stosowanej r. 1797; wyjechał do cudzych krajów dla doskonalenia się w naukach matematycznych r. 1802; obrany członkiem korespondentem towarzystwa akademicznego w Paryżu r. 1805; towarzystwa galwanicznego tamże r.

1806; powrócił do Wilna i zajął się daniem le-
kcyj r. 1808; został professorem nadzwyczajnym r.
1809, a zwyczajnym r. 1810, i w tymże roku wi-
zytorem zakładów naukowych w mieście Wil-
nie; od r. 1813 do 1817 był cenzorem ksiąg; od r.
1817 przez trzy lata sprawował urząd dziekana
oddziału nauk fizycznych i matematycznych; zakoń-
czył życie dnia 10 grudnia 1820 roku o godzinie
4tej z południa. Nie zostawił Niemezewski dzieł,
pod swém imieniem drukowanych, chociaż ciągle nad
naukami pracując, cały prawie czas na czytaniu, u-
czeniu się i pisaniu trawił. Obdarzony bystrością
pojęcia i mocną pamięcią, często w posiedzeniach,
z łatwością opowiadał długie wyjątki z pisarzy
klassycznych polskich, łacińskich, francuzkich, wło-
skich. Rzadko się zdarzają tak szczęśliwi, którym
wiele nauk zgłębić pozwolono: o Niemezewskim po-
wiedzieć można, że mu żadna zupełnie obcą nie by-
ła. Wyciąg z dziennika jego zagranicznej podróży,
a osobliwie o pobycie w Paryżu, drukowany w tłū-
maczeniu rossyjskiem w piśmie peryodyczném *Пе-
риодическое сочинение о уcnбaxxз народнаго про-
свѣщенія 1804 N. V*, i część dziennika pozostała w rę-
kopismie, zawierająca codzienne jego zatrudnienia,
poznawanie się i obcowanie z uczonymi pierwszego
rzędu we Francyi, Szwaycaryi i Włoszech, korzy-
stanie z ich ku sobie przychylności, w ułatwieniu
mu wstępu do różnych zakładów, i fabryk, opisy

miast, portów, akademij, uniwersytetów, bibliotek, rękodzielni, machyn, wynalazków, objaśnione rysunkami, i t. d., tylko dla własnej pamięci, (w języku francuzkim pisane, są najpiękniejszym świadectwem, jak usilnie sposobił się na pożytecznego dla młodzi krajowej nauczyciela. Przekładał nie mało traktatów technologicznych i rękodzielnych, niektóre z nich bezimiennie w pismach peryodycznych wileńskich umieszczał. Zostawił w rękopismach: 1) Tłumaczenie Geometrii analitycznej Biota wydania piątego, do którego tablice rytowane już od lat kilku miał gotowe. 2) Tłumaczenie Mechaniki Frankera (*Franceur*) wydania czwartego. 3) Tłumaczenie rachunku różniczkowego i całkowego P. *Lacroix* wydania drugiego. 4) Kilka rozpraw w materyach matematycznych, z tych jedna o duchu i pożytkach nauk matematycznych czytana na publicznem posiedzeniu CESARSKIEGO Uniwersytetu wileńskiego d. 30 czer. r. 1813 jest umieszczona w dzienniku wileńskim r. 1822 tom III str. 85 — 100. Z ochotą łączył się do wszystkich pożytecznych krajowi przedsięwzięć: był członkiem i dyrektorem towarzystwa typograficznego, utworzonego w Wilnie dla drukowania i taniego przedawania dzieł pożytecznych; również był członkiem i dyrektorem towarzystwa biblijnego rossyjskiego oddziału wileńskiego. Łagodnego charakteru, przyjemnej wesołości, mnóstwo obecnych w pamięci miał anekdot i zdarzeń, osobli-

wie krajowych, co go pożądanym we wszystkich zgromadzeniach czyniło; ścisły w obowiązkach, stateczny w przyjaźni, trafnie przewidujący, głęboko zastanawiający się i z rzadką jasnością szykujący swe wyobrażenia. Wylany dla rodzeństwa, pracą własną mu dopomagał. Dobroczynny za życia, uwiecznił pamięć swej cnoty, zapisując około pięciu tysięcy rubli srebrnych na wieczny fundusz na czterech ubogich uczniów przy szkole kroszkiej, sto czerwonych złotych na szpital parafii wojnuckiej, i do siedmiuset rubli srebrnych na dom wileński dobroczynności (*). Oby ten krótki rys życia cnotliwego i uczonego męża stał się bodźcem dla młodzieży, do naśladowania jego cnót i poświęcenia się naukom!

(*) *W szczegółach te zapisy są wymienione w piśmie peryodyczném. Dzieje Dobroczynności r. 1821 str. 198 i 443.*

SPIS MATERYJ

CZĘŚĆ PIERWSZA

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY.

1 — 16	<i>Wiadomości poprzednicze i zasady różniczkowania funkcyj o jednej ilości zmiennej,</i>	1
1 — 3.	Co się rozumie przez wyraz funkcyja,	1.
4 — —	Granica, którą może mieć stosunek przyrostku funkcyi do przyrostku ilości zmiennej, od której funkcyja zależy,	2.
5 — 6.	Opisania wyrazów należących do rachunku różniczkowego,	3.
7 — —	Różniczki funkcyj równych — Ilości będące granicami tej samej wielkości zmiennej,	6.
8 — 9.	Oznaczenie granicy iloczynu i granicy ilorazu dwóch ilości razem zmieniających się,	7.
10 — 16.	Prawidła różniczkowania funkcyj algebraicznych o jednej ilości zmiennej,	10.
17 — 23.	<i>Różniczkowania następne,</i>	17.
19 — 21.	Rozwinięcie jakiegokolwiek funkcyi dwówwrazu, czyli twierdzenie, albo wzór Tajlora,	19.
22 — 23	Twierdzenie albo wzór Makloryna, rozwinięcie funkcyj,	22.
24 — 38.	<i>Różniczkowanie funkcyj przestępnych,</i>	24.
24 — 27.	Funkcye wykładnicze i ich rozwinięcie,	24.
28 — 31.	Funkcye logarytmiczne i ich rozwinięcie,	27.
32 — —	Funkcye wykładnicze zwikłane,	32.
33 — 36.	Funkcye kołowe,	32.
37 — 38.	Rozwinięcie funkcyj kołowych,	37.

39 — 47.	<i>Różniczkowanie funkcyj o dwóch lub o większej liczbie ilości zmiennych,</i>	40.
39 — —	Twierdzenie Tajlora rozciągnięte do funkcyj o dwóch zmiennych,	40.
40 — —	Tosamłość współczynników różniczkowych otrzymywanych przez różniczkowania wykonywane w porządku rozmaitym,	43.
41 — 42.	Prawidła różniczkowania funkcyj o dwóch zmiennych,	44.
43 — —	Rozróżnienie różnic od różniczek cząstkowych,	46.
44 — —	Szukanie współczynników różniczkowych wyższych rzędów,	48.
45 — —	Uwagi nad rozmaitemi wyrażeniami, w których można wskazać różniczkowania funkcyj, i nad znakowaniem do tego się ściągającym,	49.
46 — —	Prawidło ogólne różniczkowania funkcyj,	50.
47 — —	Rozwinięcie na szereg funkcyj o dwóch zmiennych,	51.
48—57.	<i>Różniczkowanie zrównań jakichkolwiek o dwóch zmiennych,</i>	52.
48 — 49.	Prawidło ogólne,	52.
50 — 52.	Tworzenie różniczek następnych zrównania danego,	57.
53 — 54.	Rugowanie ilości stałych,	61.
55 — 56.	Rugowanie funkcyj zmiennych; zastosowanie do rozwinięcia funkcyj,	63.
57 — —	Użycie rachunku różniczkowego do znalezienia pierwiastków równych zrównań algebraicznych,	67.
58—74.	<i>Zastosowanie rachunku różniczkowego do teorii linii krzywych,</i>	69.
59 — —	Rozważania nad metafizyką rachunku różniczkowego,	70.
60 — 61.	Jakim linijom prostym odpowiadają różniczki,	71.
62 — —	Cecha pokazująca w którą stronę linija krzywa ma obróconą swoją wklęsłość,	73.

63 — —	Granica stosunku łuku jakiejkolwiek linii krzywej do cięciwy tego łuku,	75.
64 — —	Różniczka łuku jakiejkolwiek linii krzywej,	76.
65 — —	Różniczka powierzchni zawartej jakąkolwiek linią krzywą i jej spółprzystawami,	77.
66 — 67	Wyrażenie podstycznej, stycznej, normalnej i podnormalnej,	78.
68 — 72	Zrównania stycznej i normalnej,	79.
73 — 74	Niemalstyczne linii krzywych,	83.
75 — 82	<i>Linije ściślestyczne</i> ,	86.
75 — 76	Koło ściślestyczne, i jego oznaczenie,	86.
77 — —	Ścisłestykania się i różne stykania się w ogólności,	90.
78. — 79	Własności koła ściślestycznego; opisanie krzywości, i promienia krzywości,	92.
80 — —	Własności linii odwinionej,	94.
81 — 82	Zastosowanie teorii promieni krzywości,	96.
83—93	<i>Szukanie punktów osobliwych linii krzywych, i roztrząsanie szczególnych wartości, których współczynniki różniczkowe nabywają w pewnych przypadkach</i> ,	100.
83 — 84	Największe i najmniejsze wartości (<i>maximum et minimum</i>) przystaw i ucińków linii krzywych. Punkt przegięcia (<i>inflexion</i>), punkt zwrotu (<i>rebroussement</i>), punkt zwrotu drugiego gatunku,	100.
85 — —	Punkta mnogie,	106.
86 — —	Punkta samotne czyli przyłączone (<i>isolés ou conjugués</i>),	108.
87 — —	Czém się stają współczynniki różniczkowe w punktach osobliwych,	109.
88 — 92	Kiedy wzór Tajlora staje się niedostatecznym,	110.
93 — —	Prawidło odkrycia punktów osobliwych,	115.
94—104	<i>Szukanie prawdziwych wartości wyrażeń jawiących się pod postacią $\frac{0}{0}$</i> ,	115.
94 — 99	Prawidło ogólne na funkcyje wyraźne o jednej ilości zmiennej,	115.

100 —	Prawidło ogólne na funkeye zależące od zrównania, w którym ilości zmienne są pomieszane,	123.
101 — 104	Analityczne oznaczenie największych i najmniejszych wartości funkeyj o jednej zmiennej,	124.
105 — 111.	<i>Przykład rozbierania linii krzywej,</i>	129.
112 — 128	<i>Linije przestępne,</i>	140.
112 — 113.	Logarytmika,	140.
114 — 116.	Cykloida,	142.
117 — —	Spiralne. Spółprzystawy biegunowe,	147.
118 — 121	Różniczki spółprzystaw biegunowych, podstycznych, stycznych i t. d.,	149.
122 — 125	Przemiana spółprzystaw prostopadłych na biegunowe i wzajemnie,	152.
126 — 128	Wyrażenie promienia krzywości przez spółprzystawy biegunowe,	157.
129 — 134	<i>Zamiana ilości zmiennej niezależnej, czyli sposób zamienienia różniczki wziętej za stałą, na różniczkę, któraby stałą nie była,</i>	159.
129 — 130	Wzory zamieniania wyrażenia różniczkowego, w którym jedna różniczka uważana była za stałą, na inne w którym obie różniczki byłyby wzięte za zmienne,	159.
131 — —	Przejście od tej zamiany do związku danego,	162.
132 — —	Wykład geometryczny tych zamian,	163.
133 — —	Różniczkowanie zrównań jednoczesnych,	164.
134 — —	Rugowanie ilości zmiennej i jej różniczek między dwoma zrównaniami różniczkowymi,	164.
135 — 140	<i>Różniczkowanie zrównań zamykających więcej niż jedną ilość zmienną,</i>	165.
135 — 137	Różniczkowanie zrównań o trzech zmiennych,	165.
138 — —	Różniczkowanie zrównań zamykających więcej nad trzy ilości zmienne,	169.
139 — 140	Rugowanie ilości stałych i funkeyj dowolnych,	150.

141—152	<i>Zastosowanie rachunku różniczkowego do teorii linii krzywych,</i>	172.
141 — 143	Tworzenie się powierzchni,	172.
144 — 145	Warunek ciągłości powierzchni, zrównania różniczkowe ich przecięć,	175.
146 — 150	Linije największego spadku, płaszczyzny styczne, płaszczyzny normalne,	178.
151 — 152	Krzywość powierzchni,	182.
153—157	<i>Punkta osobliwe powierzchni krzywych, wartości największe i najmniejsze funkcji o kilku zmiennych,</i>	187.
155 — 157	Sposob analityczny oznaczenia takowych największych i najmniejszych wartości,	189.
158—164	<i>Zastosowanie rachunku różniczkowego do linii podwójnej krzywości i do powierzchni odwijalnych,</i>	193.
158 — —	Styczne linii podwójnej krzywości, płaszczyzny ściśle styczne, różniczka ich łuku,	193.
159 — 162	Powierzchnie odwijalne i płaszczyzny normalne linii krzywych,	194.
163 — 164	Różne krzywości, czyli nagięcia linii krzywych,	201.

C Z Ę Ś Ć D R U G A.

R A C H U N E K C A Ł K O W Y.

165—277	<i>Całkowanie funkcji,</i>	205.
165—181	<i>Całkowanie funkcji wymiernych o jednej ilości zmiennej,</i>	205.
165 — —	Opisanie rachunku całkowego,	205.
166 — —	Stałe ilości, które można wyprowadzić przed znak $\int$,	206.
167 — —	Całkowanie funkcji jednowyrazowych,	207.
168 — —	Całkowanie różniczki logarytmicznej,	207.
171 — —	Całkowanie funkcji ułamkowych,	208.
172 — 173	Rozkładanie ułamków na ułamki cząstkowe, i całkowanie tych cząstkowych,	210.
174 — 176	Skrócone sposoby rozkładania ułamków,	215.
177 — 180	Sposób uniknienia wyrazów urojonych,	218.

181 — —	Przykład,	224.
182—191	<i>Całkowanie funkcyj niewymiernych,</i> .	227.
185 — 186	Całkowanie [funkcyj zamykających wyraz pierwiastkowy $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$,	228.
187 — —	Wyrażenie wstawy i dostawy przez wyrazy z wykładnikami urojonemi,	231.
188 — 190	Szukanie mnożników funkcyi $x^n \pm a^n$, .	234.
191 — —	Szukanie mnożników funkcyi $x^{2n} \pm 2px^n + q$, .	238.
192—200	<i>Całkowanie różniczek dwówyrazowych,</i> .	240.
192 — —	Przypadki, w których można te różniczki u- czynić wymiernemi,	240.
193 — —	Sposób całkowania przez części,	242.
194 — 200	Sprowadzanie różniczek dwówyrazowych do innych różniczek prostszych co do wy- kładników,	242.
201—206	<i>Całkowanie przez szeregi,</i>	251.
202 — —	Wyrażenie logarytmu, wyrażenie kołowego łuku przez jego styczną,	251.
203 — 204	Szeregi rosnące i ubywające,	253.
205 — —	Wyrażenie kołowego łuku przez jego wstawę, .	256.
207—215	<i>Całkowanie funkcyj logarytmicznych i wykładniczych,</i>	260.
207 — 210	Funkcye logarytmiczne,	260.
211 — 215	Funkcye wykładnicze,	263.
216—228	<i>Całkowanie funkcyj kołowych,</i>	266.
219 — —	Wyrażenie potęg wstawy i dostawy łuku pojedynczego, przez wstawy i dostawy łuk- ków ilokrotnych,	269.
220 — —	Wyrażenie wzajemne (<i>Przypisek</i>),	272.
222 — 228	Bezsrednie całkowanie różniczek kształtu $wst^m z \cdot dost^n z$,	276.
229—243	<i>Ogólny sposób otrzymywania przybliżo- nych wartości całek,</i>	282.
229 — —	Natura całek; ilości stałe dodawane; granice całki; całki nieograniczone i ograniczone, .	282.
230 — 231	Szeregi dla otrzymania całki przez przybliże- nie,	284.
232 — 233	Jakim sposobem całka uważa się na sumę, .	287.

234 — —	Granice jej wartości,	289.
235 — 237	Stwierdzenie uwag poprzedzających przez uwagi geometryczne,	289.
238 — 239	Zastosowanie sposobu poprzedzającego,	292.
240 — —	Rozwinięcie całek przez szereg Bernullego,	296.
241 — 243	Całkowanie funkcyj różniczkowych drugiego i wyższych rzędów,	297.
244—277	<i>Zastosowanie rachunku całkowego do znalezienia powierzchni płaskich ograniczonych linijami krzywymi, do wyprostowania tych linij krzywych, do znalezienia objętości ciał zakończonych powierzchniami krzywymi, i do wymierzenia tych powierzchni,</i>	300
244—258	<i>Znalezienie powierzchni płaskich ograniczonych linijami krzywymi, czyli kwadratura linij krzywych,</i>	300.
244 — —	Parabole,	300.
245 — —	Hyperbole, i powierzchnie ich niemalstyczne,	303.
246 — 248.	Powierzchnie niemalstyczne hyperboli zwyczajnej odpowiadają logarytmom,	304.
249 — 251	Koło, Ellipsa, Hyperbola,	306.
252 — 254	Wycinki tych linij,	308.
255 — —	Logarytmika,	310.
256 — —	Linija wyrażona przez zrównanie $y = \frac{a^x}{x}$,	311.
257 — —	Cykloida,	312.
258 — —	Spiralne,	313.
259—266	<i>Wyprostowanie linij krzywych,</i>	315.
260 — —	Parabole,	315.
261 — 264	Koło, Ellipsa, i Hyperbola,	317.
265 — —	Cykloida,	318.
266 — —	Spiralne,	318.

267—277	<i>Znalezienie objętości ciał, ograniczonych powierzchniami krzywymi, znalezienie wielkości tych powierzchni; i całkowanie różniczek cząstkowych,</i>	319.
267 — 269	Objętości i powierzchnie ciał obrótowych,	319.
270 — —	Ciała ograniczone powierzchniami krzywymi w ogólności,	322.
271 — —	Całkowanie różniczek cząstkowych, czyli różniczki podwójne,	323.
272 — —	Zastosowanie do kuli,	326.
273 — —	Całki podwójne uważane jako summy,	328.
275 — —	Wielkość powierzchni krzywych w ogólności,	329.
276 — —	Zastosowanie do kuli,	331.
277 — —	Całki potrójne,	331.
278—281	<i>Całkowanie zupełnych różniczek zamykających kilka ilości samodzielnnych,</i>	333.
278 — 279	Różniczki o dwóch zmiennych,	333.
280 — —	Różniczki o większej liczbie ilości zmiennych,	337.
281 — —	Jak się wykonywa różniczkowanie pod znakiem $\int$,	339.
282—336	<i>Całkowanie zrównań różniczkowych o dwóch zmiennych,</i>	340.
282—287	<i>Oddzielenie ilości zmiennych w zrównaniach różniczkowych pierwszego rzędu,</i>	340.
283 — 284	Zrównania jednorodne,	342.
285 — —	Zrównanie pierwszego stopnia i pierwszego rzędu,	345.
286 — 287	Zrównanie Rikatego (<i>Riccati</i>),	347.
288—293	<i>Szukanie mnożnika mogącego uczynić całkownem zrównanie różniczkowe pierwszego rzędu,</i>	352.
288 — 291	Zrównanie, od którego zależy mnożnik,	352.
292 — 293	Szukanie mnożnika dla funkcji jednorodnych,	357.

- 294—297 *Zrównania różniczkowe pierwszego rzędu, w których różniczki są podniesione do potęg*, 359:
- 296 — — Zrównania, które przez różniczkowanie stają się łatwiejszemi do całkowania, . . . 362.
- 297 — — Przykład rozwiązania szczególnego, . . . 363.
- 298—320 *Całkowanie zrównań różniczkowych drugiego i wyższych rzędów*, 365.
- 298 — 299 Rozwinięcie całki zrównania różniczkowego rzędu jakiegokolwiek o dwóch zmiennych; liczba ilości stałych dowolnych w całości zamykających się, 365.
- 300 — 301 Liczba całek tych zrównań, 368.
- 302 — 304 Całkowanie jakichkolwiek zrównań, które nie zamykają ilości zmiennych pierwotnych, 372.
- 305 — 307 Całkowanie zrównań, które zamykają jedną tylko ilość zmienną, 375.
- 308 — 317 Zrównania stopnia pierwszego, a rzędu jakiegokolwiek, 377.
- 318 — 320 Zrównania jednoczesne pierwszego stopnia, 392.
- 321—328 *Rozwiązania szczególne zrównań różniczkowych pierwszego rzędu*, 396.
- 321 — 324 Ich związek z całką zupełną, 396.
- 325 — 328 Jakim sposobem one wyprowadzają się ze zrównania różniczkowego, 404.
- 329—331 *Sposoby rozwiązywania przez przybliżenie zrównań różniczkowych pierwszego i drugiego rzędu*, . . . , . 410.
- 332—336 *Rozwiązanie zadań geometrycznych zależących od zrównań różniczkowych*, 414.
- 334 — — Zadanie linii krzyżownic (*trajectoires*), . . . 416.
- 335 — — Wykreślenie geometryczne zrównań różniczkowych, 419.
- 336 — — Wykład geometryczny rozwiązań szczególnych, 421

- 337—354 *Całkowanie zrównań różniczkowych zamykających trzy lub więcej ilości zmiennych*, 424.
- 337—340 *Zrównania różniczkowe zupełne, które mogą być scałkowane przez jedno zrównanie*, 424.
- 338 — 339 *Warunek potrzebny, aby zrównanie o trzech ilościach zmiennych, w którym różniczki nie są podniesione do potęg, mogło mieć za całość jedno tylko zrównanie pierwotne*, 424.
- 340 — — *Inny warunek, gdy różniczki są podniesione do potęg*, 429.
- 341—342 *Zrównania różniczkowe zupełne, które nie mogą być scałkowane przez jedno zrównanie*, 430.
- 343—347 *Całkowanie zrównań różniczkowych częściowych pierwszego rzędu*, . . 433.
- 348—354 *Całkowanie zrównań różniczkowych częściowych wyższych rzędów nad pierwszy*, 451.
- 351 — 352. *Przykład całkowania przez szeregi*, . . . 461.
- 354 — — *Oznaczanie funkcji dowolnych znajdujących się w całkach otrzymywanych ze zrównań różniczkowych częściowych*, 464.
- 355—371 *Rachunek czyli sposób zmienności*, 466.
- 355—362. *Szukanie zmienności jakiejkolwiek funkcji*, 646.
- 355 — — *Cel tego szukania*, 466.
- 356 — 357 *Przełożenie cechy δ po cesze d , i pod cęchą f* , 467.
- — — *Jakim sposobem Euler wyraża zmienności przez różniczki częściowe (przypisek)*, . 468.
- 358 — 360. *Rozwinięcie zmienności funkcji różniczkowych i całek*, 470.
- 361 — 362. *Zrównania warunkowe potrzebne, aby funkcja różniczkowa, mogła się scałkować sama przez się*, 475.

363—371.	<i>Największe i najmniejsze wartości całek nieoznaczonych,</i>	478.
363 — —	Co to są całki nieoznaczone; cechy pokazujące wartość ich największą i najmniejszą,	478.
364 — —	Zrównania dające związek między ilościami zmiennymi,	479.
365 — 367.	Zmienności odpowiadające granicom całek założonych,	480.
368 — 369.	Szukanie linii najkrótszej między dwoma punktami,	484.
370 — —	Szukanie linii najprędszego spadu,	489.
371 — —	Największe i najmniejsze względne wartości. Przykład zagadnienia linii równoobwodowych,	491.

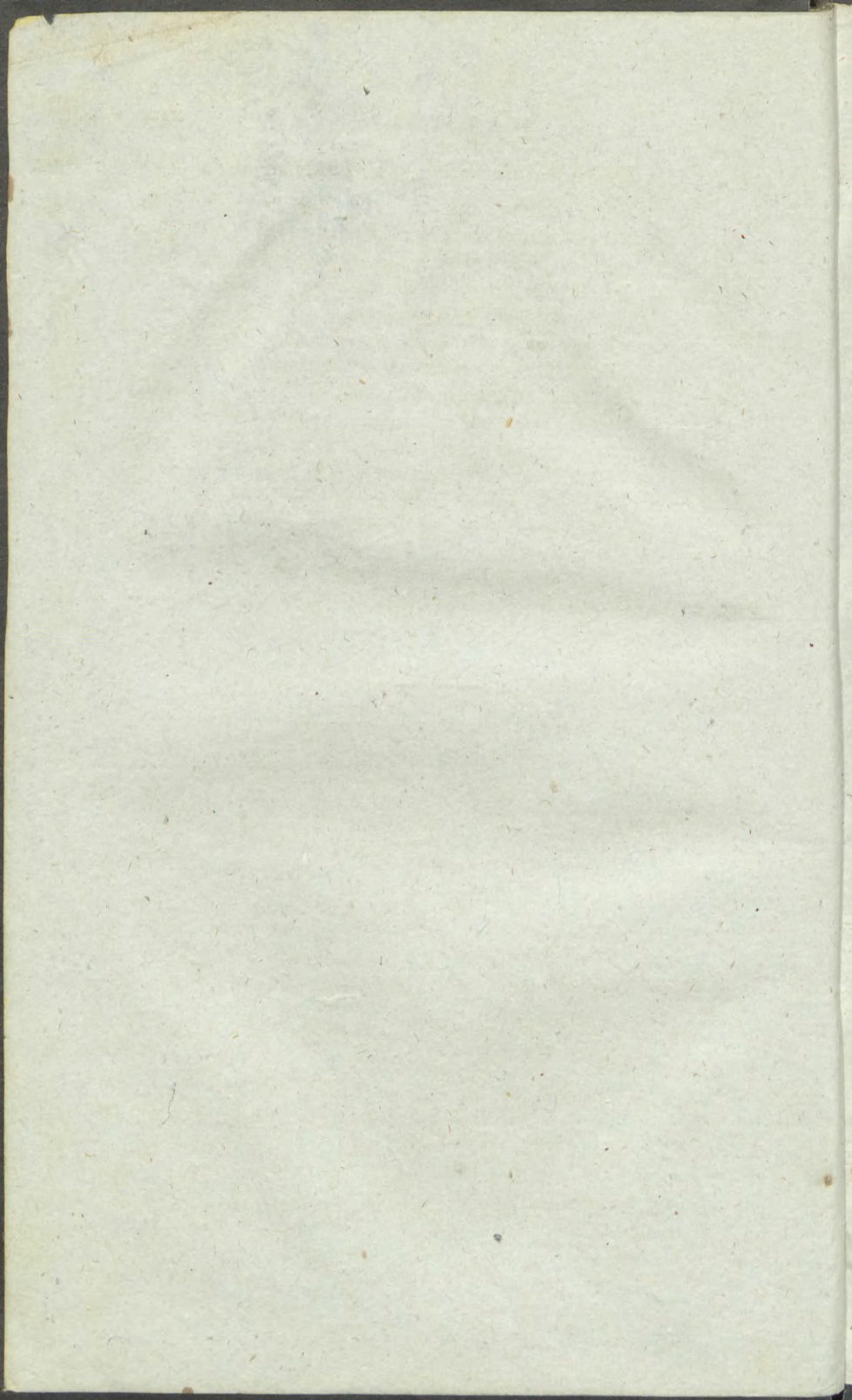
D O D A T E K.

R Ó Ź N I C E I S Z E R E G I.

372—380	<i>Rachunek różnic, czyli różnicowy,</i>	493.
373 — —	Ułożenie tablicy wartości funkcji, przez jej różnice następne,	494.
374 — 378.	Znakowanie i zasady rachunku różnic,	496.
379 — —	Funkcje mające różnice stałe,	501.
380 — —	Ułożenie tablic logarytmowych za pomocą różnic,	502.
381—387.	<i>Zastosowanie rachunku różnic do umieszczania wyrazów w szeregu, to jest do interpolacji szeregów,</i>	503.
381 — 383.	Gdy ilości, które mają być umieszczone, odpowiadają skazówkom równoróżnicowym,	503.
384 — —	Gdy skazówki są jakiegokolwiek,	508.
385 — —	Wzór Lagranża,	512.
386 — —	Jakim sposobem można użyć nieograniczonej liczby rozmaitych funkcji do tegoż samego umieszczania,	513.
387 — —	Zastosowanie sposobu umieszczania, czyli interpolacji do oznaczenia przez przybliżenie całki $\int X dx$,	514.

388—392.	<i>Podobieństwo potęg z różnicami,</i>	516.
388 — —	Przejście odróżnić do różniczek, i dowodzenie wzoru Tajlora,	516.
389 — 490.	Ogólne wyrażenie różnic przez różniczki,	517.
391 — —	Wyrażenie różniczek przez różnice,	520.
392 — —	Zastosowanie do umieszczania wyrazów, to jest do interpolacyi,	522.
393—405.	<i>Rachunek różnic odwrótny co do wyrażonych funkcyj o jednej ilości zmiennej,</i>	524.
393 — 394.	Opisania, znakowania, i własności ilości stałych wprowadzanych,	524.
395 — 400.	Całkowanie funkcyj algebraicznych wymiernych,	527.
401 — 402.	Całkowanie funkcyj przestępnych,	535.
403 — 404.	Ogólne rozwinięcie całki $\Sigma^n u$; odpowiedność między całkami, a odjemnemi potęgami,	536.
405 — —	Całkowanie przez części,	539.
406—409.	<i>Zastosowanie rachunku różnic do sumowania szeregów,</i>	541.
407 — 408.	Szeregi proste i odwrotne liczb figurowych,	542.
410—420.	<i>Całkowanie zrównań różnicowych o dwóch ilościach zmiennych,</i>	545.
411 — —	Porównanie zrównań różnicowych ze zrównaniami różniczkowemi,	546.
412 — —	Całkowanie zrównania pierwszego stopnia i pierwszego rzędu,	548.
413 — 414.	Całkowanie zrównania pierwszego stopnia, jakiegokolwiek rzędu,	550.
415 — —	Odpowiedność między temi zrównaniami a szeregami zwrótnemi,	553.
417 — 418.	Wykreślenie geometryczne zrównań różnicowych,	556.
419 — —	Zrównania, w których różnice dwóch ilości zmiennych, są także zmienne, i ogólne zadanie do tego się stosujące.	557.
420 — —	Zrównania z różnicami mieszanemi,	559.

421 — 433.	<i>Zastosowanie rachunku całkowego do szeregów,</i>	560.
421 — 423.	Summowanie szeregów za pomocą całek,	560.
424 — 425.	Summowanie różnych części wzoru Tajlora,	563.
426 — 429.	Przykłady szczególnych wartości, których nabywają całki ograniczone. Wartość okręgu koła wyrażona przez mnogość złożoną z nieograniczonej liczby mnożników, podana przez geometrę <i>Wallis</i> ,	568.
430 — —	Zastosowanie całek ograniczonych do interpolacji szeregów,	573.
431 — 432.	Summowanie szeregu $1_1 + 1_2 + \dots + 1_x$,	574.
433 — —	Przykład użycia ograniczonych całek do wyrażania całek zrównań różniczkowych cząstkowych,	578.
	Przypisek <i>A</i> o sposobie granic,	581.
	Przypisek <i>B</i> o logarytmach urojonych,	590.



POPRAWKI I DODATKI.

str.	wiersz	
8	1 (*)	<i>Za wszystkie czternaście wierszy zaczynając od pierwszego, można podstawić co następuje: Teraz jeżeli uczynimy $PQ=R$, i $pq=r$, będzie ilość r granicą ilości R, lecz że jest $Q=\frac{R}{P}$, $q=\frac{r}{p}$, przeto granica ilorazu jest także ilorazem granic.</i>
16	ostatni	<i>jest</i> <i>popraw</i> <i>w liczniku $+x^4$</i> <i>$-x^4$</i>
23	3	<i>Ta myśl nie jest prawdziwa, bo ten wzór był podany przez Jakuba Stirlinga w dziele Lineae tertii ordinis Newtonianae. prop. III.</i>
—	7	<i>jest</i> <i>popraw</i> <i>$=(a+x)^{n-1}$;</i> <i>$=n(a+x)^{n-1}$;</i>
24	20	<i>$=a^{dx}(a^x-1)$</i> <i>$=a^x(a^{dx}-1)$</i>
25	3	<i>a^x</i> <i>a^x</i>
28	23, 24, 26	<i>$\sqrt[m]{a-1}$</i> <i>$\sqrt[m]{a-1}$</i>
29	14	<i>$l(n+z)$</i> <i>$l(n+z)$</i>
36	15	<i>$\sqrt{2y-y^2}$</i> <i>$\sqrt{2Py-y^2}$</i>
38	9	<i>w końcu liczby 37, dodać. Należy jeszcze uważać, że te wzory służą też na łuki większe od okręgu koła, bo zawsze po pewnej liczbie wyrazów stają się malejącami.</i>
39	5	<i>po wierszu 5 dodać. Ponieważ nie można brać $u>1$, przeto szereg ten nie może dać na x wartości większej od ćwiartki okręgu koła, więc wyrażenie łuku przez swoją wstawę, jest mniej ogólne, niżli wyrażenie wstawy i dostawę przez łuk.</i>
40	2 zdolu	<i>jest</i> <i>popraw</i> <i>$x+k$</i> <i>$x+h$</i>
—	4 zdolu	<i>59.</i> <i>39.</i>
46	9	<i>$axydx$</i> <i>$-axydx$</i>
51	14	<i>$=yzy^{-1}$</i> <i>$=yzy^{-1}dz$</i>
72	8 zdolu	<i>figura</i> <i>figura</i>
—	18	<i>$\frac{dx}{dy}$</i> <i>$\frac{dy}{dx}$</i>
75	9 zdolu	<i>na końcu liczb. 62 dodać w przypisku. Jeżeli współczynnik różniczkowy drugiego rzędu stanie się równym zeru, trzeba iść do współczynników wyższych rzędów.</i>
84	8 zdolu	<i>po $=0$, dodać w przypisku. Należy uważać, że gdy jedna z linii AT i AD, jest $=0$, druga też będzie $=0$, bo $AD=-AT\frac{dy}{dx}$, wyjąwszy przypadek, jeźliby współczynnik różniczkowy $\frac{dy}{dx}$, miał wartość nieskończenie wielką.</i>
85	8 zdolu	<i>jest</i> <i>popraw</i> <i>y^2-xy</i> <i>$y-ax$</i>
86	26	<i>po wyrazie przedstawia dodać: dla odróżnienia go od kół po prostu stycznych,</i>

(*) Liczba sama jedna położona oznacza liczbę wierszy z góry rachowanych.

str.	wiersz		
88	14 i 15	skasować wyrazy: co jest przeciw naszemu założeniu.	
91	14	po wyrazie stałych dodać: mniej jedną, jest	popraw
92	2	nieparzystego	parzystego,
94	11	$(-\beta)$	$(\gamma-\beta)$
95	2	$\gamma-\beta=\frac{dx}{dy}$	$\varepsilon-\gamma=-\frac{dx}{dy}$
102	16	$(m-a)$	$(x-a)$
108	10	ax^2	bx^2
—	12	$(x-b)$	$(x-b)$
—	22	29	19
109	8	BF	AF
—	6 zdolu	$x=0,$	$x=a,$
110	6	$(\gamma-x)$	$(\gamma-b)$
111	6	parzyste	całe
112	1 zdolu	Ph	Ph
119	3 zdolu	staje się	stają się
124	3	Zrównanie	Zrównania
125	23	a	a
126	1	108.	102.
—	11, 13, 14	} za y trzeba położyć u	
—	15, 24,		
127	1, 20		
128	6	ma—ma	ma—mx
—	11	d^2y	d^2u
135	14	w liczniku $50a^2y$	$50a^2x$
136	6 zdolu	po wyrazie wypada dodać:	$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{50}{48}\right)^2 - 1}{52a^2 \sqrt{\frac{50}{48}}}$
—	4 zdolu	jest	popraw
137	5	(76), po wyrazie wartości dodać $x=0,$	(75), popraw
—	20	jest $dy=0$ daje $\frac{d^2y}{dx^2}=0$	popraw $\frac{dy}{dx}=0$ daje $\frac{d^2y}{dx^2}=0$
138	4	po wyrazie pierwiastek dodać $y=0,$	
—	9	po wyrazie wartości dodać $y=0$	
139	6	jest y^3-48a^2	popraw y^3-48a^2y
142	1 zdolu	$MQ=MN,$	$MQ-MN,$
144	3 zdolu	$(ay)^{\frac{5}{2}},$	$(ay)^{\frac{1}{2}}$
145	14	$2\alpha\beta'$	$2\alpha\beta'$
—	19	$2\alpha-\beta$	$2\alpha-\beta$
—	25	przystawę	ucinek
146	3	i prowadząc	i do końca promienia krzy- wości M' prowadząc
156	6 zdolu	AM,	CM (fig. 3),
157	3	$= - \left(\frac{dx^2+dy^2}{dx d^2y} \right)^{\frac{5}{2}},$	$\gamma = - \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y},$
158	17	po wyrazie stały dodać w przypisku. Gdy w zrówna- niu $t=lu$, uczynimy $t=0$, wypada $u=1$, przeto spi- ralna przechodzi przez punkt O. Ponieważ $u=0$, da- je na t , wartość nieskończenie wielką odjemną, a $u=\infty$	

str.	wiersz		
		daje wartość nieskończenie wielką dodatnią, zatem linia krzywa czyni nieograniczoną liczbę obrotów tak wewnątrz jak zewnątrz koła ON.	
		<i>jest</i>	<i>popraw</i>
162	22	$dt=0, d^2t=0,$	$d^2t=0, d^3t=0,$
167	17	$\left(\frac{du}{dz}dx + \frac{dz}{dy}dy\right)$	$\left(\frac{dx}{dz}dx + \frac{dz}{dy}dy\right)$
168	10	$+ \frac{d^2u}{dz^2} \frac{d^2z}{dx^2}$	$+ \frac{d^2u}{dz^2} \frac{d^2z}{dx^2}$
169	12	139	138
173	18	$y=ax+a,$	$y=ax+a,$
175	13	dawnego	danego
176	9	qnM	qnN
178	10 zdołu	$N'n'$	$N'm'$
183	7	$y'-y+p(z'-z)$	$y'-y+q(z'-z)$
	22	$-p^2dy$	$-q^2dy$
185	6 zdołu	$z'-z\sqrt{1+p^2+q^2}$	$(z'-z)\sqrt{1+p^2+q^2}$
186	22	$x, y, z,$	$x', y', z',$
187	2 i 3	maxima et minima	(maxima et minima)
190	13	$B-Ca$	$B+Ca$
191	3	$\frac{2F}{F}a$	$\frac{2E}{F}a$
193	8 zdołu	po wyrażeniu największość dodać: a niekiedy ni jedno ni drugie nie wypada; lecz we wszystkich przypadkach różniczki cząstkowe powinny być zero, bo w gruncie zadanie to wychodzi na zadanie: oznaczyć kulę, której środek byłby w punkcie danym. i któraby się stykała z powierzchnią daną; co dałoby nam też same zrównania (147). Dla dobrego zrozumienia tego miejsca, dość jest uważać, że w stykaniu się koła z linią krzywą, promień tego koła co do linii krzywej jest największym, jeżeli koło jest wewnętrzne, jest najmniejszym, jeżeli koło jest zewnętrzne, nie jest zaś ani jednym, ani drugim, jeżeli koło będąc ściśle styczniem, styka się z linią krzywą i razem ją przecina (77). Łatwą jest rzeczą przenieść te uważania do przestrzeni.	
		<i>jest</i>	<i>popraw</i>
208	13	lx	alx
210	3	$(an+b)^2-3b(dn+b)$	$(ax+b)^2-3b(ax+b)$
213	5 zdołu	wartości N, N', N'' ;	wartości N, N' ;
217	7	$U-Q$	U_1-Q
225	14	$Q=x^2$	$Q=x^3$
226	5 zdołu	$\beta=0;$	$\beta=1;$
229	5	$dx=-$	skasować znak =
	3 zdołu	$\frac{1}{\gamma} = l(2z+\beta)$	$\frac{1}{\gamma} l(2z+\beta)$
	1 zdołu	$z, \beta, i \gamma,$	$\gamma, a, i \beta$
230	1	$\frac{2B}{\sqrt{C}} + x\sqrt{C} + \sqrt{A+Bx+Cx^2}$	$\frac{B}{2\sqrt{C}} + x\sqrt{C} + \sqrt{A+Bx+Cx^2}$
	7	33	183
231	6 zdołu	$+Cx^2$	$-Cx^2$
	3 zdołu	dx	du
233	12	$=z\sqrt{-1}$	$=z\sqrt{-1}$

str.	wiersz	jest	popraw
		$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n-2}{2}$
236	9 zdołu		
240	3	$\text{dost}(\pi-\delta)=\text{dost}\delta$	$\text{dost}(\pi-\delta)=-\text{dost}\delta$
242	13	duv	d uv
247	5	w mianowniku 1.4.5.7	1.3.5.7
250	7 zdołu	Oba	Trzy
—	6 zdołu	po wyrazie (A); dodać i do	wzoru (C);
—	1 zdołu	jest	popraw
—		a	a
257	9	w mianowniku $\sqrt{1-x^2}$	$\sqrt{1+x^2}$
—	11	i t. d.	+ i t. d.
—	12	w mianowniku 1.2x ²	2.2x ²
260	1 zdołu	w mianowniku n+1	m+1
261	4 zdołu	$\int \frac{du}{x} (lx)^n$	$\int \frac{dx}{x} (lx)^n$
269	8	już	też
278	3	na początku wiersza położyć $\int$	popraw
—	—	jest	
—	—	$+ \int \text{dzwst}^{m-2} \text{zdst}^n z$	$+ \frac{m-1}{m+n} \int \text{dzwst}^{m-2} \text{zdst}^n z$
—	11	$\int \text{dy} \text{dost}^{m-2} \text{wst}^n y;$	$\int \text{dy} \text{dost}^{m-2} y \text{wst}^n y;$
280	3	po wyrazie nieparzyste dodać: byleby jednak ilość n była różna od ilości m, z przyczyny mianownika m+n, który przy ich równości stałby się równym zeru. Unikamy tej nieprzyzwoitości używając naprzód wzoru (C), który sprowadza $\int \frac{\text{d} \text{zdst}^n z}{\text{wst}^m z}$ do $\int \text{d} \text{zdst}^n z$, albo do $\int \frac{\text{d} \text{zdst}^n z}{\text{wst} z}$ a potem biorąc wzór (B).	
281	6 zdołu	$\frac{2}{z}$	$\frac{1}{z}$
283	5 zdołu	dodać w przypisku. Dla wyrażenia oznaczonej całki teraz wzmienionej Euler pisze $\int X dx \left[\begin{smallmatrix} x=a \\ x=b \end{smallmatrix} \right]$, a Fourier i Poisson piszą $\int_a^b X dx$.	
289	12	jest	popraw
—	15	$A_1, A_1,$	$A, A_1,$
—	19	$(b-aM),$	$(b-a)M,$
—	—	zawsze	na wszystkie wartości ilości x, inne od tych jakie daje $X=M$, albo $X=M,$
293	11	$\frac{1}{2} \sqrt{1-x}$	$2 \sqrt{1-x}$
—	16	$x-a$	$a-x$
—	24	—	—
296	12	249.	240.
—	25	$\frac{X}{1}$	$\frac{x}{1}$
297	4	$= \frac{1}{5} x^2 \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{1}{3} \int x^2 \frac{d^3 X}{dx^2},$	$= \frac{1}{5} x^3 \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{1}{3} \int x^3 \frac{d^3 X}{dx^2},$
299	7	$\int P dx - \int x dP$	$\int P dx = Px - \int x dP$

str.	wiersz	jest	popraw
300	2	$\int Xd'x$	$\int Xdx$
301	4 zdolu	$\frac{+n}{a^n}$	$\frac{m+n}{a^n}$
304	4	$m=n,$	m i n są nierówne,
—	4 zdolu	236.	246.
306	4	28851.	28600.
—	8	$YAp_m,$	$yAp_m,$
307	16	trójkąta	odcinka
312	6	$x=n$ i $x=-\infty,$	$x=-n$ i $x=-\infty;$
321	15	(245)	(267)
327	3	na końcu wiersza dodać	(249)

—	5 zdolu	jest	popraw
329	6 zdolu	a	$6sm$
333	20	fig. 48,	fig. 45,
337	1	trzech	dwóch
—	1	po wyrazie a że skasować	znak równości =
338	15	jest	popraw
341	11	w mianowniku $dx dy$	$dx dz$
347	6 zdolu	$y dx + x dy$	$y dx - x dy$
352	3	$ay^2 dx = bx^m dx,$	$by^2 dx = ax^m dx,$
—	4	w mianowniku $2i-2$	$2i-1$
358	18	w mianowniku $2i-1$	$2i+1$
363	6	$d(Nz)$	$d(Nz)$
396	20	$\frac{dy}{p=Pp}$	$\frac{dx}{y=Pp}$
449	2	$V=0$	$U=0$

po wyrazach funkcyjami M i N , dodać: Dla otrzymania tych funkcyj, nie zawsze konieczną jest rzeczą przychodzić do różniczek drugiego rzędu, często jest dostatecznem użycie rugowania między równaniami (4). Co można widzieć na równaniu $xp + yq = -y$, jak to Monge pokazał; wyprowadzimy z niego równania

$$x dy - y dx = 0, \quad x dz + y dx = 0 \quad (4'),$$

z których rugując dx , wypada

$$y dy + z dz = 0, \quad \text{ i } \quad y^2 + z^2 = a.$$

Za pomocą wartości na ilość y z tego równania wprowadzonej, równanie $x dz + y dx = 0$ zamienia się na

$$x dz + dx \sqrt{a - z^2}, \quad \text{czyli na} \quad \frac{dz}{\sqrt{a - z^2}} + \frac{dx}{x} = 0,$$

którego całka jest

$$\text{luk} \left(\text{wst} = \frac{z}{\sqrt{a}} \right) + \ln x = b;$$

podstawiając za a wartość, i przechodząc do liczb, otrzymujemy

$$\text{luk} \left(\text{wst} = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) = b,$$

z tąd na całkę równania założonego wypada

$$\text{luk} \left(\text{wst} = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) = \phi(y^2 + z^2)$$

str.	wiersz	
468	10	po wyrazie drugiej dodać: czyli δdy , jest
475	10	261. popraw
478	21	dodać w przypisku. Dla poznania różnicy zachodzącej między funkcyami wyrażonemi przez U , a wyrażonemi przez V , dosyć jest porównać wyrażenia $\frac{dx d^2 y + dy d^2 x}{dx^2}, \quad \frac{dx d^2 y - dy d^2 x}{dx^2};$ drugie sprowadzając się do $q dx$, za pomocą wartości różniczek dy i $d^2 y$, wskazanych pod liczbą 131, może być przywiedzionem do kształtu $V dx$, gdy tym czasem w pierwszym wyrażeniu nie można brać ilości y za bezsrednią funkcyą ilości x ; (więcej szczegółów w tej rzeczy znajduje się w dziele <i>Traité du Calcul</i> in 4to Tom I, str. 221). jest
187	21	581. popraw 582.

TRAKTAT POCZĄTKOWY RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO.

CZĘŚĆ PIĘRWSZA

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY.

*Wiadomości poprzednicze i zasady różniczkowania
funkcyj o jednej ilości zmiennej.*

1. **W** tej części Analizy będziemy uważali rozmaite zmiany w wartościach jednej lub ilu kolwiek ilości, i wynikające z tego powodu zmiany w wartościach innych ilości, które zależą od ilości pierwszych.

2. Chcąc wyrazić, iż jakakolwiek ilość zależy od innych ilości, czy to przez jakiekolwiek działania, czyli też przez związki, których algebraicznie oznaczyć nie umiemy, lecz o których bytności jesteśmy przez dane warunki zapewnieni, mówimy, iż taka ilość jest funkcją tych ilości, od których zależy. W ciągu dzieła pojmujemy gruntowniej znaczenie tego wyrazu.

W pisaniu zamiast wyrazu funkcya używamy najczęściej jakiegokolwiek litery; i tak wyrażenia

$$u=f(x), \quad v=F(x), \quad z=\phi(x),$$

pokazują, że u, v, z , są różnemi funkcjami ilości x .

3. Ilość uważaną jako zmieniającą swoją wartość, albo jako mogącą ją zmieniać, nazywamy zmienną (*variable*); tę zaś, którą uważamy jako zachowującą stałe swoją wartość przez cały ciąg rachunku, zowiemy stałą (*constante*). Z tego wynika, iż wymienienie, które z ilości wchodzących do jakiegokolwiek zadania powinny być brane za zmienne, a które za stałe, zależy od natury zadania.

4. Niech będzie wyrażenie $u=ax$, w którym bierzemy a za ilość stałą, x za ilość zmienną, u jest ilości x funkcją najniższego porządku, bo do niej jest proporcjonalną. Jeżeli przypuścimy, iż x powiększa się przyrostkiem h , to jest staje się $x+h$, funkcja u zmieni się także, i nową jej wartość oznaczając przez u' , będzie $u'=ax+ah$, od tego wyrażenia odejmując poprzedzające, wypada przyrostek funkcji $u'-u=ah$, dzieląc przez h będzie $\frac{u'-u}{h}=a$, co nam pokazuje, że stosunek przyrostku funkcji do przyrostku ilości zmiennej, nie zależy od ich wartości szczególnych.

Weźmy funkcją $u=ax^2$, nie tak prostą jak była poprzedzająca; kładąc w niej $x+h$ na miejscu x , u' na miejscu u , wypada $u'=a(x^2+2xh+h^2)$, od tego zrównania odejmując poprzedzające, będzie $u'-u=2axh+ah^2$, dzieląc obie strony przez h mamy $\frac{u'-u}{h}=2ax+ah$. Ten stosunek przyrostku funkcji do przyrostku ilości zmiennej, składa się z dwóch części, jedna $2ax$ nie zależy od szczególnej wartości przyrostku h , druga ah ją zamyka; lecz jeżeli wyobrazimy, iż przyrostek h ciągle się zmniejsza, stosunek $\frac{u'-u}{h}$ będzie się ciągle zbliżał do wartości wyrazu $2ax$, i nie stanie się jemu równy, chyba przypuścimy $h=0$; więc wyraz $2ax$ jest granicą (*limite*) stosunku $\frac{u'-u}{h}$, to jest wartością do której ten stosunek dąży, w miarę zmniejszania

się przyrostku h , i do której może się przybliżyć, ile tylko zechcemy.

Z łatwością widzieć możemy, iż $u' - u$ przyrostek funkcji ginie razem z przyrostkiem h ilości zmiennej, bo istnienie przyrostku funkcji zależy jedynie od istnienia przyrostku ilości zmiennej; lecz stosunek między niemi zachodzący zostaje zawsze, i jest z gatunku ilości wskazanych w N^o. 70 Algebry (*Ele. d'Alg.* 1812).

Niech będzie jeszcze $u = ax^3$; kładąc w tém zrównaniu $x+h$, na miejscu x , u' na miejscu u , mamy $u' = a(x+h)^3 = ax^3 + 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3$ od tego zrównania odejmując pierwsze i dzieląc przez h , otrzymujemy stosunek przyrostków $\frac{u' - u}{h} = 3ax^2 + 3axh + ah^2$. W tym stosunku

wyraz $3ax^2$ jest niezależący od przyrostku h , i do wartości tego wyrazu stosunek $\frac{u' - u}{h}$ ciągle zbliżać się będzie w miarę zmniejszania się przyrostku h , więc wyraz $3ax^2$ jest granicą rzeczzonego stosunku.

Takowa granica nie samym tylko funkcjom, któreśmy przytaczali, jest właściwą; wyłożenie sposobów, przez które ją otrzymujemy w funkcjach uważanych w matematyce początkowej i roztrząsanie linii krzywych (58, 59) pokażą nam widocznie, iż znajduje się w każdej funkcji w ogólności. *Przeto gdy odpowiadające sobie przyrostki funkcji i ilości zmiennej nikną, stosunek między niemi nie ginie, lecz osiąga granicę, do której stopniami się zbliżał; i między tą granicą a funkcją zachodzi wzajemna zawistość, która nam służy do oznaczenia granicy z danej funkcji, i wzajemnie do wyznaczenia funkcji mając daną granicę.*

5. Poznajmy teraz znaki, przez które będziemy wyrażali nowe wyżej wzmienione związki między ilościami. Na ten koniec weźmy poprzedzające zrównanie $u = ax^3$; kładąc w niem $x+h$ na miejscu x , u' na miejscu u i odejmując pierwsze zrównanie od drugiego, otrzymujemy wyrażenie $u' - u = 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3$, które

jest rozwinieniem różnicy (*difference*) między dwiema wartościami, czyli między dwoma stanami funkcji u , ułożonem według potęg przyrostku h ilości zmiennej x ; granica $3ax^2$ stosunku przyrostków $u' - u$ do h , zależy tylko od wyrazu pierwszego różnicy (4). Ten pierwszy wyraz $3ax^2h$, będąc tylko częścią całej różnicy, nazywa się różniczką (*differentielle*) funkcji u , oznaczamy go przez du , używając litery d jako cechy; więc w przykładzie poprzedzającym będziemy mieli funkcji u różniczkę $du = 3ax^2h$. Granicę $3ax^2$ otrzymamy, dzieląc różniczkę $du = 3ax^2h$ przez h , co daje $\frac{du}{h} = 3ax^2$. Lecz uważając, iż gdy ilość zmienną pojedynczą x powiększymy przyrostkiem h , i tę nową ilość x wartość nazwiemy x' , mamy $x' = x + h$, ztąd $x' - x = h$, gdzie przyrostek h jest razem różnicą i różniczką ilości x , więc dla wprowadzenia jednostajności w rachunek, na miejscu h położymy dx , przez co wyrażenia poprzedzające zamieniają się na

$$du = 3ax^2 dx, \quad \frac{du}{dx} = 3ax^2.$$

Pierwsze z tych wyrażeń jest różniczką funkcji u , to jest funkcji ax^3 , drugie, które wyraża granicę stosunku zmian spólczesnych funkcji u i ilości x , nazywać będziemy spółczynnikiem różniczkowym (*coefficient différentiel*) funkcji u , ponieważ w różniczce funkcji u , to jest w wyrażeniu $3ax^2 dx$, jest mnożnikiem różniczki dx . Ztąd wypada, iż granicę stosunku przyrostków funkcji i ilości zmiennej, czyli spółczynnik różniczkowy funkcji, otrzymamy dzieląc różniczkę funkcji przez różniczkę ilości zmiennej; i wzajemnie, znajdziemy różniczkę funkcji, mnożąc granicę stosunku przyrostków funkcji i ilości zmiennej, czyli spółczynnik różniczkowy funkcji przez różniczkę ilości zmiennej.

Ta uwaga jest ważną, bo są takie funkcye, których łatwiej jest znaleźć spółczynnik różniczkowy, aniżeli ró-

żniczkę. Dla otrzymania bowiem bezśrednie różniczki, trzeba w danej funkcji na miejscu x , położyć $x+dx$, potem ją rozwinąć według potęg przyrostku dx , zatrzymując się na wyrazach mających dx w potęgze pierwszej, i od tego rozwinięcia odjąć funkcję pierwotną. Widzimy, iż chcąc używać tego sposobu, trzeba już umieć rozwijać daną funkcję na szereg, co może wymagać pomocy ubocznej, od której uważanie granic uwolnia najczęściej.

Z tego wszystkiego wynika, iż można powiedzieć, że *Rachunek różniczkowy jest szukaniem granicy stosunku spółczesnych przyrostków funkcji i ilości zmiennej, od której funkcja zależy.*

6. Należy pilnie uważać, iżby nie pomieszać różniczki du z różnicą $u'-u$. W przykładzie pod N^m 4 różniczką jest $3ax^2h$, a różnicą jest $3ax^2h+3axh^2+ah^3$; lecz widzimy, iż skoro przyrostek h jest bardzo mały, różniczka $3ax^2h$ stanowi część różnicy $u'-u$ najznacniejszą, i że różniczka zbliża się coraz bardziej do różnicy w miarę zmniejszania się przyrostku h . W ogólności, tym mniejszy błąd popełniamy, biorąc różniczkę za różnicę, im mniejszą przypuszczamy wartość przyrostku ilości zmiennej.

Ten sam wniosek wynika z uważania granic; bo jeżeli stosunek przyrostków spółczesnych $u'-u$, i h ma za granicę funkcję p , i gdy na jakąkolwiek wartość przyrostku h mamy $\frac{u'-u}{h}=P$, czyli co wychodzi na jedno $\frac{u'-u}{h}=p+(P-p)$, ilość $P-p$ powinna zmniejszać się razem z przyrostkiem h , i zginąć, gdy będzie $h=0$; więc zrównanie $\frac{u'-u}{h}=p$ będzie tym dokładniejsze im przyrostek h będzie mniejszy; i w tém przypuszczeniu wypada $u'-u=ph$ (*).

(*) Na tej zasadzie Lejbnic oparł cały rachunek różniczkowy, uważając różniczki za różnice nieskończenie małe.

Ztąd wynika kształt początkowych wyrazów rozwinięcia drugiego stanu u' . Jakoż, ilość $P-p$, ponieważ ginie razem z przyrostkiem h , powinna koniecznie mieć za mnożnik tenże przyrostek, co n. żna ogólniej wyrazić, zakładając $P-p=Qh^n$, gdzie wykładnik n ma jakąkolwiek wartość dodatnią, a mnożnik Q nie staje się nieskończenie wielkim na wartość $h'=0$; wtedy zrównanie $\frac{u'-u}{h}=p+Qh^n$, daje $u'=u+ph+Qh^{n+1}$.

7. Łatwo poznajemy, iż dwie równe funkcyje mają różniczki równe; bo gdy dwie funkcyje na jakąkolwiek wartość ilości zmiennej, od której zależą, są równe między sobą, zmiany ich, którym z powodu zmiany ilości zmiennej ulegają, muszą być równe. Jeżeli np. u i v oznaczają funkcyje ilości zmiennej x takie, iż na jakąkolwiek wartość ilości x będą równe między sobą, to jest: iż $u=v$, i że, gdy x stanie się $x+dx$, funkcyje u i v zamienią się na u' i v' , będziemy jeszcze mieli $u'=v'$; od tego zrównania odejmując poprzedzające, zostaje

$$u'-u=v'-v,$$

dzieląc przez dx , wypada

$$\frac{u'-u}{dx} = \frac{v'-v}{dx};$$

więc, jeżeli granice tych stosunków oznaczymy przez p i q , będziemy mieli zrównanie

$$p+\alpha=q+\beta, \text{ czyli } p-q=\beta-\alpha,$$

w którym p i q nie zależą od przyrostku dx , ilości zaś α i β zmniejszają się i giną razem z przyrostkiem dx . Ztąd wypada $p=q$; bo gdybyśmy założyli $p-q=D$, ilość $\beta-\alpha$, nie mogłaby się stać mniejszą od ilości D , lecz ona ginie, więc musi być $D=0$ (*); przeto $pdx=qdx$, czyli $du=dv$, bo wyrażenia pdx i qdx , są różniczkami funkcyi u i v (5).

Odwrotne twierdzenie nie jest ogólnie prawdziwe;

(*) To nam pokazuje, iż dwie ilości, jeżeli są granicami jednej tej-że samej ilości zmiennej, są równe między sobą.

błędniebyśmy utrzymywali, że różniczki równe należą do funkcyj równych. Jeżeli np. mamy $a+bx$, kładąc $x+dx$ na miejscu x , otrzymamy $a+bx+b dx$, odejmując od tego wyrażenia funkcją daną, mamy wypadek, w którym ilość stała a już się nie znajduje, i który także otrzymamy, kładąc $x+dx$ na miejscu x w funkcyi bx i od wypadku $bx+b dx$, odejmując funkcją pierwotną bx ; więc różniczka $b dx$ należy równie do $ab+x$, jak do bx ; i w ogólności należy do wszystkich wyrażen, które z funkcyi $a+bx$ możemy otrzymać przez nadawanie ilości a coraz innych wartości. Łatwo ztąd postrzegamy, iż w różniczkowaniu jakiejkolwiek funkcyi, wszystkie ilości stałe, połączone z nią przez dodawanie lub odejmowanie giną, te zaś ilości, które wchodzą do niej przez mnożenie lub dzielenie, zostają zawsze jako mnożniki lub dzielniki.

8. Nim przystąpimy do szukania różniczek za pomocą granic, trzeba uważać, iż:

1^{od}. Granicą iloczynu dwóch ilości razem zmien-
nych jest iloczyn ich granic odpowiednich.

2^{re}. Granicą ilorazu tychże samych ilości, jest iloraz ich granic.

Jakoż niech P i Q oznaczają dwie dane ilości; p i q , ich granice odpowiednie; ilości P i Q , uważając je w stanie ogólnym, mogą być wyrażone przez granice p i q , powiększone pewnemi ilościami α i β , to jest można położyć $P=p+\alpha$; $Q=q+\beta$; oznaczając przez α i β , ilości mogące się ciągle zmniejszać a w końcu zniknąć (4).

Biorąc mnogość tych ilości mamy

$$PQ=(p+\alpha)(q+\beta)=pq+p\beta+q\alpha+\alpha\beta,$$

czyli

$$PQ-pq=p\beta+q\alpha+\alpha\beta.$$

Ponieważ ilości α i β mogą się ciągle zmniejszać, przeto różnicę poprzedzającą można uczynić tak małą, jak zechcemy; gdy zaś dla wzięcia granic założymy $\alpha=0$, $\beta=0$, otrzymamy ilości PQ granicę $=pq$.

Iloraz poprzedzających ilości

$$\frac{P}{Q} = \frac{p + \alpha}{q + \beta}$$

wyrażony pod kształtem

$$\frac{P}{Q} = \frac{p}{q} + \frac{p + \alpha}{q + \beta} - \frac{p}{q}$$

po sprowadzeniu dwóch ostatnich ułamków do jednego mianownika będzie

$$\frac{P}{Q} = \frac{p}{q} + \frac{q\alpha - p\beta}{q(q + \beta)}$$

$$\text{ztąd } \frac{P}{Q} - \frac{p}{q} = \frac{q\alpha - p\beta}{q(q + \beta)}$$

Jeżeli ilości α i β będą się ciągle, zmniejszały, licznik $q\alpha - p\beta$ będzie się ciągle zmniejszał, a mianownik $q(q + \beta)$ przystępować będzie do q^2 , więc różnicę $\frac{P}{Q} - \frac{p}{q}$, możemy uczynić tak małą jak zechcemy; dla wzięcia zaś granic kładąc $\alpha = 0$, $\beta = 0$, wypada

$$\text{ilorazu } \frac{P}{Q} \text{ granica} = \frac{p}{q}.$$

9. Za pomocą uwag poprzedzających otrzymujemy współczynnik różniczkowy funkcyi odniesionej do ilości zmiennej, od której bezśrednie nie zależy. Niech będą np. trzy ilości v , u , x , takie, iż pierwsza jest funkcją drugiej, a druga funkcją trzeciej, to jest niech będzie

$$v = f(u), \quad u = F(x);$$

zdaje się, iż należałoby nasamprzód wyrzucić ilość u , i wyrazić ilość v bezśrednie przez ilość x ; lecz zaraz obaczymy, iż bez wyrzucania obejść się można. Jakoż jeżeli te ilości przechodzą do nowego stanu wielkości, wyrażonego przez v' , u' , x' , to jest nabywają odpowiednich przyrostków

$$v' \rightarrow v, \quad u' \rightarrow u, \quad x' \rightarrow x,$$

ponieważ stosunki tych przyrostków są

$$\frac{v'-v}{u'-u}, \quad \frac{u'-u}{x'-x},$$

a ich granice

$$\frac{dv}{du}, \quad \frac{du}{dx},$$

wniesiemy podług pierwszej z uwag poprzedzających, iż granicą wyrażenia

$$\frac{v'-v}{u'-u} \times \frac{u'-u}{x'-x}, \quad \text{czyli} \quad \frac{v'-v}{x'-x},$$

jest

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du} \times \frac{du}{dx}.$$

Ażeby należycie okazać znaczenie tego wyrażenia, zastosujmy je do przykładu, kładąc $v=bu^3$, $u=ax^2$. Znajdujemy naprzód (4. 5.)

$$\frac{dv}{du} = 3bu^2, \quad \frac{du}{dx} = 2ax,$$

a wzór poprzedzający daje potem wypadek $\frac{dv}{dx} = 6abu^2x$, który, kładąc w nim za u^2 wartość a^2x^4 , staje się $6a^3bx^5$. W tym rachunku odbyliśmy wyrzucanie ilości po różniczkowaniu.

Wskazując to wyrzucanie znakami ogólnemi, będziemy mieli

$$v = f[F(x)]$$

co wyraża, iż v jest funkcją innej funkcji ilości x , a podług uwag poprzedzających, *spółczynnik różniczkowy funkcji innej funkcji otrzyma się, robiąc mnożość ze współczynników różniczkowych tych dwóch funkcji odnosionych każdej do swojej ilości zmiennej bezpośrednio odpowiedniej.*

Jeżeli dwie ilości u i x są połączone z sobą przez wzajemną zawisłość, można powiedzieć równie iż u jest funkcją ilości x , albo x funkcją ilości u , podług tego

jak chcemy uważać, albo u oznaczone przez x , albo x oznaczone przez u ; współczynnik różniczkowy może także wyrazić się pod każdym z tych dwóch względów; aże

$$\frac{x'-x}{u'-u} = \frac{1}{\frac{u'-u}{x'-x}},$$

przeto z drugiej uwagi numeru poprzedzającego wypada, iż jeżeli w pierwszym przypadku jest $\frac{du}{dx} = p$, w drugim

będzie $\frac{dx}{du} = \frac{1}{p}$, gdyż jedność będąc ilością stałą, jest sobie samej granicą.

Niech będzie np. $u = x^3$, ztąd $x = \sqrt[3]{u}$, będziemy mieli

$$\frac{du}{dx} = 3x^2, \quad \text{a} \quad \frac{dx}{du} = \frac{1}{3x^2};$$

ta ostatnia wartość wychodzi na

$$\frac{1}{3u^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}.$$

10. Zastosujmy teraz poprzedzające rozumowania do szukania różniczek funkcyj, które się uważają w początkowej algebrze, to jest do szukania różniczek summ, różnic, mnogości, ilorazów, potęg i pierwiastków.

Naprzód. Jeżeli kilka ilości zależących od x , i z których każdej w szczególności umiemy znaleźć różniczkę, są połączone razem przez dodawanie i odejmowanie jak np. w funkcyi $u+v-w$, i jeżeli kładąc $x+dx$ na miejscu x , zamieni się u na $u+\alpha$, v na $v+\beta$, w na $w+\gamma$, wyrażenie $u+v-w$ stanie się

$$u+v-w+\alpha+\beta-\gamma.$$

Jego zmiana, złożona z wyrazów $\alpha+\beta-\gamma$, i stosowana do przyrostku dx ilości zmiennej x , daje stosunki

$$\frac{\alpha}{dx} + \frac{\beta}{dx} - \frac{\gamma}{dx}.$$

a jeżeli granice stosunków $\frac{\alpha}{dx}$, $\frac{\beta}{dx}$, $\frac{\gamma}{dx}$, oznaczymy przez p , q , r , będzie $p+q-r$ granicą wyrażenia $\frac{\alpha}{dx} + \frac{\beta}{dx} - \frac{\gamma}{dx}$; mnożąc tę granicę przez dx , mnogość $pdx+qdx-rdx$, będzie różniczką funkcji założonej; lecz pdx , qdx , rdx , są różniczkami odpowiednimi wyrazów u , v , w , to jest oznaczają du , dv , dw , więc będziemy mieli

$$d(u+v-w) = du + dv - dw,$$

co nam pokazuje, iż różniczka funkcji ilości x , złożonej z iluholwiek wyrazów, otrzymuje się biorąc różniczkę każdego wyrazu ze znakiem do niego należącym.

11. *Powtóre.* Jeżeli w mnogości dwóczynnikowej uv , kładąc $x+dx$ na miejscu x , u zamienia się na $u+\alpha$, v na $v+\beta$, mnogość założona uv staje się

$$uv + u\beta + v\alpha + \alpha\beta;$$

jej przyrostek $u\beta + v\alpha + \alpha\beta$ stosowany do przyrostku dx , daje wyrażenie

$$u \frac{\beta}{dx} + v \frac{\alpha}{dx} + \frac{\alpha}{dx} \beta;$$

oznaczając, jak wyżej, odpowiednie granice stosunków $\frac{\alpha}{dx}$, $\frac{\beta}{dx}$, przez p , q , i uważając, że przyrostek β , ginie razem z przyrostkiem dx , a od tego przyrostku, ilości u i v są niezależne, poznajemy, iż granicą wyrazu $\frac{\alpha}{dx} \beta$ jest zero (8), granicą zaś dwóch pozostałych wyrazów będzie

$$uq + vp;$$

z tą wznosimy (5), iż różniczką mnogości uv jest

$$uqdx + vpdx;$$

lecz qdx i pdx to samo znaczą co dv , du ; więc $d.uv = udv + vdu$ (*).

(*) Kropka po cesze d , położona znaczy, iż ta cesza należy do całe-

Ten wzór uczy nas, iż dla otrzymania różniczki mnogości dwóczynnikowej, trzeba rozmnożyć każdy czynnik przez różniczkę czynnika drugiego, i obie te mnogości razem dodać.

Jeżeli zrównanie $d.uv = u.dv + v.du$, podzielimy przez mnogość założoną uv , otrzymamy

$$\frac{d.uv}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v};$$

co łatwo prowadzi do wyrażenia różniczki mnogości z ilukolwiek czynników złożonej. Na ten koniec założmy, iż $v = ts$; przeto wyraz $\frac{dv}{v}$ zamieni się na

$$\frac{dv}{v} = \frac{d.ts}{ts} = \frac{dt}{t} + \frac{ds}{s},$$

a zrównanie poprzedzające na

$$\frac{d.uts}{uts} = \frac{du}{u} + \frac{dt}{t} + \frac{ds}{s};$$

tym samym sposobem znajdziemy, iż

$$\frac{d.utsr \dots i.t.d.}{utsr \dots i.t.d.} = \frac{du}{u} + \frac{dt}{t} + \frac{ds}{s} + \frac{dr}{r} + i.t.d.$$

W zrównaniu

$$\frac{d.uts}{uts} = \frac{du}{u} + \frac{dt}{t} + \frac{ds}{s},$$

znosząc mianowniki, wypada

$$d.uts = tsdu + usdt + utds.$$

Ztąd widocznie się okazuje, iż różniczka mnogości z ilukolwiek czynników złożonej, jest summą mnogości otrzymanych z różniczki każdego czynnika przez mnogość ze wszystkich innych.

12. Różniczkę ilorazu $\frac{u}{v}$ otrzymamy kładąc $\frac{u}{v} = t$,

go wyrażenia bezśrednie po niej następującego, i tak $d.uv$ jest to samo co $d(uv)$, i $d.x^n$ to samo co $d(x^n)$.

z tego bowiem wypada $u=vt$, $du=vdt+t dv$ (11); biorąc ztąd wartość różniczki dt i na miejscu t , kładąc ułamek

$$\frac{u}{v}, \text{ otrzymamy } dt = \frac{du}{v} - \frac{u dv}{v^2},$$

czyli przywodząc do jednego mianownika,

$$dt = \frac{vdu - u dv}{v^2};$$

ztąd wyprowadza się to prawidło: iż dla otrzymania różniczki ułamku, trzeba od mnogości zrobionej z mianownika przez różniczkę licznika, odjąć mnogość uczynioną z licznika przez różniczkę mianownika, a resztę podzielić przez drugą potęgę mianownika.

Jeżeli licznik u danego ułamku $\frac{u}{v}$ jest ilością stałą, przeto nie zależąc od ilości x , nie ma żadnej różniczki, to jest $du=0$, więc różniczka ułamku $\frac{u}{v}$ będzie

$$\text{tylko } dt = -\frac{u dv}{v^2},$$

13. Funkcya u^n , jeżeli wykładnik n jest liczbą całą dodatnią, wyraża mnogość z liczby n mnożników równych u , zatem (11) wypada

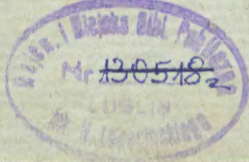
$$\frac{d.u^n}{u^n} = \frac{duuuu \dots}{uuuu \dots} = \frac{du}{u} + \frac{du}{u} + \frac{du}{u} + \text{i t. d.}$$

Aże pierwsza strona zamyka mnożników liczbę n , przeto i druga składać się będzie z takiejże liczby wyrazów równych $\frac{du}{u}$, więc będzie

$$\frac{d.u^n}{u^n} = \frac{n du}{u}, \text{ ztąd } d.u^n = nu^{n-1} du.$$

Jeżeli n jest ułamkiem np. $\frac{r}{s}$, to jest jeżeli mamy $u^{\frac{r}{s}}$,

wtedy czynimy $u^{\frac{r}{s}} = v$, ztąd $u = v^{\frac{s}{r}}$, przypuszczając iż liczby r i s są całe, będziemy mieli podług rozumowania poprzedzającego $ru^{r-1} du = sv^{\frac{s}{r}-1} dv$,



2021182

zład otrzymamy

$$dv = \frac{ru^{r-1}}{su^{s-1}} du = \frac{ru^{r-1}}{su^{\frac{r}{s}(s-1)}} du = \frac{r}{s} u^{\frac{r}{s}-1} du,$$

czyli, ponieważ $v = u^n$, $n = \frac{r}{s}$,

$$d.u^n = nu^{n-1} du.$$

Nakoniec, jeżeli n jest liczbą ujemną, to jest jeżeli mamy u^{-n} , czyli $\frac{1}{u^n}$, wyprowadzimy (12)

$$d.u^{-n} = d.\frac{1}{u^n} = -\frac{d.u^n}{u^{2n}};$$

aże podług wyższego, gdy n znaczy liczbę dodatnią, jest $d.u^n = nu^{n-1} du$, więc będziemy mieli

$$d.u^{-n} = -\frac{nu^{n-1} du}{u^{2n}} = -nu^{-n-1} du.$$

Z tego wszystkiego wypada, iż dla różniczkowania jakiegokolwiek potęgi ilości zmiennej, trzeba ją roz mnożyć przez jej wykładnik, potem zmniejszyć wykładnik jedną jednostką i takowy wypadek roz mnożyć przez różniczkę ilości zmiennej (*).

14. Prawidła wyłożone (10, 11, 12, 13) są dostateczne do różniczkowania wszystkich funkeyj algebraicznych, to jest takich, do których ilość zmienna wchodzi przez dodawanie, odciąganie, mnożenie, dzielenie, i podnoszenie do potęg tak całych jak ułamkowych, tak dodatnich jak ujemnych, i dość jest tylko pamiętać, że różniczką ilości zmiennej x jest dx (5).

I tak funkeyi jednowyrazowej $u = ax^n$, podług pra-

(*) Moglbym bezśrednie wyprowadzić różniczkę $d.x^n$ z rozwinięcia dwówyrazu $(x+dx)^n$; ponieważ to rozwinięcie jest $x^n + nx^{n-1}dx +$ i t. d., od którego odejmując wyraz x^n , i różnicy pozostałej biorąc wyraz pierwszy, miałbym $nx^{n-1}dx$; lecz nie chciałem przypuszczać, iż ten wzór jest dowiedziony, bo rachunek różniczkowy, daje dowód ogólny i prosty.

widła na mnogość (11), różniczka jest $du = ad.x^n$ ponieważ ilości a jako stałej różniczka jest $da=0$, prawidło zaś na potęgę (13) daje $du = nax^{n-1}dx$.

Idźmy teraz do funkcyj złożonych.

1^{od}. Niech będzie $u = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}$; biorąc różniczkę oddzielnie każdego wyrazu tej funkcyi, pierwszy wyraz ginie, bo jest stały (7), drugi napisany pod kształtem $bx^{\frac{1}{2}}$, daje $\frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}}dx$ (13), czyli $\frac{b dx}{2\sqrt{x}}$, z trzeciego $-\frac{c}{x}$, wypada $+\frac{cdx}{x^2}$ (12); łącząc te wypadki cząstkowe, otrzymujemy $du = \frac{b dx}{2\sqrt{x}} + \frac{cdx}{x^2}$.

2^{re}. Niech będzie $u = a + \frac{b}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{e}{x^2}$; pisząc tę funkcję pod kształtem następnym

$$u = a + bx^{-\frac{2}{5}} - cx^{-1\frac{1}{5}} + ex^{-2},$$

i stosując do niej prawidło (13), znajdziemy

$$du = -\frac{2}{5}bx^{-\frac{7}{5}}dx + \frac{1}{5}cx^{-\frac{6}{5}}dx - 2ex^{-3}dx,$$

$$\text{czyli } du = -\frac{2b dx}{5x\sqrt[5]{x}} + \frac{4cdx}{5x^2\sqrt[5]{x}} - \frac{2edx}{x^3}.$$

3^{cie}. Niech będzie $u = (a + bx^m)^n$; ta funkcja nie może bez poprzedniczego rozwinięcia być rozłożoną na jednomyraży, lecz dla otrzymania jej różniczki nie trzeba rozwinięcia, bo kładąc $a + bx^m = z$, mamy $u = z^n$, przeto według prawidła na potęgę (13), znajdujemy

$$\begin{aligned} du &= nz^{n-1}dz = n(a + bx^m)^{n-1}d(a + bx^m) = \\ &= n(a + bx^m)^{n-1}.mbx^{m-1}dx = mnbx^{m-1}(a + bx^m)^{n-1}dx. \end{aligned}$$

15. Ponieważ wydarza się często różniczkować funkcje pierwiastkowe drugiego stopnia, przeto na nie wyciągniono prawidło osobne wypadające z rachunku następnego.

Niech będzie $v = \sqrt{u}$, czyli $v = u^{\frac{1}{2}}$,
 ztąd $du = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}du = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{du}{2\sqrt{u}}$,

co pokazuje, iż różniczka wyrażenia pierwiastkowego drugiego stopnia otrzymuje się, dzieląc różniczkę wyrażenia będącego pod znakiem pierwiastkowym, przez podwójny pierwiastek.

16. Prawidło różniczkowania mnożności (11) zastosowane do wyrażenia $u = x(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}$, daje

$$du = (a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}.dx + x\sqrt{a^2 - x^2}.d(a^2 + x^2) + \\ + x(a^2 + x^2)d\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\text{aże } d(a^2 + x^2) = d.x^2 = 2xdx$$

$$d\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{d(-x^2)}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

przeto

$$du = \left\{ (a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2} + 2x^2\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2(a^2 + x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right\} dx;$$

po sprowadzeniu zaś wszystkich wyrazów do jednego mianownika, będzie

$$du = \frac{(a^4 + a^2x^2 - 4x^4) dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Prawidło różniczkowania ułamków zastosowane do wyrażenia $u = \frac{a^2 - x^2}{a^4 + a^2x^2 + x^4}$

daje bezśrednie

$$du = \frac{(a^4 + a^2x^2 + x^4)d(a^2 - x^2) - (a^2 - x^2)d(a^4 + a^2x^2 + x^4)}{(a^4 + a^2x^2 + x^4)^2},$$

ztąd wyprowadzamy

$$du = \frac{-2x(2a^4 + 2a^2x^2 + x^4) dx}{(a^4 + a^2x^2 + x^4)^2}.$$

Niech będzie jeszcze wyrażenie

$$u = \sqrt[4]{\left(a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[5]{(c^2 - x^2)^2}\right)^5},$$

w którym mamy do wykonania kilka działań algebraicznych. Dla łatwiejszego zróżniczkowania, zakładając

$$\frac{b}{\sqrt{x}} = y, \quad \sqrt[5]{(c^2 - x^2)^2} = z,$$

$$\text{będziemy mieli } u = \sqrt[4]{(a - y + z)^5} = (a - y + z)^{\frac{5}{4}},$$

$$\begin{aligned} \text{z tąd otrzymamy (13) } du &= \frac{5}{4}(a - y + z)^{\frac{5}{4} - 1} d(a - y + z) = \\ &= \frac{5}{4}(a - y + z)^{-\frac{1}{4}} (-dy + dz) = \frac{-5dy + 5dz}{4\sqrt[4]{a - y + z}}; \end{aligned}$$

$$\text{a że } dy = d\left(\frac{b}{\sqrt{x}}\right) = -b \frac{d\sqrt{x}}{x} = \frac{-b dx}{2x\sqrt{x}},$$

$$dz = d\left((c^2 - x^2)^{\frac{2}{5}}\right) = \frac{2}{5}(c^2 - x^2)^{-\frac{3}{5}} (-2x dx) = \frac{-4x dx}{5\sqrt[5]{c^2 - x^2}},$$

$$\text{przeto } du = \left\{ \frac{\frac{5b}{2x\sqrt{x}} - \frac{4x}{5\sqrt[5]{c^2 - x^2}}}{\sqrt[4]{a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[5]{(c^2 - x^2)^2}}} \right\} dx.$$

O różniczkowaniach następnych.

17. Spółczynnik różniczkowy będąc nową funkcją ilości x , może być różniczkowany, i gdy weźmiemy granicę stosunku przyrostku jego do przyrostku ilości zmiennej x , otrzymamy jego własny spółczynnik różniczkowy, który będąc także funkcją ilości x , może być znowu różniczkowanym. Przeto różniczkując następnie otrzymywane spółczynniki różniczkowe, wyprowadzimy z danej funkcji ciąg granic czyli spółczynników różniczkowych, które dzielimy na rzędy, podług liczby różniczkowań uskutecznianych.

Jeżeli położymy $\frac{du}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=r$, i t.d.

litera p oznaczać będzie współczynnik różniczkowy pierwszego rzędu danej funkcji u , litera q oznaczy współczynnik różniczkowy pierwszego rzędu funkcji p , albo współczynnik różniczkowy drugiego rzędu danej funkcji u ; litera r wyrażać będzie współczynnik różniczkowy pierwszego rzędu funkcji q , albo współczynnik różniczkowy drugiego rzędu funkcji p , albo współczynnik różniczkowy trzeciego rzędu danej funkcji u , i t. d.

Należy tu uważać, że współczynniki różniczkowe q, r , i t. d. wyprowadzają się z różniczek następnych danej funkcji u , biorąc przyrostek dx za ilość stałą. Jakoż zrównania

$$\frac{du}{dx}=p, \quad \frac{dp}{dx}=q, \quad \frac{dq}{dx}=r, \quad \text{i t.d.}$$

dadzą $du=px$, $dp=qdx$, $dq=r dx$, i t.d.;

lecz jeżeli zróżniczkujemy px nie odmieniając dx , otrzymamy wyrażenie $dpdx$, które, kładąc w niem za dp , wartość qdx , zamienia się na qdx^2 (*), co dość jest podzielić przez dx^2 dla otrzymania q . Więc jeżeli następne różniczki du , brane w przypuszczeniu iż dx jest stałe, wyrazimy przez

$$d(du)=ddu=d^2u, \quad d(d^2u)=d^3u, \quad \text{i t.d.},$$

pamiętając zawsze, iż wykładnik nad literą d położony, oznacza powtórzone działanie nie zaś potęgę litery d , która tu nie uważa się za ilość, ale tylko za cechę wskazującą działanie, będziemy mieli za pomocą wartości poprzedzających dp , dq , i t. d., zrównania

$$du=px, \quad d^2u=dpdx=qdx^2, \quad d^3u=dqdx^2=r dx^3, \quad \text{i t.d.}$$

(*) Należy pamiętać, że wyrażenia dx^2 , dx^3 , i t. d., to samo znaczą, co wyrażenia $(dx)^2$, $(dx)^3$, i t. d., a nie zaś to, co wyrażenia $d.x^2$, $d.x^3$, i t. d. (obacz przypisek do liczby 11).

ztaąd wyprowadzimy

$$p = \frac{du}{dx}, \quad q = \frac{d^2u}{dx^2}, \quad r = \frac{d^3u}{dx^3}, \quad \text{i t.d.}$$

18. Gdybyśmy mieli daną funkcją ax^n , znaleźlibyśmy różniczkę (14) $d.ax^n = nax^{n-1}dx$, w tej różniczce mnożniki na , dx , są uważane za stałe, więc dla otrzymania drugiej różniczki, dość jest zróżniczkować x^{n-1} i wypadek rozmnożyć przez $nadx$; różniczka mnożnika x^{n-1} jest $(n-1)x^{n-2}dx$, więc mamy $d^2.ax^n = n(n-1)ax^{n-2}dx^2$, podobnym sposobem postępując znajdziemy

$$\begin{aligned} d^3.ax^n &= n(n-1)(n-2)ax^{n-3}dx^3 \\ d^4.ax^n &= n(n-1)(n-2)(n-3)ax^{n-4}dx^4, \\ &\text{i t.d.} \end{aligned}$$

spółczynniki różniczkowe takowych różniczek będą następujące.

$$\begin{aligned} \frac{d.ax^n}{dx} &= nax^{n-1}, \\ \frac{d^2.ax^n}{dx^2} &= n(n-1)x^{n-2}, \\ \frac{d^3.ax^n}{dx^3} &= n(n-1)(n-2)ax^{n-3}, \\ &\text{i t.d.} \end{aligned}$$

Łatwo ztaąd poznajemy, iż kiedy wykładnik n jest liczbą całą dodatnią, funkcya ax^n , ma liczbę ograniczoną różniczek, z których najwyższa jest

$$d^na^n = n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1.ad^n$$

a spółczynnik jej różniczkowy

$$\frac{d^na^n}{dx^n} = n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1.a$$

nie może już dalej być różniczkowanym, bo nie zamyka ilości zmiennej x , jest stały, i funkcji ax^n jest spółczynnikiem różniczkowym ostatnim.

19. Przez różniczkowaniu odkrywają się w funkcjach

własności ułatwiający ich rozwinięcie. Nietrudną jest rzeczą otrzymać, za pomocą uwag poprzedzających, rozwinięcie wyrażenia $(x+y)^n$; lecz nie zatrzymując się nad tym szczególnym przypadkiem, zatrudnimy się jakąkolwiek funkcją dwówyrazu $x+y$. Uważmy iż funkcya dwówyrazu $x+y$, jakakolwiek jest, i którąkolwiek z dwóch ilości x i y , będziemy uważali za zmienną, zawsze daje tenże sam współczynnik różniczkowy. Jeżeli np. weźmiemy funkcją $(x+y)^n$, znajdziemy w każdym z obu przypadków współczynnik różniczkowy $n(x+y)^{n-1}$. W ogólności, funkcya $f(x+y)$, jakakolwiek jest, kładąc $x+y=x'$, staje się $f(x')$ i daje $d.f(x')=p'dx'$, gdzie współczynnik różniczkowy p' jest nową ilości x' funkcją, do której dx' nie wchodzi, a zatem zostaje zawsze tenże sam, czy zmieniając x weźmiemy $dx'=dx$, czy zmieniając y , weźmiemy $dx'=dy$.

20. To założywszy, jeżeli uczynimy

$$f(x+y)=L+My^{\alpha}+Ny^{\beta}+Py^{\gamma}+i\text{ t.d.},$$

gdzie współczynniki L , M , i t. d., są funkcjami ilości x bez ilości y , a wykładniki α , β , i t. d., są nieoznaczone, jasną jest rzeczą, iż żaden z tych wykładników nie może być ujemny, bo wyraz kształtu np. $My^{-\alpha}$, czyli $\frac{M}{y^{\alpha}}$, na wartość $y=0$, stając się nieskończenie wielkim, uczyniłby całą drugą stronę równania poprzedzającego nieskończenie wielką, pierwsza zaś strona w tém samym przypuszczeniu, sprowadziłaby się do $f(x)$; lecz jeżeli wykładniki wszystkie są dodatne, wtedy będziemy mieli $L=f(x)$.

Biorąc współczynnik różniczkowy rozwinięcia $f(x+y)$ naprzód w przypuszczeniu iż x jest ilością zmienną, mamy

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dx}y^{\alpha} + \frac{dN}{dx}y^{\beta} + \frac{dP}{dx}y^{\gamma} + i\text{ t.d.},$$

potém w przypuszczeniu iż y jest ilością zmienną, otrzymujemy

$$\alpha My^{\alpha-1} + \beta Ny^{\beta-1} + \gamma Py^{\gamma-1} + \text{i t. d.},$$

oba te wyrażenia powinny być tosame na jakąkolwiek wartość ilości y ; co wtedy się tylko sprawdzi, gdy wykładniki potęg ilości y i ich współczynniki w odpowiednich wyrażach tych wyrażeń, będą jedne i też same. Przeto, jeżeli wykładniki są porządkiem wielkości ułożone w pierwszym wyrażeniu, będą równie ułożone w wyrażeniu drugim; więc powinno być

$$\alpha - 1 = 0, \quad \beta - 1 = \alpha, \quad \gamma - 1 = \beta, \quad \text{i t. d.},$$

$$\text{z kąd wypada } \alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3, \quad \text{i t. d.},$$

z porównania zaś współczynników wypadają zrównania

$$M = \frac{dL}{dx}, \quad N = \frac{1}{2} \frac{dM}{dx}, \quad P = \frac{1}{3} \frac{dN}{dx}, \quad \text{i t. d.},$$

z których kładąc $f(x) = u$, $f(x+y) = u'$

wyprowadzamy

$$L = u, \quad M = \frac{du}{dx}, \quad N = \frac{1}{1.2} \frac{d^2u}{dx^2}, \quad P = \frac{1}{1.2.3} \frac{d^3u}{dx^3}, \quad \text{i t. d.},$$

$$u' = u + \frac{du}{dx} y + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{y^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{y^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}$$

Wzór ten nazywa się *wzorem Taylora* (*théorème de Taylor*) od nazwiska geometry angielskiego, który go wynalazł (*).

21. Za pomocą tego wzoru otrzymujemy natychmiast rozwinięcie wyrażenia $(x+y)^n$, albowiem w tym razie

(*) Dowodzenie poprzedzające w gruncie jest takie samo, jakie podał Lagranż w *Mémoires de l'Académie de Berlin* 1772, strona 187, a potem w *Théorie des fonctions analytiques*, lecz użycie znaków różniczkowych skraca je i znacznie upraszcza.

Podano wiele dowodzeń wzoru Taylora, ponieważ jest zasadą przystosowań rachunku różniczkowego; niektóre z nich są wyłożone w *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* in 4to 2de édit. Tom I, str. 160 i 277, i Tom III, str. 60, 396 i 399 przypisek.

$$u=x^n, \quad \frac{du}{dx}=nx^{n-1}, \quad \frac{d^2u}{dx^2}=n(n-1)x^{n-2}, \text{ i t.d.,}$$

z czego wypada

$$(x+y)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2 \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}y^3 + \text{j t.d.}$$

Ponieważ zasady różniczkowania zostały podane nie przypuszczając rozwinięcia potęgi n dwówyrazu, przeto należy teraz uważać ten wzór jako dowiedziony na wszystkie przypadki, czy wykładnik n jest cały lub ułamkowy, dodatny lub ujemny.

I tak za pomocą tego wzoru, wyrażen

$$\sqrt{a^2+x^2}, \quad \sqrt[5]{(a^2-x^2)^2}, \quad \frac{1}{a+x}, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{a^4+x^4}},$$

pisząc je pod kształtem.

$$a\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad a^{\frac{4}{5}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{2}{5}}, \quad a^{-1}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-1}, \quad a^{-1}\left(1+\frac{x^4}{a^4}\right)^{-\frac{1}{4}},$$

otrzymamy rozwinięcie, lecz równie jak w Algebrze, wpadniemy na szeregi nieskończone.

22. Jeżeli we wzorze Tajlora założymy $x=0$, i przez U, U', U'', U''' , i t. d. oznaczmy wartości szczególne, których w tém przypuszczeniu nabywają wyrażenia

$$u, \quad \frac{du}{dx}, \quad \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^3u}{dx^3}, \quad \text{i t.d.,}$$

otrzymamy zrównanie

$$f(y) = U + U' \frac{y}{1} + U'' \frac{y^2}{1.2} + U''' \frac{y^3}{1.2.3} + \text{i t.d.}$$

które powinno służyć na jakąkolwiek wartość ilości y , więc zamieniając y na x , przez co jednak ilości $U, U', U'',$ i t. d., nie odmieniają się, bo litery y w sobie nie zamykają, otrzymamy wzór

$$f(x) \text{ czyli } u = U + U' \frac{x}{1} + U'' \frac{x^2}{1.2} + U''' \frac{x^3}{1.2.3} + \text{i t.d.}$$

który daje nam rozwinięcie funkcji $f(x)$ według rosnących potęg tejże samej ilości x . Ten wzór od nazwiska geometry angielskiego *Maclaurin*, który go znalazł, nazywa się *wzorem Makloryna* (*théorème de Maclaurin*)

Założmy $u=(a+x)^n$, ztąd wypadają wartości

$$\frac{du}{dx} = n(a+x)^{n-1}; \quad \frac{d^2u}{dx^2} = n(n-1)(a+x)^{n-2}, \text{ i t. d.,}$$

które, kładąc w nich $x=0$, zamieniają się na

$$U=a^n, \quad U'=na^{n-1}, \quad U''=n(n-1)a^{n-2}, \text{ i t. d.,}$$

co daje

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}x^2 + \text{i t. d.} \quad (*)$$

23. Wzór Tajlora daje także rozwinięcie nowego stanu funkcji jakiejkolwiek $u=f(x)$, gdy x zamienia się na $x+h$, bo kładąc w nim h za y wypada:

(*) Znajdujemy prosto wzór Makloryna zakładając

$$u=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{i t. d.},$$

gdzie współczynniki A, B, C, D , i t. d., są stałe i nieoznaczone; biorąc albowiem współczynniki różniczkowe mamy

$$\frac{du}{dx} = B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\text{i t. d.},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 1.2C+2.3Dx+3.4Ex^2+\text{i t. d.},$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = 1.2.3D+2.3.4Ex+\text{i t. d.},$$

i t. d.

jeśli w funkcji u i w współczynnikach jej różniczkowych założymy $x=0$, i wartości ztąd wypadające wyrazimy przez $U, U', U'', \text{ i t. d.}$, otrzymamy

$$A=U, \quad B=U', \quad C=\frac{1}{1.2}U'', \quad D=\frac{1}{1.2.3}U''', \text{ i t. d.},$$

a zatem

$$u=U+U'x+U''\frac{x^2}{1.2}+U'''\frac{x^3}{1.2.3}+\text{i t. d.}$$

$$u' = u + \frac{du}{dx} h + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t.d.}$$

Ztąd okazuje się znakomita własność współczynników różniczkowych, iż podzielone odpowiednie przez mnogości 1, 1.2, 1.2.3, i t.d., stają się współczynnikami potęg przyrostku h w zupełnym rozwinięciu różnicy

$$u' - u = \frac{du}{dx} h + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t.d.}$$

To rozwinięcie, kładąc w niem dx za h , zamienia się na wzór bardzo prosty

$$u' - u = \frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^3u}{dx^3} + \text{i t.d.}$$

który nam pokazuje, jakim sposobem różnica funkcji u , odpowiadająca przyrostkowi jakiegokolwiek dx , składa się z różniczek różnych rzędów, odpowiednich temuż przyrostkowi.

Różniczkowanie funkcyj przestępnych.

24. Funkcye, które nie są pod liczbą 14 wyliczone, nazywają się funkcjami przestępnymi (*fonctions transcendantes*). Funkcya wykładnicza $u = a^x$, jest z funkcyj tego rodzaju najprostszą. Kładąc w niej $x + dx$ za x , wypada różnica

$$a^{x+dx} - a^x = a^x (a^{dx} - 1)$$

dla rozwinięcia jej według potęg przyrostku dx , zakładamy $a = 1 + b$, co daje

$$\begin{aligned} a^{dx} = (1+b)^{dx} = 1 + \frac{dx \cdot b}{1} + \frac{dx(dx-1)b^2}{1.2} \\ + \frac{dx(dx-1)(dx-2)}{1.2.3} b^3 + \text{i t.d.} \end{aligned}$$

ztd odejmując 1 po obu stronach i porządkując według potęg przyrostku dx mamy

$$a^{dx}-1=dx\left(b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-i\ t.\ d.\right)+dx^2\left(\frac{b^2}{2}-i\ t.\ d.\right)+i\ t.\ d.,$$

zatem

$$a^{x+dx}-a^x=a^x(a^{dx}-1)=a^x dx\left(b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-i\ t.\ d.\right)+i\ t.\ d.,$$

przeto (5) $d.a^x=a^x dx\left(b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-i\ t.\ d.\right),$

czyli przywracając za b wartość $a-1$,

$$d.a^x=a^x dx\left((a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-i\ t.\ d.\right);$$

zakładając $(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-i\ t.\ d.=k$

wypada $d.a^x=ka^x dx$, różniczka funkcyi założonej a^x .
Wkrótce znajdziemy inne wyrażenie ilości k .

25. Widoczną jest rzeczą iż

$$d.^2 a^x=k dx d.a^x=k^2 a^x dx^2,$$

$$d.^3 a^x \dots \dots \dots =k^3 a^x dx^3,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$d.^n a^x \dots \dots \dots =k^n a^x dx^n;$$

ztąd wypada $\frac{d.a^x}{dx}=ka^x$, $\frac{d.^2 a^x}{dx^2}=k^2 a^x$, $\frac{d.^3 a^x}{dx^3}=k^3 a^x$, i t. d.

Kładąc $x=0$, funkcyja $u=a^x$, i spółczynniki jej różniczkowe zamieniają się na

$$U=1, U'=k, U''=k^2, U'''=k^3, i\ t.\ d.,$$

więc otrzymamy (22)

$$a^x=1+\frac{kx}{1}+\frac{k^2 x^2}{1.2}+\frac{k^3 x^3}{1.2.3}+i\ t.\ d.$$

26. Takowe rozwinięcie funkcyi a^x może służyć do odkrycia ilości, z której powstaje szereg wyrażony przez k ; kładąc bowiem $x=\frac{1}{k}$, zamienia się na

$$a^{\frac{1}{k}}=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+i\ t.\ d.$$

biorąc z tego wyrażenia 12 wyrazów, obracając je na ułamki dziesiętne i kładąc sumę ich $2,7182818 = e$, otrzymujemy $a^{\frac{1}{k}} = e$, ztąd $a = e^k$; biorąc logarytmy z obu stron, wypada $la = kle$, ztąd $k = \frac{la}{le}$; więc będziemy mieli $d.a^x = ka^x dx = \frac{la}{le} a^x dx$.

27. Liczba e bardzo często wchodzi do robot analitycznych; bierzemy ją za grunt logarytmów, nazywanych neperowskiemi od nazwiska Nepera wynalazcy logarytmów (*); wyrażając takowe logarytmy przez l' , będzie $l'e = 1$, i wypadki poprzedzające zamieniają się na

$$k = l'a, \quad d.a^x = a^x dx \cdot l'a,$$

$$a^x = 1 + x \frac{(l'a)}{1} + \frac{x^2 (l'a)^2}{1.2} + \frac{x^3 (l'a)^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}, \quad (25).$$

Kładąc w tym ostatnim wzorze $a = e$, otrzymamy wzór

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

do którego logarytmy już nie wchodzą.

Jeżeli za grunt jakiegokolwiek układu logarytmów weźmiemy a , wtenczas będzie $la = 1$, $x = l.a^x = lu$, i otrzymamy szereg

$$a^x = u = 1 + \frac{1 lu}{1 le} + \frac{1 (lu)^2}{1.2 (le)^2} + \frac{1 (lu)^3}{1.2.3 (le)^3} + \text{i t. d.}$$

wyrażający liczbę u przez jej logarytm.

Takowy szereg po pewnej liczbie wyrazów stanie się ubywającym. Położywszy bowiem dla skrócenia $\frac{lu}{le} = M$, dwa bezśrednie po sobie następne wyrazy którekolwiek mogą być wyrażone przez

$$\frac{M^n}{1.2.3 \dots 1.n} + \frac{M^{n+1}}{1.2.3 \dots n(n+1)};$$

(*) Te logarytmy nazywano dawniej bardzo niewłaściwie *logarytmami przyrodzonymi*, albo *hyperbolicznymi*.

stosunek pierwszego z nich do drugiego będzie jak 1 do $\frac{M}{n+1}$; liczba n powiększając się z liczbą wyrazów szeregu, stanie się po pewnej liczbie wyrazów większą od ilości M , która wartości swojej nie zmienia, przeto szereg od tego miejsca zacznie być malejącym.

28. Teraz można otrzymać różniczkę funkcyi logarytmicznej, za pomocą twierdzenia wyrażonego w końcu liczby 9; bo gdyśmy uważając w zrównaniu $u = a^x$, ilość u jako funkcją ilości x , znaleźli $\frac{du}{dx} = \frac{1}{e} a^x$, czyli

$p = \frac{1}{e} a^x$, teraz uważając x , jako funkcją ilości u , znaj-

dziemy $\frac{dx}{du} = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{e} a^x} = \frac{e}{a^x}$, co odpowiada zrównaniu

$x = \frac{lu}{1/a}$; lecz w tym razie a jest gruntem logarytmów,

przeto $1/a = 1$, i $\frac{dx}{du} = \frac{e}{a^x} = \frac{e}{u}$, z czego wypada

$$\frac{d.lu}{du} = \frac{e}{u} \quad \text{i} \quad d.lu = e \frac{du}{u}.$$

Dla przejścia od układu, którego gruntem byłoby e , do układu, któryby za grunt miał a , oznaczając logarytmy tych układów przez l' i l , mamy zrównanie $lu = le.l'u$; aże porównujemy wszystkie układy logarytmów z układem neperowskim, dla tego nazywamy liczbę le zamiennikiem (*module*), przez który trzeba mnożyć logarytm neperowski, dla otrzymania logarytmu odpowiedniego w innym układzie; przeto wypada: że *różniczkę logarytmu, równa się mnożności z zamiennika, przez różniczkę liczby podzieloną przez samą liczbę.*

29. Gdybyśmy chcieli otrzymać rozwinięcie ilości x , przez u , to jest rozwinięcie logarytmu według potęg liczby, postrzeżlibyśmy, iż zakładając $u = 0$, ilości

$x, \frac{dx}{du}, \frac{d^2x}{du^2}$, i t. d., stają się nieskończenie wielkimi,

co się z naturą rzeczy nie zgadza; stąd wnosimy że logarytm nie może być rozwinięty pod kształtem

$$x = A + Bu + Cu^2 + Du^3 + \text{i t. d.}$$

O czém też łatwo możemy się przekonać z wiadomości poprzedzających; wiemy bowiem z Algebry, że gdy liczba u jest $= 0$, logarytm jej x , staje się nieskończenie wielkim, czego założone rozwinięcie nie daje, bo kładąc w nim $u = 0$, wypada $x = A$. Unikniemy tego, zamieniając u na $1+u$, to jest kładąc $1+u = e^x$; bo gdy weźmiemy logarytmy neperowskie, wypadnie

$$x = \ln(1+u), \text{ stąd } \frac{dx}{du} = \frac{1e}{1+u} = 1e(1+u)^{-1},$$

$$\frac{d^2x}{du^2} = -1e(1+u)^{-2}, \quad \frac{d^3x}{du^3} = 21e(1+u)^{-3}, \text{ i t. d.};$$

kładąc w nich $u = 0$, i $1e = M$ otrzymamy

$$\ln(1+u) = M \left\{ u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \text{i t. d.} \right\} (*)$$

30. Poprzedzający szereg nie jest dość malejący, iż-

(*) Łatwo zapewna postrzedz możemy, iż dwa wyrażenia ilości k

$$1e, k = \frac{1a}{1e} (26), \quad 2e, k = \frac{(a-1)}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \text{i t. d.}, (24)$$

zrównane z sobą dają

$$1a = 1e \left\{ \frac{(a-1)}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \text{i t. d.} \right\};$$

a kładąc w nich $a = 1+u$, otrzymamy szereg wyżej znaleziony. Lagranż pokazał, iż można ten szereg zrobić malejącym, uważając iż $1a = m \sqrt[m]{a}$, bo stąd mamy

$$1a = m 1e \left\{ \frac{\sqrt[m]{a-1}}{1} - \frac{(\sqrt[m]{a-1})^2}{2} + \frac{(\sqrt[m]{a-1})^3}{3} - \text{i t. d.} \right\};$$

wyraz $\sqrt[m]{a-1}$, prędzej zmniejsza się, a niżeli m powiększa; przeto dając ilości m , wartość coraz większą, będziemy mieli coraz dokładniejsze zrównanie $1a = m 1e (\sqrt[m]{a-1})$

by mógł być użyty do rachowania logarytmów, chyba wtedy tylko, gdy u jest ułamkiem; lecz znaleziono sposoby przerobienia go na inne szeregi, które mniej więcej korzystnie, mogą być do różnych przypadków zastosowane.

Uważamy naprzód, iż zamieniając $+n$, na $-u$, wypada

$$l(1-u) = M \left\{ -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \text{i t. d.} \right\},$$

odejmując zaś to zrównanie od poprzedzającego, mamy

$$l(1+u) - l(1-u) = l\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2M \left\{ u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \text{i t. d.} \right\},$$

zakładając potem $\frac{1+u}{1-u} = 1 + \frac{z}{n}$, co daje $u = \frac{z}{2n+z}$, i u-

ważając że $l\left(1 + \frac{z}{n}\right) = l\left(\frac{n+z}{n}\right) = l(n+z) - \ln$, otrzymujemy

$$l(n+z) - \ln = 2M \left\{ \frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{2n+z} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z}{2n+z} \right)^5 + \text{i t. d.} \right\},$$

a ztąd wyprowadzamy szereg

$$l(n+z) = \ln + 2M \left\{ \frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{2n+z} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z}{2n+z} \right)^5 + \text{i t. d.} \right\},$$

który służy do znalezienia logarytmu liczby $(n+z)$, gdy znamy logarytm liczby n .

Kładąc w nim $n=1$, $z=1$, ponieważ $l1=0$, wypada:

$$l2 = 2M \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^5} + \text{i t. d.} \right\}.$$

szereg dość malejący, który tém bardziej zmniejszać się będzie, im większej liczby logarytmu szukać będziemy.

Biorąc $M=1$, znajdujemy logarytm neperowski liczby 2, który jest $=0,693147180$.

Zamiennik służący logarytmóm założonego układu, jest równy stosunkowi logarytmu jakiejkolwiek liczby, wziętemu w układzie założonym, do logarytmu tejże samej liczby w układzie neperowskim (28). Prędko otrzymujemy zamiennik służący logarytmóm zwyczajnym,

rachując naprzód logarytm neperowski liczby 5 za pomocą logarytmu liczby 4, który wyprowadzimy z logarytmu liczby 2, ponieważ $4=2 \cdot 2$, potem znając logarytm liczby 5 i liczby 2, otrzymujemy $\log 10 = \log 5 + \log 2 = 2,302585093$; a dzieląc przez ten logarytm jedność, to jest logarytm zwyczajny liczby 10, znajdujemy zamiennik szukany

$$M=0,434294482,$$

przez który trzeba mnożyć logarytmy neperowskie dla otrzymania logarytmów zwyczajnych, czyli tak nazwanych bryggswych.

Wzajemnie dla powrócenia od logarytmów zwyczajnych do logarytmów neperowskich, należy logarytmy zwyczajne dzielić przez zamiennik znaleziony, czyli mno-

żyć przez
$$\frac{1}{0,434294482} = 2,302585093$$

31. Przytoczymy kilka przykładów zastosowania prawideł różniczkowania funkcyj logarytmicznych; i dla większej prostoty, przypuszczać odtąd ciągle będziemy, że logarytmy użyte są neperowskie; o użyciu zaś innych logarytmów zawsze przestrzeżemy.

1^{od}. Niech będzie $u = 1 \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right)$,

kładąc $\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = z$, mamy $u = 1z$, ztąd $du = \frac{dz}{z}$,

lecz $dz = \frac{\left(dx \cdot \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right)}{a^2 + x^2} = \frac{a^2 dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$,

więc $du = \frac{a^2 dx}{x(a^2 + x^2)}$

2^{re}. $u = 1 \left\{ \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \right\}$; uczyniwszy

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = y, \quad \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = z$$

będzie $u = 1 \left(\frac{y}{z} \right) = 1y - 1z$, $du = \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}$,

$$\begin{aligned}
 \text{a\~{z}e } dy &= \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} - \frac{dx}{2\sqrt{1-x}} \\
 &= \frac{-dx}{2\sqrt{1-x^2}} \{ \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \} = -\frac{zdx}{2\sqrt{1-x^2}} \\
 dz &= \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} + \frac{dx}{2\sqrt{1-x}} \\
 &= \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}} \{ \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \} = \frac{ydx}{2\sqrt{1-x^2}}, \\
 \text{z\~{t}\~{a}d } \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} &= -\frac{zdx}{2y\sqrt{1-x^2}} - \frac{ydx}{2z\sqrt{1-x^2}} \\
 &= \frac{-(y^2+z^2)dx}{2yz\sqrt{1-x^2}};
 \end{aligned}$$

zwa\~{z}aj\~{a}c za\~{s} \~{z}e $y^2+z^2=4$, $yz=2x$,

znajdziemy $du = -\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

Ten przyk\~{l}ad za\~{s}luguje na uwag\~{e} tak dla zachodzących w r\~{o}żniczce uproszczeń, jako te\~{z} dla swojej prostoty, w por\~{o}wnaniu z funkcją od której pochodzi.

Nietrudno teraz b\~{e}dzie wykonać dzia\~{l}ania w następujących przyk\~{l}adach, których wypadki tylko tu się kładą.

$$3\text{cie. } u = \lg \{ x + \sqrt{1+x^2} \}; \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$4\text{te. } u = \frac{1}{\sqrt{-1}} \lg \{ x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2} \}; \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$5\text{te. } u = \lg \left\{ \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x} - x} \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

6te. Mając $u = (\lg x)^n$, gdy za\~{l}o\~{z}ymy $\lg x = z$, otrzymamy $u = z^n$, z\~{t}\~{a}d $du = nz^{n-1}dz$; przywracając za z , i dz ich warto\~{s}ci b\~{e}dzie

$$d.(\lg x)^n = n(\lg x)^{n-1} \frac{dx}{x}.$$

7me. Niech będzie nakoniec $u = l.lx$, to jest logarytm logarytmu x ; położywszy jak wyżej $lx = z$, będzie $u = lz$, $du = \frac{dz}{z}$, $dz = d.lx = \frac{dx}{x}$, a zatem $du = \frac{dx}{x.lx}$.

32. Za pomocą logarytmów ułatwić możemy różniczkowanie funkcyj wykładniczych, zwłaszcza gdy są zawiślane.

10d. Niech będzie np. $u = z^y$, gdzie z, y , wyrażają jakiekolwiek funkcyje ilości x ; biorąc logarytmy każdej strony zrównania, będzie $lu = y.lz$, różniczkując potem otrzymamy

$$\frac{du}{u} = dylz + yd.lz \quad (11, 28) = dylz + y \frac{dz}{z},$$

$$\text{a ztąd } du = u \left(dylz + y \frac{dz}{z} \right), \quad d.z^y = z^y \left(dylz + y \frac{dz}{z} \right).$$

2re. Niech będzie $u = a^b$; uczyniwszy $b^x = y$ będzie

$$u = a^y, \quad du = a^y dyla \quad (27);$$

$$\text{aże } dy = d.b^x = b^x dx.lb;$$

$$\text{zatem } du = a^b b^x dx.lal b.$$

3cie. Niech będzie $u = z^{t^s}$ gdzie z, t, s , są funkcyami ilości x ; biorąc $t^s = y$ będzie

$$u = z^y \quad du = z^y \left(dylz + y \frac{dz}{z} \right); \quad dy = t^s \left(dslt + s \frac{dt}{t} \right)$$

$$\text{a następnie } du = z^{t^s} t^s \left(dslt.lz + \frac{sdt.lz}{t} + \frac{dz}{z} \right).$$

Za pomocą tych wzorów łatwo znajdziemy różniczkę jakiejkolwiek funkcyi wykładniczej.

33. Wstawy, dostawy, styyczne i inne linije trygonometryczne, uważane względem łuku koła, od którego zależą, są także funkcyami przestępnymi; znane są one pospolicie pod nazwiskiem *funkcyj kołowych* (*fonctions circulaires*).

Będziemy naprzód szukali różniczki wstawy łuku x , na ten koniec weźmy z trygonometrii dwa równania

$$\text{wst}(a+b) = \frac{\text{wsta} \cdot \text{dosta} + \text{wst}b \cdot \text{dosta}}{P},$$

$$\text{wst}(a-b) = \frac{\text{wst}a \cdot \text{dost}b - \text{wst}b \cdot \text{dosta}}{P},$$

odejmując drugie od pierwszego mamy

$$\text{wst}(a+b) - \text{wst}(a-b) = \frac{2\text{wst}b \cdot \text{dosta}}{P},$$

kładąc $a+b = x+dx$, $a-b = x$,

znajdujemy

$$\text{wst}(x+dx) - \text{wst}x = \frac{2\text{wst}\frac{1}{2}dx \cdot \text{dost}(x+\frac{1}{2}dx)}{P},$$

dzieląc naprzód to równanie przez dx , a potem licznik i mianownik drugiej jego strony przez 2, wypada

$$\frac{\text{wst}(x+dx) - \text{wst}x}{dx} = \frac{\text{wst}\frac{1}{2}dx \cdot \text{dost}(x+\frac{1}{2}dx)}{\frac{1}{2}dx \cdot P}.$$

Dla otrzymania granicy tego wyrażenia, trzeba szukać czém stają się oba mnożniki, gdy przyrostek dx , niknie (8). W tém przypuszczeniu drugi mnożnik sprowadza się do $\frac{\text{dost}x}{P}$. Granicą zaś pierwszego mnożni-

ka jest 1; ponieważ z wyrażenia $\text{stya} = \frac{P\text{wsta}}{\text{dosta}}$, wy-

prowadzamy $\frac{\text{wsta}}{\text{stya}} = \frac{\text{dosta}}{P}$; a gdy $a=0$, jest $\text{dosta}=P$,

przeto granicą stosunku $\frac{\text{wsta}}{\text{stya}}$ gdy łuk niknie, jest jedność; aże łuk jest mniejszy od swojej stycznej a większy od wstawy, przeto stosunek $\frac{\text{wsta}}{a}$, zawsze bę-

dąc zawarty między $\frac{\text{wsta}}{\text{stya}}$ i jednością, ma za granicę jedność.

Więc podług tych uwag będziemy mieli

$$\frac{d.wstx}{dx} = \frac{dostx}{P}, \text{ ztąd } d.wstx = \frac{dx.dostx}{P}.$$

34. Otrzymawszy różniczkę wstawy, łatwo z niej wy-
ciągniemy różniczki innych linii trygonometrycznych.
Mamy bowiem

$$1^{od}. \text{ dost } x = wst(1^{k.p.} - x), \text{ d.dost } x = d.wst(1^{k.p.} - x);$$

ażę mamy (33)

$$d.wst(1^{k.p.} - x) = \frac{1}{P} d(1^{k.p.} - x) \text{ dost}(1^{k.p.} - x)$$

$$= -\frac{1}{P} dx \text{ dost}(1^{k.p.} - x),$$

a $\text{dost}(1^{k.p.} - x) = wstx$; zatem

$$d.dostx = -\frac{dx wstx}{P}.$$

2^{re}. Ponieważ wst , odwrócona $x = P - \text{dost } x$, przeto
będzie

$$d.wst. \text{ odwró. } x = -d.dostx = -\frac{dx wstx}{P}.$$

$$3^{cie}. \text{ Sty } x = \frac{P wstx}{dostx},$$

$$\begin{aligned} d.styx &= \frac{P \text{ dost } x d.wstx - P wstx d.dostx}{dostx^2} \quad (12) \\ &= \frac{(dostx^2 + wstx^2) dx}{dostx^2}; \end{aligned}$$

ażę $dostx^2 + wstx^2 = P^2$, zatem

$$d.styx = \frac{P^2 dx}{dostx^2} = \frac{sie^2 x dx}{P^2}.$$

$$4^{te}. \text{ dosty } x = \frac{P^2}{styx},$$

$$\begin{aligned} d.dosty x &= -\frac{P^2 d.styx}{sty^2 x} = -\frac{P^4 dx}{sty^2 x \text{ dost}^2 x} \\ &= -\frac{P^2 dx}{wst^2 x} = -\frac{dosie^2 x dx}{P^2}. \end{aligned}$$

$$5te. \text{ sie } x = \frac{P^2}{\text{dost}x},$$

$$d.\text{sie } x = -\frac{P d.\text{dost}x}{\text{dost}^2x} = -\frac{P dx \text{wst}x}{\text{dost}^2x} = -\frac{dx \text{sty } x \text{ sie } x}{P^2},$$

$$\text{gdyż } \frac{P \text{wst}x}{\text{dost}x} = \text{sty } x, \quad \frac{P^2}{\text{dost}x} = \text{sie } x.$$

$$6te. \text{ dosie } x = \frac{P^2}{\text{wst}x},$$

$$d.\text{dosie } x = -\frac{P^2 d.\text{wst}x}{\text{wst}^2x} = -\frac{P dx \text{dost}x}{\text{wst}^2x}$$

$$= -\frac{dx \text{dosty } x \text{ dosie } x}{P^2}.$$

W użyciu zwyczajnem czynimy $P=1$, co upraszcza wzory poprzedzające i daje

$$d.\text{wst}x = dx \text{dost}x, \quad d.\text{dost}x = -dx \text{wst}x,$$

$$d.\text{sty } x = \frac{dx}{\text{dost}^2x}, \quad d.\text{dosie } x = -\frac{dx}{\text{wst}^2x}.$$

35. Za pomocą tych wzorów można wynaleźć różniczkę każdej funkcji zawierającej w sobie linie trygonometryczne; tym celem należy ją różniczkować, uważając linie jako ilości pojedyncze, a potem za ich różniczki podstawić wyżej otrzymane wypadki. Przytoczę tu jeden tylko przykład. Niech będzie $u = \text{dost}x^{\text{wst}x}$. Założywszy

$$\text{dost}x = z, \quad \text{wst}x = y, \quad \text{będzie } u = z^y,$$

$$du = d.z^y = z^y \left(dy \ln z + \frac{y dz}{z} \right) \quad (32)$$

$$= dx \text{dost}x^{\text{wst}x} \left(\text{dost}x \text{ l. } \text{dost}x - \frac{\text{wst}^2x}{\text{dost}x} \right).$$

36. Uważaliśmy dotąd wstawy, dostawy i t. d., jako funkcje łuku, teraz nawzajem uważajmy łuk jako funkcją swojej wstawy, dostawy i t. d., i wyznajdźmy jego różniczkę, wyrażoną za pomocą tychże linii trygonome-

trycznych. Dla tego niech będzie x funkcyą dana, u ilość zmienna od której ta funkcyą zależy.

1^{od}. Kładąc $wstx = u$, zrównanie $d.wstx = \frac{dx \text{ dost}x}{P}$,

zamieni się na $du = \frac{dx \sqrt{P^2 - u^2}}{P}$;

zatem (9) $dx = \frac{P du}{\sqrt{P^2 - u^2}}$; i to jest różniczka łuku wyrażona przez wstawę i jej różniczkę.

Chcąc wyrazić różniczkę łuku przez różniczkę dostawy, należy wziąć zrównanie

$$d.\text{dost}x = -\frac{dx wstx}{P},$$

które, gdy założymy $\text{dost}x = u$, daje $du = -dx \frac{\sqrt{P^2 - u^2}}{P}$,

$$\text{zład } dx = -\frac{P du}{\sqrt{P^2 - u^2}}.$$

Dla wyrażenia różniczki łuku przez różniczkę wstawy odwróconej założymy $\text{wst. odwró}x = y$, przeto będzie $u = P - y$, gdyż $\text{dost}x = P - \text{wst. odwró}x$; zatem

$$du = -dy, \quad dx = \frac{P dy}{\sqrt{2y - y^2}}.$$

2^{re}. Niech będzie $\text{sty}x = u$;

że zrównania $d.\text{sty}x = \frac{P^2 dx}{\text{dost}^2 x}$, wypada

$$du = \frac{P^2 dx}{\text{dost}^2 x}, \quad dx = \frac{du \text{ dost}^2 x}{P^2};$$

lecz z wyrażenia $\text{sie}x = \frac{P^2}{\text{dost}x}$, mamy $\text{dost}^2 x = \frac{P^4}{\text{sie}^2 x}$,

$$\text{zatem } dx = \frac{P^2 du}{\text{sie}^2 x} = \frac{P^2 du}{P^2 + u^2}.$$

co pokazuje: że różniczka łuku jest równa różniczce styczney, rozmnożonej przez drugą potęgę promienia a podzielonej przez drugą potęgę siecznej.

Kładąc $P=1$, trzy wyrażenia różniczki dx wyżej otrzymane, sprowadzają się do

$$dx = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad dx = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad dx = \frac{du}{1+u^2}.$$

Zakończmy ten artykuł następującym przykładem:

Niech x wyraża łuk, którego wstawa jest $2u\sqrt{1-u^2}$; gdy uczynimy $2u\sqrt{1-u^2}=z$, będzie $dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$,

aże
$$dz = \frac{2du(1-2u^2)}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \text{i} \quad \sqrt{1-z^2} = 1-2u^2,$$

zatem
$$dx = \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

37. Można za pomocą wyżej otrzymanych różniczek przyjść do rozwinięcia główniejszych funkcij kołowych.

1^od. Weźmy wst $x=u$; będzie

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \text{dost}x, & \frac{d^2u}{dx^2} &= -\text{wst}x, & \frac{d^3u}{dx^3} &= -\text{dost}x, \\ \frac{d^4u}{dx^4} &= \text{wst}x, & \text{i t. d.} \end{aligned}$$

uczyniwszy $x=0$, otrzymamy (22)

$U=0, U'=1, U''=0, U'''=-1, U^{(4)}=0$, i t. d., a przeto

$$\text{wst}x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{i t. d.},$$

2^oe. Jeżeli założymy $\text{dost}x=u$, znajdziemy

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -\text{wst}x, & \frac{d^2u}{dx^2} &= -\text{dost}x, & \frac{d^3u}{dx^3} &= \text{wst}x, \\ \frac{d^4u}{dx^4} &= \text{dost}x, & \text{i t. d.} \end{aligned}$$

uczyniwszy $x=0$, wypada

$U=1, U'=0, U''=-1, U'''=0, U^{(4)}=1$, i t. d.

a ztąd

$$\text{dost}x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{i t. d.}$$

Te dwa wzory, których prawo jest widoczne, poda-

ją najdokładniejszy i najdogodniejszy sposób rachowania wstaw i dostaw odpowiadających łukowi danemu, osobliwie gdy łuk nie jest wielki. Podobnież wzory możnaby wyprowadzić na styczną, i inne linije trygonometryczne, lecz że prawo tych wzorów, nie jest tak proste, jak poprzedzających, i prócz tego mniej one są dogodnie w przystosowaniu, niż wyrażenia stycznej, siecznej, i t. d. przez wstawy i dostawy; przeto nie będziemy tu ich wyprowadzali.

38. Możliwość równie otrzymać rozwinięcie łuku przez wstawę lub przez styczną, lecz w tym przypadku wyrażenie współczynników różniczkowych, będąc coraz zawikłańsze, im wyższego one są rzędu, nie łatwo pozwałoby odkryć prawo, według którego po sobie następują; takowej nieprzyzwoitości nie ma sposób następny.

Spółczynnik różniczkowy łuku uważanego za funkcją wstawy jest

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (56),$$

rozwijając go na szereg za pomocą wzoru dwówyrazu (21) i nie czyniąc żadnego upraszczania w współczynnikach liczbowych znajdujemy

$$\frac{dx}{du} = 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}u^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}u^6 + \text{i. t. d.}$$

To rozwinięcie zamykając potęgi tylko parzyste ilości u , pokazuje że rozwinięcie ilości x , powinno zamykać potęgi tylko nieparzyste, zatem iż trzeba założyć szereg

$$x = Au + Bu^3 + Cu^5 + Du^7 + \text{i. t. d.}$$

niekładąc żadnego wyrazu bez ilości u , bo łuk x powinien niknąć gdy $u=0$. Różniczkując to wyrażenie otrzymamy

$$\frac{dx}{du} = A + 3Bu^2 + 5Cu^4 + 7Du^6 + \text{i. t. d.}$$

równając z sobą odpowiednie wyrazy dwóch szeregów wyrażających współczynniki różniczkowy $\frac{dx}{du}$, znajdujemy

$$A=1, 3B=\frac{1}{2}, 5C=\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}, 7D=\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}, \text{ i t. d.}$$

złąd wypada

$$x = \frac{u}{1} + \frac{1}{2} \frac{u^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{u^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{u^7}{7} + \text{i t. d.}$$

Dla wyrażenia łuku przez styczną, należy rozwinąć naprzód

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{1+u^2} = (1+u^2)^{-1} \quad (36),$$

co daje
$$\frac{dx}{du} = 1 - u^2 + u^4 - u^6 + \text{i t. d.}$$

kładąc potem

$$x = Au + Bu^3 + Cu^5 + Du^7 + \text{i t. d.}$$

i różniczkując, wypada

$$\frac{dx}{du} = A + 3Bu^2 + 5Cu^4 + 7Du^6 + \text{i t. d.}$$

z czego w końcu otrzymujemy

$$x = \frac{u}{1} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \text{i t. d.}$$

Z tego rozwinięcia wypada znakomite wyrażenie łuku $0,5^{k.p.}$, którego styczną, jak wiadomo, jest $=1$, to jest promieniowi; jakoż założywszy $u=1$, znajdujemy

$$\text{łuk } 0,5^{k.p.} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{i t. d.}$$

Szereg ten, jako nie prędko malejący, nie jest dogodnym w użyciu; lecz podzieliwszy łuk $0,5^{k.p.}$ na drobniejsze łuki, styczną każdemu odpowiadająca będzie mniejsza od jedności, tym sposobem otrzymamy szeregi malejące. Matematyk Angielski *Machin* znalazł że łuk $0,5^{k.p.}$ jest równy innemu cztery razy wziętemu łukowi, które-

go styczną jest $=\frac{1}{5}$, zmniejszonemu łukiem, którego styczną jest $=\frac{1}{239}$, o czém łatwo się przekonamy uważając, że jeżeli $\text{sty } a = \frac{1}{5}$,

$$\text{wtedy} \quad \text{sty } 2a = \frac{2\text{sty } a}{1 - \text{sty } a^2} = \frac{5}{12},$$

$$\text{sty } 4a = \frac{2\text{sty } 2a}{1 - (\text{sty } 2a)^2} = \frac{120}{119}.$$

Ponieważ ostatnia liczba $\frac{120}{119}$ jest większa od jedności, to jest większa od stycznej łuku $0,5^{k.p.}$; ztąd wypada że $4a > 0,5^{k.p.}$; więc uczyniwszy $4a = A$, $0,5^{k.p.} = B$, będzie $4a - 0,5^{k.p.} = A - B$; styczną zaś tej różnicy będzie

$$\text{sty}(A - B) = \frac{\text{sty } A - \text{sty } B}{1 + \text{sty } A \text{sty } B} = \frac{1}{239},$$

kładąc $A - B = b$ wypada $0,5^{k.p.} = 4a - b$.

Biorąc teraz kolejno $u = \frac{1}{5}$, $u = \frac{1}{239}$, otrzymamy

$$b = \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot (239)^3} + \frac{1}{5 \cdot (239)^5} - \frac{1}{7 \cdot (239)^7} + \text{i t. d.}$$

$$a = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \frac{1}{9 \cdot 5^9} - \text{i t. d.}$$

$$\text{przeto } 0,5^{k.p.} = \left\{ \begin{array}{l} 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \text{i t. d.} \right) \\ - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot (239)^3} + \frac{1}{5 \cdot (239)^5} - \text{i t. d.} \right) \end{array} \right\}$$

ztąd wyprowadzimy iż półokręgu koła $= 3,141592653$.

Różniczkowanie funkcij zależących od dwóch lub większej liczby ilości zmiennych.

59. Niech będzie $f(x, y)$ funkcyą jakakolwiek ilości x i y ; przypuszczając że ilość x zmienia się sama jedna i staje się $x + k$, należy uważać ilość y za stałą, i z funkcyą założoną postępować jak z funkcyą ilości x ; więc

kładąc dla skrócenia $f(x, y) = u$, będziemy mieli (23)

$$f(x+h, y) = u + \frac{du}{dx} \frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}$$

Dla znalezienia, czém staje się funkcyja założona, gdy sama jedna ilość y powiększa się przyrostkiem k , trzeba uważać ilość x za stałą, a funkcyją $f(x, y)$ czyli u , za funkcyją jednej tylko ilości y ; z czego otrzymamy

$$f(x, y+k) = u + \frac{du}{dy} \frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dy^2} \frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3} \frac{k^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}$$

Gdy zaś obie ilości x, y razem się biorą za zmienne, i zamieniają się na $x+h, y+k$, nie znając wtedy kształtu funkcyi $f(x, y)$, nie możemy wykonać w niej podstawień wskazanych; wszakże łatwo daje się widzieć, że do tego samego wypadku przyjdziemy, zmieniając na-przód x na $x+h$, a potem w otrzymaném ztąd rozwinięciu kładąc $y+k$ za y .

Mamy już

$$f(x+h, y) = u + \frac{du}{dx} \frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

gdzie u wyraża $f(x, y)$. Żeby zaś mieć rozwinięcia rozmaitych współczynników tego szeregu, ze względu na zmienną ilość y , należy w nich uważać ilość x za stałą, a same współczynniki rozwijać jako funkcyje jednej tylko zmiennej y . Podług tego, $f(x, y)$ czyli u , zamieni się na

$$u + \frac{du}{dy} \frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dy^2} \frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3} \frac{k^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}$$

Rozwinięcia zaś współczynników $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, i t. d., otrzymamy, kładąc w poprzedzającym rozwinięciu $\frac{du}{dx}$, i t. d. za u ; tak więc $\frac{du}{dx}$, gdy w nim za y , podstawimy $y+k$, zamieni się na

$$\frac{du}{dx} + \frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy} \frac{k}{1} + \frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^2} \frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^3} \frac{k^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}$$

Lecz że wyrażenie $\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}$ pokazuje, iż funkcyja u powinna być dwa razy różniczkowaną, raz co do x , drugi raz co do y ; więc dla uproszczenia możemy je napisać pod kształtem $\frac{d^2u}{dydx}$. Podobnież wyrażać bę-

dziemy $\frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^2}$ przez $\frac{d^3u}{dy^2dx}$; a w ogólności $\frac{d^{n+m}u}{dy^n dx^m}$ wyraża, iż funkcyja dana u , jest różniczkowana razy m co do x , a razy n co do y ; to jest, wyraża współczynnik różniczkowy rzędu ng funkcyi $\frac{d^m u}{dx^m}$ wzięty w przypuszczeniu, że y jest ilością zmienną, gdy tym czasem też funkcyja sama jest współczynnikiem różniczkowym rzędu mg funkcyi danej u , biorąc ilość x za zmienną.

To założywszy, podstawując $y+k$ za y , zmienimy

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} \text{ na } \frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dydx} \frac{k}{1} + \frac{d^3u}{dy^2dx} \frac{k^2}{1.2} + \frac{d^4u}{dy^3dx} \frac{k^3}{1.2.3} + \text{it. d.}, \\ \frac{d^2u}{dx^2} \text{ na } \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^3u}{dydx^2} \frac{k}{1} + \frac{d^4u}{dy^2dx^2} \frac{k^2}{1.2} + \frac{d^5u}{dy^3dx^2} \frac{k^3}{1.2.3} + \text{it. d.}, \\ \frac{d^3u}{dx^3} \text{ na } \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{d^4u}{dydx^3} \frac{k}{1} + \frac{d^5u}{dy^2dx^3} \frac{k^2}{1.2} + \frac{d^6u}{dy^3dx^3} \frac{k^3}{1.2.3} + \text{it. d.},\end{aligned}$$

Wprowadzając te wartości w rozwinięcie $f(x+h, y)$, i tak szykując, aby wszystkie wyrazy, w których składniki przyrostków h i k , tę samą składają sumę, były umieszczone w jednejże kolumnie, otrzymamy

$$\begin{aligned}f(x+h, y+k) = & u + \frac{du}{dy}k + \frac{d^2u}{dy^2} \frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3} \frac{k^3}{1.2.3} + \text{it. d.} \\ & + \frac{du}{dx}h + \frac{d^2u}{dydx} \frac{kh}{1.1} + \frac{d^3u}{dy^2dx} \frac{k^2h}{1.2.1} + \text{it. d.} \\ & + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dydx^2} \frac{kh^2}{1.1.2} + \text{it. d.} \\ & + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{it. d.}\end{aligned}$$

Dla należytego pojęcia znaczenia tego wzoru, dość jest założyć $u = x^m y^n$, i z tego wyprowadzić rozwinięcie funkcyi $(x+h)^m (y+k)^n$, które można innym sposobem łatwo otrzymać.

40. Przyszliśmy do poprzedzającego rozwinięcia kładąc naprzód $x+h$ za x , potem $y+k$ za y ; lecz mogliśmy zacząć od podstawienia $y+k$ za y ; wtedy funkcyja $f(x,y)$ czyli u , zamieniłaby się na $f(x,y+k)$, czyli na

$$u + \frac{du}{dy} k + \frac{d^2 u}{dy^2} \frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3 u}{dy^3} \frac{k^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

kładąc w tym szeregu $x+h$ za x , zamienilibyśmy

$$u \text{ na } u + \frac{du}{dx} \frac{h}{1} + \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3 u}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

$$\frac{du}{dy} \text{ na } \frac{du}{dy} + \frac{d^2 u}{dx dy} \frac{h}{1} + \frac{d^3 u}{dx^2 dy} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^4 u}{dx^3 dy} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

$$\frac{d^2 u}{dy^2} \text{ na } \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^3 u}{dx dy^2} \frac{h}{1} + \frac{d^4 u}{dx^2 dy^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^5 u}{dx^3 dy^2} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

$$\frac{d^3 u}{dy^3} \text{ na } \frac{d^3 u}{dy^3} + \frac{d^4 u}{dx dy^3} \frac{h}{1} + \frac{d^5 u}{dx^2 dy^3} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^6 u}{dx^3 dy^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

więc mielibyśmy

$$f(x+h, y+k) = u + \frac{du}{dx} \frac{h}{1} + \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3 u}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}$$

$$+ \frac{du}{dy} \frac{k}{1} + \frac{d^2 u}{dx dy} \frac{h k}{1.1} + \frac{d^3 u}{dx^2 dy} \frac{h^2 k}{1.2.1} + \text{i t. d.}$$

$$+ \frac{d^2 u}{dy^2} \frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3 u}{dx dy^2} \frac{h k^2}{1.1.2} + \text{i t. d.}$$

$$+ \frac{d^3 u}{dy^3} \frac{k^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}$$

+ i t. d.

Jasna jest rzecz, iż to drugie rozwinięcie, powinno być to samo (*identique*) z pierwszém, bo na jedno wychodzi, zamienić pierwiej x na $x+h$, a potem y na $y+k$, też lub pierwiej y na $y+k$, potem zaś x na $x+h$;

w jednym bowiem i w drugim razie zarówno mieć będziemy $f(x+h, y+k)$.

Równając z sobą wyrazy podobne tych dwóch rozwinięć, to jest te, w których h i k są w jednej potęg-dze, otrzymamy następujące zrównania,

$$\frac{d^2 u}{dy dx} = \frac{d^2 u}{dx dy},$$

$$\frac{d^5 u}{dy dx^2} = \frac{d^3 u}{dx^2 dy},$$

$$\frac{d^5 u}{dy^2 dx} = \frac{d^5 u}{dx dy^2},$$

$$\frac{d^{n+m} u}{dy^n dx^m} = \frac{d^{m+n} u}{dx^m dy^n}.$$

i t. d. i t. d.

Z pierwszego zrównania wypada: że współczynnik różniczkowy drugiego rzędu funkcji o dwóch zmiennych, otrzymany przez różniczkowanie funkcji raz co do jednej, potem co do drugiej zmiennej, jest zawsze jednej i tej samej wartości, jakibykolwiek porządek w różniczkowaniu był zachowany.

Niech będzie np. $u = x^m y^n$; różniczkując naprzód co do x tylko, będzie $\frac{du}{dx} = m x^{m-1} y^n$; potem różniczkując wypadek co do y , otrzymamy $\frac{d^2 u}{dy dx} = m n x^{m-1} y^{n-1}$ działając zaś na wspak, znajdziemy

$$\frac{du}{dy} = n x^m y^{n-1}, \quad \frac{d^2 u}{dx dy} = m n x^{m-1} y^{n-1}$$

z czego się okazuje, że współczynnik drugiego rzędu w obu razach tę samą daje wartość. Dalsze przytoczone wyżej zrównania, są tylko wnioskami pierwszego.

41. Odejmując $f(x, y)$ czyli u od $f(x+h, y+k)$, pisząc w jednej linii wyrazy zawarte w każdej kolumnie, i sprowadzając je do jednego mianownika wypada

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = \frac{1}{1} \left(\frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k \right) \\ + \frac{1}{1.2} \left(\frac{d^2u}{dx^2} h^2 + 2 \frac{d^2u}{dx dy} hk + \frac{d^2u}{dy^2} k^2 \right) + \text{i t. d.}$$

Rozciągając do funkcji o dwóch zmiennych opisanie różniczkowe (5), postrzeżemy, że różniczkowa funkcji $f(x, y)$ czyli u , składa się z dwóch wyrazów formujących pierwszą linią poprzedzającego rozwinięcia; a zamieniając h i k na dx , i dy , otrzymamy

$$df(x, y) = du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy.$$

Z tego postrzegamy, że *różniczkowa zupełna* funkcji o dwóch zmiennych, zawiera w sobie dwie części: jedną $\frac{du}{dx} dx$, to jest różniczkę wziętą co do zmiennej x , drugą $\frac{du}{dy} dy$, to jest różniczkę wziętą co do zmiennej y .

Podane więc prawidła na różniczkowanie funkcji o jednej zmiennej (10, i t.d.), mogą być zastosowane do funkcji o dwu zmiennych; i tak *chcąc otrzymać różniczkę funkcji o dwu zmiennych, należy tę funkcję różniczkować raz co do jednej, a potem co do drugiej zmiennej, summa z takowych dwóch różniczek częściowych, będzie zupełną różniczką żądaną.*

42. Przeto nie sądzę za rzecz potrzebną dawać wiele przykładów różniczkowania funkcji o dwu zmiennych, przestanę zatem na kilku następujących.

Widzimy natychmiast, że, podług wyżej danego prawidła, będzie

$$d(x+y) = dx + dy;$$

$$d(xy) = ydx + xdy;$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Niech będzie jeszcze

10d. $u = x^m y^n$,

mamy $\frac{du}{dx} dx = mx^{m-1} y^n dx$,

$$\frac{du}{dy} dy = nx^m y^{n-1} dy; \text{ więc}$$

$$du = mx^{m-1} y^n dx + nx^m y^{n-1} dy = x^{m-1} y^{n-1} (my dx + nx dy).$$

2re. $u = \frac{ay}{\sqrt{x^2 + y^2}} = ay(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}};$

będzie $\frac{du}{dx} dx = -\frac{ayx dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$

$$\frac{du}{dy} dy = \frac{ady}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ay^2 dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}};$$

$$\text{z\kern 0.08em t\kern 0.08em a\kern 0.08em d} \quad du = -\frac{ayx dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{ady}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{ay^2 dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{axy dx + ax^2 dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

3cie. $u = \text{Łuk} \left(\text{sty} = \frac{x}{y} \right);$ jest to wyrażenie łuku

koła, którego promień $= 1$, a styczna $= \frac{x}{y}$; uczyniwszy

$\frac{x}{y} = z$, otrzymamy $\frac{dz}{1+z^2}$ na różniczkę łuku, którego

styczna $= z$ (36); z\kern 0.08em t\kern 0.08em a\kern 0.08em d $du = \frac{dz}{1+z^2}$; przywracając teraz za z i dz ich wartości, otrzymamy

$$du = \frac{y dx - x dy}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}.$$

43. Sposob, podług którego piszemy różniczki funkcji o wielu zmiennych, prowadzi do ważnych uwag. Nie należy brać wtenczas za jedno i to samo wyra-

żeń $\frac{du}{dx}dx$, i du , co moglibyśmy uczynić, gdyby u było funkcją jednej tylko zmiennej x ; bo w niniejszym przypadku wyrażenie $\frac{du}{dx}$ ma szczególne i sobie właściwe znaczenie; jest to współczynnik różniczkowy funkcji uważanej co do jednej tylko zmiennej x , czyli iloraz otrzymany z dzielenia przez przyrostek dx , pierwszego wyrazu różnicy wziętej między dwoma stanami danej funkcji i rozwiniętej według potęg przyrostku dx , w przypuszczeniu że sama tylko ilość x jest zmienną; to samo rozumieć należy względem $\frac{du}{dy}$ (41).

Ilości $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, często są nazywane *różnicami cząstkowymi* (*differences partielles*) pierwszego rzędu funkcji u ; a w ogólności $\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}$ nazywane jest *różnicą cząstkową* rzędu $m+n$, otrzymaną przez różniczkowanie danej funkcji, m razy co do x , a n razy co do y ; należy jednak zważyć, że nazwisko *różnicy cząstkowej* nie jest właściwe, gdyż wyrażenia, tem nazwiskiem mianowane, nie oznaczają zgołą różnicy między dwiema ilościami.

Prawdziwe *różnice cząstkowe* funkcji u są:

$$f(x+h, y) - f(x, y), \quad f(x, y+k) - f(x, y),$$

pierwsza wyraża różnicę cząstkową wziętą co do zmiennej x , druga różnicę cząstkową co do y .

Wyrażenia $\frac{du}{dx}h$, $\frac{du}{dy}k$, albo $\frac{du}{dx}dx$, $\frac{du}{dy}dy$,

jako pierwsze wyrazy cząstkowych różnic, powinny się nazywać *różniczkami cząstkowymi* (*différentielles partielles*), a zaś $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, *współczynnikami różniczkowymi cząstkowymi* pierwszego rzędu, funkcji zależącej od dwóch ilości zmiennych x, y .

Tu zważyć mamy, że funkcja jednej zmiennej, ma

jeden tylko współczynnik różniczkowy w każdym rzędzie (17), funkcya zaś dwóch zmiennych, dwa ma współczynniki różnicz. pierwszego rzędu, trzy drugiego rzędu, cztery trzeciego, i t. d.

44. Obaczmy teraz, jak się wynajdują te rozmaite współczynniki, zaczynając od dwóch pierwszych.

$$\text{Mamy już} \quad du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy,$$

różniczkując potem funkcye $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, które uważać należy jako funkcye dwóch zmiennych, otrzymamy

$$d. \frac{du}{dx} = \frac{d^2 u}{dx^2} dx + \frac{d^2 u}{dy dx} dy,$$

$$d. \frac{du}{dy} = \frac{d^2 u}{dy^2} dy + \frac{d^2 u}{dx dy} dx;$$

aże różniczka drugiego rzędu, jest to różniczka różniczeki rzędu pierwszego, więc będzie

$$d^2 u = \frac{d^2 u}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2 u}{dx dy} dx dy + \frac{d^2 u}{dy^2} dy^2;$$

biorąc dx i dy za stałe, a współczynniki różniczkowe, których mianowniki zamykają tęż samą mnogość z dx i dy różnie tylko uporządkowanych, za równe między sobą (40).

Podobnie różniczkując współczynniki poprzedzającej różniczki, otrzymamy

$$d. \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^3 u}{dx^3} dx + \frac{d^3 u}{dy dx^2} dy,$$

$$d. \frac{d^2 u}{dx dy} = \frac{d^3 u}{dx^2 dy} dx + \frac{d^3 u}{dy dx dy} dy,$$

$$d. \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{d^3 u}{dx dy^2} dx + \frac{d^3 u}{dy^3} dy,$$

a zatem

$$d^3 u = \frac{d^3 u}{dx^3} dx^3 + 3 \frac{d^3 u}{dx^2 dy} dx^2 dy + 3 \frac{d^3 u}{dx dy^2} dx dy^2 + \frac{d^3 u}{dy^3} dy^3.$$

Łatwo teraz potrafimy wynaleść różniczki dalszych rzędów. Te różniczki co do swoich współczynników liczbowych zgadzają się z potęgami dwuwyrazu.

Uważyć mamy, że według poprzedzającego znakowania, możemy szeregowi wyprowadzonemu pod liczbą 41, nadać kształt szeregu będącego pod liczbą 23, zamieniając h , na dx , k na dy i jeżeli wyrazimy funkcją $f(x+dx, y+dy)$, przez u' , będzie jeszcze wzór

$$u' - u = \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

równie ogólny jak wzór pod liczbą (41), bo przyrostki dx i dy są także dowolne.

45. Łatwo można te uwagi rozciągnąć do funkcji od ilukolwiek ilości zmiennych, i przekonać się, że jeżeli mamy

$$u = f(t, x, y, z),$$

wypada

$$\begin{aligned} f(t+g, x+h, y+k, z+l) - f(t, x, y, z) \\ = \frac{du}{dt}g + \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l + \text{i t. d.}, \end{aligned}$$

złąd wniesiemy

$$du = \frac{du}{dt} dt + \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz,$$

gdzie wyrażenia $\frac{du}{dt}, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$

oznaczają współczynniki różniczkowe funkcji u , brane ze względu na jedną tylko ilość zmienną kolejno t, x, y, z .

To znakowanie podane od Fontena (*Fontaine*) jest najprostsze i najlepiej rzecz wyrażające ze wszystkich, które w tym celu proponowano. Euler obawiając się ażeby nie pomieszano *np.* współczynnika różniczkowego $\frac{du}{dt}$, ze stosunkiem całej różniczki du do różniczki dt , to jest ze stosunkiem

$$\frac{\frac{du}{dt} dt + \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz}{dt},$$

wyraża ten stosunek przez $\frac{du}{dt}$, a współczynnik różniczkowy oznacza przez $\left(\frac{du}{dt}\right)$. Lecz sens wyrażenia rzecz należyte objaśnia, i takowe rozróżnienie jest prawie zawsze zbytkowem; prócz tego Fonten, na przypadek, jeźliby to rozróżnienie było koniecznie potrzebnem, radzi wyrażać rzeczony stosunek pod kształtem $\frac{1}{dt} du$; a że takowy stosunek rzadziej się używa niżli współczynnik różniczkowy, przeto do wyrażenia współczynnika użył znaku prostszego, co jest przeciwnem zdaniu Eulera, lecz zgodnem z teorią wszystkich nomenklatur.

46. Wypadki rachunku różniczkowego nie powinny zamykać przyrostków ilości zmiennych, przeto stosunek $\frac{1}{dt} du$, wtedy może tylko mieć wartość oznaczoną,

gdy ilości zmienne x, y, z , są, choć niewidocznie, funkcjami ilości t , i wtedy du wyraża różniczkę funkcyi złożonej z jakiejkolwiek liczby innych funkcyj tejże samej ilości zmiennej. Jakoż, jeźli przypuścimy, że ilości zmienne x, y, z , zależą od ilości zmiennej t , i gdy za przyrostki g, h, k, l , położymy wyrażenia $dt, p dt, q dt, r dt$;

zbiór wyrazów zamykających różniczkę dt niepodniesioną do żadnej potęgi, składać się będzie z wyrazów, w których przyrostki g, h, k, l , ani są podniesione do potęg, ani mnożone jedno przez drugie: więc będziemy mieli jeszcze

$$du = \frac{du}{dt} dt + \frac{du}{dx} p dt + \frac{du}{dy} q dt + \frac{du}{dz} r dt,$$

czyli co to samo jest

$$du = \frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz,$$

gdy za pdt , qdt , rdt , położymy wyrażające je różniczki dx , dy , dz .

Przeto różniczka funkcyi zamykającej jakąkolwiek liczbę innych funkcyj jednej tylko ilości zmiennej, jest summą różniczek cząstkowych odpowiednich każdej z tych funkcyj.

Prawidło pod liczbą 11 podane, jest szczególnym przypadkiem tego wykładu, bo, jeżeli weźmiemy $u = xyz$, wypadnie

$$du = xyzdt + tyzdx + txzdy + txydz.$$

Także, gdy $u = z^y$; będziemy mieli

$$du = yz^{y-1}dz + z^y dy/z,$$

ponieważ $\frac{du}{dz}dz = yz^{y-1} (13)$, $\frac{du}{dy}dy = z^y dy/z (27)$.

47. Niewiele tu powiemy o sposobie obracania na szeregi funkcyj o dwóch ilościach zmiennych, bo najczęściej zdarza się obracać je ze względu na jedną tylko ilość zmienną, przypuszczając iż druga zmienna ma wartość stałą, a w takowym razie postępujemy z niemi, jak z funkcyami jednej ilości zmiennej. Jednak pożyteczną będzie rzeczą okazać, iż wzór z licz. 39 może być równie użyty do obrócenia na szeregi funkcyi o dwóch zmiennych, jak wzór z licz. 21 służył na funkcyą jednej zmiennej (22).

Jeżeli we wzorze licz. 41, to jest w funkcyi u , i we wszystkich jej współczynnikach, różniczkowych uczynimy $x=0$, $y=0$, otrzymamy rozwinięcie wyrażenia $f(h, k)$, idące według potęg ilości h i k , gdy zaś za h i k , napiszemy x i y , wypadnie wzór

$$f(x, y) = u + \left(\frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y \right) + \frac{1}{1.2} \left\{ \frac{d^2u}{dx^2}x^2 + \frac{2d^2u}{dxdy}xy + \frac{d^2u}{dy^2}y^2 \right\} + \text{i t. d.}$$

w którym tak w funkeyi u , jak we wszystkich jej współczynnikach różniczkowych należy położyć $x=0$, $y=0$; cały ten sposób postępowania jest podobny do sposobu, jakim otrzymaliśmy wzór Makloryna (*).

Różniczkowanie jakichkolwiek zrównań o dwóch ilościach zmiennych.

48. Dotąd różniczkowaliśmy zrównania zwane *zrównaniami oddzielonemi* (*equations séparées*) to jest takie, w których ilość zmienna znajdowała się po jednej, a funkeya tej ilości po drugiej stronie zrównania. Miały one kształt $Y=X$, gdzie Y jest funkeyą ilości y , a X funkeyą ilości x ; lecz nie wszystkie zrównania pod tą jawią się postacią; często wypadają takie, w których ilość zmienna i jej funkeya są po jednej stronie razem połączone. Obaczmy jak z takich zrównań wyprowadzać współczynniki różniczkowe różnych rzędów danej funkeyi.

Gdy między dwiema ilościami zmiennymi x , i y , ma-

(*) Można też przez różniczkowanie otrzymać rozwinięcie funkeyi $f(x, y)$, tak, jak w przypisku do liczby 22 otrzymaliśmy rozwinięcie funkeyi $f(x)$; jakoż założymy szereg

$$u = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 + \text{it. d.},$$

w którym potrzeba oznaczyć tylko współczynniki A, B, C, D , it. d., nienależące od ilości x, y , na ten koniec różniczkujemy założony szereg kilka razy następnie co do ilości x i y , i otrzymujemy wyrażenia współczynników różniczkowych

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dxdy}, \frac{d^2u}{dy^2}, \text{it. d.},$$

zakładając w nich $x=0, y=0$, wyprowadzimy wartość ilości A, B , it. d., będzie albowiem

$$\frac{du}{dx} = B, \frac{du}{dy} = C, \frac{d^2u}{dx^2} = 1.2 D, \frac{d^2u}{dxdy} = 1.1 E, \frac{d^2u}{dy^2} = 1.2 F. \text{it. d.};$$

wartość zaś ilości A znajdziemy kładąc w danej funkeyi $x=0, y=0$.

my zrównanie $f(x, y) = 0$, możemy z niego wyrazić albo x przez y , albo y przez x , przeto jedną którąkolwiek z tych ilości można uważać jako funkcją drugiej; i gdy zmienimy wartość jednej, zmieni się, stosownie do związku między nimi zachodzącego, wartość drugiej; więc przypuszczając że x , zmienia się na $x+h$, i z powodu tej zmiany, zmienia się także y na $y+k$, będzie

$$f(x+h, y+k) = 0,$$

złąd

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = 0;$$

to zrównanie podług liczby 41 rozwija się na szereg następny

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{1} \left(\frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k \right) \\ & + \frac{1}{1.2} \left(\frac{d^2u}{dx^2} h^2 + 2 \frac{d^2u}{dxdy} hk + \frac{d^2u}{dy^2} k^2 \right) + \text{i t.d.} \end{aligned} \right\} = 0,$$

w którym u wyraża $f(x, y)$.

Szukać współczynnika różniczkowego funkcji y , jest to szukać granicy stosunku przyrostku funkcji y , do przyrostku ilości x , to jest granicy stosunku $\frac{k}{h}$; kładę

stosunek $\frac{k}{h} = \pi$, złąd $k = \pi h$, wprowadzając tę wartość za k

w ostatnie zrównanie, dzieląc je całe przez h , a dla otrzymania żądanej granicy, zakładając $h = 0$, i w tym razie na miejscu stosunku π , biorąc jego granicę p , otrzymamy

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} p = 0,$$

czyli, ponieważ $p = \frac{dy}{dx}$,

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

zrównanie służące do znalezienia współczynnika różni-

czkowego pierwszego rzędu funkcji y , danej przez zrównanie $u=0$, między dwiema ilościami zmiennymi x i y .

Mnożąc ostatnie zrównanie przez dx , mamy wypadek

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy = 0$$

zupełnie zgodny z różniczką pierwszą funkcji $u=f(x, y)$ (41); co pokazuje, iż dla otrzymania współczynnika różniczkowego pierwszego rzędu funkcji y , danej przez zrównanie $u=0$ między dwiema ilościami zmiennymi x, y , trzeba różniczkować to zrównanie, uważając ilości x, y , jak gdyby od siebie były niezależne, różniczkę otrzymaną zrównać z zerem, i ztąd wyprowadzić współczynnik $\frac{dy}{dx}$.

Spółczynnik różniczkowy $\frac{dy}{dx}$ czyli p , zamykając w sobie ilości x, y , jest funkcją ilości x , bo y , dla związku danego przez zrównanie $u=0$, jest także funkcją ilości x , przeto gdy zmienimy x na $x+h$, współczynnik p , nabędzie przyrostku, który wyrażam przez l ; lecz w tym razie pierwszą stronę zrównania

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} p = 0,$$

można uważać jako funkcją trzech ilości zmiennych x, y, p ; zrównaną z zerem, która zawsze powinna zostać równą zeru; wyrażając ją przez u' , mamy

$$u' \text{ czyli } f(x, y, p) = 0,$$

gdy w niej zmienimy x, y, p , na $x+h, y+k, p+l$, będzie

$$f(x+h, y+k, p+l) = 0,$$

ztąd $f(x+h, y+k, p+l) - f(x, y, p) = 0$,

takowa różnica według liczby 45, wyrazi się przez

$$\frac{du'}{dx} h + \frac{du'}{dy} k + \frac{du'}{dp} l + \text{i t. d.} = 0.$$

W tej różnicy kładę stosunki $\frac{k}{h} = \pi, \frac{l}{h} = \epsilon$, to jest

$k=\pi h$, $l=\varepsilon h$, potem dzielę całe zrównanie przez h , na koniec robię $h=0$, i na miejscu stosunku π, ε , biorąc ich granice p, q , czyli $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dp}{dx}$, otrzymuję zrównanie

$$\frac{du'}{dx} + \frac{du'}{dx} \frac{dy}{dx} + \frac{du'}{dp} \frac{dp}{dx} = 0,$$

wyrażające związek między współczynnikiem rzędu pierwszego i współczynnikiem rzędu drugiego funkcji y , danej przez zrównanie $f(x, y) = 0$.

Mnożąc ostatnie zrównanie przez dx , mamy wyrażenie

$$\frac{du'}{dx} dx + \frac{du'}{dy} dy + \frac{du'}{dp} dp = 0,$$

zupełnie zgadzające się z całą różniczką ilości u' będącej funkcją trzech ilości zmiennych x, y, p ; stąd wnosimy, iż dla otrzymania zrównania, wyrażającego związek między współczynnikiem różniczkowym pierwszego rzędu, i współczynnikiem różniczkowym rzędu drugiego, należy zróżniczkować zrównanie służące do oznaczenia pierwszego współczynnika, uważając ten współczynnik jako nową ilość zmienną, i znalezioną różniczkę podzielić przez dx .

$$\text{Zrównanie } \frac{du'}{dx} + \frac{du'}{dy} \frac{dy}{dx} + \frac{du'}{dp} \frac{dp}{dx} = 0,$$

$$\text{czyli } \frac{du'}{dx} + \frac{du'}{dy} p + \frac{du'}{dp} q = 0,$$

może być uważane jako funkcja u'' , czterech ilości zmiennych x, y, p, q , zrównana z zerem. Po zróżniczkowaniu tej funkcji otrzymamy zrównanie $du'' = 0$, służące do oznaczenia pierwszego współczynnika różniczkowego funkcji q , to jest współczynnika różniczkowego trzeciego rzędu funkcji y , przez współczynniki poprzedzające.

Z tych wszystkich uwag postrzegamy, iż zrównania wyrażające związki między współczynnikami różniczkowymi funkcji, która jest dana przez zrównanie między

dwie ma ilościami zmiennemi, wyprowadzają się jedne z drugich przez różniczkowania następne, uważając każdy współczynnik jako nową ilość zmienną.

49. Objasnijmy to następującym przykładem. Niech będzie równanie

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0.$$

funkcya u jest w tym razie $y^2 - 2mxy + x^2 - a^2$; jeżeli ją różniczkujemy zmieniając razem x i y , i takową różniczkę uczynimy $= 0$, znajdziemy

$$2ydy - 2mxdy - 2mydx + 2xdx = 0,$$

$$\text{czyli } ydy - mxdy - mydx + xdx = 0; \quad (1)$$

założywszy $dy = p dx$, otrzymamy na oznaczenie p równanie

$$(y - mx)p - my + x = 0,$$

a ztąd

$$p = \frac{my - x}{y - mx}.$$

Chcąc współczynnik p wyrazić przez samą tylko ilość x , należy w jego wyrażeniu za ilość y podstawić wartość jej wyciągniętą z danego równania, która jest

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 - x^2 + m^2 x^2},$$

więc będzie

$$\begin{aligned} p &= \frac{-x + m^2 x \pm m \sqrt{a^2 - x^2 + m^2 x^2}}{\pm \sqrt{a^2 - x^2 + m^2 x^2}} \\ &= m \pm \frac{-x + m^2 x}{\sqrt{a^2 - x^2 + m^2 x^2}}; \end{aligned}$$

tenże sam otrzymalibyśmy wypadek różniczkując równanie oddzielone

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 - x^2 + m^2 x^2}$$

wynikające z rozwiązania danego równania.

Równanie

$$(y - mx)p - my + x = 0$$

zróżniczkowane, uważając w niem y i p jako funkcyje ilości x , prowadzi do zrównania

$$(dy - m dx)p + (y - mx)dp - m dy + dn = 0,$$

i jeżeli uczynimy

$$dy = p dx, \quad dp = q dx,$$

otrzymamy zrównanie

$$(p - m)p + (y - mx)q - mp + 1 = 0,$$

które wyraża związek zachodzący między współczynnikami różn. drugiego rzędu q czyli $\frac{d^2 y}{dx^2}$ (17), współczynnikiem pierwszego rzędu p czyli $\frac{dy}{dx}$, i ilościami zmiennymi x, y .

Podobnie dalej różniczkując znaleźlibyśmy zrównanie, od którego zależy współczynnik trzeciego rzędu i t. d.

50. Jeżeli się zastanówimy, że $q = \frac{d^2 y}{dx^2}$, i że $d^2 y = d(dy)$, postrzeżemy, że można zrównanie

$$(p - m)p + (y - mx)q - mp + 1 = 0,$$

otrzymać prosto ze zrównania

$$y dy - m x dy - m y dx + x dx = 0, \quad (1)$$

różniczkując je nie tylko przez wzgląd na zmienne x, y , ale i przez wzgląd na dy jako funkcyą ilości x , i dzieląc potem przez dx^2 . Jakoż mamy naprzód

$$dy^2 + y d^2 y - 2 m dx dy - m x d^2 y + dx^2 = 0, \quad (2)$$

potém

$$\frac{dy^2}{dx^2} - 2m \frac{dy}{dx} + 1 + (y - mx) \frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

to drugie zrównanie, gdy w niem zamienimy $\frac{dy}{dx}$ na p ,

$\frac{d^2 y}{dx^2}$ na q , zgadza się ze zrównaniem wyżej otrzymaném dla oznaczenia q .

W ogulności, różniczkować p, q , i t. d. jako funkcyje ilości x , jestto różniczkować $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, i t. d., których różniczki wyrażają się przez $\frac{d^2y}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, i t. d., jestto nakoniec uważać dy, d^2y i t. d., jako funkcyje ilości x .

Zrównanie (1) *jest różniczką pierwszą* danego zrównania, zrównanie (2) *różniczką drugą*, i t. d., a podług wyższej uwagi, *różniczki danego zrównania pierwotnego, otrzymują się jedne z drugich przez różniczkowanie, biorąc y, dy, d^2y , i t. d., za funkcyje ilości x .*

Do zrównań zaś, z których otrzymujemy współczynniki różniczkowe $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, i t. d., przychodzimy dzieląc różniczki danego zrównania odpowiednie przez dx, dx^2 , i t. d., albo kładąc

$$dy = p dx, d^2y = q dx, \text{ i t. d.}$$

Przez co pozbędziemy się różniczek, a zostaną funkcyje $p, i q$, bynajmniej niezależące od wartości przyrostku dx .

51. Zrównanie dane

$$y^3 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0,$$

będąc drugiego stopnia, daje dwie wartości ilości y , za pomocą których, zrównanie

$$(y - mx)dy - (my - x)dx = 0, \quad (1)$$

czyli z niego wypadające

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx},$$

daje także dwie wartości współczynnika różniczkowego $\frac{dy}{dx}$, odpowiadające dwóm wartościom funkcyi y .

Gdybyśmy nie rozwiązując zrównania danego, dla wyznalezienia wartości ilości y , wyrugowali z niego tę ilość

za pomocą zrównania (1), to jest gdybyśmy w nim za y , podstawili $\frac{x(mdy - dx)}{dy - mdx}$, otrzymalibyśmy, po uproszczeniu

$$(x^2 - a^2 - m^2 x^2) dy^2 - (2mx^2 - 2ma^2 - 2m^3 x^2) dx dy + (x^2 - m^2 x^2 - a^2 m^2) dx^2 = 0.$$

To ostatnie zrów. rozwiązane przez wzgląd na dy , dałoby wypadki te same, jakiebyśmy otrzymali różniczkując wartości ilości y ; podzieliwszy zaś je przez dx^2 , otrzymalibyśmy prosto wartości współczynnika różniczkowego. Byłoby wtenczas

$$(x^2 - a^2 - m^2 x^2) \frac{dy^2}{dx^2} - (2mx^2 - 2ma^2 - 2m^3 x^2) \frac{dy}{dx} + x^2 - m^2 x^2 - a^2 m^2 = 0;$$

a dzieląc wszystko przez $x^2 - a^2 - m^2 x^2$, wypadłoby

$$\frac{dy^2}{dx^2} - 2m \frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - m^2 x^2 - a^2 m^2}{x^2 - a^2 - m^2 x^2} = 0.$$

52. Łatwo jest poprzedzające uwagi zastosować do zawilszych przykładów, w których ilości zmienne do wyższego stopnia są podniesione. Niech będzie zrównanie

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0;$$

różniczkowanie daje

$$3y^2 dy - 3axy - 3aydx + 3x^2 dx = 0,$$

albo dzieląc przez 3,

$$y^2 dy - axy - aydx + x^2 dx = 0, \quad (1)$$

złąd

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

Funkcja y , w tym przykładzie, będąc daną przez zrównanie stopnia trzeciego, ma trzy wartości, które z kolei podstawując w wyrażeniu $\frac{dy}{dx}$, otrzymamy trzy odmienne wartości współczynnika różniczkowego. W ogólności ten współczynnik będzie miał tyle odmiennych

wartości, ile może ich mieć funkcyja y w daném równaniu; to samo rozumieć należy o różniczce; jakoż, wyrzuciwszy y między dwoma równaniami

$$y^5 - 5axy + x^5 = 0,$$

$$y^2 dy - ax dy - ay dx + x^2 dx = 0, \quad (1)$$

otrzymalibyśmy na dy równanie trzeciego stopnia, które dałoby nam trzy odmienne wartości różniczki dy .

Mając już wyrażenie na dy , lub też na $\frac{dy}{dx}$, przyjdziemy do wyrażen na d^2y , $\frac{d^2y}{dx^2}$, różniczkując przez wzgląd na x , y i dy (50) równanie (1), to jest pierwszą różniczkę danego równania. Tym sposobem działając będziemy mieli

$$y^2 d^2y - ax d^2y + 2y dy^2 - a dy dx - a dx dy + 2x dx^2 = 0,$$

$$\text{czyli} \quad (y^2 - ax) d^2y + 2y dy^2 - 2a dx dy + 2x dx^2 = 0. \quad (2)$$

Taka jest różniczka druga danego równania. Wyrzuciwszy z niej dy za pomocą równania (1), otrzymamy d^2y wyrażone przez x , dx , y . Samę zaś funkcyję y można będzie wyrzucić za pomocą równania danego.

Podzieliwszy równanie (2) przez dx^2 , otrzymamy równanie

$$(y^2 - ax) \frac{d^2y}{dx^2} + 2y \frac{dy^2}{dx^2} - 2a \frac{dy}{dx} + 2x = 0,$$

zawierające same tylko współczynniki $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$, oraz zmienne x , y . Kładąc za $\frac{dy}{dx}$, wartość jego $\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$, wyciągnioną ze równania (1), będzie

$$(y^2 - ax) \frac{d^2y}{dx^2} + 2y \left(\frac{ay - x^2}{y^2 - ax} \right)^2 - 2a \left(\frac{ay - x^2}{y^2 - ax} \right) + 2x = 0,$$

a przywiodłszy do jednego mianownika,

$$(y^2 - ax^2) \frac{d^2y}{dx^2} + 2xy^4 - 6ax^2y^2 + 2x^4y + 2a^5xy = 0;$$

a że wyrażenie $2xy^4 - 6ax^2y^2 + 2x^4y$, będąc to samo co $2xy(y^3 - 3axy + x^3)$; jest, na mocy danego równania, równe zeru, przeto będziemy mieli

$$(y^2 - ax) \frac{d^3y}{dx^2} + 2a^5xy = 0,$$

a ztąd
$$\frac{d^3y}{dx^2} = - \frac{2a^5xy}{(y^2 - ax)^5}.$$

Różniczkując równanie (2) przez wzgląd na x, y , dy, d^2y , znajdziemy różniczkę trzecią danego równania, a wyrzuciwszy d^2y, dy , za pomocą równań (1), (2), otrzymamy wartość na d^5y , podzieliwszy zaś tę wartość przez dx^5 , będziemy mieli współczynnik $\frac{d^3y}{dx^5}$. Podobnymże sposobem znajdziemy dalsze różniczki i współczynniki różniczkowe.

55. Uwaga z pod liczb. 7 względem ginienia ilości stałych przez różniczkowanie funkcji, stosuje się także i do równań. Gdybyśmy np. mieli równanie $y^2 = ax + b$, jego różniczka $2ydy = adx$ nie zależąc od b , należałaby do wszystkich równań szczególnych, którebyśmy z danego równania otrzymali, nadając ilości stałej b , wartości dowolne coraz inne.

Ale w danym przykładzie można też przyjść do równania niezamykającego ilości stałej a , chociaż różniczkowanie jej nie gubi, na ten koniec dosyć jest wyrugować ją między dwoma równaniami

$$y^2 = ax + b, \quad 2ydy = adx,$$

a otrzymamy $y^2 dx = 2xydy + bdx$.

Lubo to równanie nie jest bezśrednią różniczką równania danego, jednak od niego pochodzi; a podzielone przez dx , wyraża związek zachodzący między zmienną x , funkcją y , i współczynnikiem $\frac{dy}{dx}$, niezależnie od wartości a .

Jeżeli ilość stała mająca się wyrzucić, nie jest pier-

wszego stopnia w zrównaniu daném, wtedy zrównanie różniczkowe niezamykające już tej ilości, zawierać będzie różniczki dx, dy , w potęgach wyższych nad pierwszą. Niech będzie np. zrównanie

$$y^2 - 2ay + x^2 = a^2,$$

różniczka jego będzie

$$ydy - a dy + xdx = 0,$$

a ztąd

$$a = \frac{ydy + xdx}{dy};$$

podstawując tę wartość w funkcyi danej, szykując wyrazy według potęg dy , i dzieląc przez dx^2 , otrzymamy zrównanie

$$(x^2 - 2y^2) \frac{dy^2}{dx^2} - 4xy \frac{dy}{dx} - x^2 = 0.$$

zamykające związek między zmienną x , funkcją y i współczynnikiem jej różn. $\frac{dy}{dx}$, bez względu na wartość szczególną ilości stałej a .

Rozwiązując zrównanie

$$y^2 - 2ay + x^2 = a^2,$$

przez wzgląd na a , znajdziemy

$$a = -y \pm \sqrt{2y^2 + x^2};$$

różniczkując to wyrażenie, ilość a zginie, i będzie tylko

$$-dy + \frac{2ydy + xdx}{\sqrt{2y^2 + x^2}} = 0.$$

Zagubiwszy w tém wyrażeniu znak pierwiastkowy, przyjdziemy do tegoż samego zrównania, jakieśmy otrzymali przez rugowanie ilości a .

54. Można, ile się podoba, wyrzucić ilości stałych, różniczkując dane zrównanie tyle razy, ile stałych ilości chcemy wyrzucić

Niech będzie zrównanie

$$y^2 = m(a^2 - x^2);$$

pierwsze różniczkowanie daje

$$ydy = -mxdx;$$

różniczkując raz drugi znajdujemy

$$y d^2y + dy^2 = -mdx^2;$$

podstawując za m , jego wartość $-\frac{ydy}{xdx}$, wziętą z poprzedzającego zrównania, i dzieląc przez dx^2 , otrzymamy

$$y \frac{dy}{dx} - x \frac{dy^2}{dx^2} - xy \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

wypadek niezależący od ilości stałych m i a .

55. Różniczkowanie połączone z rugowaniem, podaje dogodny sposób pozbycia się wykładników funkcji.

Niech będzie np .

$$P^n = Q,$$

gdzie P i Q są jakimikolwiek bądź funkcjami ilości x, y ; różniczkując to zrównanie, będzie

$$nP^{n-1}dP = dQ,$$

czyli mnożąc wszystko przez P ,

$$nP^n dP = PdQ,$$

gdy zaś podstawimy za P^n , jego wartość, otrzymamy zrównanie

$$nQdP = PdQ,$$

w którym P jest oswobodzone od wykładnika n .

Toż samo otrzymamy biorąc logarytmy każdej strony danego zrównania, będzie wtedy

$$n \ln P = \ln Q, \quad \frac{n dP}{P} = \frac{dQ}{Q} \quad (28),$$

a ztąd $nQdP = PdQ$.

Ta uwaga służy nam do rozwinięcia według potęg ilości x funkcji $(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{it. d.})^n$, jakibykolwiek był wykładnik n .

Na ten koniec zakładamy szereg

$$(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\text{it. d.})^n \\ = A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{it. d.},$$

w którym współczynniki $A, B, C, \text{it. d.}$, są nieoznaczone, biorąc z obu stron logarytmy, otrzymujemy

$$n(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\text{it. d.}) \\ = 1(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{it. d.}),$$

różniczkując potem mamy

$$\frac{n(b+2cx+3dx^2+4ex^3+\text{it. d.})dx}{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\text{it. d.}} \\ = \frac{(B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\text{it. d.})dx}{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{it. d.}},$$

dzieląc przez dx , uwalniając od mianowników, i porządkując obie strony według potęg ilości x , znajdziemy

$$\left. \begin{aligned} nbA + 2ncAx + 3ndAx^2 + 4neAx^3 + \text{it. d.} \\ + nbBx + 2ncBx^2 + 3ndBx^3 + \text{it. d.} \\ + nbCx^2 + 2ncCx^3 + \text{it. d.} \\ + nbDx^3 + \text{it. d.} \end{aligned} \right\} =$$

$$\left. \begin{aligned} aB + 2aCx + 3aDx^2 + 4aEx^3 + \text{it. d.} \\ + bBx + 2bCx^2 + 3bDx^3 + \text{it. d.} \\ + cBx^2 + 2cCx^3 + \text{it. d.} \\ + dBx^3 + \text{it. d.} \end{aligned} \right\};$$

aże ilość x powinna zostać nieoznaczona, ztąd wypada, że obie strony tego zrównania są *tosamemi*, z powodu samych współczynników ilości x , to jest, że współczynniki po obu stronach zrównania, przy tejże samej potędze ilości x , są między sobą równe. Z takowej uwagi wynikają następujące zrównania

$$nbA = aB,$$

$$2nCA + nbB = 2aC + bB,$$

$$3ndA + 2ncB + nbC = 3aD + 2bC + cB,$$

z których wyciągniemy wartość współczynników B , C , D , i t. d.

Zdawałoby się że współczynnik A zostaje nieoznaczony; jednak znajdziemy jego wartość czyniąc $x=0$ w równaniu

$$(a+bx+cx^2+\text{i t. d.})^n = A+Bx+\text{i t. d.},$$

które przez to przypuszczenie daje

$$a^n = A.$$

Podstawiając tę wartość w poprzedzających równaniach otrzymamy

$$B = \frac{n}{1} a^{n-1} b,$$

$$C = na^{n-1}c + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2}b^2,$$

$$D = na^{n-1}d + \frac{n(n-1)}{1.1} a^{n-2}bc + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3}b^2,$$

i t. d.,

zład $(a+bx+cx^2+dx^3+\text{i t. d.})^n$

$$= a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} bx + \left\{ na^{n-1}c + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2}b^2 \right\} x^2$$

$$+ \left\{ na^{n-1}d + \frac{n(n-1)}{1.1} a^{n-2}bc + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3}b^2 \right\} x^3$$

+ i t. d.

56. Można także, za pomocą różniczkowania, zamienić funkcyje przestępne na szeregi algebraiczne.

Weźmy najprostszą tego gatunku funkcyą

$$l(a+ba+cx^2+dx^3+\text{i t. d.}),$$

i wyrażmy ją przez następujący szereg

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{i t. d.},$$

różniczkując równanie

$$l(a+bx+cx^2+dx^3+\text{i t. d.}) = A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{i t. d.},$$

otrzymamy

$$\frac{b+2cx+3dx^2+it.d.}{a+bx+cx^2+dx^3+it.d.}=B+2Cx+3Dx^2+it.d.,$$

wartości zaś współczynników A, B, C, D , it. d., wynajdą się zwyczajnym sposobem.

Weźmy jeszcze na przykład

$$\begin{aligned} & \text{wst}(a+bx+cx^2+dx^3+it.d.) \\ &= A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+it.d., \end{aligned}$$

gdy założymy

$$\begin{aligned} a+bx+cx^2+dx^3+it.d. &= u, \\ A+Bx+Cx^2+Dx^3+it.d. &= y, \end{aligned}$$

będzie $y = \text{wst} u$, ztąd $dy = du \text{ dost} u$. Można by wyrzucić $\text{dost} u$ za pomocą zrównania

$$\text{dost} u = \sqrt{1 - \text{wst}^2 u} = \sqrt{1 - y^2},$$

i wtedy mielibyśmy $dy = du \sqrt{1 - y^2}$; lecz należałoby jeszcze w tém równaniu zagubić wyraz pierwiastkowy. Dla uniknienia takowych działań, różniczkujemy zrównanie $dy = du \text{ dost} u$, pamiętając że y, u , są funkcjami ilości x , i otrzymujemy

$$d^2y = d^2u \text{ dost} u - du^2 \text{ wst} u;$$

$$\text{a że } \text{wst} u = y, \quad \text{dost} u = \frac{dy}{du}, \quad \text{zatem}$$

$$d^2y = \frac{dy}{du} d^2u - y du^2, \quad \text{czyli } du d^2y - dy d^2u + y du^3 = 0. (a).$$

To wykonawszy, dosyć będzie podstawić za $y, dy, d^2y, du, d^2u, du^3$, ich wartości; jakoż zrównanie

$$y = A+Bx+Cx^2+Dx^3+it.d.,$$

$$\text{daje } dy = (B+2Cx+3Dx^2+it.d.)dx$$

$$d^2y = (2C+2.3Dx+it.d.)dx^2;$$

żeby zaś nie zachodzić w bardzo długie rachunki, weźmiemy trzy tylko wyrazy funkcji założonej, to jest $\text{wst}(a+bx+cx^2)$; w tym szczególnym razie będzie

$$\begin{aligned} u &= a + bx + cx^2, \\ du &= (b + 2cx)dx, \quad d^2u = 2cdx^2, \\ du^3 &= (b^3 + 6b^2cx + 12bc^2x^2 + 8c^3x^3)dx^3. \end{aligned}$$

Wprowadzając te wartości w zrównanie (α), dzieląc je przez dx^3 , i szykując wyrazy według potęg ilości x , otrzymamy zrównanie

$$\left. \begin{aligned} &2bC + 6bDx + 12bEx^2 + \text{i t. d.} \\ &\quad + 4cCx + 12cDx^2 + \text{i t. d.} \\ &+ b^3A + 6b^2cAx + 12bc^2Ax^2 + \text{i t. d.} \\ &\quad + b^3Bx + 6b^2cBx^2 + \text{i t. d.} \\ &\quad \quad + b^3Cx^2 + \text{i t. d.} \\ &- 2cB - 4cCx - 6cDx^2 - \text{i t. d.} \end{aligned} \right\} = 0$$

Czyniąc równemi zeru spółczynniki każdej potęgi ilości x , otrzymamy zrównania na oznaczenie wartości C, D, E i t. d.; co się zaś tycze A , i B , oznaczmy ich wartości za pomocą zrównań $y = \text{wst } u$, i $dy = \text{dost } u du$.

Kładąc $x=0$, będzie $u=a$, $y=A$, $du=b dx$, $dy=B dx$
a ztąd $A = \text{wst } a$, $B = b \text{ dost } a$.

57. Rachunek różniczkowy, któregośmy użyli tylko do rozwijania funkcyj, może też służyć do rozwiązywania zrównań algebraicznych; lecz tu przestaniemy tylko na okazaniu, jakim sposobem uwaga pod liczbą 18 wyłożona, prowadzi do oznaczenia liczby pierwiastów równych.

Niech będzie $V=0$, zrównanie mające liczbę n pierwiastów równych a ; pierwsza jego strona V , będzie miała kształt

$$V = X(x-a)^n,$$

gdzie X wyraża mnogość ze wszystkich pierwiastków nierównych; różniczkując to zrównanie znajdziemy zrównania

$$\frac{dV}{dx} = nX(x-a)^{n-1} + \frac{dX}{dx}(x-a)^n,$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = n(n-1)X(x-a)^{n-2} + 2n \frac{dX}{dx} (x-a)^{n-1} + \frac{d^2 X}{dx^2} (x-a)^n;$$

i t. d.

które są dostatecznemi do okazania, iż mnożnik $x-a$, póty będzie spółny wszystkim wyrazóm spółczynników różniczkowych równania $V=0$, póki wykładnik rzędu ich będzie mniejszy od liczby n ; więc te spółczynniki, gdy w nich uczynimy $x=a$, wszystkie aż do rzędu $(n-1)$ włącznie zginą, i równanióm

$$V=0, \quad \frac{dV}{dx}=0, \quad \frac{d^2 V}{dx^2}=0, \dots \frac{d^{n-1} V}{dx^{n-1}}=0$$

zadość uczyni dzielnik $(x-a)^{n-1}$, między pierwszym równaniem a drugim zachodzący.

Poznajemy bez trudności, iż równania $\frac{dV}{dx}=0$, $\frac{d^2 V}{dx^2}=0$, i t. d. są zupełnie te same, które w Algebrze pod liczbą 205 były oznaczone przez $A=0$, $B=0$, i t. d.

Poprzedzające rozważanie łatwo się zastosuje do równania zamykającego kilka gatunków pierwiastków równych, to jest do równania mającego kształt

$$X(x-a)^n(x-b)^p=0;$$

bo różniczkując je otrzymujemy równanie

$$nX(x-a)^{n-1}(x-b)^p + pX(x-a)^n(x-b)^{p-1} + \frac{dX}{dx}(x-a)^n(x-b)^p=0$$

które ginie, gdy założymy albo $x=a$, albo $x=b$, i którego spółny dzielnik z pierwszym równaniem założonem jest widocznie

$$(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}.$$

Podobnież działać można przy jakiegokolwiek liczbie mnożników $(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q$ i t. d., i zawsze znajdzie-

my że spólny dzielnik między funkcjami $V, \frac{dV}{dx}$, powinien zamykać mnożniki równe podniesione każdy do potęgi mniejszej jedną jednostką, niżli w zrównaniu założoném $V=0$.

Zastosowanie rachunku różniczkowego do teoryi linii krzywych.

58. Geometrya jasno pokazuje że stosunek przyrostku funkcyi do przyrostku ilości zmiennej, od której ta funkcya zależy, ma w ogulności zawsze granicę.

Każda funkcya jednej ilości zmiennej może się wyrazić przez przystawę linii krzywej, której ucinek oznacza ilość zmienną (*Trig.* 86), a stosunek przystawy do podstycznej odpowiada współczynnikowi różniczkowemu funkcyi danej. Jakoż jeżeli obrawszy na jakiej linii krzywej CD (*fig.* 1) dwa punkta M i M' , poprowadzimy przez nie linią MM' i przedłużymy aż do spotkania się jej z osią ucinkow AB , w punkcie S , i poprowadzimy dwie przystawy $PM, P'M'$, oraz linią prostą MQ równoległą do AB , trójkąty podobne MQM', MPS pokazują że stosunki $\frac{MQ}{MM'} i \frac{PM}{PS}$, są zawsze między sobą równe. Dajmy teraz że punkt M' ciągle się zbliża do M , punkt S także zbliżać się będzie do punktu T ; zatem linia PS coraz zbliżać się będzie do równości z podstyczną PT , stosunek $\frac{PM}{PS}$ przystępować także będzie do stosunku $\frac{PM}{PT}$, który jest granicą jego, a tém samym granicą stosunku $\frac{MQ}{MM'}$, to jest granicą stosunku przyrostkow jednoczesnych ucinka AP i przystawy PM .

Ztąd wypada, iż gdy wyrażenie stosunku $\frac{PM}{PT}$ bę-

dzie znajome, tem samém będzie wiadomy współczynnik różniczkowy funkcyi odpowiadającej przystawie (7), i wzajemnie jeżeli funkcya wyrażająca przystawę jest dana, różniczkowy jej współczynnik wyrażając wartość tego stosunku, oznaczy podstyczną PT przez przystawę PM , bo wyrażając PM przez y , współczynnik jej różniczkowy przez p , będziemy mieli $p = \frac{y}{PT}$, ztąd

$PT = \frac{y}{p}$, za pomocą tej wartości podstycznej można poprowadzić przez punkt M do linii krzywej styczną.

59. Z poprzedzających uwag postrzegamy, iż rachunek różniczkowy bezpośrednie rozwiązuje zadanie prowadzenia stycznych w liniach krzywych, których mamy zrównania; bo też szukając ogólnego sposobu prowadzenia stycznych do linii krzywych, Matematycy przyszli do wynalezienia rachunku różniczkowego, który później pod rozmaitemi wystawiano względami; lecz jakikolwiek początek naznaczymy temu rachunkowi, zawsze on zasadać się będzie *na prawdzie analitycznej*, która wszelkie przypuszczenie poprzedziła, tak jak spadanie ciał na powierzchnię ziemi pierwiej miało miejsce; niżli wszelkie tego fenomenu tłumaczenia: tą zaś prawdą jest własność wszystkim funkcjom służąca, że wszystkie mają granicę stosunku swoich przyrostków do przyrostków ilości samozmiennej. Ta granica dla każdej funkcyi różna, lecz zawsze jedna i taż sama na tęż samą funkcją, ani też zależąca od szczególnych wartości przyrostków, znamienuje właściwym sobie sposobem, funkcją w rozmaitych jej stanach wielkości, przez które może przechodzić. Jakoż im mniejsze są przyrostki samozmiennej tym więcej kolejają po sobie następujące wartości funkcyi są do siebie zbliżone, tym bardziej nakoniec ta funkcya w swoich zmianach zbliża się do prawa ciągłości, a przeto tym bardziej stosunek przyrostków funkcyi do przyrostków samozmiennej zbliża się do granicy oznaczonej przez rachunek.

Przez *prawo ciągłości* rozumiemy to prawo, które się zachowuje w nakreślaniu linii biegiem ciał, a po-
dług którego punkta na jednejże linii znajdujące się na-
stępują po sobie bez żadnej przerwy. Sposób uważa-
nia wielkości w rachunku nie zdaje się zgadzać z tém
prawem, gdyż zawsze pojmujemy jakiś przeskok mię-
dzy dwiema po sobie następującemi wartościami jednej-
że ilości: lecz im mniejszym ten przeskok uczynimy, tym
więcej się zbliżymy do prawa ciągłości, któremu grani-
ca zupełnie odpowiada.

Mniemam teraz, że poprzedzające rozumowanie zawie-
ra w sobie filozoficzny wykład własności rachunku ró-
żniczkowego i całkowego tak ze względu na badania ty-
czące się linii krzywych, jak ze względu na badania ścia-
gające się do ruchu. Trudność w jednym i drugim razie
ztałd tylko pochodzi, że jest ciągłość w zmianach linii, al-
bo też w zmianach szybkości; lecz uważanie granic po-
daje sposob ustanowienia tej ciągłości w rachunku (*).

6o. Gdy na osi ucinków weźmiemy jakiegokolwiek
ucinki, przystawy im odpowiadające wyznaczą, na li-
nii krzywej punkta, które mogą być uważane jako
wierzchołki kątów wielokąta wpisanego w linią krzywą.

Wziąwszy np. na osi ucinków punkta $P, P', P'',$ it. d.
(fig. 2) odległe między sobą na ilość h , będzie

$$AP=x, AP'=x+h, AP''=x+2h, \text{ i t. d.}$$

i jeżeli wyprowadzimy przystawy im odpowiadające
 $PM, P'M', P''M'',$ it. d., i połączymy cięciwami punkta
 $M, M', M'',$ it. d., utworzy się wielokąt $MM'M''$ it. d.,
który tym mniej różnić się będzie od linii krzywej, im
bliżej siebie będą punkta $M, M', M'',$ it. d.; lecz w tym
razie liczba boków coraz się będzie powiększała, gdyż
odległość PP' więcej razy mieścić się będzie w danym
ucinku AB . Linija krzywa CD widocznie będzie gra-
nicą wszystkich wielokątów; ztąd własności służące

(*) Życzący więcej objaśnienia w tych ogólnych uwagach, niech
odezta przypisek A , umieszczony na końcu tego dzieła.

tej granicy, równie służyć będą linii krzywej danej (*).

To założwszy, jeśli poprowadzimy linie MQ i $M'Q'$, równoległe do osi AB , $M'Q$ będzie różnicą między dwiema przystawami PM , $P'M'$; a $M''Q'$ różnicą między przystawami $P'M'$, $P''M''$. Przedłużwszy linią prostą MM' aż do N'' , utworzą się trójkąty równe $MM'Q$, $M'N''Q'$, które dadzą $M'Q = N''Q'$, a ztąd $M''N'' = N''Q' - M''Q'$, albo $M''N'' = M'Q' - N''Q'$; a zatem $M''Q' - M'Q = \mp M''N''$, podług tego jak linia krzywa wklęsłością lub wypukłością do osi ucinków jest obrocona; zatem $M''N''$ wyrażać będzie różnicę między linijami $M'Q$ i $M''Q'$.

Rachunek różniczkowy daje nam wyrażenia tych rozmaitych linii; mamy bowiem następujące wartości (23).

$$PM = y,$$

$$P'M' = y + \frac{dy}{dx} \frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{i t. d.},$$

$$P''M'' = y + \frac{dy}{dy} \frac{2h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{4h^2}{1.2} + \text{i t. d.}$$

$$P'M' - PM = M'Q = \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{i t. d.},$$

$$P''M'' - P'M' = M''Q' = \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{3h^2}{1.2} + \text{i t. d.},$$

$$M''Q' - M'Q = \mp M''N'' = \frac{d^2y}{dx^2} h^2 + \text{i t. d.},$$

(*) Lejbnic zawsze pod względem prawie podobnym uważał rachunek różniczkowy: „Sentio autem et hanc et alias (methodos) „hactenus adhibitas omnes deduci posse ex generali quodam „meo dimetiendorum curvilinearum principio, quod *fugura „curvilinea censenda sit aequipollere polygono infinitorum la- „terum*; unde sequitur, quidquid de tali polygono demonstra- „ri potest, sive ita, ut nullus habeatur ad numerum late- „rum respectus, sive ita, ut tanto magis verificetur, quan- „to major sumitur laterum numerus, ita, ut error tandem „fiat quovis dato minor; id de curva posse pronuntiare “ (Acta Eruditorum ann. 1684, pag. 585.)

ztańd wypada, że jeżeli weźmiemy $h=dx$, wartość $M'Q$ coraz więcej zbliżać się będzie do różniczki pierwszej dy , wartość $M''N''$ do różniczki drugiej d^2y . Wziawszy czwarty punkt wielokąta, znaleźlibyśmy także linią prostą odpowiadającą różniczce trzeciej d^3y .

61. Linije PM , $M'Q$, $M''N''$, we względzie granic, mają między sobą stosunek oznaczony przez wykładnik ilości h znajdującej się w pierwszym wyrazie ich rozwinięcia, który to wykładnik potęgi zgadza się z wykładnikiem wyrażającym rząd różniczki, którym one odpowiadają. Jakoż widzimy, że stosunek $M'Q$ do PM coraz maleje, i nakoniec niknie, gdy $h=0$; toż samo dzieje się ze stosunkiem $M''N''$ do $M'Q$; lecz gdybyśmy stosowali $M''N''$ do drugiej potęgi ilości $M'Q$, taki stosunek miałby granicę, wyrażoną przez stosunek $\frac{d^2y}{dx^2}$ do $\frac{dy^2}{dx^2}$ (*).

62. Z tego co poprzedziło, widzimy także, iż spółczynnik różniczkowy pierwszego rzędu $\frac{dy}{dx}$, wyrażając stosunek $\frac{PM}{PT}$, (fig. 1), daje styczną trygonometryczną ką-

Widoczną jest rzeczą, iż ta metafizyka jest także jasną i od tej, którą wyłożyłem, tém się różni tylko, że granica jest wyrażona jako wielokąt od nieskończenie wielkiej liczby boków nieskończenie małych.

(*) To bardzo prosto tłumaczy rozmaite rzędy nieskończenie małych ilości od Lejbnica przyjęte. Uważał on różniczkę pierwszą jako nieskończenie małą względem przystawy, różniczkę drugą jako nieskończenie małą w porównaniu do różniczki pierwszej, i t. d. Podług tej zasady, zaniedbywał je dne w porównaniu do drugich, co w istocie czynić potrzeba, gdy się przechodzi do granic; bo w wyrażeniu granicy stosunku szeregów poprzedzających, powinny tylko zostać wyrazy, mające przyrostek h w potęgę najniższą, różniczka bowiem jakiegokolwiek rzędu m^{go} jest koniecznie kształtu $d^m y = t dx^m$ (17), a zatem może się tylko porównywać z wyrażeniami różniczkowymi jednorodnemi, czyli tegoż samego stopnia względem przyrostku dx .

ta MTP , zawartego między osią ucinków, i linią prostą stykającą się z linią krzywą w punkcie M , i wskazuje bieg linii krzywej w jej częściach przyległych punktowi M ; bo, jeżeli AB oznacza stronę ucinków dodatnich, kąt MTP i jego styczna będą dodatnie, skoro przystawy będą się powiększały jak w *fig. 1*, przeciwnie, jeżeli się będą pomniejszały, wtedy kąt MTP i jego styczna będą odjemne.

Toż samo wniesić możemy z wyrażenia linii $M'Q$, która jest różnicą między przystawami po sobie następującymi PM i $P'M'$, uważając, że można przyrostek h wziąć tak mały, aby wyraz pierwszy $\frac{dy}{dx}h$, przewyższył sumę wszystkich wyrazów następnych, co gdy się stanie, znak summy całego szeregu, będzie zależał od znaku wyrazu pierwszego; bo wyrażenie *np.*

$$Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + Ch^{\gamma} + \text{i t. d.},$$

w którym wykładniki α, β, γ , i t. d. są wszystkie dodatnie i coraz większe, może być napisane pod kształtem

$$h^{\alpha}(A + Bh^{\beta-\alpha} + Ch^{\gamma-\alpha} + \text{i t. d.}),$$

z którego postrzegamy, iż wartość części $Bh^{\beta-\alpha} + Ch^{\gamma-\alpha} + \text{i t. d.}$, jako zamykającej przyrostek h , ciągle zmniejszając się, gdy wartość tego przyrostku będzie ciągle malała, stanie się kiedykolwiek mniejszą od wyrazu A , niemającego w sobie przyrostku h (*). Przeto od znaku wyrazu A , zależec będzie znak całego wyrażenia, to jest będzie to wyrażenie dodatnie lub odjemne, podług tego, jak wyraz A będzie dodatni lub odjemny.

Z tego wypada, iż funkcya y będzie rosnącą lub u-

(*) Na końcu tego dzieła znajdziemy sposób oznaczenia wartości przyrostku h , wypełniających ten warunek we wzorze Tajlora.

bywającą, stosownie jak wyraz $\frac{dy}{dx}$ będzie dodatny lub odjemny.

Nad to, jeżeli się zastanowimy, że gdy przystawa jest dodatna, wtenczas różnica $M''Q' - M'Q$ (fig. 2) jest odjemna lub dodatna, podług tego, jak linija krzywa jest wklęsłością lub wypukłością obrócona ku osi ucinków, i że to powinno mieć miejsce, choćby punkta P, P', P'' , i t. d. były sobie najbliższe, to jest, choćby najmniejsza była wartość przyrostku h ; z tego wniesiemy, że wyraz $\frac{d^2y}{dx^2}h^2$, który jest pierwszym w rozwinieniu różnicy $M''Q' - M'Q$, i który może być uczyniony większym od summy wszystkich następujących, powinien mieć tenże sam znak, jaki ma różnica $M''Q' - M'Q$; aże h^2 zawsze jest dodatne, zatem współczynnik $\frac{d^2y}{dx^2}$, będzie odjemny, gdy linija krzywa wklęsłością do osi ucinków jest obrócona, dodatny w przeciwnym razie.

Jeżeli rozważymy linije krzywe cm pod osią ucinków położone, postrzeżemy, iż znaki współczynnika $\frac{d^2y}{dx^2}$ powinny być brane w porządku odwrotnym czyli przeciwnym pierwszemu, gdy przystawa jest odjemna; z tego wypada, że linija krzywa będzie obrócona wklęsłością lub wypukłością do osi ucinków, podług tego, jak przystawa i jej współczynnik różniczkowy drugiego rzędu mają różne lub też same znaki.

63. Uważa się zwyczajnie za rzecz widoczną, że łuk mały linii krzywej może być brany za cięciwę, to jest, że stosunek łuku do swojej cięciwy ma jedność za granicę, należy jednak tego podania tak ważnego dowieść, co wykonać można sposobem następującym:

Trojkąt prostokątny $MM'Q$ (fig. 3) daje

$$MM' = \sqrt{MQ^2 + M'Q^2};$$

mamy zaś (60) $MQ = h$, $M'Q = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{i t. d.}$

Można to ostatecznie rozwinięcie, kładąc w niem

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{i t. d.} = Ph^2,$$

wyrazić pod kształtem $M'Q = (p + Ph)h$; przeto będzie

$$MM' = \sqrt{h^2 + (p + Ph)^2 h^2} = h \sqrt{1 + (p + Ph)^2},$$

Prowadząc styczną MN znajdziemy

$$NQ = MQ \text{ sty } NMQ = \frac{dy}{dx} h = ph \quad (62),$$

$$MN = \sqrt{h^2 + p^2 h^2} = h \sqrt{1 + p^2},$$

$$M'N = NQ - M'Q = -\frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{i t. d.} = -Ph^2;$$

zład wypada

$$\frac{MN + M'N}{MM'} = \frac{h \sqrt{1 + p^2} - Ph^2}{h \sqrt{1 + (p + Ph)^2}} = \frac{\sqrt{1 + p^2} - Ph}{\sqrt{1 + (p + Ph)^2}},$$

granicą tego stosunku jest

$$\frac{\sqrt{1 + p^2}}{\sqrt{1 + p^2}} = 1.$$

Aże łuk MOM' zawsze jest zawarty między cięciwą MM' i linią złamaną $MN + M'N$, więc tém bardziej stosunek $\frac{MOM'}{MM'}$, ma za granicę jedność,

64. Jasną jest rzeczą, iż łuk jakiejkolwiek linii krzywej jest funkcją ucinka; żeby więc znaleźć spółczynnik różniczkowy łuku, trzeba szukać granicy stosunku $\frac{MOM'}{PP'}$; aże jest

$$\frac{MOM'}{PP'} = \frac{MM'}{PP'} \times \frac{MOM'}{MM'},$$

zatem kładąc za $\frac{MM'}{PP'}$ wartość jego $\frac{h \sqrt{1 + (p + Ph)^2}}{h}$

$= \sqrt{1 + (p + Ph)^2}$, i biorąc granicę przez założenie $h = 0$,

drugi mnożnik $\frac{MOM'}{MM'}$ stanie się $= 1$, i granicą stosunku $\frac{MOM'}{PP'}$, będzie $\sqrt{1+p^2}$ (8); przeto wyraziwszy łuk CM przez z , będziemy mieli współczynnik różn. tego łuku

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

sama zaś różniczka łuku z będzie

$$dz = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

W kole, do którego zrównanie jest $x^2 + y^2 = a^2$, mamy $xdx + ydy = 0$, ztąd $dy = -\frac{xdx}{y}$, zatem

$$dz = \sqrt{dx^2 + \frac{x^2 dx^2}{y^2}} = \frac{dx}{y} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{adx}{y} = \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

uczyniwszy $a = P$, otrzymamy tenże sam wypadek, jakśmy wyżej (56) inną drogą znaleźli.

65. Różniczka powierzchni odcinka (*segmentum*) $ACMP$ linii krzywej, otrzymuje się uważając, że stosunek prostokątów $PP'QM$ i $PP'MN$ (*fig. 4*) spólną mających podstawę, równa się stosunkowi $\frac{P'M'}{PM}$, którego granica jest $= 1$. Aże czworokąt krzywokreślny $PP'MM'$, wyrażający przyrostek, którym się odcinek $ACMP$ powiększa, za powiększeniem się ucinika ilością PP' , zawsze jest między dwoma wyżej rzeczonymi prostokątami zawarty, przeto stosunek jego do któregokolwiek z tych prostokątów, ma także jedność za granicę. Zatem widoczną jest rzeczą, że stosunek $\frac{PP'MM'}{PP'}$, mogąc się wyrazić pod kształtem

$$\frac{PP'QM}{PP'} \cdot \frac{PP'MM'}{PP'QM} = PM \cdot \frac{PP'MM'}{PP'QM},$$

ma za granicę $PM.1$, to jest PM . Wyraziwszy więc przez s funkcją ilości x , odpowiadającą powierzchni $ACMP$, otrzymamy granicę stosunku $\frac{PP'MM}{PP'}$, czyli

spółczynnik różniczkowy powierzchni s , $\frac{ds}{dx} = y$,

a ztąd różniczka tej powierzchni będzie $ds = ydx$.

W kole mającém zrównanie $x^2 + y^2 = a^2$ wypada

$$ds = dx \sqrt{a^2 - x^2},$$

a tak, lubo nie możemy wyrazić algebraicznie odcinka kołowego, przychodzimy jednak do algebraicznego wyrażenia jego różniczki przez uważanie granic, i mogli-byśmy rozwinąć to wyrażenie na szereg za pomocą wzoru Makloryna (22), lub sposobem podobnym do sposobu wyłożonego pod liczbą 38.

66. Mając wyrażenie kąta MTP za pomocą współczynnika róż. $\frac{dy}{dx}$, łatwo jest poprowadzić styczną MT (fig. 1); lecz pospolicie używa się do tego podstyczna (*soutangente*) PT , której wartość znajdziemy uważając, że

$$\frac{PM}{PT} = \frac{dy}{dx} \quad \text{daje} \quad PT = \frac{PM \cdot dx}{dy} = \frac{y dx}{dy}.$$

Trojkąt PMT prostokątny w T daje styczną

$$MT = \sqrt{PM^2 + PT^2} = y \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}.$$

Trojkąty podobne PMT i PMR (*Trig.* 161) dają podnormalną (*sounormale*)

$$PR = PM \frac{PM}{PT} = \frac{y dy}{dx}.$$

Trojkąt PMR prostokątny w P , daje normalną (*normale*)

$$MR = \sqrt{PM^2 + PR^2} = y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

67. Oto są niektóre poprzedzających wzorów zastosowania:

Zrównanie ogólne linii drugiego stopnia jest

$$y^2 = mx + nx^2 \quad (\text{Trig. 157.})$$

złąd
$$\frac{dy}{dx} = \frac{m + 2nx}{2y} = \frac{m + 2nx}{2\sqrt{mx + nx^2}},$$

zatem
$$PT = y \frac{dx}{dy} = \frac{2(mx + nx^2)}{m + 2nx},$$

$$MT = y \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} = \sqrt{mx + nx^2 + 4\left(\frac{mx + nx^2}{m + 2nx}\right)^2},$$

$$PR = y \frac{dy}{dx} = \frac{m + 2nx}{2}$$

$$MR = y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \sqrt{mx + nx^2 + \frac{1}{4}(m + 2nx)^2}.$$

Założywszy $n=0$, linia krzywa staje się parabolą, (Trig. 160), a wtenczas będzie

$$PT = 2x, \quad MT = \sqrt{mx + 4x^2},$$

$$PR = \frac{m}{2}, \quad MR = \sqrt{mx + \frac{1}{4}m^2}.$$

Z tych wartości możnaby wyprowadzić wypadki i wykreślenia wskazane w przystosowaniu Algebry do Geometrii, na linie drugiego stopnia.

W linii krzywej wyrażonej przez zrównanie

$$x^5 - 3axy + y^5 = 0,$$

mamy
$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax},$$

a złąd
$$PT = \frac{y^5 - axy}{ay - x^2} = \frac{2axy - x^5}{ay - x^2},$$

oznaczywszy wartość y przez nadanie pewnej wartości ilości x , łatwo wykreślimy podstyczną PT .

68. Częstokroć dogodniej bywa, wyrażać styczną i normalną przez ich zrównania (Trig. 157).

Chcąc otrzymać zrównanie stycznej, należy odkryć stosunki jakie w ogólności zachodzić powinny, gdy się dwie linie z sobą stykają. Uważając te linie jako mające punkta wspólne M i M' (*fig. 1*), jasna jest, że ich zrównania powinny dać też same wartości na przystawę PM , i na różnicę $M'Q$ odpowiadające uciukowi AP , i jego przyrostkowi PP' . Zatem jeżeli wyrazimy przez x, y spółprzystawy punktu M , wziętego na linii danej, a przez x', y' spółprzystawy jakichkolwiek punktów, należących do linii przecinającej linią pierwszą w punktach M , i M' , będziemy mieli na te dwa punkta, zrównania

$$y'=y, \quad \frac{dy'}{dx'}h + \text{i t. d.} = \frac{dy}{dx}h + \text{i t. d.} \quad (60).$$

Drugie z tych zrównań dzielimy przez h , a wzięwszy jego granicę przez założenie $h=0$, otrzymujemy

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx};$$

lecz w tym razie dwa punkta przecięcia schodzą się w jeden tylko, stający się punktem stykania się linii danych, gdyż one ten jeden tylko punkt mają wspólny. Ztąd wypada, że gdy dwie linie stykają się, dwa zrównania

$$y'=y, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}, \quad (\beta)$$

będą miały miejsce w punkcie tylko ich stykania się.

Dla wyprowadzenia zrównania na styczną, zakładamy iż zrównanie jej, jako linii prostej jest w ogólności

$$y'=Ax'+B \text{ (Trig 87)}, \text{ a ztąd } \frac{dy'}{dx'}=A,$$

gdzie A i B , są nieoznaczone. Dla wyrzucenia tych ilości, uważamy iż podług zrównań (β) , wypadają w punkcie stykania się zrównania

$$y=Ax+B, \quad \frac{dy}{dx}=A,$$

za pomocą wyprowadzonych z tych równań wartości na A i B , założone równanie na styczną zamienia się na

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x - x).$$

Z tego równania widzimy, że równanie normalnej, która jest prostopadłą do stycznej i przechodzi przez punkt M , będzie

$$y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x) \quad (\text{Trig. } 90).$$

69. Do koła, którego równanie jest

$$y^2 + x^2 = a^2,$$

znajdziemy $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$;

zatem równanie jego stycznej będzie

$$y' - y = -\frac{x}{y}(x' - x), \quad \text{czyli} \quad yy' - y^2 = -xx' + x^2,$$

albo $yy' + xx' = a^2$, gdyż $y^2 + x^2 = a^2$.

Równanie normalnej daje

$$y' - y = \frac{y}{x}(x' - x),$$

a po uproszczeniu będzie $y' = \frac{y}{x}x'$;

co pokazuje, że normalne koła wszystkie przechodzą przez jego środek, który jest początkiem współrzędnaw (*Trig. 85*), co też w istocie być powinno, bo normalne koła są to jego promienie.

Do linii krzywej wyrażonej przez równanie

$$x^5 - 3axy + y^5 = 0,$$

znajdziemy równanie stycznej

$$y' - y = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}(x' - x),$$

albo $y^2y - axy' - y^5 + xy = ayx' - x^2x' - axy + x^5,$

a włożywszy za y^3 jego wartość i uprościwszy, otrzymamy

$$(y^2 - ax)y' + (x^2 - ay)x' = axy.$$

70. Chcąc poprowadzić styczną do linii krzywej przez punkt za tą linią wzięty, którego uciniek byłby $=a$, przystawa $=\beta$, jasna jest, że trzeba podstawić a za x' , β za y' w zrównaniu stycznej, które się wtenczas zamieni na

$$\beta - y = \frac{dy}{dx} (a - x),$$

i spólnie ze zrównaniem danej linii krzywej posłuży do wynalezienia x , y , spółprzystaw punktu stykania się.

I tak w kole, w którym zrównanie stycznej jest

$$yy' + xx' = a^2 \quad (69),$$

będzie

$$\beta y + ax = a^2.$$

To zrównanie razem ze zrównaniem koła służy do wyznaczenia spółprzystaw x , y punktów stykania się, czyli co na jedno wychodzi, te punkta znajdować się będą na spotkaniu się koła z linią prostą wyrażoną przez zrównanie $\beta y + ax = a^2$ (*Trig. 105*).

W linii krzywej odpowiadającej zrównaniu

$$x^5 - 5axy + y^5 = 0$$

znajdziemy punkt stykania się, szukając punktów przecięcia się tej linii krzywej, z linią drugiego rzędu wynikającą ze zrównania

$$\beta(y^2 - ax) + a(x^2 - ay) = axy.$$

71. Chcąc poprowadzić do linii krzywej danej styczną, któraby razem była równoległą do linii prostej danej w swoim położeniu, to jest któraby z osią uciników czyniła kąt mający styczną trygonometryczną $np. = a$, należy założyć $\frac{dy}{dx} = a$ (*Trig. 89*); łącząc to zrównanie ze zrównaniem danej linii krzywej, znajdziemy wartości x , y , odpowiadające punktowi stykania się.

Weźmy *np.* parabolę zwyczajną, będzie

$$y^2 = mx, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{m}{2y} = a,$$

ztąd $y = \frac{m}{2a}, \quad x = \frac{m}{4a^2}.$

72. W całym rachunku dotąd uważaliśmy spółprzystawy x, y , jako wzajemnie prostopadłe do siebie, lecz gdyby one i pod innym jakimkolwiek kątem były do siebie nachylone, zawsze stosunek PM do PT byłby granicą stosunku $M'Q$ do MQ ; i zrównanie stycznej niezmieniłoby swojego kształtu. Co do linii MT, MR, PR , znaleźlibyśmy ich wyrażenia z trójkątów MPT, MTR i MPR , w których zawsze byłyby wiadome albo dwa boki i kąt jeden, albo dwa kąty i bok jeden.

73. Szukając, jakie położenie mieć będzie styczna do linii krzywej danej, gdy punkt stykania się coraz bardziej od początku spółprzystaw oddala, można wysledzić, czy ta linia krzywa ma, jak *np.* hiperbola, niemalstyczne (*asymptotes*); i jeżeli je ma, można oznaczyć ich położenie.

Jakoż widzimy, że w linii krzywej MX mającej niemalstyczną RS (*fig. 5*), styczna MT , w miarę oddalania się punktu M od początku, zbliża się do niemalstycznej, a punkta T i D w tym samym czasie zbliżają się, pierwszy do R drugi do E , tak, iż AR i AE są granicami, do których AT i AD w swoim wzroście coraz bliżej przystępują, nigdy jednak nie mogąc ich dosięść.

Ztąd wypada, że dla poznania, czy dana linia krzywa ma niemalstyczne, szukać należy, czy wyrażenia AT i AD , należące do tej linii krzywej, mają na wartość $x = \infty$, granicę, co gdy się okaże, będzie znakiem, iż linia krzywa ma niemalstyczne. Chcąc zaś je wykreślić, przeniesiemy wynalezione granice na linie im odpowiadające, przez co wyznaczymy dwa punkta R , i E , przez które poprowadzona linia RS będzie niemalstyczną żadaną.

Wyrażenia linii AT i AD wyciągają się z PT ; pierwszej, zważając że $AT=AP-PT$, drugiej za pomocą trójkątów podobnych ADT i MPT ; można je także wyprowadzić ze zrównania stycznej (68), czyniąc z kolei $y'=0$, $x'=0$ (*Trig.* 87).

I tak ze zrównania stycznej znajdziemy

$$AT=x-y\frac{dx}{dy}, \quad AD=y-x\frac{dy}{dx}.$$

Wyprowadzając z figury otrzymalibyśmy wyrażenie $AD=x\frac{dy}{dx}-y$, znakiem tylko różniące się od poprzedzającego; lecz w zastosowaniach ta różnica ginie dla znaku właściwego, jaki wypada przed spółczynnikiem różniczkowym.

Gdyby jedna z ilości AR lub AE stała się nieskończenie wielką, gdy druga ma wartość skończoną, widoczną jest rzeczą, że niemalstyczna byłaby równoległa do tej osi, na której znajduje się ilość nieskończenie wielka.

Żeby nie pominąć żadnej z niemalstycznych, które ma dana linija krzywa, trzeba z kolei założyć $x=\infty$, $y=\infty$, i każdy z wypadków odmiennych, wynikających z jednego i drugiego założenia, podstawić w wyrażeniach AT i AD . Jeżeli AT i AD stają się razem nieskończenie wielkimi, ztąd się wnosi, że linija krzywa nie ma niemalstycznych.

Może się trafić, że obie te ilości razem staną się $=0$, wtenczas niemalstyczną linii krzywej, byłaby linija prosta przechodząca przez początek spółprzystaw; aże w tym razie jeden tylko punkt byłby wiadomy, więc dla oznaczenia jej kierunku, trzeba by, kładąc $x=\infty$, wziąć granicę spółczynnika $\frac{dy}{dx}$, wyrażającego styczną kąta MTP (62) na każdy punkt linii krzywej; tym sposobem otrzymalibyśmy styczną kąta SRB .

74. Stosując poprzedzające uwagi do zrównania

$$y^2=mx+nx^2,$$

otrzymamy

$$AT = x - \frac{2y^2}{m+2nx} = \frac{-mx}{m+2nx},$$

$$AD = y - \frac{mx-2nx^2}{2y} = \frac{mx}{2\sqrt{mx+nx^3}}.$$

Ponieważ druga strona tych zrównań może się wyrazić pod kształtem

$$-\frac{m}{\frac{m}{x}+2n}, \quad \frac{m}{2\sqrt{\frac{m}{x}+n}},$$

zatem ich granice odpowiadające, gdy $x = \infty$,

$$\text{będą} \quad -\frac{m}{2n} = AR, \quad \frac{m}{2\sqrt{n}} = AE.$$

Jeżeli byłoby $n=0$, wyrażenia AT i AD razem z ilością x stałyby się $= \infty$; w ów czas linija krzywa nie miałaby niemalstycznych; równie ich mieć nie będzie, gdy n będzie odjemne, gdyż wtedy w zrównaniu linii krzywej nie możnaby przypuścić $x = \infty$.

W linii krzywej wyrażonej przez zrównanie

$$x^5 - 3axy + y^5 = 0,$$

$$\text{mamy} \quad AT = \frac{axy}{x^2 - ay}, \quad AD = \frac{axy}{y^2 - xy};$$

dla znalezienia granicy, do której się te wartości, za wzrostem y , zbliżają, trzeba by za y podstawić granicę, do której ta ilość dąży, a zatem mieć y wyrażone przez x ; lecz w tym przykładzie, nie rozwiązując zrównania, można przyjść do zamierzonego celu, za pomocą sztuki analitycznej bardzo prostej. Założywszy $x = ty$, zrównanie dane dzieli się przez y^2 , i daje $y = \frac{3at}{1+t^3}$; łatwo zaś postrzegamy, że gdy uczynimy $t = -1$, będzie $y = \infty$, $x = -y$. Kładąc $-y$ za x

w wyrażeniach AT , i AD , a potem biorąc granice, otrzymamy

$$AR = -a = AE;$$

gdy za pomocą tej wartości zostaną wyznaczone punkta R i E (*fig. 6*), poprowadzona przez nie linija prosta RE , będzie niemalstyczną odnóg AY i AZ , należących do linii krzywej wykreślonej ze zrównania wyżej danego.

O linijach krzywych ściślestycznych.

75. Uważając, że styczna do linii krzywej jest granicą wszystkich linii prostych przecinających liniją krzywą w dwóch punktach, można przez podobieństwo szukać między linijami krzywymi jednego gatunku takiej linii, która byłaby granicą wszystkich linii tegoż gatunku, przecinających daną liniją krzywą w oznaczonej liczbie punktów. Wiedząc *np.* że trzy punkta mieć trzeba na oznaczenie koła, można przypuścić, że te trzy punkta są wzięte na danej linii krzywej, i szukać jakie wypadnie koło, gdy te trzy punkta zejdą się w punkt jeden. To koło nazwane *kołem ściślestycznym* (*cercle osculateur*) będzie granicą wszystkich innych kół przez też trzy punkta przechodzących, tak jak styczna jest granicą wszystkich linii prostych, przez punkt stykania się poprowadzonych. Cecha ta koła ściślestycznego jest dostateczna do jego oznaczenia, lecz że nic widocznego oku nie przedstawia, przeto użyjemy na jej miejscu uwag następnych (*).

Widzieliśmy w początkowej Geometrii, iż między kołem i jego styczną, nie może być poprowadzona żadna linija prosta, lecz może przechodzić liczba kół nie-

(*) Można w dziele *Traité du calcul differ. et du calcul intégral* in 4to T. I. licz. 229, i T. III str. 638 *dodatek do licz.* 229 obaczyć rachunek na połączeniu punktów przecięć oparty; zasługuje on być rozważonym, jako rzecz znakomita w teoryi granic.

ograniczona. Również między jakąkolwiek linią krzywą a jej styczną, nie można prowadzić żadnej linii prostej, lecz może przechodzić nieograniczona liczba kół różnych promieni, mających tęż samą styczną, jaką ma linia krzywa; między temi kołami znajdować się będzie jedno, które około punktu stykania się bardziej zbliża się do linii krzywej, niżli wszystkie inne.

Dla wyrażenia tych uwag analitycznie, niech będą x i y , x' i y' , x'' i y'' , spółprzystawy trzech rozmaitych linii krzywych, mających punkt jeden spólny, w którym jest

$$x = x' = x'', \quad y = y' = y''.$$

Jeżeli weźmiemy różnicę szeregow

$$y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

$$y' + \frac{dy'}{dx'} h + \frac{d^2y'}{dx'^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y'}{dx'^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

wyrażających przystawy punktów odpowiadających ucinkowi $x+h$, w dwóch pierwszych liniach krzywych, otrzymamy

$$\left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx'}\right)h + \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y'}{dx'^2}\right)\frac{h^2}{1.2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3y'}{dx'^3}\right)\frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

ogólne wyrażenie wzajemnej odległości $N'N$ (fig. 7), między temi dwiema linijami w kierunku przystaw; a jeżeli za przystawę y' i za jej spółczynniki różniczkowe, położymy przystawę y'' i jej spółczynniki różniczkowe, będziemy mieli wyrażenie odległości $N''N$ między pierwszą a trzecią linią krzywą. Nazwijmy te dwie odległości przez δ' i δ'' ; wyrażenia ich będą miały kształt

$$\delta' = A'h + B'\frac{h^2}{1.2} + C'\frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

$$\delta'' = A''h + B''\frac{h^2}{1.2} + C''\frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}$$

Ażeby do pierwszej linii krzywej druga linia krzywa

bardziej zbliżała się a niżli trzecia, powinno być $\delta' < \delta''$, to jest, opuszczając mnożnik h , spólny wszystkim wyrazom,

$$A' + B' \frac{h}{2} + C' \frac{h^2}{2.3} + \text{it. d.} < A'' + B'' \frac{h}{2} + C'' \frac{h^2}{2.3} + \text{it. d.}$$

Ten warunek, ponieważ służyć powinien przy jakiejkolwiek wartości przyrostku h , będzie zależał od pierwszych wyrazów A' i A'' (62); lecz jeźlibyśmy założyli $A' = 0$, stałby się

$$B' \frac{h}{2} + C' \frac{h^2}{2.3} + \text{it. d.} < A'' + B'' \frac{h}{2} + C'' \frac{h^2}{2.3} + \text{it. d.};$$

aże $h = 0$ niszczy pierwszą stronę, a drugiej nie gubi; przeto pierwsza byłaby koniecznie mniejszą od drugiej, przynajmniej na przyrostek h bardzo mały, skoro A'' nie byłoby $= 0$; a tak druga linia bliżej przystępowałaby do pierwszej niż trzecia; co jest przeciw naszemu założeniu.

Lecz jeźliby razem było $A'' = 0$, warunek poprzedzający względem położenia trzech linii krzywych byłby

$$B' \frac{h}{2} + C' \frac{h^2}{2.3} + \text{it. d.} < B'' \frac{h}{2} + C'' \frac{h^2}{2.3} + \text{it. d.};$$

czyli opuszczając spólny mnożnik $\frac{h}{2}$

$$B' + C' \frac{h}{3} + \text{it. d.} < B'' + C'' \frac{h}{3} + \text{it. d.},$$

ten warunek wtedy tylko w ogólności sprawdzi się, gdy będzie $B' = 0$.

To roztrząsanie, które można posunąć tak daleko, ile sami zechcemy, pokazuje, iż jeźli przyrostek h w pierwszym wyrazie szeregu δ' jest w wyższej potędze, niżli w pierwszym wyrazie szeregu δ'' , zawsze będzie $\delta' < \delta''$.

Gdy druga linija krzywa jast taka, iż w punkcie M jest n zrównań

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1}y'}{d^{n-1}x'} = \frac{d^{n-1}y}{d^{n-1}x},$$

wtedy w szeregu δ' ginie wyrazów początkowych liczba $n-1$, i szereg ten zaczyna się od wyrazu mającego h^n , więc jeżeli trzecia linija jest taka, iż w punkcie M jest tylko $n-1$ zrównań

$$y'' = y, \quad \frac{dy''}{dx''} = \frac{dy}{dx}, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-2}y''}{d^{n-2}x''} = \frac{d^{n-2}y}{d^{n-2}x},$$

w szeregu δ'' ginie wyrazów początkowych liczba $n-2$, i szereg zaczyna się od wyrazu mającego h^{n-1} , w tym razie wypada $\delta' < \delta''$, zatem druga linija krzywa bliżej przystępuje do pierwszej, niż trzecia.

76. Przypuśćmy teraz iż drugiej linii krzywej jest tylko dany gatunek, to jest, iż ilości stałe wchodzące do jej zrównania są nieoznaczone; będzie można za pomocą tych stałych ilości, zadość uczynić takiejże liczbie warunków wyżej wskazanych, a linija krzywa tym sposobem oznaczona będzie taką, iż żadna z linii krzywych, która tyłu warunkom zadość nie czyni, nie będzie mogła przechodzić między daną linią a oznaczoną.

Niech będzie $np.$ ogólne zrównanie linii prostej

$$y' = ax' + \beta \quad \text{które daje} \quad \frac{dy'}{dx'} = a;$$

czyniąc $x' = x$, wypadają za pomocą zrównań

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}, \quad \text{zrównania} \quad y = ax + \beta, \quad \frac{dy}{dx} = a,$$

z których wyprowadzone wartości na a i β kładąc w zrównanie ogólne linii prostej, otrzymamy

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x),$$

zrównanie stycznej, jakieśmy znaleźli pod liczb. 68.

Jeżeli linija krzywa MN' jest kołem wyrażoném przez zrównanie

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 = r^2 \quad (\text{Trigon. 94}),$$

różniczkując to zrównanie dwa razy następnie będziemy mieli

$$(x' - \alpha) dx' + (y' - \beta) dy' = 0,$$

$$dx'^2 + dy'^2 + (y' - \beta) d^2y' = 0,$$

gdy zamienimy w tych trzech zrównaniach x' na x , powinno wypaść

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

czyli co na jedno wychodzi, powinny tym trzem zrównaniom zadość uczynić ilości wartości x, y, dy, d^2y , odpowiednie punktowi M pierwszej linii krzywej; więc będziemy mieli

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

$$(x - \alpha) dx + (y - \beta) dy = 0,$$

$$dx^2 + dy^2 + (y - \beta) d^2y = 0;$$

aże ilości pochodzące od założonej linii krzywej są oznaczone, bo należą do punktu szczególnego M , przeto ilości α, β, r , powinny przyjąć wartości takie, iżby zrównaniom ostatnim stało się zadosyć.

Z dwóch zrównań ostatnich wyprowadzając wartości na $(y - \beta)$ i $(x - \alpha)$, i podstawując je w zrównaniu pierwszym otrzymamy

$$y - \beta = - \frac{dx^2 + dy^2}{d^2y},$$

$$x - \alpha = \frac{dy}{dx} \left(\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y} \right),$$

$$r = \pm \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y}.$$

77. Wszystkie linije krzywe mające punkt jeden

spólny, i których przystawy w tym punkcie mają jeden tenże sam współczynnik różniczkowy, mają jedną spólną styczną, azatém się stykają, lecz mogą się jedne od drugich różnić, jak koło teraz oznaczone, różni się od kół wszystkich innych, które nie tyle jak ono zbliżają się do założonej linii krzywej. Przeto stykania się dzielą się na rzędy według liczby współczynników różniczkowych następnych, które nabywają teyże samej wartości w każdej linii krzywej.

Stykanie się najwyższe z tych wszystkich stykań, które z linią krzywą założoną, może mieć w ogulności linia krzywa, której gatunek jest dany, nazywa się *ściśłym stykaniem się* (*osculation*); rząd tego stykania się oznacza się liczbą ilości stałych znajdujących się w zrównaniu linii ściśle stycznej. I tak linia prosta styczna, która w ogulności nie może zdana linią krzywą mieć stykania się innego rzędu, jak tylko pierwszego, jest ściśle styczną rzędu pierwszego. Koło, którego zrównanie zamyka trzy ilości stałe, może mieć albo stykanie się proste rzędu pierwszego, albo stykanie się rzędu drugiego; lecz to stykanie się będąc najwyższe, nazywa się *ściśłym stykaniem się* i odróżnia koło ściśle styczne od kół wszystkich po prostu stycznych.

Szczegulna własność koła ściśle styczego $D'MN$ jest ta, iż w ogulności linią krzywą, z którą ściśle się styka, przecina w punkcie ściśłego stykania się. Okazuje się to z kształtu wyrażenia ilości δ' , którego wyraz pierwszy mając potęgę nieparzystą h^5 , odmienna swój znak razem ze znakiem przyrostku h , a przeto pokazuje, iż w punktach odpowiadających ucińkom $x-h$, i $x+h$, koło ściśle styczne jest położone w dwóch różnych kierunkach względem linii krzywej i osi ucińków, to jest z jednej strony punktu ściśłego stykania się znajduje się nad linią krzywą, a z drugiej strony tegoż punktu pod tąż linią krzywą; co się nie dzieje względem prostej linii stycznej, i względem kół poprostu stycznych, bo wyrażenie ilości δ'' zaczyna się od wyrazu mającego h^2 .

To samo uważanie daje nam widzieć, iż, jeżeli stykanie się dwóch linii krzywych jest rzędu nieparzystego, powinno być razem w punkcie stykania się i przecięcie.

78. Liczba kół poprostu stycznych w każdym punkcie linii krzywej, jest nieograniczona; bo wszystkie koła mające swój środek na normalnej poprowadzonej przez którykolwiek punkt linii krzywej i przez tenże punkt przechodzące, mają prostą styczną spólną z linią krzywą, a zatem z nią się stykają; lecz należy uważać iż te koła stykają się z linią krzywą jedne ze strony wewnętrznej, drugie ze strony zewnętrznej, koło zaś ściśle styczne oddziela pierwsze od drugich.

Jakoż jeżeli spółprzystawy kół prostostycznych wyrazimy przez x'', y'' ; ponieważ one dopełniają tylko warunków

$$y'' = y, \quad \frac{dy''}{dx''} = \frac{dy}{dx},$$

będziemy mieli wyrażenie

$$\delta'' = B'' \frac{h^2}{1.2} + C'' \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

którego znak zależy od znaku wyrazu

$$B'' = \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 y''}{dx''^2},$$

tak iż koło prostostyczne będzie pod linią krzywą względem osi ucinków, jeżeli jest $\frac{d^2 y''}{dx''^2} < \frac{d^2 y}{dx^2}$, a przeciwnie jeżeli jest $\frac{d^2 y''}{dx''^2} > \frac{d^2 y}{dx^2}$, będzie nad linią krzywą; lecz między wartościami ilości α , β , γ , odpowiadającemi każdemu z tych dwóch przypadków znajdują się wartości odpowiadające warunkowi

$$\frac{d^3 y''}{dx''^3} = \frac{d^3 y}{dx^3},$$

a które, jakośmy widzieli pod liczbą 76, dają koło ściśle styczne.

Ten sposób uważania koła ściślestycznego czyni, iż tak rzekę, widocznym, związek zachodzący między krzywością tego koła, a krzywością danej linii krzywej, ponieważ krzywość tej linii jest widocznie mniejszą od krzywości kół, które się z nią stykają wewnątrz, a większą od krzywości kół stykających się z nią zewnątrz. Przeto do mierzenia jej krzywości w jakimkolwiek punkcie bierzemy krzywość koła ściślestycznego w tymże punkcie; z tego powodu jego promień nazywa się *promieniem krzywości*.

Jak zaś krzywości dwóch kół jedna z drugą porównywają się, następny wykład okaże.

79. Za miarę krzywości łuku *AEB* (fig. 8) jakiegokolwiek linii krzywej, bierzemy kąt *DCB* zawarty między dwiema stycznymi z końców łuku poprowadzonymi. W kole, kąt *DCB* równa się kątowi *AOB* zawartemu między promieniami *AO* i *OB*, przez końce łuku poprowadzonymi, i jest równej wielkości na wszystkie łuki równie długie brane w tém samym kole. Tym sposobem należy rozumieć, iż krzywość koła jest jednostajna. Więc, jeżeli będziemy porównywali dwa łuki równie długie w różnych kołach, nazywając *a* tę długość, *r* i *r'* promienie kół, π stosunek okręgu koła do średnicy, otrzymamy na liczbę stopni setkowych zawartych w łuku *a* w każdym z tych kół, wyrażenia

$$\frac{400^{\circ} \cdot a}{2\pi r}, \quad \frac{400^{\circ} \cdot a}{2\pi r'},$$

stosunek tych wyrażen jest $= \frac{1}{r} : \frac{1}{r'}$, czyli $= r' : r$, to jest wyrażenia te czyli krzywości równych łuków w kołach różnych, mają się w stosunku odwrotnym promieni tychże kół.

Co do różnych łuków tegoż samego koła, krzywość ich jest widocznie w stosunku ich długości, a jeżeli za jedność krzywości weźmiemy krzywość łuku równej długości z promieniem, w kole którego promień jest $= 1$,

wtedy krzywość łuku a w kole, którego promień jest $=r$, wyrazi się przez $\frac{a}{r}$.

80. Spółprzystawy α i β środka koła ściśle stycznego równie jak jego promień r , będąc funkcyami spółprzystaw x i y , zmieniają się na każdy punkt danej linii krzywej; zbiór wszystkich położeń tego środka tworzy linią krzywą FZ (*fig. 9*), której spółprzystawami są α i β , i która ma wiele znakomitych własności; łatwo wyprowadzimy te własności ze zrównań pod licz. 76 znalezionych, które są:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \dots\dots\dots (1),$$

$$(x-\alpha)dx + (-\beta)dy = 0 \dots\dots\dots (2),$$

$$dx^2 + dy^2 + (y-\beta)d^2y = 0 \dots\dots\dots (3),$$

10d. Zrównanie na linią krzywą FZ , zamykające związek między α i β , otrzymamy rugując x i y ze zrównania danej linii krzywej za pomocą zrównań (2) i (3), podstawivszy w nich pierwiej wartość za dy i za d^2y .

27e. Zrównanie (2), ponieważ daje

$$\beta - y = -\frac{dx}{dy} (\alpha - x),$$

jest zrównaniem normalnej prowadzonej z punktu, którego spółprzystawy są α , β , (68) to jest z punktu O linii FZ , do punktu M danej linii krzywej DX .

3cie. Różniczkując zrównania (1) i (2), nie tylko przez wzgląd na x , y , lecz także przez wzgląd na α , β , r , gdyż te są funkcyami ilości x i y , będziemy mieli

$$(x-\alpha)dx + (y-\beta)dy - (x-\alpha)d\alpha - (y-\beta)d\beta = r dr,$$

$$dx^2 + dy^2 + (y-\beta)d^2y - d\alpha dx - d\beta dy = 0.$$

Te zrównania za pomocą zrównań (2) i (3) sprowadzają się do

$$-(x-\alpha)d\alpha - (y-\beta)d\beta = r dr, \dots\dots (4),$$

$$-d\alpha dx - d\beta dy = 0; \dots\dots\dots (5).$$

Zrównanie (5) daje wyrażenie $\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{dx}{dy}$, przez co

zrównanie $y - \beta = \frac{dx}{dy} (\alpha - x)$, zamienia się na

$$y - \beta = \frac{d\beta}{d\alpha} (x - \alpha);$$

co pokazuje że normalna MO , jest styczną do linii krzywej, której spółprzystawy są α i β (68), to jest do linii krzywej FZ .

4te. Jeżeli ze zrównania (4) za pomocą zrównań (1), (2), (5), wyrugujemy $(x - \alpha)$, $(x - \beta)$, $\frac{dy}{dx}$, otrzymamy zrównanie

$$dy^2 = d\alpha^2 + d\beta^2, \text{ czyli } \frac{dy}{d\alpha} = \sqrt{1 + \frac{d\beta^2}{d\alpha^2}},$$

które jest wyrażeniem współczynnika różnicz. ilości y , ze względu na zmienną α ; a że to wyrażenie jest także współczynnikiem różnicz. łuku linii krzywej, której spółprzystawy są α i β (64), z tej więc tożsamości wypada, że promień koła ściślestycznego przez te same zmienia się różnice czyli przyrostki, co i łuk linii krzywej FZ (25); własność ta zasługuje na największą uwagę.

Jakoż promień MO koła ściślestycznego w punkcie M , będąc stycznym do linii FZ , ma koniecznie ten sam kierunek, jakoby miała nie nawiniona na wypukłość tej linii krzywej, gdyby w odwijaniu się swoim przyszła do punktu O . Jasna jest, że odwiniona dalej od O do O' nie, przedłużyłaby się ilością równą łukowi OO' linii krzywej FZ ; aże podług poprzedzającego wykładu różnica między promieniami OM i $O'M'$ równa się łukowi OO' ; przeto koniec M nici, powinien jeszcze znajdować się w M' na danej linii krzywej, z której nie musiał schodzić w czasie odwijania się nici od jednego do drugiego punktu; można więc

uważać linią DX jako utworzoną przez odwinienie krzywej FZ .

Ten sposób ma wielkie podobieństwo z nakreślaniem koła; linia krzywa FZ zastępuje jego środek, a promień MO nie jest stałym, lecz zmienia się na każdy punkt. Linia krzywa FZ nazywa się *odwinioną*, linia DX *odwijającą* a promień koła ściślestycznego, promieniem *odwinionej* (*).

Należy także uważać, że linia odwiniona jest granicą przecięć normalnych danej linii krzywej, branych następnie po parze, ponieważ punkt K , będący miejscem przecięcia się dwóch promieni MO i $M'O'$ prostopadłych do linii krzywej DX , w punktach M i M' , tym więcej zbliża się do krzywej FZ , im bliższe siebie są punkta M i M' .

Z tej ostatniej uwagi możnaby wyprowadzić całą teorią poprzedzającą.

81. Nie będę się długo rozciągał nad przystosowaniem wzorów

$$r = \pm \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{5}{2}}}{dx d^2 y},$$

$$x - z = \frac{dy(dx^2 + dy^2)}{dx d^2 y},$$

$$y - \beta = - \frac{(dx^2 + dy^2)}{d^2 y},$$

bo w tém żadnej nie masz trudności, gdy jest dobrze znany mechanizm rachunku różniczkowego.

(*) Za pomocą tej ostatniej uwagi *Huygens* oznaczył koło ściśle-styczne, które on pierwszy zaczął roztrząsać; taż uwaga mogłaby nas doprowadzić do wzorów znalezionych pod liczb. 76; lecz takowy sposób postępowania oddzielając szukanie koła ściślestycznego od teorii ogólnej stykań linii krzywych, której jest tylko częścią szukanie koła, byłoby bardzo ograniczone na teraźniejszy stan naszych wiadomości.

Wartość γ mając znak podwójny $\pm$, daje nam powód do zapytania, którego znaku użyć należy; jasna bowiem jest, że w ogólności na każdy punkt linii krzywej, jeden tylko jest promień krzywości, a ten promień nie będąc ani w kierunku ucinków, ani w kierunku przystaw, wyjąwszy niektóre punkta szczególne, nie ma, właściwie mówiąc, znaku przez wzgląd na te linie. Znak, który się przed wartością γ pospolicie kładzie, zależy od położenia krzywosci względem normalnej. Jeżeli chcemy, ażeby promień krzywosci był dodatny w liniach krzywych wklęsłością do osi ucinków obróconych, trzeba dać wyrażeniu γ znak —, gdyż $\frac{d^2y}{dx^2}$ jest wtedy ujemne (62); w tym razie, jeżeli wklęsłość linii krzywej przeciwne mieć będzie położenie, promień krzywosci stanie się ujemny, bo i współczynnik $\frac{d^2y}{dx^2}$ znak swój odmieni. Według tej zasady, wieźmiemy w przystosowaniach

$$\gamma = - \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{5}{2}}}{dx d^2y}.$$

Zrównanie ogólne linii drugiego rzędu

$$y^2 = mx + nx^2 \quad \text{daje}$$

$$dy = \left(\frac{m + 2nx}{2y} \right) dx; \quad dx^2 + dy^2 = \left\{ \frac{4y^2 + (m + 2nx)^2}{4y^2} \right\} dx^2,$$

$$d^2y = \frac{2ny dx^2 - (m + 2nx) dx dy}{2y^2} = \left\{ \frac{4ny^2 - (m + 2nx)^2}{4y^5} \right\} dx^2;$$

Ztąd wypadnie

$$\gamma = - \frac{[4y^2 + (m + 2nx)^2]^{\frac{5}{2}}}{8ny^2 - 2(m + 2nx)^2}$$

podstawując zaś w tém wyrażeniu za y^2 wartość, będzie

$$\gamma = - \frac{[4(mx + nx^2) + (m + 2nx)^2]^{\frac{5}{2}}}{2m^2}.$$

Jestto ogólne wyrażenie promienia krzywosci w li-

nijach drugiego rzędu; możemy je przystosować do każdej linii w szczególności nadając ilościom m i n stosowne do tego wartości (*Trig.* 157).

Ten wypadek przywodzi się do $\frac{1}{2}m$, gdy $x=0$; zatem krzywość linii uważanych w ich wierzchołku, jest też sama co krzywość koła nakreślonego promieniem równym połowie parametru. (*Trig.* 138).

Porównyując wartość γ z wartością normalnej (67), postrzeżemy, iż $\gamma = \frac{\overline{MR}^5}{\frac{1}{4}m^2}$, to jest, że promień krzywości w liniach drugiego rzędu, równa się trzeciej potęgde normalnej podzielonej przez drugą potęgę z połowy parametru.

W paraboli gdzie $n=0$, mamy tylko

$$\gamma = \frac{(m^2 + 4mx)^{\frac{5}{2}}}{2m^2}.$$

Podobnie możnaby przystosować wyrażenia ogólne $(x-\alpha)$, $(y-\beta)$; a kładąc za y wartość, otrzymalibyśmy dwa zrównania między x , α i β , z których wyrzucając x , zostałoby zrównanie jedno między α i β należące do odwinionej. Wykonajmy ten rachunek względem paraboli. Mamy w tym razie

$$dy = \frac{mdx}{2y}, \quad d^2y = -\frac{m^2 dx^2}{4y^5},$$

przeto $y-\beta = \frac{4y^5}{m^2} \left(\frac{4y^2 + m^2}{4y^2} \right) = \frac{4y^5}{m^2} + y,$

$$x-\alpha = -\frac{m}{2y} \frac{4y^5}{m^2} \left(\frac{4y^2 + m^2}{4y^2} \right) = -\frac{4y^2 + m^2}{2m},$$

a ztąd $-\beta = \frac{4y^3}{m^2}, \quad x-\alpha = -\frac{2y^2}{m} - \frac{1}{2}m;$

kładąc w każdym z tych zrównań za y wartość $m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, otrzymamy

$$-\beta = \frac{4x^{\frac{5}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}, \quad x-\alpha = -2x - \frac{1}{2}m;$$

wyciągnąwszy z drugiego zrównania wartość $x = \frac{1}{3}(a - \frac{1}{2}m)$, i podstawivszy ją w pierwszym, będziemy mieli zrównanie

$$\beta^2 = \frac{16}{27m} (a - \frac{1}{2}m)^3,$$

które wyraża linią odwinioną paraboli. Jeżeli w niem położymy a' za $a - \frac{1}{2}m$, to jest jeżeli przeniesiemy początek uciników do punktu D (*fig. 10*), otrzymamy proste zrównanie

$$\beta^2 = \frac{16a'^3}{27m},$$

które pokazuje, że linia krzywa DF jest jedną z parabol trzeciego rzędu (*), złożoną z dwóch odnóg DF i Df , z których pierwsza przez swoje odwinienie rodzi odnogę AX paraboli zwyczajnej XAx , druga rodzi odnogę Ax .

82. Należy uważać, że gdy chcemy nakreślić parabolę XAx przez odwinienie linii krzywej FDf , nie nawiniona na jednej lub drugiej odnodze DF lub Df , powinna mieć w punkcie D , na przedłużeniu stycznej BD , długość AD równą promieniowi krzywości w punkcie A , to jest połowie parametru linii krzywej danej; każdy inny punkt *np.* J , wzięty na tej nici, zrodziłby odmienną linią krzywą. Jeźliby punkt J padł na D , promień krzywości tak napisanej linii, byłby w jej początku równy zeru, a zatem taka linia miałaby w tym punkcie krzywość nieskończenie wielką (78).

Równie widzimy, że, ponieważ długość łuku DF równa się różnicy między promieniem krzywości MF należącym do punktu F , a promieniem krzywości AD należącym do początku, że zatem linia krzywa FDf

(*) Zrównanie ogólne $y^2 = mx^3$, wystawia nam oddział linii krzywych, z liczby których parabola zwyczajna, której służy zrównanie $y^2 = mx$, jest tylko szczególnym przypadkiem. Nazywają te linie także parabolami, lecz różnią się je tylko przez wykładnik stopnia ich zrównania.

jest wyprostowalną (*rectifiable*), to jest, że można wyrazić jej długość przez linią prostą jej równą.

Ta uwaga jest ogólna; bo gdy zawsze można otrzymać wyrażenie promienia krzywości linii algebraicznych, odwinione tych linii są wszystkie wyprostowalne.

Szukanie punktów osobliwych w liniach krzywych i roztrząsanie szczególnych wartości, których nabývają współczynniki różniczkowe w pewnych przypadkach.

83. Nazywamy *punktami osobliwymi* (*points singuliers*) linii krzywej te punkta, w których się przedstawuje jakaś okoliczność godna uwagi. Ponieważ najwięcej takich okoliczności znajduje się w liniach krzywych wyrażonych przez zrównanie.

$$y = b + c(x - a)^m,$$

dla tego roztrząśniemy to zrównanie, łącząc razem uwagi geometryczne z uwagami analitycznemi, dla objaśnienia wzajemnie jednych przez drugie.

Najpierwszém pytaniem przedstawującém się jest: oznaczyć ciąg wartości przystaw y , dla dowiedzenia się czy one ciągle wzrastają lub ubywają, albo czy powiększanie się ich lub ubywanie ma pewną jakąś granicę, której gdy dosięgną, zaczynają dalej pomniejszać się gdy pierwiej wzrastały, lub przeciwnie powiększać się gdy przed tą granicą zmniejszały się. Wartość odpowiadająca granicy wzrostu, będąc większą od wartości, które ją bezśrednie poprzedzają lub po niej następują, nazywa się *największością* (*maximum*), ta zaś, która odpowiada granicy ubywania, będąc mniejszą od wartości, które ją bezśrednie poprzedzają lub po niej następują, nazywa się *najmniejszością* (*minimum*); do wyrazu poprzedzają lub następują dodajemy wyraz bezśrednie, bo są funkcy, w których te przemiany kilka razy wypadają.

Widzieliśmy pod liczbą 62, że przystawy dodatne linii krzywej powiększają się, gdy współczynnik różniczkowy $\frac{dy}{dx}$ ma wartość dodatnią, a zmniejszają się gdy ma wartość ujemną; więc ztąd wypada, że w punkcie największości lub najmniejszości współczynnik różniczkowy $\frac{dy}{dx}$ odменя znak; przechodzi z dodatniego na ujemny w punkcie największości, a z ujemnego na dodatni w punkcie najmniejszości.

Zrównanie wzięte za przykład daje w ogólności

$$\frac{dy}{dx} = mc(x-a)^{m-1},$$

znak tego współczynnika zmienia się razem ze znakiem ilości x , lub się zachowuje ten sam, według wartości wykładnika m .

1^{od}. Jeżeli wykładnik m , jest liczbą parzystą, będzie $(m-1)$ liczbą nieparzystą, a wartość $(x-a)^{m-1}$ będzie ujemna gdy $x < a$, dodatna gdy $x > a$; będzie najmniejszość gdy $x = a$, co można bezpośrednio sprawdzić na funkcji y . Kładąc w niej $x = a - h$, albo $x = a + h$, otrzymamy w jednym i w drugim przypadku, wartość $y = b + ch^m$, większą od wartości b , która odpowiada $x = a$.

Wartość $\frac{dy}{dx} = 0$, otrzymana z złożenia $x = a$, gdy wykładnik $(m-1)$ jest dodatni, pokazuje iż styczna jest równoległa do linii ucinków, jak przedstawuje fig. 11 w punkcie M , którego uciniek jest $AP = a$, przystawa $PM = b$.

Jeżeli ilość c jest ujemna, co daje $y = b - c(x-a)^m$, przy zachowaniu wszystkich uwag poprzedzających, okaże się, że punkt M (fig. 12) jest największością i styczna zostaje zawsze równoległa do osi ucinków.

2^{re}. Niebyłoby ani najmniejszości w pierwszym przypadku, ani największości w drugim, jeźliby wykładnik m był nieparzysty. Wtedy, ponieważ wykładnik $(m-1)$ byłby parzysty, ilość $(x-a)^{m-1}$ zostałaby zawsze doda-

tną, jakakolwiek byłaby ilość $(x-a)$; jakoż kładąc kolejno $x=a-h$, $x=a+h$, gdy ilość c jest dodatna, znajdziemy wartości

$$y=b-ch^m; \quad y=b+ch^m;$$

pierwsza z nich jest mniejsza, druga większa od wartości b odpowiadającej $x=a$, jednak mamy jeszcze $\frac{dy}{dx}=0$, więc cecha $\frac{dy}{dx}=0$, niezawsze wskazuje największość, lub najmniejszość.

W punkcie M (fig. 13), w którym $x=a$, styczna jest równoległa do osi ucinków, lecz linija krzywa przedstawuje nam inną okoliczność; wklęsłość jej zmienia kierunku, co postrzegamy przez zmianę znaku współczynnika różniczkowego drugiego rzędu (62), albowiem mamy

$$\frac{d^2y}{dx^2}=m(m-1)c(x-a)^{m-2},$$

aż wykładnik $(m-2)$ jest także liczbą nieparzystą, wartość ilości $(m-a)^{m-2}$ przechodzi z ujemnej na dodatną, gdy od $x < a$, przechodzimy do $x > a$. Kształt linii krzywej w punkcie M nazywa się wtedy nagięciem (*inflexion*), a styczna MT razem i dotyka się linii krzywej w punkcie M i ją przecina.

3cie. Jeżeli wykładnik m był ułamkiem mającym licznik parzysty a mianownik nie parzysty, np. gdyby było $m=\frac{2}{3}$, wypadłby współczynnik pierwszego rzędu

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}c(x-a)^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2c}{3(x-a)^{\frac{1}{3}}},$$

który razem z ilością $(x-a)$ zmienia znak z ujemnego na dodatny, co odpowiada najmniejszości, która też znajduje się, bo czy zmieniamy x na $a-h$, czy na $a+h$, zawsze otrzymujemy $y=b+ch^{\frac{2}{3}}$, wartość większą od wartości b odpowiadającej $x=a$; lecz ta wartość

$x=a$, nie niszczy współczynnika różniczkowego $\frac{dy}{dx}$, ale czyni go nieskończenie wielkim. Zależy to od tego, że jeżeli ilość cała zmienia swój znak w przechodzie tylko przez zero, ułamkowa, gdy zmienia znak z powodu zmiany znaku mianownika, musi w tym ciągu stać się nieskończenie wielką. Ułamek np. $\frac{a}{x}$, kładąc następnie

$$x=\beta, \quad x=0, \quad x=-\beta;$$

daje $\frac{a}{\beta}, \quad \frac{a}{0}$ to jest $\infty, \quad -\frac{a}{\beta}$.

Najmniejszość ta uważana ma kształt (*fig. 14*) odmienny od kształtu figury 11, bo współczynnik różniczkowy $\frac{dy}{dx}$ stając się nieskończenie wielkim, daje styczną MT prostopadłą do osi ucinków. Współczynnik zaś różniczkowy drugiego rzędu

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} c(x-a)^{\frac{2}{3}-2} = \frac{-2c}{9(x-a)^{\frac{4}{3}}}$$

mając zawsze wartość ujemną, czy położymy $x < a$, czy $x > a$, pokazuje, iż linija krzywa swoją wklęsłością jest obrócona do osi ucinków, a zatem ma kształt wskazany na figurze 14.

Punkt M , w którym linija krzywa nagle się zatrzymuje w złączeniu dwóch jej części DM i EM , nazywa się zwrotem, (*rebroussement*), i różni się od punkta M figury 11; jednak powinien być liczony do gatunku najmniejszości, bo gdyby ułożono tablicę liczbowych wartości przystaw linii krzywej DE , postrzeżlibyśmy, że liczba odpowiadająca ucinkowi $x=a$, jest mniejsza tak od poprzedzającej jak następnej, a co jest cechą najmniejszości.

Zrównanie

$$y=b-c(x-a)^{\frac{2}{3}}$$

daje nam przykład podobnej największości (*fig. 15*).

Przeto za prawidło, któreby dawało poznać bez wyjątku wszystkie punkta, w których przystawy linii krzywej stają się, z rosnących ubywającemi, lub z ubywających rosnącemi, wziąć należy: *zatożyć równem zeru, albo nieskończoności wyrażenie współczynnika różniczkowego $\frac{dy}{dx}$, z tego zrównania wyprowadzone ucinki będą ucinkami punktów szukanych; jeżeli wartość współczynnika $\frac{dy}{dx}$, przechodzi z dodatniej na ujemną będzie największość, a w przeciwnym razie najmniejszość.* Bez tej przemiany znaku nie będzie ani największości, ani najmniejszości, co się wydarza wtedy, gdy wykładnik móżnika który ginie, czy to w liczniku, czy to w mianowniku, jest liczbą całą parzystą, albo ułamkiem z licznikiem parzystym.

84. Należy dobrze uważać, iż w punktach nagięcia lub zwrotu linii krzywej, styczna może przypadać w jakimkolwiek położeniu względem osi ucinków; bo dla otrzymania żadanego położenia, dość jest zmienić kierunek osi współprzystaw, co nie zmienia ani kształtu, ani własności linii krzywej. Odkryjemy zaś takowe punkta, szukając punktów w których współczynnik różniczkowy drugiego rzędu znak swój zmienia; co gdy się staje, musi koniecznie ten współczynnik być równy, albo zeru, albo nieskończoności. Oznaczmy wartości współprzystaw odpowiadających takowym punktóm; lecz dla poznania gatunku linii krzywej w punkcie uważanym, należy roztrząsnąć tę linią z obu stron tego punktu. Tak zrównanie

$$y = b + c(x-a)^{\frac{2}{3}}$$

na wartość $x=a$, daje punkt zwrotu *M* (*fig. 14*), bo współczynniki różniczkowe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} c(x-a)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2c}{3(x-a)^{\frac{1}{3}}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} c(x-a)^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2c}{9(x-a)^{\frac{4}{3}}},$$

na tęż wartość stają się nieskończenie wielkimi; współczynnik $\frac{dy}{dx}$, gdy idziemy od $x < a$, do $x > a$, przechodzi wtedy z ujemnego na dodatni, a współczynnik $\frac{d^2y}{dx^2}$ zostaje zawsze ujemnym.

Zrównanie zaś

$$y = b + c(x-a)^{\frac{5}{3}},$$

którego wykładnikiem jest ułamek z licznikiem i mianownikiem nieparzystym, daje na wartość $x=a$, punkt nagięcia, bo współczynniki $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$, stają się wtedy nieskończenie wielkimi gdy idziemy od $x < a$, do $x > a$, współczynnik $\frac{dy}{dx}$ nie zmienia swego znaku, zostaje zawsze dodatnim, a współczynnik $\frac{d^2y}{dx^2}$ przechodzi z dodatniego na ujemny; a że przystawa y w obu przypadkach zachowuje wartość rzetelną, przeto linia krzywa rozciąga się z obu stron punktu w którym $x=a$.

Nie jest to samo ze zrównaniem

$$y = b + c(x-a)^{\frac{5}{4}},$$

bo wyraz $(x-a)^{\frac{5}{4}}$, gdy weźmiemy $x < a$, staje się urojonym, i zawsze na wartość $x < a$ będzie urojony; gdy wykładnikiem jest ułamek z mianownikiem parzystym; lecz trzeba uważać, że wtedy wyraz $(x-a)^{\frac{5}{4}}$, będąc pierwiastkiem stopnia parzystego, ma znak podwójny $\pm$, co pokazuje, że punkt M (fig. 16) odpowiadający wartości $x=a$, jest punktem złączenia się dwóch ramion DM i EM .

W zwrócie wyrażonym na fig. 14, dwa ramiona linii krzywej dotykają się wzajemnie swoją wypukło-

ścią, lecz zdarza się niekiedy że jedno ramie obejmuje drugie; zrównanie $(y-x^2)^2 = x^5$ daje tego przykład. Rozwiązawszy je co do ilości y , otrzymujemy

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}},$$

i postrzeżemy, że oba ramiona linii krzywej przez zrównanie poprzedzające wyrażonej, zbiegają się w punkcie A (*fig. 17*), i za ten punkt w stronę ujemnych ucinków nie przechodzą, bo wtedy wyraz $x^{\frac{5}{2}}$ staje się urojonym.

Spółczynniki

$$\frac{dy}{dx} = 2x \pm \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \pm \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}},$$

pokazują iż w punkcie A , oba ramiona linii krzywej mają za wspólną styczną oś ucinków, i są do niej obrócone swoją wklęsłością, bo na wartość $x=0$, współczynnik różn. pierwszego rzędu i przystawa y , stają się zero, drugiego zaś rzędu współczynnik różn. zostaje dodatny. Takowy punkt dla różnicy od innych punktów nazywa się *punktem zwrotu drugiego gatunku*.

Można tu uważać, że współczynnik różniczkowy trzeciego rzędu.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \pm \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

na wartość $x=0$, sta'ę się nieskończenie wielkim.

85. Niekiedy odnogi linii krzywych, zamiast zbiegania się razem, stykają się lub przecinają i każda odnoga ma swoją styczną szczególną. Oto jest tego przykład: Gdy w wyrażeniu

$$y = b \pm (x-a)\sqrt{x-c}$$

uczynimy $x=a$, obie wartości ilości y stają się równymi, więc punkt im odpowiadający jest punktem zbieżenia się dwóch odnóg linii krzywej, do której nale-

żną; lecz chociaż jedna tylko jest przystawa y , współczynnik różniczkowy

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{x-c} \pm \frac{x-a}{2\sqrt{x-c}},$$

na wartość $x=a$, sprowadzając się do wyrażenia $\pm \sqrt{a-c}$, ma jeszcze dwie wartości; wartość dodatna odpowiada odnodze wyższej a wartość odjemna odnodze niższej; obie będą rzetelne, dopóki będzie $a > c$, i dadzą linią krzywą wyrażoną na *fig. 18*.

Punkta, w których kilka odnóg łączy się, nazywają się *punktami mnogimi* (*points multiples*); punkt w poprzedzającej linii krzywej uważany jest punktem dwoistym, bo przezeń dwie odnogi linii krzywej przechodzą.

Jeżeli wyrażenie poprzedzające ilości y wyrazimy ogólniej pod kształtem

$$y = b + (x-a)\sqrt[m]{x-c},$$

punkt odpowiadający uciinkowi $x=a$, będzie podwójnym na wartości tylko parzyste wykładnika m , bo wtedy tylko pierwiastek ma znak podwójny $\pm$. Ta uwaga należąca się P. *Poisson* pokazuje, równie jak uwagi pod liczbami poprzedzającymi wyłożone, że samo tylko roztrząsanie linii krzywej w częściach przyległych punktowi osobliwemu, może dać poznać jej gatunek.

Należy jeszcze uważać, iż w pierwszym wyrażeniu ilości y , wprowadzając mnożnik $(x-a)$ pod znak pierwiastkowy, mielibyśmy

$$y = b + \sqrt{(x-a)^2(x-c)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x-a)(x-c) + (x-a)^2}{2\sqrt{(x-a)^2(x-c)}}$$

a zakładając $x=a$, wypadłoby $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ z przyczyny mnożnika $(x-a)$, znajdującego się we wszystkich wy-

razach ułamku. Opuszczając ten spólny mnożnik znaleźćlibyśmy znowu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x-c) + (x-a)}{2\sqrt{x-c}} = \sqrt{x-c} + \frac{x-a}{2\sqrt{x-c}},$$

86. Linijóm krzywym towarzyszą niekiedy punkta odosobnione, mające charakter punktów mnogich; lecz można je rozeznaczyć, bo w tych punktach współczynniki różniczkowe rzędu pierwszego lub wyższych stają się urojonymi, co pokazuje że nie masz punktów następnych.

Niech będzie zrównanie

$$ay^2 - x^5 + ax^3 = 0$$

z którego otrzymujemy

$$y = \sqrt{\frac{x^2(x-b)}{a}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x(3x-2b)}{2\sqrt{ax^2(x-b)}},$$

uczyniwszy $x=0$, będzie $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$; lecz prawdziwą wartość współczynnika $\frac{dy}{dx}$, znaleźć można dzieląc licznik jego i mianownik przez spólny mnożnik x ; co

$$\text{daje} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x-2b}{2\sqrt{a(x-b)}},$$

a potem czyniąc $x=0$, wypada urojone wyrażenie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2b}{2\sqrt{-ab}}.$$

W tém samém założeniu, to jest gdy $x=0$, wyższe zrównanie daje $y=0$: lecz ta przystawa, która jest urojona gdy x jest odjemne, zostaje urojoną, dopóki nie będzie $x=b$: tak więc punkt A (*fig. 20*), lubo zawarty w zrównaniu linii krzywej, zupełnie jednak od niej jest odosobniony.

Takowe punkta nazywamy *punktami sprzężonemi* (*points conjugués*): wynikają one z tego, że jakaś część

ograniczona danej linii krzywej niknie przez nadanie pewnej wartości ilości stałej do jej zrównania wchodzącej. Linija krzywa wyrażona przez zrównanie

$$ay^2 - x^5 + (b-c)x^2 + bcx = 0,$$

z którego mamy $y = \pm \sqrt{\frac{x(x-b)(x+c)}{a}},$

wystawia nam przykład tych odmian. Rysunek jej pierwszy jest taki, jaki widzimy na *fig. 20*; jeżeli założymy $c=0$, linija *BF* staje się punktem *A* (*fig. 19*) jakośmy już widzieli; jeżeli c nie ginie, a $b=0$, wtedy ma kształt figury 21; ma zaś kształt figury 22, gdy razem $b=0$, $c=0$.

Linije krzywe mają też niekiedy punkta osobliwe niewidziane; są to punkta wynikające zparzystej liczby nagięć łączących się w jedno nagięcie.

87. Wszystkie punkta wymienione powstają w ogólności z połączenia się kilku odnóg, co wynika z tego, iż różniące się pierwiej między sobą wartości przystawy y , stają się równemi, jak to mamy w zrównaniu

$$y = b + c(x-a)^m,$$

gdy wykładnik m jest ułamkowy; lecz wtedy różniczkowe współczynniki wypadają nieskończenie wielkie, ponieważ w wyrażeniu

$$\frac{d^m y}{dx^m} = m(m-1) \dots (m-n+1)c(x-a)^{m-n},$$

wykładnik $(m-n)$ staje się odjemnym, skoro jest $n > m$, i w tym razie wartość $x=0$, robi wszystkie współczynniki różniczkowe nieskończenie wielkimi.

Toż samo się dzieje, gdy związek między y i x , jest dany przez zrównanie, w którym ilości zmienne są razem połączone. Jakoż niech $u=0$ będzie zrównanie jakiegokolwiek między x i y , będziemy mieli w ogólności

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy = 0, \quad \text{z tąd} \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}},$$

Lecz gdy wartość szczególna $x=a$, czyni równemi kilka wartości y , wtedy funkcyja u , zamykając ilości tylko y i a bierze kształt $U(y-b)^m$ i daje współczynnik różniczkowy

$$\frac{du}{dy} = \frac{dU}{dy} (y-x)^m + mU(y-b)^{m-1},$$

który na wartość $y=b$, stając się równym zeru, czyni nieskończenie wielkim współczynnik $\frac{dy}{dx}$; jeżeli współczynnik $\frac{du}{dx}$ nie staje się $=0$, czyni zaś $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, jeżeli współczynnik $\frac{du}{dx}$ staje się $=0$, co się zdarza, gdy jego mnożnikiem jest $(x-a)$, albo $(x-b)$.

Zrównania

$$(y-b)^2 - (x-a) = 0, \quad (y-b)^3 - (x-a)^2 = 0,$$

z których mamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(y-b)}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2(x-a)}{3(y-b)^2},$$

dostarczają nam przykładów w wyrażonych przypadkach, gdy założymy $x=a$, co daje też $y=b$; lecz w drugim przykładzie za $(y-b)$ kładąc wartość i opuszczając spólny licznikowi i mianownikowi mnożnik, wypada na wartość $x=a$, współczynnik $\frac{dy}{dx}$ nieskończenie wielki.

88. Widoczną jest rzeczą, iż gdy współczynniki różniczkowe stają się nieskończenie wielkimi, wzór Taylora jako z tych współczynników złożony, nie może być użytym; lecz nie więcej tu jest przeciwności, jak we wszystkich innych okolicznościach, w których się okazują wyjątki we wzorach. Cdy się cofniemy do po-

czątku tych wzorów poznamy, iż cecha, która oznajmuje o wyjątku, pokazuje razem dla czego się on przytrafia.

Jakoż, wzór Taylora wyrażając drugi stan funkcji u , gdy ilość jej zmienna x , nabyła przyrostku h (23), w ogólności powinien zamykać potęgi tylko parzyste przyrostku h (20), dopóki ilość zmienną x zostawuje my nieoznaczoną; lecz nie tak się rzecz ma względem wszystkich wartości szczególnych ilości zmiennej. Naprzykład, funkcyja

$$u = b + c(x-a)^{\frac{p}{q}},$$

gdy x , zamienia się na $a+h$, staje się

$$u' = b + c(a+h-a)^{\frac{p}{q}} = b + ch^{\frac{p}{q}}$$

i podobnie dziać się będzie każdego razu gdy zginie ilość będąca pod znakiem pierwiastkowym; bo jeżeli podstawienie $(x+h)$, za x , zmienia w ogólności $\sqrt[m]{P}$, na

$$\sqrt[m]{P+ph+qh^2+\text{i t. d.}},$$

i jeżeli szczególna wartość x , czyni $P=0$; wyrażenie poprzedzające stanie się

$$\sqrt[m]{ph+ch^2+\text{i t. d.}} = h^{\frac{1}{m}} \sqrt[m]{p+qh+\text{i t. d.}},$$

którego rozwinięcie zawsze będzie zamykało wykładniki ułamkowe przyrostku h . Ta zmiana kształtu jest koniecznym wypadkiem redukcji, którą zginienie ilości wykładniczej sprawuje razem w kilku wartościach funkcji założonej. W ogólnym stanie funkcji, każda wartość, ma swój przyrostek szczególny, który ją czyni ciągnącą się bez końca; tak na funkcyę

$$u = b \pm \sqrt{x-a}$$

wzór Taylora daje dwa szeregi

$$u' - u = \pm \frac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}} h - \frac{1}{8}(x-a)^{-\frac{3}{2}} h^2 + \text{i t. d.};$$

znak górny należy do jednej wartości, a znak dolny do drugiej wartości funkcyi u . Równie, jeżeli funkcyja zależy od zrównania, w którym ilości zmienne są razem połączone, współczynniki różniczkowe zamykają w swoim wyrażeniu ilość zmienną niezależną i samą funkcyą, a przeto mają tyle wartości, ile funkcyja mieć ich może (51), i liczba przyrostków funkcyi otrzymanych za pomocą wzoru Tajlora, jest równa liczbie wartości samej funkcyi.

Lecz w przypadkach szczególnych, gdy kilka wartości sprowadza się do jednej, musi tej jednej wartości odpowiadać kilka różnych przyrostków funkcyi, iżby funkcyja mogła odzyskać wszystkie wartości, które mieć w ogulności powinna. Co się otrzymuje przez potęgi ułamkowe przyrostku h , bo one mogą mieć wartości liczbę równą wykładnikowi znaku pierwiastkowego, który do nich należy. I tak w przykładzie poprzedzającym, kładąc $x=a$, mamy

$$u=b, \quad u'-u=\pm h^{\frac{1}{2}};$$

dwa przyrostki $+h^{\frac{1}{2}}, -h^{\frac{1}{2}}$, dodane kolejno do wartości $u=b$, dają dwie wartości, które funkcyja u mieć w ogulności może.

89. Postrzegamy tu, że współczynnik różniczkowy pierwszego rzędu funkcyi u gdy go wyrazimy przez

$$\frac{u'-u}{h} = \pm \frac{h^{\frac{1}{2}}}{h} = \pm \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}},$$

zachowuje h w mianowniku, przeto kładąc $h=0$, staje się nieskończenie wielkim.

Niezawsze współczynnik różniczkowy pierwszego rzędu staje się nieskończenie wielkim, lecz skoro rozwinięcie $u'-u$, ma zamykać potęgi ułamkowe przyrostku h , którykolwiek ze współczynników wyższych rzędów stanie się nieskończenie wielkim.

Niech będzie w ogulności

$$u'=u+Ph+Qh^{\beta}+\dots+Th^{\epsilon}+\text{i t. d.};$$

gdy u' jest funkcją dwówyrazu $x+h$, będziemy mieli $\frac{du'}{dh} = \frac{du'}{dx}$ (19), aże każda strona tego ostatniego zrównania jest także funkcją dwówyrazu $x+h$, będziemy też mieli

$$\frac{d^2u'}{dh^2} = \frac{d^2u'}{dx dh} = \frac{d^2u'}{dx^2}; \dots \frac{d^n u'}{dh^n} = \frac{d^n u'}{dx^n},$$

co pokazuje że współczynniki różniczkowe funkcji u' otrzymywane ze zmieniania ilości x , są równe współczynnikom różniczkowym tejże funkcji otrzymywanym ze zmieniania przyrostku h ; otrzymamy potem współczynniki funkcji u , kładąc $h=0$. Wyraz którykolwiek w funkcji u' , np. Th^s , utworzy w wyrażeniu $\frac{d^n u'}{dh^n}$ wyraz kształtu

$$s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)Th^{s-n};$$

jeżeli wykładnik s jest liczbą całą, a $n < s$, kładąc $h=0$, cały wyraz ginie; jeżeli zaś liczba s jest ułamkiem, wykładnik $s-n$ przejdzie z dodatniego na ujemny, skoro $n > s$, w tym przypadku kładąc $h=0$ cały wyraz staje się nieskończenie wielkim, a przeto i współczynnik różniczkowy $\frac{d^n u'}{dx^n}$, którego tamten wyraz był częścią, stanie się także nieskończenie wielkim.

Jasną jest rzeczą że wyrazy z wykładnikami ułamkowymi, mogą przed sobą mieć wyrazy z wykładnikami całymi, czego funkcya prosta

$$u = bx^m + c(x-a)^{\frac{p}{q}},$$

daje nam przykład gdy $\frac{p}{q} > m$, i gdy założymy $x=a$; współczynniki jej różniczkowe aż do współczynnika rzędu m , będą miały wartość skończoną.

90. Trzeba dobrze uważać, iż przypuszczamy że ilość będąca tylko pod znakiem pierwiastkowym ginie, bo ten przypadek, jeźliby ilości pierwiastkowe ginęły z po-

wodu mnożnika, który na pewną wartość ilości x staje się zero, nie czyni zgoła wyjątku od wzoru Tajlora, gdyż ilości pierwiastkowe, które zginęły w funkcji, okazują się w jej współczynnikach różniczkowych,

Gdybyśmy np. mieli

$$u = b \pm (x-a)^m \sqrt{x-c},$$

przypuszczenie $x=a$, które robi obie wartości funkcji u równymi, zniszczyłoby współczynniki różniczkowe aż do rzędu m włącznie, bo postępując tu jak pod liczb. 57, postrzeżlibyśmy, że mnożnik $x-a$ nie znajduje się w pierwszym wyrazie współczynnika

$$\frac{d^m u}{dx^m} = \pm m(m-1) \dots 1 \sqrt{x-c} + \text{i t. d.},$$

przeto wszystkie współczynniki niższych rzędów zamykając w swoich wyrazach mnożnik $x-a$, zginą gdy założymy $x=a$; współczynnik zaś rzędu m i wszystkie następne zostają, i mając każdy dwie wartości, tworzą dwa szeregi dające wartości funkcji założonej.

91. Uwagi poprzedzające stwierdzić można zapomocą wykreśleń geometrycznych; widzimy na *fig. 23*, iż linija krzywa która w punkcie E odpowiadającym ucinkowi AC , ma jedną tylko przystawę CE , w punktach odpowiadających ucinkowi Ac , mieć będzie dwie przystawy ce' , ce , bo przystawa CE , nabywa dwie różne zmiany $ce' - CE$, i $CE - ce$, lecz przechodząc do ucinka dalszego, przystawy ce' , i ce , każda w szczególności nabędzie jednej tylko zmiany.

To samo dzieje się w punkcie mnogim G , w którym dwie odnogi linii krzywej przecinają się; przystawa FG dozna na jeden tylko przyrostek ucinka H , dwóch zmian $fg' - FG$ i $FG - fg$.

92. Szereg, który wyraża zmiany funkcji, nie tylko zamyka w pewnych przypadkach szczególnych wykładniki ułamkowe, lecz może też zamykać je odjemne.

Jeżeliśmy np. mieli

$$u = \frac{P}{(x-a)^m},$$

gdzie P nie zamyka mnożnika $x-a$; zmiana x , na $a+h$, dałaby wyrażenie

$$u' = \frac{P + ph + gh^2 + \text{i t. d.}}{h^m},$$

które będzie zamykało potęgi odjemne przyrostku h . Co się przytrafia też funkcji lx , gdy $x=0$; jakoż funkcja, która staje się nieskończenie wielką, gdy $x=a$, nie może wchodzić do ilości skończonych, gdy $x=a+h$, jak tylko przez różnice nieskończenie wielkie.

93. Różne osobliwe przypadki, któreśmy roztrząsali; zależąc tylko od szczególnych wartości ilości samozmiennej, nie mogą osłabić wniosków wyprowadzonych z ogólnego stanu funkcji, i w roztrząsaniu linii krzywych można ich uniknąć, uważając co się dzieje przed punktem i po punkcie, w którym chcemy poznać własność linii krzywej; tak iż szukanie punktów osobliwych sprowadza się do następnego prawidła równie ogólnego jak pewnego, a które wymaga tylko użycia rachunku różniczkowego: *Otrzymamy w ogulności wartość ucinka odpowiadającego punktowi osobliwemu, szukając w jakim przypadku współczynniki różniczkowe, od jakiegokolwiek rzędu to się zacznie, staną się albo zero, albo nieskończenie wielkie, albo ∞ ; oznaczymy zaś gatunek punktu: 1^{od}. roztrząsając ile odnóg linii krzywej przechodzi w tym punkcie i czy rozciągają się one z jednej i z drugiej strony; 2^{re}. oznaczając położenie ich stycznej; 3^{cie}. oznaczając stronę, w którą obracają swoją wklęsłość lub wypukłość.*

*Szukanie prawdziwych wartości wyrażeń
które stają się ∞ .*

94. Widzieliśmy w poprzedzających robotach, iż współczynniki różniczkowe przedstawiają się niekiedy pod kształtem ∞ , a przeto zdają się być nieoznaczone, jednak

mają wartość oznaczoną, którą poznać jest użyteczną rzeczą, i do której przychodzimy sposobami niżej wyłożonemi.

Gdy spółczynnik jest wyrażony bezśrednie przez ilość samodzielną pod kształtem ułamkowym, i gdy jego licznik i mianownik mają spółny mnożnik, wartość niszcząca ten mnożnik, czyni cały ułamek równym $\frac{0}{0}$, jednak widoczną jest rzeczą, że każde wyrażenie kształtu

$$\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n},$$

które na wartość $x=a$, staje się $\frac{0}{0}$, ma prawdziwą wartość, albo zero, albo skończoną, albo nieskończenie wielką stosownie jak jest $m > n$, $m = n$, $m < n$, bo opuszczając spółny mnożnik w liczniku i w mianowniku otrzymujemy

$$\frac{P(x-a)^{m-n}}{Q}, \text{ albo } \frac{P}{Q}, \text{ albo } \frac{P}{Q(x-a)^{n-m}}.$$

Łatwą jest rzeczą przyjść do takowych wypadków, jeżeli mnożnik $x-a$ jest widoczny, jak w przykładzie, pod liczbą 85, lecz chociaż go widocznie nie postrzegamy, można jednak otrzymać wartość prawdziwą ułamku stojącego się $\frac{0}{0}$ sposobem następnym.

Niech będzie ułamek $\frac{X}{X'}$, którego licznik i mianownik razem stają się $= 0$, gdy $x=a$; podstawując $a+h$ za x , funkcyje X , i X' będą się mogły rozwinąć na szeregi rosnące pod postacią

$$Ah^\alpha + Bh^\beta + \text{i t. d.}, \quad A'h^{\alpha'} + B'h^{\beta'} + \text{i t. d.},$$

to jest takie, w których wykładniki α, β , i t. d. są rosnące i dodatne, gdyż te szeregi powinny stać się $= 0$, gdy $h=0$, co właśnie odpowiada założeniu $x=a$; przeto zamiast, ułamku będziemy mieli

$$\frac{Ah^\alpha + Bh^\beta + \text{i t. d.}}{A'h^{\alpha'} + B'h^{\beta'} + \text{i t. d.}}$$

Jeżeli w tém wyrażeniu założymy $h=0$, powinniśmy znowu wpaść na wartość, jakąby miała funkcyja $\frac{X}{X}$, gdybyśmy uczynili w niej $x=a$; i chociaż z pierwszego wejrzenia zdaje się, że będzie wtenczas 0, obaczymy jednak, że ma zawsze wartość oznaczoną.

Mogą być trzy przypadki, albo $a > a'$, albo $a = a'$, albo $a < a'$; w dwóch pierwszych przypadkach można poprzedzające wyrażenie tak napisać:

$$\frac{Ah^{\alpha-a'} + Bh^{\beta-a'} + \text{i t. d.}}{A' + B'h^{\beta'-a'} + \text{i t. d.}}$$

Łatwo teraz daje się widzieć, że jeżeli $a > a'$, zawsze ułamek będzie $=0$, gdy $h=0$; jeżeli zaś $a = a'$, ułamek zamienia się na $\frac{A}{A'}$; przeciwnie w trzecim przypadku gdy $a < a'$, otrzymamy wyrażenie

$$\frac{A + B'h^{\beta'-a'} + \text{i t. d.}}{A'h^{a'-a} + B'h^{\beta'-a} + \text{i t. d.}}$$

które stanie się nieskończenie wielkiem kładąc $h=0$. We wszystkich przypadkach wartość prawdziwa, której szukamy, zależy od pierwszego tylko wyrazu każdego szeregu.

A tak dla znalezienia prawdziwej wartości funkcyj jawiących się pod kształtem nieoznaczonym 0, na wartość $x=a$, należy założyć $x=a+h$ i znaleźć pierwsze wyrazy rozwinięć tak licznika jak mianownika, uszykowanych według potęg przyrostku h rosnących i dodatnich, przywieść takowy ułamek do najprostszego wyrażenia, a potem uczynić $h=0$; otrzymany wypadek będzie prawdziwą wartością której nabywa dany ułamek, gdy w nim kładniemy $x=a$.

95. Jeżeli drugi stan funkcyj X i X' odpowiadający wartości $x=a+h$, może być rozwiniętym za pomocą wzoru Tajlora, otrzymamy

$$\frac{X + \frac{dX}{dx} h + \frac{d^2 X}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3 X}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{it. d.}}{X' + \frac{dX'}{dx} h + \frac{d^2 X'}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3 X'}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{it. d.}};$$

jeżeliby wartość $x=a$ zniszczyła ilości X i X' i współczynniki ich różniczkowe pierwszej ilości aż do rzędu m , drugiej ilości aż do rzędu n ; dany ułamek sprowadziłby się do wyrażenia

$$\frac{\frac{d^m X}{dx^m} \frac{h^m}{1.2.3\dots m} + \text{it. d.}}{\frac{d^n X'}{dx^n} \frac{h^n}{1.2.3\dots n} + \text{it. d.}},$$

które będzie zero gdy $m > n$, nieskończenie wielkie gdy $m < n$, a równe wartości $\frac{d^m X}{d^n X'}$ gdy $m = n$.

Idźmy do zastosowań.

96. 1^od. Ułamek $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ wyrażający sumnę pierwszych n wyrazów postępu ilorazowego $\div 1 : x : x^2 : x^3 : \text{it. d.}$, zamienia się na $\frac{0}{0}$, gdy $x=1$; a jednak ta summa wynikająca z postępu $\div 1 : 1 : 1 : 1 : \text{it. d.}$, do którego w tym razie przychodzimy, ma wartość oznaczoną i równą ilości n , co równie za pomocą poprzedzającego pravidła znajdziemy. Jakoż różniczkując licznik i mianownik funkcji $\frac{x^n - 1}{x - 1}$, wypada $\frac{nx^{n-1} dx}{dx}$, a pisząc 1 za x otrzymamy n .

2^oe. Wartość prawdziwa funkcji $\frac{ax^2 - 2acx + ac^2}{bx^2 - 2bcx + bc^2}$, gdy $x=c$, nie może być otrzymana, aż po dwóch różniczkowaniach; bo za pierwszym różniczkowaniem otrzymamy wyrażenie $\frac{ax - ac}{bx - bc}$, które na wartość $x=c$, staje się $\frac{0}{0}$, lecz za drugim wypada $\frac{a}{b}$.

3cie. Szukając wartości ułamku $\frac{x^5 - ax^2 - a^2x + a^5}{x^2 - a^2}$, gdy $x=a$, znajdziemy różniczkując licznik i mianownik raz jeden, że licznik tylko staje się $=0$; co dowodzi, że prawdziwa danej funkcji wartość jest $=0$. Przeciwnieby się stało z funkcją

$$\frac{ax - x^2}{a^4 - 2a^3x + 2ax^3 - x^4}$$

4te. Funkcja przestępna $\frac{a^x - b^x}{x}$, która, gdy położymy $x=0$, staje się $\frac{0}{0}$, po zróżniczkowaniu licznika i mianownika, daje $a^x \ln a - b^x \ln b$, a założywszy $x=0$, wypada wartość prawdziwa $\ln a - \ln b$.

Tenże sam wypadek otrzymuje się wprost bez różniczkowania, kładąc za a^x , i b^x , szeregi wynikłe z ich rozwinięcia (27); wypada bowiem

$$\frac{a^x - b^x}{x} = \ln a - \ln b + \left\{ (\ln a)^2 - (\ln b)^2 \right\} \frac{x}{1.2} + \text{i t. d.},$$

założywszy zaś $x=0$, będzie $\frac{a^x - b^x}{x} = \ln a - \ln b$. W ciągu działania daje się widzieć, że jest mnożnik x , który ginie przez dzielenie.

5te. Funkcja $\frac{1 - \text{wst } x + \text{dost } x}{\text{wst } x + \text{dost } x - 1}$ staje się $\frac{0}{0}$, gdy łuk $x=1^{\text{c.k.}}$; lecz za pomocą wyższego prawidła znajdziemy, że prawdziwa jej wartość jest wtedy 1.

6te. Czytelnik może dochodzić wartości funkcji następujących

$$\frac{a - x - a \ln a + a \ln x}{a - \sqrt{2ax - x^2}}, \text{ i } \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x};$$

staje się one $\frac{0}{0}$, pierwsza gdy $x=a$, druga gdy $x=1$; wartości ich prawdziwe są: $-1, -2$.

97. Gdy mnożniki stające się zero w liczniku i mia-

nowniku danego ułamku są podniesione do potęg ułamkowych, sposób podany pod liczbą 95 nie może być użytym, bo rzeczone mnożniki nie mogą być za pomocą wzoru Tajlora rozwinięte na szeregi (88).

Gdy mamy np. ułamek

$$\frac{(x^2 - a^2)^{\frac{5}{2}}}{(x - a)^{\frac{5}{2}}},$$

choć prawdziwa jego wartość, kładąc $x = a$, jest $(2a)^{\frac{5}{2}}$, nigdy do niej przez różniczkowanie nie przyjdziemy; otrzymamy bowiem następnie

$$\frac{3x(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{5}{2}(x - a)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{3(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + 3x^2(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}(x - a)^{-\frac{1}{2}}}, \text{ i t. d.,}$$

pierwsze wyrażenie, gdy założymy $x = a$, staje się $\frac{0}{0}$;

w drugim zaś i w dalszych to samo przypuszczenie robi licznik i mianownik nieskończenie wielkimi. Jeżeli zagubimy wykładniki odjemne, przenosząc do mianownika te które się znajdują w liczniku i wzajemnie, wszystkie wyrażenia z tej przemiany otrzymane sprowadzą się do $\frac{0}{0}$. Lecz jeżeli postąpimy sposobem pod liczbą

94 wyłożonym, ułamek $\frac{(x^2 - a^2)^{\frac{5}{2}}}{(x - a)^{\frac{5}{2}}}$, kładąc w nim

$a + h$, na miejscu x , zamienia się na

$$\frac{(2ah + h^2)^{\frac{5}{2}}}{h^{\frac{5}{2}}} = (2a + h)^{\frac{5}{2}},$$

a czyniąc $h = 0$, otrzymamy prawdziwą wartość $(2a)^{\frac{5}{2}}$.

Tenże sam sposób zda się czasem dogodniejszym, niż

różniczkowanie, tam nawet, gdzie ono może być użytém. Tak np. po czwartém dopiero różniczkowaniu licznika i mianownika ułamku

$$\frac{x^5 - 4ax^2 + 7a^2x - 2a^3 - 2a^3\sqrt{2ax - a^3}}{x^2 - 2ax - a^2 + 2a\sqrt{2ax - x^2}},$$

otrzymujemy prawdziwą jego wartość gdy $x=a$.

Pisząc zaś według danego prawidła $a+h$ za x , będzie

$$\frac{2a^5 + 2a^2h - ah^2 + h^3 - 2a^3\sqrt{a^2 + 2ah}}{-2a^2 + h^2 + 2a\sqrt{a^2 - h^2}}$$

obróciwszy na szereg dwa pierwiastki, mamy

$$\sqrt{a^2 + 2ah} = a + h - \frac{h^2}{2a} + \frac{h^3}{2a^2} - \frac{5h^4}{8a^3} + \text{i t. d.}$$

$$\sqrt{a^2 - h^2} = a - \frac{h^2}{2a} - \frac{h^4}{8a^3} \text{ i t. d.}$$

Podstawiwszy te dwa szeregi w poprzedzającym ułamku, otrzymamy prawdziwą wartość szukaną — $5a$.

98. Może funkcyja mieć jeszcze wiele innych postaci nieoznaczonych, różnych na pozór od $\frac{0}{0}$, lecz w istocie toż samo znaczących.

16d. Licznik i mianownik ułamku $\frac{X}{X'}$ mogą stać się razem nieskończenie wielkiemi; lecz tenże sam uła-

mek napisany tak $\left(\frac{1}{X'}\right)$, w założeniu że X , i X' są nieskończenie wielkie, daje $\frac{0}{0}$.

2e. Trafić się może, iż w mnogości z dwóch mnożników złożonej, na wartość $x=a$, jeden mnożnik staje się $=0$, drugi nieskończenie wielkim. Dajmy, że

w mnogości PQ , na wartość $x=a$, mamy $P=0$, $Q=\frac{b}{0}$, zważając że $PQ=\frac{P}{(\frac{1}{Q})}$, i że $\frac{1}{Q}=0$, wypadnie $PQ=\frac{0}{0}$.

Weźmy np. funkcją

$$(1-x)\text{sty } \frac{1}{2}\pi x,$$

gdzie π znaczy półokręgu koła. Gdy założymy $x=1$, pierwszy mnożnik staje się równym zeru, a drugi nieskończenie wielkim, lecz ponieważ

$$\text{sty } \frac{1}{2}\pi x = \frac{1}{\text{dosty } \frac{1}{2}\pi x},$$

przeto dana funkcja wyrazi się tak

$$\frac{1-x}{\text{dosty } \frac{1}{2}\pi x},$$

której wartość prawdziwą, sposobem pod lic. 95 podanym, znajdziemy $\frac{2}{\pi}$.

99. Chcąc mieć wartość funkcji $\frac{1x}{x^n}$, czyli, co na jedno wychodzi, granicę tej funkcji, gdy ilość x jest nieskończenie wielka, nie możemy sposobami poprzedzającymi tego dokazać, bo nie można funkcji $1x$ zamienić na szereg (29), więc trzeba użyć sposobów do natury tej funkcji stosownych.

W rozwinięciu funkcji a^x (27), za x kładąc n , a za a kładąc x , mamy

$$x^n = 1 + \frac{n1x}{1} + \frac{n^2(1x)^2}{1.2} + \frac{n^3(1x)^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

przeto

$$\begin{aligned} \frac{1x}{x^n} &= \frac{1x}{1 + n1x + \frac{n^2(1x)^2}{1.2} + \frac{n^3(1x)^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}}, \\ &= \frac{1}{\frac{1}{1x} + n + \frac{n^21x}{1.2} + \frac{n^3(1x)^2}{1.2.3} + \text{i t. d.}}, \end{aligned}$$

wartość tego wyrażenia zmniejsza się w miarę powiększania się ilości x , przeto granicą funkcji $\frac{1}{x^n}$ gdy bierzemy ilość x nieskończenie wielką, jest zero, jeżeli tylko ilość n nie jest takiej małości, iżby mogła być porównaną z ilością $\frac{1}{1x}$ (98).

100. Wartość prawdziwa współczynników różniczkowych danych przez zrównanie, w którym ilości zmienne są razem połączone, otrzymuje się podobnym sposobem przechodząc do zrównań różniczkowych wyższych rzędów. Jakoż jeźliby w rozwinięciu

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = 0 \quad (48),$$

współczynniki $\frac{du}{dx}$ i $\frac{du}{dy}$ zginęły, to rozwinięcie sprowadziłoby się do wyrażenia

$$\frac{d^2u}{dx^2} h^2 + 2 \frac{d^2u}{dx dy} h k + \frac{d^2u}{dy^2} k^2 + \text{i t. d.} = 0;$$

kładąc w niem $k = \varpi h$, mielibyśmy dla oznaczenia granicy ilości ϖ to jest $\frac{dy}{dx}$, zrównanie

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2 \frac{d^2u}{dx dy} \frac{dy}{dx} + \frac{d^2u}{dy^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

które ze względu na współczynnik $\frac{dy}{dx}$, jest stopnia drugiego, a zatem daje dwie jego wartości zamiast jednej, którąbyśmy otrzymali ze zrównania

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = 0,$$

gdyby się ono nie sprowadziło do zera (48).

Jasną jest rzeczą, iż jeźliby trzy funkcye

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dx dy}, \quad \frac{d^2u}{dy^2},$$

stały się równymi zeru, wpadlibyśmy na zrównanie stopnia trzeciego, i tak dalej podobnie.

Zrównanie te wyższych stopni wynikają z różniczkowań następnych zrównania pierwszego, uważając w niem dx i dy za ilości stałe; lecz nie mamy potrzeby zatrzymywać się nad tą uwagą, gdyż znajdujemy te same zrównania w szeregu różniczek wyprowadzonych z danego zrównania $u=0$; bo gdy dla skrócenia pierwszą różniczkę

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = 0,$$

wyrazimy przez zrównanie

$$Mdx + Ndy = 0,$$

różniczka jego wzięta, uważając y jako funkcją ilości x , będzie miała kształt (50)

$$Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 + Nd^2y = 0,$$

a dla $N=0$, sprowadzi się do

$$Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 = 0;$$

ztaąd wyprowadzimy dwie wartości różniczki dy , a ztém dwie wartości spółczynnika $\frac{dy}{dx}$ zamiast jednej.

Jeżliby także spółczynniki P, Q, R , zginęły, należałoby wtedy udać się do zrównania różniczkowego trzeciego rzędu, które, po zniknięciu niektórych wyrazów, stałoby się zrównaniem stopnia pierwszego. Wkrótce obaczmy zastosowania tej uwagi (108), i dla tego tu ich nie przytaczam.

101. Ponieważ oznaczenie największości i najmniejszości jest jedném z najważniejszych badań w analizie, przeto roztrząsnę je tu sposobem ogólnym i niezależnym od uważania linii krzywych.

Widzieliśmy pod licz. 83, że istotna cecha największości zależy na tém, że jej wartość jest większa od wartości, która bezśrednie ją poprzedza lub po niej następuje; przeciwnie dzieje się względem najmniejszości,

wartość jej jest mniejsza od wartości, która bezśrednie ją poprzedza lub po niej następuje.

Uważmy pod najogólniejszym kształtem rozwinięcie drugiego stanu funkcji $u=f(x)$, gdy ilości x dajemy wartość szczególną a , a potem zamieniamy a na $a+h$. Założmy

$$u' = u + Ph^{\alpha} + Qh^{\beta} + Rh^{\gamma} + \text{i t. d.},$$

wykładniki α, β, γ , mogą być całe lub ułamkowe, lecz uporządkowane podług ich wielkości, zaczynając od najmniejszej. Stan funkcji u poprzedzający, który odpowiada ilości $a-h$, wyprowadzi się z u' , pisząc $-h$, na miejscu h , i oznaczając go przez u , co daje

$$u, = u + P(-h)^{\alpha} + Q(-h)^{\beta} + R(-h)^{\gamma} + \text{i t. d.},$$

złąd wypada, że różnice między stanem funkcji u pierwotnym, a stanem następnym i poprzedzającym będą

$$u, - u = P(-h)^{\alpha} + Q(-h)^{\beta} + R(-h)^{\gamma} + \text{i t. d.},$$

$$u' - u = Ph^{\alpha} + Qh^{\beta} + Rh^{\gamma} + \text{i t. d.};$$

obie te różnice, jakkolwiek przyrostek h byłby mały, powinny być odjemne, gdy u jest największością, dodatne gdy jest najmniejszością, więc pierwsze wyrazy $P(-h)^{\alpha}$, Ph^{α} , w każdym osobno przypadku powinny być z jednym tym samym znakiem. A że spółczynnik P , jest funkcją ilości a stałą niezmiennającą swego znaku, przeto potęga α przyrostku h nie powinna także zmieniać swego znaku, a zatem wykładnik α , powinien być albo liczbą całą parzystą, albo ułamkiem, który będąc sprowadzonym do najprostszego wyrażenia, ma tylko licznik parzysty. Przeto mieć będziemy.

$$u, - u = Ph^{\alpha} + \text{i t. d.},$$

$$u' - u = Ph^{\alpha} + \text{i t. d.};$$

jeżeli P jest samo przez się dodatne, obie różnice będą dodatne, wtedy u będzie najmniejszością; jeżeli zaś P jest odjemne, obie różnice będą odjemne, i u będzie największością.

108. Stosując poprzedzającą uwagę do oznaczania największości i najmniejszości, trzeba rozróżnić dwa przypadki: *1^o* gdy wykładniki α, β, γ , i t. d. są liczbami całymi, *2^o* gdy niektóre z nich są ułamkowe.

W pierwszym przypadku szereg $Ph^{\alpha} + Qh^{\beta} + \text{i t. d.}$ jest szeregiem; który otrzymujemy ze wzoru Tajlora, gdy w nim położymy $x=a$, przeto jest

$$P = \frac{1}{1.2.3... \alpha} \frac{d^{\alpha} u}{dx^{\alpha}};$$

a że wykładnik α powinien być liczbą parzystą w każdym przypadku, przeto założenie $x=a$, powinno niszczyć współczynnik różniczkowy $\frac{dy}{dx}$, który jest rzędu nieparzystego, więc a jest jednym z pierwiastków równania $\frac{dy}{dx} = 0$. Lecz ta wartość $x=a$, nie powinna ni-

szczyć współczynnika $\frac{d^2 y}{dx^2}$, a jeźliby go zniszczyła, powinna niszczyć także $\frac{d^3 y}{dx^3}$, nie niszcząc $\frac{d^4 y}{dx^4}$, i w ogólności pierwszy współczynnik różniczkowy, który nie ginie, powinien być rzędu parzystego, i jeżeli on będzie odjemny, funkcyja u na wartość $x=a$, będzie miała największość, a jeżeli będzie dodatny, funkcyja u będzie miała najmniejszość.

W drugim przypadku, gdy niektóre wykładniki są ułamkowe; wykładnik pierwszego wyrazu może być $\alpha=1$, albo $\alpha>1$, albo $\alpha<1$.

Jeżeli α jest $=1$, współczynnik $P = \frac{dy}{dx}$, jako rzędu nieparzystego znajdować się nie powinien, przeto równanie $P=0$, będzie nam służyło, tak jak wyżej, do znalezienia wartości x , czyniącej funkcyję u największością lub najmniejszością.

Jeżeli $\alpha>1$, wartość $x=a$ nadająca rozwinięciu funkcyi u' kształt szczególny, powinna zniszczyć wszystkie współczynniki tych rzędów, których wykładniki są $< \alpha$ (89);

więc równanie $\frac{dy}{dx}=0$, da nam jeszcze wartość $x=a$; lecz dla dowiedzenia się, czy ta wartość daje funkcji u największość lub najmniejszość, trzeba będzie rachować różnice $u, -u$, i $u'-u$, w przypuszczeniu iż przyrostek h jest bardzo mały, dla dowiedzenia się czy pierwsze wyrazy tych różnic mają jeden tenże sam znak, i jaki on jest.

Nakoniec jeżeli $\alpha < 1$, ponieważ współczynnik $\frac{du}{dx}$ staje się w tym razie nieskończenie wielkim, przeto do oznaczenia ilości $x=a$, służy równanie

$$\frac{1}{\left(\frac{du}{dx}\right)}=0;$$

własność zaś ilości $x=a$, znajduje się tak jak w przypadku gdy $\alpha > 1$. Przeto widzimy, tak jak pod liczbą 83, iż dla objęcia wszystkich przypadków oznaczania wartości x , mogących funkcją u uczynić największością, lub najmniejszością, trzeba roztrząsać wszystkie wartości, które czynią współczynnik $\frac{dy}{dx}$, albo zero, albo nieskończenie wielkim; lecz mniemam iż najprostszym sposobem takowego roztrząsania, jest szukanie czy współczynnik $\frac{dy}{dx}$, na wartość większą i mniejszą od wartości znalezionej na x , zmienia swój znak, lub nie. (83).

Zastosowanie poprzedzających prawideł do funkcji $u=b+c(x-a)^m$, która nam służyła za przykład pod liczbą 83 jest bardzo proste, dla tego nie zatrzymując się nad niem pójdziemy do przykładów następnych.

103. Podzielić ilość a na dwie części takie, ażeby mnogość z pierwszej części podniesionej do potęgi m , przez drugą część podniesioną do potęgi n , była największa ze wszystkich innych mnogości podobnych wynikających z odmiennego tejże ilości a podziału.

Niech będzie x jedna takowa część ilości a , druga będzie $a-x$, niech y wyraża mnogość, której największości szukamy, będziemy mieli

$$u = x^m(a-x)^n, \text{ a ztąd}$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= mx^{m-1}(a-x)^n - nx^m(a-x)^{n-1} \\ &= \{ma - ma - nx\} x^{m-1}(a-x)^{n-1}; \end{aligned}$$

uczyniwszy każdy mnożnik $= 0$, znajdziemy

$$x = \frac{ma}{m+n}, \quad x=0, \quad x=a.$$

Pierwsza wartość ilości x odpowiada największości, gdyż podstawiona w ogólnym wyrażeniu współczynnika $\frac{d^2y}{dx^2}$, daje ilość ujemną

$$-\frac{m^{n-1}n^{n-1}a^{m+n-2}}{(m+n)^{m+n-5}}:$$

drugie dwie dają najmniejszość gdy m i n są parzyste, o czém można się przekonać podstawując $x=0$, $x=a$ w współczynnikach różniczkowych, albo jeszcze krócej, kładąc w samym zrównaniu $x = \pm h$, i $x = a \pm h$. W obu dwu razach otrzymuje się zawsze wypadek dodatny, bez względu na znak ilości h ; co dowodzi, że dana funkcya w zmniejszaniu się swoim przyszedłszy do zera, nie przechodzi na wartość ujemną, lecz znowu wzrastać poczyną.

104. Zastanowmy się jeszcze nad funkcją y w zrównaniu

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0,$$

którego różniczka pierwsza jest

$$(y - mx)dy - (my - x)dx = 0 \quad (49),$$

będzie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{ym - x},$$

a ztąd $my - x = 0$.

Chcąc wyznaleść wartość x , należy to ostatnie zrównanie łączyć ze zrównaniem daném; tak otrzymamy

$$y = \frac{x}{m}, \quad \frac{x^2}{m^2} - x^2 - a^2 = 0,$$

ztąd wypada

$$x = \frac{ma}{\sqrt{1-m^2}}, \quad y = \frac{a}{\sqrt{1-m^2}}.$$

Należy teraz uważać, jaki będzie znak spółczynnika $\frac{d^2y}{dx^2}$. Druga różniczka danego zrównania daje zrównanie

$$(y - mx) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} - 2m \frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

które przez założenie $\frac{dy}{dx} = 0$, zamienia się na

$$(y - mx) \frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0,$$

a ztąd kładąc $\frac{x}{m}$ za y , będzie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-m}{x(1-m^2)};$$

nakoniec podstawując $\frac{ma}{\sqrt{1-m^2}}$ za x , otrzymamy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a\sqrt{1-m^2}};$$

ten wypadek jako odjemny pokazuje, że wartość y wyżej znaleziona jest największością.

Przykład rozbioru linii krzywej.

105. Linije dzielą się na rozmaite rzędy według stopnia ich zrównania. Linija prosta stanowi rząd pierwszy, bo jej zrównanie jest stopnia pierwszego z dwie-

ma ilościami nieoznaczonemi. Linije drugiego lub trzeciego rzędu są te, których zrównania są drugiego lub trzeciego stopnia, i t. d. Newton zważając, że w pierwszym rzędzie mieści się sama tylko linija prosta, i że linije krzywe od drugiego dopiero zaczynają się rzędu, podzielił te ostatnie na rodzaje, i nazwał krzywami pierwszego rodzaju, linije drugiego rzędu; krzywami drugiego rodzaju, linije trzeciego rzędu, i t. d.

Linije jednegoż rzędu dzielą się jeszcze na gatunki, przez wzgląd na głównejsze okoliczności w ich biegu zachodzące.

Gdyby można było rozwiązać zrównania wszystkich stopni, nieby łatwiejszego w ten czas nie było nad wyznaczenie biegu linii krzywej wyrażonej przez jakiekolwiek zrównanie algebraiczne. Jakoż, zrównanie takowe rozwiązane przez wzgląd na którąkolwiek nieoznaczoną w niem zawartą, np. przez wzgląd na y , da rozmaite pierwiastki X' , X'' , X''' , i t. d., które koniecznie będą funkcyami zmiennej x , i ilości stałych. Pytanie więc całe do tego zostanie przywiedzione, aby wysledzić bieg każdej w szczegulności z linii danych przez zrównanie

$$y = X', \quad y = X'', \quad y = X''', \quad \text{i t. d.},$$

a to przez nadawanie zmiennej x , wszystkich wartości tak dodatnich jak odjemnych, jakie tylko przypuścić mogą funkcy X' , X'' , X''' i t. d., nie przestając być rzetelnemi. Te linije będą tyluż odnogami linii krzywej odpowiadającej danemu zrównaniu.

Rozciągłość każdej odnogi zostanie oznaczoną przez rozciągłość rozmaitych odpowiedzi zrównania wyrażającego tę odnogę w szczegulności. Jeżeli między ilościami X' , X'' , X''' znajdują się takie, co się stają nieskończenie wielkimi, albo w których można przypuścić $x = \infty$, powstaną ztąd odnogi mające bieg nieograniczony; gdyż te będą mogły oddalić się nieograniczenie od jednej którejkolwiek osi, lub od obu razem.

Odnoga jakiej linii krzywej algebraicznej, nie z innej zatrzymuje się przyczyny, tylko że wyrażenie jej przystawy staje się urojone; ale bieg danej linii krzywej nie jest dla tego przerwany; w takowym razie to się tylko przytrafia, że dwie odnogi łączą się razem i potem znowu dalej postępują. O czém się przekonamy uważając, że wartości urojone przystawy y są koniecznie parzyste, i że jednej pary wartości byłyby rzetelne pierwej, niżli się stały urojonemi. W samej istocie, ponieważ dane równanie może się zawsze rozłożyć na mnożniki rzetelne pierwszego i drugiego stopnia, zatem jeżeli jeden z mnożników drugiego stopnia wyrazimy przez $y^2 - 2Py + Q = 0$, uyrzemy iż jego pierwiastki $P \pm \sqrt{P^2 - Q}$ dla tego tylko stają się urojonemi, że ilość Q , która pierwej była mniejszą od ilości P^2 , staje się od niej większą, a zatem że jest punkt, w którym P i Q , jako funkcyje zmiennej x , stają się takimi iż wypada $P^2 = Q$, co przywodzi ilość pierwiastkową do zera i daje na y dwie wartości równe.

Jeżeli kilka odnóg w jednym się punkcie przecina, tedy wartości na y w takiejże liczbie staną się między sobą równymi.

106. Weźmy np. równanie

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0,$$

rozwiązalne sposobem równań stopnia drugiego, tak przez wzgląd na y , jak przez wzgląd na x ; w pierwszym razie otrzymamy

$$y = \pm \sqrt{48a^2 \pm \sqrt{2304a^4 - 100a^2x^2 + x^4}};$$

a jeżeli dla skrócenia założymy

$$2304a^4 - 100a^2x^2 + x^4 = N,$$

otrzymamy cztery wartości

$$1) y = \sqrt{48a^2 + \sqrt{N}}, \quad 2) y = \sqrt{48a^2 - \sqrt{N}},$$

$$3) y = -\sqrt{48a^2 + \sqrt{N}}, \quad 4) y = -\sqrt{48a^2 - \sqrt{N}},$$

które trzeba podług uwag poprzedzających roztrząsać, dla oznaczenia biegu linii wyrażających te wartości.

Widzimy naprzód, iż wartości (3) i (4) różniąc się od wartości (1) i (2) tylko znakiem, powinny dać odnogi podobne do odnóg wynikających z wartości (1) i (2), lecz tylko pod osią x położone. Nadto funkcyja N , jako zamykająca potęgi tylko parzyste ilości x , zostaje zawsze z jednym tym samym znakiem, gdy zamienimy $+x$, na $-x$; przeto część linii krzywej leżąca ze strony ucinków odjemnych, powinna wypaść podobna do części leżącej ze strony ucinków dodatnych, tak iż cała linija krzywa jest podzieloną na cztery części równe i podobne; co też samo zrównanie nam pokazuje, bo nie zmienia się, jakikolwiek znak przed ilością x i y położymy.

Roztrząsajmy zatem wartości (1) i (2). Wtedy tylko one mogą być rzetelne, gdy wartość N jest dodatna, lecz ta funkcyja, ponieważ jest wymierną i całą, może przechodząc tylko przez zero znak swój odmienić, więc pierwiastki zrównania

$$x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4 = 0,$$

będą granicami wartości, które ilości x nadać można. Znajdziemy iż pierwsza strona tego zrównania rozkłada się na mnożniki

$$x-6a, \quad x+6a, \quad x-8a, \quad x+8a:$$

będzie ona odjemną, gdy $x > 6a$ i $< 8a$, bo wtedy jeden tylko z tych mnożników znak swój odmieni; przeto krzywa nie rozciąga się nad częścią osi ucinków zawartą między $x=6a$, i $x=8a$; lecz od $x=8a$, N stanie się dodatne nazawsze.

Uważamy iż ucinkóm

$$x=0, \quad x=6a, \quad x=8a,$$

odpowiadają w zrównaniu (1) wartości

$$y = \sqrt{96a^2}, \quad y = \sqrt{48a^2}, \quad y = \sqrt{48a^2}.$$

Więc to zrównanie daje nam: 1^o*d*, część *DF* (fig. 24) rozciągającą się od punktu *D* wziętego na osi *AC* aż do punktu *F*, którego ucinkiem jest $AE=6a$; 2^o*e*, część *HX*, która od punktu *H* odpowiadającego ucinkowi $AG=8a$, rozciąga się aż do nieskończoności w kącie *BAC*, w którym spółprzystawy x i y są dodatne.

Zrównanie (2) daje równie jak zrównanie (1) między ucinkami $x=6a$, i $x=8a$, wartości urojone, lecz ucinkóm

$$x=0, \quad x=6a, \quad x=8a,$$

odpowiadają przystawy

$$y=0, \quad y=\sqrt{48a^2}, \quad y=\sqrt{48a^2},$$

z czego postrzegamy: 1^o*d*, iż zrównanie (2) daje krzywej część *AF* łączącą się z częścią *DF* w punkcie *F*, w którym dwa pierwiastki (1) i (2) stają się równemi; 2^o*e*. Z punktu *H*, leżącego na części *HX* wynikającej ze zrównania (1), wychodzi część *HK* dostarczona przez zrównanie (2), w której przystawa y zmniejsza się, i gdy $\sqrt{N}=48a^2$, przystawa y staje się równą zeru, co wskazuje punkt *J* leżący na osi x , po przejściu przez ten punkt, ponieważ $\sqrt{N}$ staje się $>48a^2$, wartość (2) będzie zawsze urojona i część *HJ* kończy się w złaczeniu z częścią odpowiadającą pod osią ucinków x położoną. Uciniek *AJ* widocznie wyznacza się przez zrównanie

$$(48a^2)^2 = 2304a^2 - 100a^2x^2 + x^4, \text{ czyli } x^4 - 100a^2x^2 = 0$$

z którego wyprowadzamy

$$x=0, \quad x=\pm 10a.$$

Uciniek $x=0$ jest ucinkiem punktu *A* już wskazanego, uciniek zaś $x=10a$ daje punkt *J*, w którym kończy się część *HJ*.

Stosowną jest rzeczą uważać, że można punkta *A*, *D*, *J*, oznaczyć bezśrednie z danego zrównania szukając punktów, w których linija krzywa spotyka osi spółprzystaw, i że roztrząsanie poprzedzające po-

dobne do roztrząsania zrównania ogólnego drugiego stopnia (*Trig. 111*) jest dostateczne do pokazania rozciągłości różnych części linii krzywej, lecz nie oznacza dokładnie jej kształtu. Przeciwnie, dowodzi tego zastosowanie rachunku różniczkowego, który nawet znacznie skraca szukanie granic odnóg krzywej i pokazuje jakim sposobem to szukanie mogłoby się uskutecznić wtedy nawet, gdybyśmy ze zrównania danej linii krzywej, jeźliby ono było stopnia bardzo wysokiego, nie mogli otrzymać ogólnego wyrażenia jednej ilości zmiennej przez drugą.

107) Zaczniemy to nowe roztrząsanie od szukania odnóg nieskończenie wielkich danej krzywej. Uważanie wartości przystaw y (106), pokazało nam, iż linija krzywa, ma jedną odnogę w każdym kącie spółprzystaw, w której ilości zmienne x i y stają się razem nieskończenie wielkimi; lecz nie udając się do tych wartości, jeźli uczynimy $y = tx$, zrównanie krzywej dzieli się przez x^2 i zamienia się na

$$t^4 x^2 - 96a^2 t^2 + 100a^2 - x^2 = 0,$$

złąd otrzymujemy wypadek

$$x^2 = \frac{100a^2 - 96a^2 t^2}{1 - t^4},$$

który daje $x = \pm \infty$, gdy $t = 1$, i wtedy $y = x$.

Mamy potem (73) wyrażenia

$$x - y \frac{dx}{dy} = \frac{x^4 - 50a^2 x^2 - y^4 + 48a^2 y^2}{x^5 - 50a^2 x},$$

$$y - x \frac{dy}{dx} = \frac{y^4 - 48a^2 y^2 - x^4 + 50a^2 x^2}{y^5 - 48a^2 y},$$

które, gdy w nich za x^4 , lub za y^4 , położymy wartość, sprowadzają się do

$$\frac{50a^2 x^2 - 48a^2 y^2}{x^3 - 50a^2 x}, \quad \frac{48a^2 y^2 - 50a^2 x^2}{y^3 - 48a^2 y},$$

i w miarę powiększania się ilości x , i y , zmniejszają się,

aż do granicy ubywania, to jest do zera, która wypada kładąc tak x , jak $y = \pm \infty$. Ztąd postrzegamy iż linija krzywa dana (75) ma dwie niemalstyczne przez początek spółprzystaw przechodzące. Dla zupełnego ich oznaczenia trzeba wziąć w tém samém przypuszczeniu, granicę wyrażenia $\frac{dy}{dx}$, i robiąc wszystkie połączenia znaków $+$ i $-$, znajdziemy $\frac{dy}{dx} = \pm 1$, co pokazuje że niemalstyczne czynią z osią ucinków kąty $= \pm 0,5^k.p.$

108. Idźmy teraz do oznaczenia punktów osobliwych linii krzywej, którą roztrząsamy. Pierwsze jej zrównanie różniczkowe

$$(y^5 - 48a^2y)dy + (50a^2x - x^5)dx = 0,$$

daje
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^5 - 50a^2y}{y^5 - 48a^2y}.$$

Równając z zerem licznik tego spółczynnika różniczkowego, znajdujemy $x=0$, $x^2 - 50a^2 = 0$. Pierwsza wartość ilości x , podstawiona w dane zrównanie, przywodzi do $y=0$, $y = \pm \sqrt{96a^2}$; a że kładąc $x=0$, $y=0$, wypada $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, przeto dla oznaczenia wartości tego spółczynnika, trzeba według sposobu pod licz. 100 wyłożonego udać się do zrównania różniczkowego drugiego rzędu, które przez przypuszczenie $x=0$, $y=0$, sprowadza się do zrównania

$$48a^2dy^2 + 50a^2dx^2 = 0,$$

z którego mamy

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{50}{48}}.$$

Wynika z tych wartości, iż w punkcie A stykają się z liniją krzywą dwie linije proste, czyniące z osią ucinków kąty, których styczne trygonometryczne są

$$\sqrt{\frac{50}{48}} = \frac{5}{4} \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad -\sqrt{\frac{50}{48}} = -\frac{5}{4} \sqrt{\frac{2}{3}},$$

a przeto punkt A jest punktem mnogim (85).

Dla zupełnego poznania kształtu linii krzywej w tym punkcie, trzeba się dowiedzieć w którą stronę jej odnogi mają obróconą swoją wklęsłość, a zatem trzeba oznaczyć znak współczynnika różniczkowego $\frac{d^2y}{dx^2}$ z obu

stron punktu A , co pociągnęłoby za sobą wiele roboty, bo obie ilości zmienne wchodzą razem w wyrażenie współczynnika. Prędzej do tego przychodzimy szukając wartości tego współczynnika na ten sam punkt A , danego przez zrównanie różniczkowe trzecie, które przez założenie $x=0$, $y=0$, sprowadza się do $144a^2 dy d^3y = 0$, ztąd wnosimy koniecznie $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, bo $\frac{dy}{dx}$ nie jest $= 0$.

Ponieważ drugi współczynnik różniczkowy jest $= 0$, idźmy do trzeciego współczynnika różniczkowego, który wyprowadzimy z czwartej różniczki. Ta czwarta różniczka kładąc w niej $x=0$, $y=0$, $d^2y=0$, sprowadza się do

$$-4.48a^2 dy d^3y + 6dy^4 - 6dx^4 = 0$$

ztąd mamy

$$-32a^2 \frac{dy}{dx} \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy^4}{dx^4} - 1 = 0,$$

kładąc za $\frac{dy}{dx}$, jego wartość $\pm \sqrt{\frac{50}{48}}$, wypada

przeto wyrażenie odległości między linią krzywą a jej styczną, na uciniek $x+h$ (76), staje się

$$\delta'' = \pm \frac{\left(\frac{50}{48}\right)^2 - 1}{32a \sqrt{\frac{50}{48}}} \frac{h^5}{1.2.3} + \text{i t. d.}$$

co pokazuje, że odnoga linii krzywej odpowiadająca dodatniej wartości współczynnika $\frac{dy}{dx}$, leży w stronie ucin-

ków dodatnych nad styczną AL , w stronie zaś ucinków odjemnych pod tą styczną, a przeciwnie się rzecz ma względem odnogi, z którą styka się linija prosta AL' , a przeto że każda odnoga ma w punkcie A , nagięcie.

109. Biorę teraz wartości $y = \pm \sqrt{96a^2} = 4a\sqrt{6}$. czynią one współczynnik $\frac{dy}{dx}$ równym zeru, bo niszczą tylko jego licznik a nie gubią mianownika, przeto w punktach D i D' , przez te wartości wskazanych, styczna jest równoległa do osi ucinków.

Przystawa punktu D jest największością dodatnią; przekonamy się o tém, albo szukając wartości współczynnika $\frac{d^2y}{dx^2}$ (102), albo zapewniając się iż przystawa będzie średnie tak poprzedzająca jak następna po przystawie odpowiadającej punktowi D , jest od niej mniejsza. Oba te sposoby są tu łatwe. Co do drugiego: mamy wartości y (106), z których tu uważamy tylko pierwszą, i postrzegliśmy że na uciniek $x=0$, wypada $y = \sqrt{96a^2}$, na uciniek zaś inny, wypada wartość y mniejsza od $\sqrt{96a^2}$. Co do pierwszego: zrównanie różniczkowe drugie, kładąc w niem $x=0, y = \pm 4a\sqrt{6}$, $dy=0$ daje $\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{25}{96a\sqrt{6}}$;

znak — należy do punktu D , i pokazuje że w tym punkcie przystawa jest największa; znak zaś + należy do punktu D' , w którym przystawę należy uważać jako najmniejszą, bo każde powiększanie się w kierunku odjemnym jest umniejszaniem się względem ilości dodatnich.

Pierwiastki równania $x^2 - 20a^2 = 0$, to jest $x = \pm 5a\sqrt{2}$, podstawione w dane równanie czynią wartości y urojonymi, zatem nie należą do linii krzywej.

110. Szukajmy teraz wartości x i y , które mogą uczynić wartość $\frac{dy}{dx}$ nieskończenie wielką. W tym celu zrównajmy z zerem mianownik współczynnika $\frac{dy}{dx}$;

co daje równanie $y^3 - 48a^2y = 0$, z którego wypada $y = 0$, $y = \pm\sqrt{48a^2}$. Wartość $y = 0$, położona w równaniu linii krzywej daje $100a^2x^2 - x^4 = 0$, z kąd wypada $x = 0$, $x = \pm 10a$. Pierwiastek $x = 0$ wskazuje punkt mnogi A , w początku spółprzystaw leżący; dwa drugie pierwiastki odpowiadają punktom J i J' , w których linia krzywa spotyka znowu oś ucinów, lecz tak, iż jej styczna jest w tym punkcie prostopadłą do osi ucinów, bo wartości $x = \pm 10a$ niszczą tylko mianownik, a nie niszczą licznika w spółczynniku $\frac{dy}{dx}$.

Punkta J i J' są granicami wartości $y = \sqrt{48a^2 - \sqrt{N}}$, za które te wartości dalej się nie rozciągają, lecz stają się urojonemi. Można by je uważać jako największości względem zmiennej x , brane na osi AC ; sprawdzilibyśmy je roztrząsając odpowiadające wartości spółczynnika $\frac{d^2x}{dy^2}$, otrzymane uważając w różniczkowaniu ilość x , jako funkcją ilości y .

Dwie ostatnie wartości $y = \pm\sqrt{48a^2} = \pm 4a\sqrt{3}$, prowadzą do $x = \pm 6a$, $x = \pm 8a$; jeden z tych wypadków daje nam poznać punkt F i jemu odpowiednie, drugi punkt H , i jemu także odpowiednie. W tych wszystkich punktach styczna jest prostopadłą do osi ucinów; aże linia krzywa nie ma przystaw rzetelnych od $x = 6a$, aż do $x = 8a$, to jest w przestrzeni EG , przeto z tej okoliczności dostatecznie postrzegamy, w którą stronę względem stycznych linia krzywa w punktach F , i H , powinna być obróconą.

111. Oznaczywszy własności wszystkich punktów osobliwych, wskazanych przez spółczynnik różniczkowy rzędu pierwszego, trzeba jeszcze szukać, czyli spółczynniki wyższych rzędów nie pokażą punktów innych. Na ten koniec uważamy naprzód spółczynnik różniczkowy drugiego rzędu; ogólne jego wyrażenie jest

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{3x^2 - 50a^2 - (3y^2 - 48a^2) \frac{dy}{dx}}{y^5 - 48a^2y},$$

gdy założymy $x=0$, $y=0$, staje się on $=\frac{0}{0}$; lecz nie mamy potrzeby zastanawiać się nad temi wartościami, bo punkt A , do którego należą, jest dostatecznie roztrząsany (108).

Uczynienie mianownika $y^5 - 48a^2$ równym zeru, nie powinno także nas zatrzymywać, bo wiemy, iż odpowiada punktóm F i H (110); lecz licznik zrównany z zerem daje zrównanie mogące wskazać inne wartości od poprzedzających. To zrównanie jest

$$3x^2 - 50a^2 - (3y^2 - 48a^2) \frac{dy}{dx} = 0;$$

kładąc za $\frac{dy}{dx}$ ogólną jego wartość $\frac{x^5 - 50a^2x}{y^5 - 48a^2y}$ i gubiąc mianownik otrzymujemy wypadek

$$(3x^2 - 50a^2)(y^5 - 48a^2y)^2 - (3y^2 - 48a^2)(x^5 - 50a^2x)^2 = 0,$$

czyli

$$y^2(y^2 - 48a^2)^2(3x^2 - 50a^2) - x^2(x^2 - 50a^2)^2(3y^2 - 48a^2) = 0,$$

a że dane zrównanie może wyrazić się pod kształtem

$$(y^2 - 48a^2)^2 - (x^2 - 50a^2)^2 + 196a^4 = 0,$$

przeto biorąc z niego wartość $(y^2 - 48a^2)^2$, i kładąc w zrównanie poprzedzające, otrzymujemy

$$(x^2 - 50a^2)^2(25y^2 - 24x^2) + 98a^2y^2(3x^2 - 50a^2) = 0.$$

Z tego zrównania wyprowadzoną wartość y^2 , podstawivszy w dane zrównanie, otrzymamy zrównanie, zamykające tylko ilość x , którego pierwiastki należałoby roztrząsać tak, jak robiliśmy pod liczbami poprzedzającemi; lecz że kształt odnóg linii krzywej dostatecznie wskazuje bytność punktów nagięcia K , znajdujących się między punktami H i J , możnaby przestać na rozwiązaniu zrównania ostatecznego, o któ-

rém teraz mówiliśmy, dla otrzymania wartości ucinka punktów K ; co z przyczyny wysokiego stopnia zrównania byłoby jeszcze bardzo trudnem; przeto dla oznaczenia punktów osobliwych, wypadnie często udawać się do sposobów szczególnych. Jednym z tych sposobów jest rozwinięcie przystawy na szereg, lecz do traktatu początkowego wchodzić nie może.

O liniach krzywych przestępnych.

112. Uważaliśmy dotąd linie krzywe algebraiczne. Poznajmy teraz niektóre znaczniejsze linie przestępne; nazywamy linijami przestępnymi te linie, których zrównania są także przestępne. Wyłożymy naprzód liniją krzywą *Logarytmikę*, której przystawy są logarytmami ucinków. Możemy ją wykreślić sposobem łatwym przez punkta, biorąc na osi ucinków równe części wyrażające liczby naturalne, a przystawy robiąc równe logarytmom, które w tablicach odpowiadają liczbom wyrażonym przez ucinki.

Podług tego sposobu, zrównanie tej linii jest $y = lx$; biorąc $x = 1$, wypada $y = 0$, co pokazuje że logarytmika przecina oś ucinków AB , w punkcie E (fig. 25), w którym ucinek AE jest równy jedności. Odnoga EX odpowiadająca ucinkom dodatnym większym od jedności, jest nieskończenie wielka, bo logarytmy tych ucinków ciągle rosną. W części AE , w której ucinki są ułamkami, przystawy są odjemne i za zmniejszaniem się ułamków powiększają się aż do nieskończoności, tak iż odnoga Ex ma za niemalstyczną, część osi przystaw odjemną Ac ; nie rozciąga się zaś logarytmika w stronę ucinków odjemnych, bo ich logarytmy są urojone.

Obróciwszy figurę pod kątem prostym, ucinki stają się przystawami, i mamy wtedy $x = ly$, a jeżeli przez a wyrazimy grunt logarytmów, wypada zrównanie $y = a^x$, w którym logarytmy są ucinkami.

W tym razie szukając średnich proporcjonalnych,

znaleść można tyle punktów logarytmiki, ile zechcemy, bo ucinkóm

$$x = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{5}{2} \text{ i t. d.}, \quad x = \frac{1}{4}, \text{ i t. d.}$$

odpowiadają przystawy

$$y = \sqrt{a.1}, \quad y = a\sqrt{a.1}, \text{ i t. d.}, \quad y = \sqrt{1.\sqrt{a.1}}, \text{ i t. d.}$$

Do tych przystaw, dołączając przystawy które wypadają, gdy x jest liczbą całą, będziemy mogli wykreślić logarytmikę przez punkta, bez pomocy tablic logarytmowych.

Jasną jest rzeczą, iż logarytmiki różnią się między sobą stosownie do gruntu czyli zamiennika układu, który przedstawują.

113. Różniczkując zrównanie $y = lx$, otrzymujemy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{x} \quad (28);$$

z czego daje się widzieć, że gdy $x = 0$, styczna logarytmiki jest prostopadła do osi ucinków; będzie zaś do niej równoległa gdy $x = \infty$ (83). Wyrażenie ogólne

podstycznej (66) daje $PT = \frac{xy}{M}$, ztąd rugując y otrzyma-

my $\frac{x \cdot l x}{M}$ wyrażenie przestępne; wzięwszy jednak pod-

styczną OD na osi AC , otrzymamy $OD = \frac{x dy}{dx} = M$, wy-

padek bardzo znakomity, gdyż pokazuje, że podstyczna OD każdego punktu logarytmiki jest stała i równa zamiennikowi M . Podobnież znajdziemy, że styczna, normalna, i podnormalna, odniesione do osi AB , są przestępne, dla tego że przystawa do ich wyrażenia wchodząca jest przestępna; lecz odniesione do osi AC są algebraiczne.

Wynajdźmy teraz promień krzywosci. Mamy

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{x^2 + M^2}{x^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{x^2}$$

$$\text{ztąd (81)} \quad \gamma = \frac{(x^2 + M^2)^{\frac{3}{2}}}{Mx},$$

$$\gamma - \beta = \frac{x^2 + M^2}{M}, \quad x - \alpha = -\frac{x^2 + M^2}{x}.$$

Nie będę się zatrudniał szukaniem linii odwinionej, która jest także przestępną; tylko namienię, że zrównanie jej różniczkowe może być bezśrednie otrzymane ze zrównania $dy = M \frac{dx}{x}$, przez wyrugowanie z niego x, dx , dy , za pomocą wartości $\gamma - \beta$, $x - \alpha$, i ich różniczek.

114. Linija krzywa nakręslona przez punkt jakikolwiek wzięty na okręgu koła toczącego się po linii prostej danej w swoim położeniu, nazywana *Cykloidą*, jest także przestępną. Związek między jej przystawami a ucinkami zależy od łuków koła ją tworzącego, obaczmy jak się on wynajduje.

Początek biegu koła może być naznaczony od upodobania; dajmy więc, że jest w punkcie A (fig. 26), gdzie punkt kreślący M znajdował się na linii AB , przebieganej przez koło tworzące QMG . Ponieważ to koło w obrócie swoim wszystkimi z kolei punktami okręgu swojego, dotyka się linii AB , jasna jest rzecz, że gdy weźmie położenie QMG , linija AQ będzie równa łukowi MQ zawartemu między punktami M , który w początku biegu dotykał się linii AB w punkcie A , i punktem Q , którym w niniejszém swoim położeniu dotyka się linii prostej AB .

Jeżeli na AB z punktu Q wystawimy prostopadłą QO , która przejdzie przez środek koła tworzącego i jeżeli poprowadzimy liniją MN , równoległą do linii AB , będzie MN wstawą łuku MQ , a NQ wstawą odwróconą tegoż łuku (*Trig.* 5).

Niech będzie $QO = a$, $AP = x$, $PM = QN = y$;
wypada

$$MN = \sqrt{2ay - y^2}, \quad x = AQ - PQ = \text{łukowi } MQ = MN,$$

czyli

$$x = \text{łukowi}(\text{którego wstawa odwró. jest } = y) - \sqrt{2ay - y^2},$$

jest to pierwotne zrównanie Cykloidy (*).

Łuk MQ może być także wyrażony przez swoją dostawę ON , czyli $a - y$; zagubimy ten łuk przez różniczkowanie używając wzoru z liczby 36 w którym zamieniwszy R na a , u na $a - y$, x na MQ , otrzymamy

$$d. \text{ łuku } MQ = \frac{ady}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

a przeto

$$dx = \frac{ady}{\sqrt{2ay - y^2}} - \frac{ady + ydy}{\sqrt{2ay - y^2}} = - \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}}.$$

takie to jest różniczkowe zrównanie cykloidy.

Nie teraz łatwiejszego jak otrzymać wyrażenia podstycznej, stycznej, podnormalnej i normalnej w cykloidzie. Za pomocą wzorów ogólnych (66) znajdziemy

$$PT = \frac{y^2}{\sqrt{2ay - y^2}}, \quad MT = \frac{y\sqrt{2ay}}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

$$PR = \sqrt{2ay - y^2}, \quad MR = \sqrt{2ay}.$$

(*) Jeżelibyśmy dla wykreślenia linii krzywej, chcieli rachować długość łuku MQ , z jego wstawy za pomocą tablic trygonometrycznych, należałoby wstawę MN odniesioną do promienia a , odnieść do promienia 1, z czego mielibyśmy $\frac{MN}{a}$

czyli $\frac{1}{a}\sqrt{2ay - y^2}$. Oznaczając przez t łuk odpowiadający ostatniej wstawie, łuk MQ będzie miał z cwiartką koła, do którego należy, ten sam stosunek, jaki ma łuk t z cwiartką koła, podług którego tablice są ułożone; ztąd wypada

$$\text{łuk } MQ = at, \quad x = at - \sqrt{2ay - y^2} = a(t - \text{wst } t)$$

$$at = \text{łukowi}(\text{którego wst} = \frac{1}{a}\sqrt{2ay - y^2})$$

przeto

$$x = a \left\{ \text{łuk}(\text{którego wst} = \frac{1}{a}\sqrt{2ay - y^2}) - \frac{1}{a}\sqrt{2ay - y^2} \right\}$$

i różniczkując podług liczby 36, wpadamy na wypadek, otrzymany.

Można wykreślić te wartości sposobem bardzo łatwym; wzięwszy bowiem QN , które jest równe MP czyli y , za uciniek w kole tworzącem QMG , wartość $PR = \sqrt{2ay - y^2}$ wyrażać będzie przystawę tegoż koła, a zatem cięciwa łuku MQ będzie razem normalną w cykloidzie; o czém można się przekonać z wyrażenia $MR = \sqrt{2ay}$; idzie zatem, że styczna MT jest przedłużeniem cięciwy MG . Jeżeli wyobrazimy sobie, że koło QMG opierając się ciągle jednym punktem Q , posuwa się po linii AB , i bierze nowe położenie qmg , linie mq i mg , mimo tej odmiany, zostaną zawsze równoległe do linii MQ i MG ; więc żeby poprowadzić styczną i normalną do punktu danego M , trzeba wyznaczyć temu punktowi odpowiedni punkt na kole qmg , co się wykona prowadząc linią Mm równoległą do AB , potem MT równoległą do mg , i MQ równoległą do mq .

115. Szukajmy teraz promienia krzywosci.

Różniczkując zrównanie

$$dx = \frac{y dy}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

i biorąc dx za stałe, otrzymamy

$$0 = (y d^2 y + dy^2) \sqrt{2ay - y^2} - \frac{y dy (ady - y dy)}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

upraszczając i dzieląc przez y , będzie

$$0 = (2ay - y^2) d^2 y + ady^2,$$

a ztąd

$$d^2 y = - \frac{ady^2}{2ay - y^2} = - \frac{adx^2}{y^2};$$

położywszy wartości $d^2 y$ i dy w wyrażeniu promienia krzywosci (81) znajdziemy

$$r = 2^{\frac{5}{2}} (ay)^{\frac{5}{2}} = 2 \sqrt{2ay}.$$

Z tego widzimy, że promień krzywosci MM' jest dwa razy większy od normalnej MQ ; idzie zatem, że

nie może być większy od podwójnej średnicy koła tworzącego, która jest razem przystawą i normalną cykloidy w punkcie J , gdzie linija AJ równa się połowie okręgu koła tworzącego.

Wyrażenia $x=\alpha$, $y=\beta$, dają

$$y-\beta=2y, \quad x-\alpha=-2\sqrt{2ay-y^2},$$

ząd wypada

$$y=-\beta, \quad x=\alpha-2\sqrt{-2a\beta-\beta^2}.$$

Włożywszy te wartości w zrównanie pierwotne cykloidy, otrzymamy zrównanie

α =łukowi (którego wstawa odwr. $=-\beta$) $+\sqrt{-2a\beta-\beta^2}$, które ma wielkie podobieństwo ze zrównaniem cykloidy. Położywszy bowiem $\beta=-2a+\beta'$, pierwiastek $\sqrt{-2a\beta-\beta^2}$ zamieni się na $\sqrt{2a\beta'-\beta'^2}$, co właśnie na to wychodzi, iż zamiast przystawy EM' zawsze odjemnej, wziąć należy przystawę $P'M'$ odniesioną do nowej osi $A'B'$, położonej pod osią AB w odległości $AJ=2a$. Tym sposobem otrzymamy

$$\alpha=\text{łukowi (wst. odwr.}=2a-\beta')+\sqrt{2a\beta'-\beta'^2},$$

a zważając że dwa łuki, których wstawy odwrócone razem wzięte składają średnicę, są jeden drugiego spełnieniem, oznaczywszy półkole przez π , będziemy mieli

$$\alpha=\pi-\text{łuk (wstawa odwr.}=\beta')+\sqrt{2a\beta'-\beta'^2},$$

$$\text{ząd } \pi-\alpha=\text{łuk (wstawa odwr.}=\beta')-\sqrt{2a\beta'-\beta'^2},$$

położywszy nakoniec $\pi-\alpha=\alpha'$ to jest wzięwszy przystawę $A'P'=AJ-AE$, otrzymamy zrównanie

$$\alpha'=\text{łuk (którego wst. odwr.}=\beta')-\sqrt{2a\beta'-\beta'^2};$$

co jest zrównaniem cykloidy, mającej początek w punkcie A' , i nakręslonej na osi $A'B'$, témże samém kołem tworzącém, którym była wykreslona cykloida podana, ale biegiem przeciwnym pierwszemu, to jest od A' ku B' .

Do tegoż samego przyjdziemy bezśrednie przez wy-

znaczenie promienia krzywosci. Przedluzajac liniję prostą GQ aż do przecięcia nowej osi $A'B'$ w punkcie Q' i prowadząc $Q'M'$, uformujemy dwa trójkąty GMQ i $QM'Q'$ mogące do siebie przystać, więc kąt $QM'Q'$ będzie prosty; a jeżeli na linii QQ' jako na średnicy nakreślimy koło, przejdzie ono przez punkt M' , i będzie równe kołu tworzącemu. A że łuk $M'Q'$ jest spełnieniem łuku $M'Q$, a ten jest równy łukowi MQ , będzie

$$\text{łuk } M'Q' = \text{łuk } QMG - \text{łuk } MQ = AJ - AQ = QJ = A'Q',$$

z czego jasno się pokazuje, że odwiniona $A'M'A$ jest cykloidą nakreśloną przez koło $QM'Q'$ toczące się po linii $A'B'$ od A' ku B' .

Z tego co poprzedziło, każdy bez wątpienia postrzeżga, że cykloida jest wyprostowalna, bo takąż sama cykloida jest jej odwinioną, a wyrażenie promienia krzywosci jest algebraiczne; ztąd wyprowadzamy bardzo ważny wniosek następny, iż długość łuku AA' , lub jemu równego AK , który składa połowę odnogi nakreślonej przez całkowity obrót koła tworzącego, jest zupełnie równy linii $A'K$, czyli dwa razy wziętej średnicy tegoż koła.

116. Cykloida nie kończy się w punkcie L , gdzie koło w swoim biegu całkowity swój obrót skończyło, bo nic nie masz takiego, co by dalszy bieg koła ograniczało. W kreśleniu linii krzywych to mamy uważać, że różne ich części z jednego i tegoż samego wykreślenia, lub też z jednego biegu powstające, należą do jednej i tejże samej linii krzywej. Tak np. koło QMG nieprzystając toczyć się po linii AB dalej za punktem L , wykreśli szereg części podobnych cykloidzie AKL ; to samo rozumieć należy o częściach linii krzywej po lewej stronie punktu A , bo koło tworzące mogło zacząć bieg swój od czasu nieograniczonego dawnego, a tym samym odbyć nieograniczoną liczbę obrótów nim do punktu A przyszło. Zrównanie cykloidy, do tych samych prowadzi nas wniosków, bo nic nam nie prze-

szkadza przypuścić, że łuk QM jest powiększony lub zmniejszony tylu okręgami, ile się nam podoba. Nadto widzimy, że y nigdy nie będzie większe od $2a$. Idzie zatem, że cykloida w całej swej rozciągłości uważana, może być przecięta od linii prostej w nieograniczonej liczbie punktów.

Spółczynnik różniczkowy drugiego rzędu $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}$

zawsze jest ujemny, staje się zaś, równie jak i $\frac{dy}{dx}$ nie-

skończenie wielkim, gdy się wezmie $y=0$, a co wtedy się właśnie przytrafia, kiedy łuk MQ będzie $=0$, albo kiedy będzie równy całemu okręgowi koła ilekolwiek razy całkowicie powtórzonemu; w takowych przypadkach punkta A, L i t. d. gdzie się stykają rozmaite odnogi, są punktami zwrotu pierwszego gatunku, styczna zaś w tych punktach jest prostopadłą do osi ucinków (83).

117. Spiralne stanowią także oddziały linii krzywych przestępnych, które dla kształtu i swoich własności, godne są uwagi. Obaczmy jak się tworzy spiralna, którą wynalazł Konon z Syrakuzy, a której Archimedes główniejsze odkrył własności.

Gdy promień AO (Fig. 27), obraca się ruchem jednostajnym około punktu A jako środka koła OGO , i w tymże samym czasie, punkt ruchomy, zaczawszy od tego środka, bieży po linii AO ruchem także jednostajnym i z taką prędkością, że przybywa do punktu O w tej samej chwili, w której linia prosta AO skończyła cały swój obrót i do pierwszego wróciła się położenia; droga od punktu biegnącego ruchem składanym przebyta $AMOM'X$, nazywa się spiralną. Z tworzenia się spiralnej wypada, że wzięwszy na niej jakikolwiek punkt M , stosunek linii AM do promienia AN , równy będzie stosunkowi łuku ON do okręgu koła OGO ; lecz że punkt kręślący, nie przerywając biegu swojego może i dalej za punktem O ruchem jednostajnym postępować na promieniu przedłużonym, a promień sam może także podług wyższego prawa od-

bywać liczbę obrotów nieograniczoną, zatem spiralna AMO nieustannie przedłużać się będzie wijąc się około punktu A ; idzie zatem, że stosunek zachodzący między odległością każdego jej punktu od punktu A , a promieniem koła, zawsze będzie równy stosunkowi, jaki zachodzi między kątem czyli łukiem przebieżonym przez promień od samego początku ruchu, a całym okręgiem koła. W punkcie np. M' , gdzie promień AN przebiegł cały okrąg koła i nadto jeszcze łuk NO , będzie

$$\frac{AM'}{AN} = \frac{OGO + ON}{OGO}.$$

Więc położywszy $ON=t$, $AM=u$, i wzięwszy promień AN za jedność, jeżeli wyrazimy przez 2π okrąg koła OGO , otrzymamy $u = \frac{t}{2\pi}$.

Ilości zmienne, do tego zrównania wchodzące, nazywali matematycy *spółprzystawami biegunowemi* (*coordonnées polaires*); środek koła OGO , *biegunem* (*pôle*); a linią AM przechodzącą przez ten środek A , *promieniem wiodącym* (*rayon vecteur*); ten promień bierze się tu za przystawę linii krzywej, łuk zaś ON czyli kąt przez łuk wymierzony za uciniek (*abscisse*).

Spiralna, którąśmy teraz uważali, nosząca imię *spiralnej Archimedes*, jest szczególnym tylko przypadkiem linii krzywych, wyrażonych przez zrównanie $u=at^n$, gdzie ilości n nadawać możemy wszystkie pomyśleć się mogące wartości.

Jeżeli n jest liczbą dodatnią, spiralne wyrażone przez zrównanie $u=at^n$, mają swój początek w punkcie A ; lecz gdy n jest odjemne, będzie promień wiodący u nieskończenie wielkim biorąc $t=0$, potem zmniejsza się w miarę powiększania się łuku t , i za każdym nowym obrotem, punkt kręślący zbliża się do punktu A , nie mogąc nigdy przyjść do niego.

Jeżeli $n=-1$, linija krzywa, której zrównanie jest $u=at^{-1}$, czyli $ut=a$, i która nazywa się *spiralną hy-*

paraboliczną, ma jedną niemalstyczną prostą. Jakoż jeżeli założymy następujące

$$t=1, t=\frac{1}{2}, t=\frac{1}{3}, t=\frac{1}{4}, \text{ i t. d.,}$$

wartości odpowiadające

$$u=a, u=2a, u=3a, u=4a, \text{ i t. d.,}$$

pokazują że spiralna oddalając się coraz bardziej od punktu A , zbliża się do linii prostej DE (fig. 28) poprowadzonej równolegle do osi AO , w odległości $AD=a$, albowiem linija PM prostopadła do osi AB , mając wyrażenie u wst MAP , czyli u wst t , czyli $a \frac{\text{wst } t}{t}$, gdy za u położymy wartość at^{-1} , ma za granicę a , gdy $t=0$; więc spiralna hyperboliczna ma także za granicę linią prostą DE .

Uważaliśmy wartości łuku t tylko dodatne biorąc je w kierunku $OGHO$, chcąc uważać odjemne, należy brać w kierunku przeciwnym, a wartości u brać na przedłużeniu promienia wiodącego w stronę przeciwną. Tym sposobem utworzymy drugą odnogę spiralnej hyperbolicznej umieszczoną nad przedłużeniem AB' promienia AO i mającą za niemalstyczną linią DE' , przedłużenie niemalstycznej DE . Nakoniec jeżeli ilość stałą a weźmiemy odjemną, otrzymamy pod osią BB' taką linią krzywą, jakąśmy uważali nad osią.

Tym samym sposobem należy uważać zmianę znaku we wszystkich liniach ze współprzystawami biegunowemi.

Gdybyśmy nie już linią AM , ale część MN promienia wiodącego zawartą między punktem M i okręgiem koła OGO oznaczyli przez u , wtedy zrównanie $u^2=at$, wyrażałoby spiralną paraboliczną, to jest linią krzywą, na którą zamieniłaby się parabola zwyczajna przez nawinienie jej osi na okrąg koła OGO ; przystawy byłyby prostopadłe do tegoż okręgu a tém samém padałyby na jego promienie.

118. Gdy się linije krzywe odnoszą do współprzystaw biegunowych, zmianą promienia wiodącego AM

(fig. 29) jest część QM' na wiodącym promieniu następnym odcięta przez łuk MQ z punktu A jako ze środka koła zakreślony promieniem AM ; a przyrostek kąta MAO , mierzy się przez łuk kołowy NN' ; zakreślony promieniem AN równym jedności. Pierwszą różniczką promienia wiodącego AM , jest pierwszy wyraz rozwinięcia przyrostku $M'Q$, według potęg przyrostku łuku MM' , a przechodząc do granic, uważamy łuk mały MQ , jako linię prostą (74), a trójkąt MQM' jako trójkąt prostokreślny prostokątny, co daje $MM' = \sqrt{QM^2 + QM'^2}$, a że QM' jest du , a NN' jest dt , różniczka łuku DM , będzie $MM' = \sqrt{du^2 + u^2 dt^2}$.

119. Jeżeli poprowadzimy linię AT równoległą do cięciwy małego łuku QM , i gdy bok MM' wielokąta wpisanego w linię krzywą przedłużymy aż do spotkania się z tą linią, trójkąty podobne $M'QM$, i $M'AT$, dają

$$\frac{QM'}{QM} = \frac{AM'}{AT}.$$

Gdy przychodzimy do granic, możemy cięciwę QM brać za łuk, a że kąt $M'QM$ może przybliżyć się do kąta prostego, ile zechcemy, przeto i trójkąt $M'AT$ zbliża się także do trójkąta prostokątnego w kącie A , w tym trójkącie linia AT' , jest granicą linii AT , więc wyższa proporcya w granicach zamienia się na

$$\frac{du}{u dt} = \frac{u}{AT'},$$

z tąd wypada

$$AT' = \frac{u^2 dt}{du}.$$

Wykreślimy styczną, prowadząc przez punkt A prostopadłą do promienia wiodącego AM , i przenosząc na nią wartość linii AT' danej przez wyższe zrównanie.

Jeżeli zastosujemy ten wzór do zrównania $u = at^n$, otrzymamy

$$AT' = \frac{u^2}{nat^{n-1}} = \frac{at^{n+1}}{n}$$

W spiralnej Archimedesesa mamy $n=1$, $a=\frac{1}{2\pi}$, przeto $AT'=\frac{t^2}{2\pi}$ (fig. 27). Z tego wyrażenia postrzegamy, iż gdy $t=2\pi$, to jest gdy punkt kreślący odbędzie jeden obrót, podstyczna jest równa okręgowi $OGQO$ wyprostowanemu; gdy odbędzie obrotów liczbę m , wypada $t=2m\pi$, a podstyczna $AT'=2m^2\pi$, to jest = okręgowi m razy powtórzonemu tego koła, którego promień jest = $m \cdot AO$, i który obejmuje te m obrotów; tę własność wynalazł Archimedes.

Gdy $n=-1$, co służy spiralnej hyperbolicznej, mamy $AT'=-a$, co pokazuje że podstyczna w tej linii jest stała.

Nie zatrzymuję się nad szukaniem podnormalnej i normalnej, ponieważ łatwo je otrzymamy, skoro podstyczna jest znajoma.

Uważymy tylko że stosunek $\frac{AT'}{AM} = \frac{u dt}{du}$ wyraża styczną trygonometryczną kąta zawartego między promieniem wiodącym AM a linią $T'M$ dotykającą się linii krzywej w punkcie M , i że mamy

$$T'M = \sqrt{AM^2 + AT'^2} = u \sqrt{1 + \frac{u^2 dt^2}{du^2}}.$$

120. Różniczka powierzchni ADM (fig. 29) biorąc spółprzystawy biegunowe, nie jest trapezem, jak jest wtedy, gdy przystawy są do siebie równoległe, ale jest wycinkiem AMM' . Granica stosunku tego wycinka do łuku NN' , będzie też sama, jaka jest granica stosunków, wycinków AMQ , $AM'R$, między którymi jest zawarty wycinek AMM' , do tegoż samego łuku NN' , więc wniesiemy iż współczynnik różniczkowy powierzchni ADM , gdy ją wyrazimy przez s , powinien być

$$\frac{ds}{dt} = \frac{AM \cdot MQ}{2 \cdot NN'} = \frac{u^2}{2} \quad \text{złąd} \quad ds = \frac{u^2 dt}{2}.$$

121. Różniczka druga d^2u będzie pierwszym wyrazem rozwinięcia $M''Q' - MQ$, według potęg NN' (60), i trzeba uważać iż gdy założymy łuk NN' stałym, to jest gdy będziemy odmieniali kąt t zawsze tą samą ilością, jednak łuki QM , $Q'M'$ nie będą między sobą równe, bo różnemi promieniami są zakreślone.

Możnaby ztąd wyprowadzić wyrażenia stosujące się do środka krzywosci i do linii odwinionej, lecz osądziłem za rzecz przyzwoitszą zastosować do linii krzywych odniesionych do spółprzystaw biegunowych wyrażenia otrzymane względem spółprzystaw prostokątnych, ponieważ ta droga daje nam zręczność przemienienia spółprzystaw pierwszego układu na spółprzystawy układu drugiego, albo też przejścia od drugiego układu do pierwszego. To będzie bardzo pożytecznem, ponieważ częstokroć odnosimy linie krzywe algebrai-czne do spółprzystaw biegunowych; nadewszystko czynimy to względem linii krzywych drugiego rzędu biorąc ognisko ich za biegun.

122. Dla prostszego wyrażenia niech będzie w punkcie A (fig. 27) początek spółprzystaw prostokątnych

$$AP=x, \quad PM=y,$$

ażeby zaś oznaczyć położenie osi ucinków AB , oznaczmy przez m łuk QO , zawarty między tą osią i punktem O , który tu jest początkiem łuku t . Poprowadziwszy linię PM prostopadłą do osi AB , i uważając, że kąt MAP mierzy się łukiem $NQ=t-m$, otrzymamy

$$\overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM}^2,$$

$$AP = AM \text{ dost } NQ,$$

$$PM = AM \text{ wst } NQ$$

czyli

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}, \dots (a)$$

$$x = u \text{ dost } (t-m), \dots (b)$$

$$y = u \text{ wst } (t-m), \dots (c)$$

Za pomocą dwóch ostatnich wartości, będziemy mo-

gli zamienić każde zrównanie algebraiczne między x , y , na inne, które zawierać będzie same tylko wstawy i dostawy łuku t , i promień wiodący u .

Te wartości dają także

$$\text{dost}(t-m) = \frac{x}{u}, \quad \text{wst}(t-m) = \frac{y}{u},$$

złąd wyciągniemy wartości $\text{dost } t$ i $\text{wst } t$, wyrażone przez funkcyę ilości x , y , u , $\text{wst } m$, $\text{dost } m$, które włożone w jakiekolwiek zrównanie między u , $\text{wst } t$, $\text{dost } t$, zamieniają je na inne, zawierające w sobie same tylko x , y , gdyż za u można będzie podstawić $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Jeżeli dla uproszczenia założymy, że linija AB pada na liniją AO , będzie tylko

$$\text{dost } t = \frac{x}{u}, \quad \text{wst } t = \frac{y}{u}.$$

Gdy zrównanie między u i t wzięte do przerobienia, zawiera sam łuk t , niepodobna jest wtenczas otrzymać wyrażenie algebraiczne między x i y bo nie mamy algebraicznego wyrażenia między łukiem t , jego wstawą i dostawą; lecz można przyjść, jak to wkrótce obaczymy, do zrównania różniczkowego między samemi tylko x , y , dx , dy .

Zrównania (b) i (c), razem wzięte ze zrównaniem linii krzywej zawierają między ilościami zmiennymi x , y , u i t taki związek, iż trzy z tych ilości są funkcyami ilości czwartej, więc można zrównania (a), (b) i (c) różniczkować uważając ilości t , u , y , jako funkcyę ilości x (46), przeto będzie

$$du = d\sqrt{x^2 + y^2},$$

$$dx = du \text{ dost } (t-m) - u dt \text{ wst } (t-m).$$

$$dy = du \text{ wst } (t-m) + u dt \text{ dost } (t-m);$$

wyrugowawszy du między dwoma ostatniemi zrównaniami będzie

$$dt = \frac{dy \text{ dost } (t-m) - dx \text{ wst } (t-m)}{u};$$

a położywszy za dost $(t-m)$, i za u , ich wartości otrzymamy

$$dt = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \quad (*).$$

Więc można będzie, tak ze zrównania między u i t , jakoteż z jego różniczki wyrugować ilości u , dost t , wst t , du , dt ; tym sposobem mieć będziemy dwa zrównania, zawierające w sobie jeszcze ilość t , której łatwo się pozbędziemy przez rugowanie.

Niech będzie np. zrównanie $u = at^n$, które daje

$$u^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} t, \quad \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} du = a^{\frac{1}{n}} dt;$$

aże wyrażenia ilości u , du , dt nie zależą od kąta m , zatem podstawivszy je w poprzedzającej różniczce, i przywiodłszy do jednego mianownika, otrzymamy

$$\frac{1}{n} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}n} (xdx + ydy) = a^{\frac{1}{n}} (xdy - ydx).$$

Możnaby za pomocą tego zrównania, wyznaczyć podstyczne, styczne, i t. d. linii spiralnych, do czego by nam posłużyły wzory z liczby 66; lecz że zrównania tych linii są naprzód wyrażone przez spółprzystawy u i t , zatem prościej i ogólniej będzie przekształcić te wzory wprowadzając do nich za x, y , spółprzystawy biegunowe u i t , co wkrótce wykonamy.

123. Dla otrzymania tych wzorów uważaliśmy y jako bezśrednie złączone z ilością x przez zrównanie dane między x , i y ; lecz gdy linija krzywa jest dana przez

(*) Natrafiamy często na wyrażenie wycinka (120) przez spółprzystawy prostokątne, będzie więc rzeczą pożyteczną tu je przytoczyć. Otrzymuje się kładąc za dt i za u^2 ich

$$\text{wartości w } ds = \frac{u^2 dt}{2}, \text{ z kąd wypada}$$

$$ds = \frac{xdy - ydx}{2}.$$

zrównanie między spółprzystawami biegunowemi u i t , jedna z tych ilości jest niezależną, i przyrostek jej powinien być uważany za stały. Niech będzie więc $u=f(t)$; pod tym względem ilości x i y będą funkcyami ilości t oznaczonemi przez zrównania

$$x=u \text{ dost } (t-m), \quad y=u \text{ wst } (t-m) \quad (122);$$

lecz za pomocą różniczkowania wyrażeń, które są funkcyami funkcyj łatwo wyrazimy współczynniki różniczkowe ilości y brane co do ilości x , przez współczynniki różniczkowe ilości u wzięte co do ilości t .

Na ten koniec wyrażmy pierwsze widocznie kładąc

$$dy=px, \quad d^2y=qdx^2,$$

wtedy uważając y i p , naprzód jako funkcyę ilości t , a potem jako funkcyę ilości x , będziemy mieli

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dt};$$

złąd wyciągniemy

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad q = \frac{dp}{dx} = \frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

co wychodzi na

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{dp}{dx},$$

bylebyśmy uważali dx , dy , dp , jako różniczki odniesione do ilości zmiennej t branej za ilość niezależną (*).

(*) Można przyjąć jeszcze do tego wypadku przez bezśrednie uważanie granic, zważając że

$$\frac{y'-y}{x'-x} = \frac{\frac{y'-y}{t'-t}}{\frac{x'-x}{t'-t}}, \quad \text{złąd } p = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad (8).$$

Uskuteczniając w tém przypuszczeniu różniczkowanie współczynnika p , otrzymujemy

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{dx d^2 y - dy d^2 x}{dx^3}.$$

Za pomocą tych wzorów można teraz przekształcać wyrażenia podstycznej, stycznej, i t. d. oraz wyrażenia stosujące się do środka krzywości, wprowadzając w nie naprzód na miejsce dy i $d^2 y$ współczynniki różniczkowe p , i q , a potem na ich miejscu kładąc wartości wyżej otrzymane.

124. Z wartości współczynnika p zaraz postrzegamy, iż wyrażenie podstycznej, równie jako i wszystkie wyrażenia do których wchodzi różniczka rzędu tylko pierwszego, nie powinny się odmieniać i że

$$PT = \frac{y}{p} \quad (66) \text{ zostaje} = \frac{y dx}{dy}.$$

Kładąc za y , dx , dy , ich wartości (122), wypada

$$PT = u \text{ wst}(t-m) \frac{du \text{ dost}(t-m) - u dt \text{ wst}(t-m)}{du \text{ wst}(t-m) + u dt \text{ dost}(t-m)}.$$

To wyrażenie daje się znacznie uprościć, położenie bowiem linii ucinków na której znajduje się podstyczna PT jest dowolne, więc możemy łuk m wziąć taki, iżby łuk QN był $= 1^{c.k.}$, w takowym razie przystawa PM zmiesza się z promieniem wiodącym AM , i będzie $\text{dost}(t-m) = 0$, $\text{wst}(t-m) = 1$, a PT zamieni się na $AT = -\frac{u^2 dt}{du}$.

125. Jeżeli w różniczce łuku AM , która jest

$$dz = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (64),$$

za dx , i dy , podstawimy ich wartości wyrażone przez współprzystawy biegunowe, otrzymamy

$$dz = \sqrt{du^2 + u^2 dt^2},$$

wyrażenie któreśmy na MM' znaleźli pod liczbą 118.

126. Przystąpmy teraz do wynalezienia promienia krzywości.

Wzór
$$\gamma = - \left(\frac{dx^2 + dy^2}{dx d^2 y} \right)^{\frac{5}{2}},$$

gdy w nim za dy , i $d^2 y$ położymy $p dx$, i $q dx^2$ staje się

$$\gamma = - \frac{(1 + p^2)^{\frac{5}{2}}}{q};$$

kładąc potem za p i q , ich wartości wyrażone przez różniczki brane względem t , otrzymamy

$$\gamma = - \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{5}{2}}}{dx d^2 y - dy d^2 x}.$$

Teraz gdy w wartościach różniczek dx , i dy (122) zmienimy dx , dy , i du jako funkcyje ilości t , otrzymamy

$$d^2 x = d^2 u \text{ dost}(t-m) - 2 du dt \text{ wst}(t-m) - u dt^2 \text{ dost}(t-m),$$

$$d^2 y = d^2 u \text{ wst}(t-m) + 2 du dt \text{ dost}(t-m) - u dt^2 \text{ wst}(t-m),$$

potém kładąc tak jak pod liczn. 124, $(t-m) = 1^{c.k.}$, wypada

$$dx = -u dt, \quad dy = du,$$

$$d^2 x = -2 du dt, \quad d^2 y = d^2 u - u dt^2$$

co daje

$$\gamma = \frac{(du^2 + u^2 dt^2)^{\frac{5}{2}}}{u dt d^2 u - u^2 dt^3 - 2 du^2 dt}.$$

127. Matematycy, gdy używają spółprzystaw biegunowych zwykli oznaczać położenie środka koła ściślestycznego przez położenie normalnej i przez odległość ME zawartą między punktem M a spodem prostopadłej EF spuszczonej ze środka F koła ściślestycznego na linią prostą AM , co daje niekiedy łatwość w wykreślaniu promienia krzywości.

Jeżeli weźmiemy linią AM za oś przystaw γ , część AE wyraża przystawę β linii odwinionej (81); a zatem wyrażenie

$$ME = AM - AE = y - \beta = -\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y},$$

gdy w niem na miejscu różniczek dy i d^2y odpowiadających jeszcze ilości zmiennej x , położymy pdx , qdx^2 , staje się

$$ME = -\frac{1+p^2}{q};$$

potém za p i q , kładąc wartości odpowiednie ilości zmiennej t , otrzymamy

$$ME = -\frac{dx(dx^2 + dy^2)}{dx d^2y - dy d^2x} = -\frac{u(du^2 + u^2 dt^2)}{ud^2u - u^2 dt^2 - 2du^2}$$

gdy za dx , dy , d^2x , d^2y położymy wartości otrzymane pod liczbą poprzedzającą.

128. Dla zastosowania tych wzorów weźmy spiralną logarytmiczną, której zrównanie jest $t = lu$. Różniczkując wypada

$$dt = \frac{Mdu}{u} \quad (28), \text{ czyli } \frac{udt}{du} = M,$$

co pokazuje (119) że w spiralnej logarytmicznej kąt zawarty między styczną a promieniem do punktu dotknięcia poprowadzonym jest zawsze stały.

Biorąc drugą różniczkę danego zrównania, to jest różniczkując zrównanie

$$dt = \frac{Mdu}{u},$$

i zakładając różniczkę dt stałą, mamy

$$ud^2u - du^2 = 0, \text{ z kąd } d^2u = \frac{du^2}{u},$$

jeśli w wyrażeniach promienia r czyli MF , i linii ME , podstawimy za d^2u i za dt , wartości wyrażone przez du , będziemy mieli

$$MF = -\frac{u\sqrt{1+M^2}}{M}, \quad ME = u = AM$$

Ztąd wypada iż linija prosta AF (*fig. 30*) poprowadzona prostopadle do promienia wiodącego AM , przetnie normalną MF w środku koła ściśleścycznego, to jest w punkcie należącym do linii odwinionej FZ .

Ta linija odwiniona będzie spiralną podobną do spiralnej danej, albowiem kąt AFM będąc równy kątowi $T'MA$ będzie tejże samej wielkości na wszystkie punkta linii krzywej FZ , jak jest na wszystkie punkta linii krzywej AX .

O przemianie ilości zmiennej niezależnej, czyli jakim sposobem zmienia się różniczka uważana za stałą, na inną która nie jest stałą.

129. Ponieważ przekształcenie użyte pod liczb. 123 i 126 dla oznaczenia koła ściśleścycznego w liniach krzywych wyrażonych przez spółprzystawy biegunowe, a które zależy na przemianie różniczkowego wyrażenia otrzymanego uważając y jako funkcją x , na inne, w którym obie ilości x i y byłyby uważane jako funkcye trzeciej ilości zmiennej jakiegokolwiek t , branej za niezależną, często jest pożyteczne, przeto stosowną jest rzeczą, powtórzyć je teraz dla rozciągnięcia go do jakiegokolwiek bąc różniczek.

Spółczynnik $p = \frac{dy}{dx}$ waży to samo, co

$$p = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}{}_{(123)},$$

w którym różniczki dy i dx powinny być uważane jako funkcye ilości t , i jako takie mają być różniczkowane, co da

$$dp = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^2};$$

uczyniwszy potem $dp=qdx$, wypadnie

$$q = \frac{1}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^5}.$$

Działając podobnym sposobem, otrzymamy

$$\begin{aligned} dq &= d\left\{\frac{1}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = d\left(\frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^5}\right) \\ &= \frac{dx^2 d^5y - 5dx d^2x d^2y + 5dy d^2x^2 - dx dy d^5x}{dx^4} \end{aligned}$$

a założywszy $dq=rdx$, będziemy mieli

$$r = \frac{dx^2 d^5y - 5dx d^2x d^2y + 5dy d^2x^2 - dx dy d^5x}{dx^5}.$$

Widzimy tedy, jak współczynniki p , q , r , i t. d. które są funkcyami ilości x , mogą się wyrazić za pomocą różniczek dx , dy , d^2x , i t. d. uważanych za funkcyę zmiennej t ; a podstawując te wartości w jakimkolwiek być wyrażeniu, same tylko współczynniki różniczkowe p , q , r , i t. d. zawierającym, przerobimy je na inne, w którym wszystkie ilości zmienne, będą uważane jako funkcyę ilości t .

150. Wyrażenia q , r , i t. d. są nieoznaczone, póki związek między ilościami x , y i t nie jest ustanowiony; lecz gdy ten związek będzie między rzeczonymi ilościami dany, tém samém będzie on dany i między różniczkami d^2x , d^2y ; bo jeżeli weźmiemy t za funkcyą zmiennych x i y , różniczka dt będzie także funkcyą ilości x , y , i ich różniczek, gdy zaś weźmiemy t za zmienną niezależną, wtedy dt będzie stałe, a $d^2t=0$.

Żeby zaś mieć to ostatnie zrównanie $d^2t=0$, nie masz bynajmniej potrzeby wiedzieć, jaki był związek pierwiastkowy między x , y , a zmienną t , którą tu chcemy uważać za niezależną; dosyć jest mieć wyrażenie różniczki dt .

Pozwólmy, że tą zmienną jest np łuk jakiej linii krzywej, mielibyśmy wtedy (64)

$$dt = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

a różniczkując dx , dy jako funkcyje ilości t , otrzymamy

$$d^2t = dx d^2x + dy d^2y = 0;$$

wyrugowawszy teraz za pomocą tego zrównania i dalszych jego różniczek, różniczki d^2x , d^2y i t. d. ze współczynników q , r , i t. d., mielibyśmy te współczynniki różniczkowe pod taką postacią, jaką mieć powinny, gdy x , y są funkcyami łuku t , to jest gdy ten łuk uważany jest za zmienną niezależną, czyli gdy różniczka łuku jest wzięta za stałą.

Niech będzie np. wyrażenie

$$v = - \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{5}{2}}}{dx d^2y - dy d^2x} \quad (126);$$

gdy w niem położymy naprzód za d^2x wartość $-\frac{dy d^2y}{dx}$, a potem za $dx^2 + dy^2$, wartość dt^2 z poprzedzających zrównań wyciągnioną, otrzymamy

$$v = - \frac{dx(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{d^2y} = - \frac{dx dt}{d^2y}.$$

Można też założyć podług upodobania

$$\text{albo } dt = dx, \text{ albo } dt = dy;$$

ztaąd wypada

$$\text{albo } d^2x = 0, \text{ albo } d^2y = 0;$$

i za pomocą tych przypuszczeń bierzemy na przemian x , albo y , za ilość zmienną niezależną, to jest uważamy albo ilość y , jako funkcyą ilości x , albo x , jako funkcyą ilości y ; w pierwszym przypadku będzie

$$q = \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ a w drugim } q = - \frac{dy d^2x}{dx^3}.$$

Jeżeli tę ostatnią wartość położymy w wyrażeniu

$$v = - \frac{(1 + p^2)^{\frac{5}{2}}}{q} \quad (126),$$

przemienimy je na wyrażenie, które odpowiada przypadkowi, gdy ilość x , uważamy jako funkcją ilości y , i będzie

$$\gamma = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{5}{2}}}{dy d^2 x}.$$

131. Można też różniczki funkcyi y , otrzymane biorąc za ilość niezależną funkcją t daną przez ilość x i y , przekształcić tak, iżby ilość y była uważaną za funkcją ilości x . Na ten koniec dość jest uważać, iż biorąc różniczki i współczynniki p , q , i t. d. za funkcye ilości t , mamy jeszcze zrównania jak powiedzieliśmy pod liczbą 123.

$$dy = p dx, \quad dp = q dx, \quad dq = r dx, \quad \text{i t. d.},$$

i pod tym względem zrównanie

$$dy = p dx$$

następnie różniczkowane daje zrównania

$$d^2 y = dp dx + p d^2 x$$

$$= q dx^2 + p d^2 x$$

$$d^3 y = dq dx^2 + 2q dx d^2 x + dp d^3 x + p d^5 x$$

$$= r dx^3 + 3q dx d^2 x + p d^5 x,$$

i t. d.

do tych zrównań dołączając zrównania

$$dt = 0, \quad d^2 t = 0, \quad \text{i t. d.},$$

zamykające związek między różniczkami $d^2 x$, $d^5 x$, i t. d., a $d^2 y$, $d^5 y$, i t. d., mieć będziemy to wszystko, czego potrzeba do wyrugowania jednych i drugich z danego wyrażenia różniczkowego, po czém zostaną w niem współczynniki różniczkowe p , q , r , i t. d., w których ilość y jest uważana jako bezśrednia funkcya ilości x .

Jeżeli weźmiemy tak jak wyżej

$$dt = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad \text{z kąd mamy } dx d^2 x + dy d^2 y = 0,$$

$$\text{wypada } d^2 x = -\frac{dy}{dx} d^2 y = -p d^2 y,$$

zrównanie $d^2y = qdx^2 + p d^2x,$

zamienia się na $d^2y = qdx^2 - p^2 d^2x,$

zatem $d^2y = \frac{qdx^2}{1+p^2}, \quad d^2x = -\frac{pqdx^2}{1+p^2}.$

Wartość za d^2y podstawiona w wyrażeniu

$$\gamma = -\frac{dx dt}{d^2y} = -\frac{dx \sqrt{dx^2 + dy^2}}{d^2y} = -\frac{dx^2 \sqrt{1+p^2}}{d^2y},$$

przywraca wyrażenie

$$\gamma = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

z któregośmy pod liczb. 126 i 130 wyprowadzili poprzedzające.

132. Przemiana ilości zmiennej niezależnej może też być wyłożoną przez wykreślenie geometryczne. Jakoż jasną jest rzeczą, iż dla oznaczenia wielokąta $MM'M''$ i t. d. fig. 2, który chcemy wpisać w jakąkolwiek linią krzywą CD , trzeba oznaczyć prawo, podług którego kąty wielokąta jedno po drugim następują. Brałismsy różnice ucinków $PP', P'P''$ i t. d. równe między sobą, lecz na miejscu tego prawa można podstawić inne, np można założyć, iż boki $MM', M'M'',$ i t. d. są między sobą równe.

Te różne sposoby przemieniania wpływają tylko na znaki, i są tylko szczególnym sposobem pisania współczynników różniczkowych; bo czy to y zmienia się dla zmiany współczesnej ilości x , lub też dla zmiany ilości z , od której samo x zależy, wszystko na jedno wychodzi we względzie granic, które od wartości przyrostków całe nie zależą; ztąd idzie, że gdy zróżniczkujemy zrównanie między x , i y , biorąc różniczki dx, dy , za zmienne, możemy potem tak otrzymane wypadki, przemienić na współczynniki różniczkowe za pomocą wzorów z pod liczby 129, ponieważ kładąc za różniczki jednej z ilości zmiennych, ich wartości, wszystkie różniczki ilości drugiej

same przez się giną; przychodzimy do tego samego wypadku końcowego, jak gdybyśmy założyli stałą jedną z różniczek pierwszych, i otrzymujemy wzory składniejszy, bo obie ilości są w nich traktowane symetrycznie.

133. Podług tego cośmy widzieli, będziemy mogli różniczkować układ (*systeme*) dwóch zrównań danych między trzema zmiennymi, z których dwie którekolwiek uważać mamy jako funkcyę trzeciej. Dajmy, że $U=0$, $V=0$, są dwa zrównania między zmiennymi x , y , z ; postępując do różniczkowań wyższych rzędów będziemy musieli brać za zmienne, różniczki tych dwóch ilości nieoznaczonych, które uważać chcemy za funkcyę trzeciej.

Gdybyśmy mieli trzy zrównania $U=0$, $V=0$, $W=0$, między czterema zmiennymi t , x , y , z , moglibyśmy trzy z pomiędzy nich oznaczyć, a to nadając wartość czwartej; idzie zatem że trzy zmienne byłyby funkcyami czwartej, i ich różniczki uważać się powinny za zmienne.

W ogulności, jeżeli będzie danych m zrównań między $(m+1)$ zmiennymi, ponieważ w tym razie możemy wyrazić m ilości zmiennych za pomocą jednej pozostałej; stąd wypada, że w tych zrównaniach, m zmiennych powinny się uważać jako funkcyę jednej pozostałej, i w następnych różniczkowaniach różniczki ich powinny być wzięte za zmienne, a jedna tylko różniczka zmiennej niezależnej weźmie się za stałą.

134. Z takowych zrównań można przez rugowanie przejść do jednego tylko zrównania między którymikolwiek dwiema zmiennymi, a sposób, którego tu użyję do dwóch zrównań między trzema zmiennymi, łatwo będzie można przystosować do jakiejkolwiek bęć liczby zrównań.

Niech będą $U=0$, $V=0$, dwa zrównania różniczkowe, jedno rzędu m , a drugie rzędu n , dane między zmiennymi x , y , t , i ich różniczkami, z których mamy wyrugować t ; pierwsze prócz zmiennej t , może

zawierać różniczki $dt, d^2t, \dots d^nt$, drugie zaś $dt, d^2t, \dots d^nt$. Ponieważ w tym razie nie mamy ani zrównań pierwotnych, ani też żadnego ze zrównań różniczkowych, niższych rzędów od zrównań podanych, wypada więc utworzyć sobie nowych zrównań tyle, abyśmy za ich pomocą mogli wyrugować ilości nieznanne, t, dt, d^2t , i t. d., do czego dosyć będzie różniczkować n razy zrównanie $U=0$, a m razy zrównanie $V=0$. Tym sposobem otrzymamy $m+n$ nowych zrównań, do których przydawszy dwa zrównania $U=0, V=0$, summa wszystkich wyniesie $m+n+2$; nieznanych zaś ilości $t, dt, d^2t, \dots d^{m+n}t$, danych do wyrugowania będzie tylko $m+n+1$, przeto wyrugujemy je wszystkie, i przyjdziemy do końcowego zrównania między x, y , i ich różniczkami.

Położywszy, że dt jest stałe, zdawałoby się, że różniczkując raz tylko którekolwiek zrównanie $U=0$, lub $V=0$, moglibyśmy wyrugować t , i dt , bo w takiem przypuszczeniu mielibyśmy trzy zrównania; lecz tu uważć mamy, że różniczki d^2x, d^2y zawierają koniecznie w sobie zmienną t , gdyż w zrównaniach $U=0, V=0$, x , i y były uważane jako funkcyje tejże zmiennej (133); idzie zatem, że należy wyrugować ilość t ze wszystkiemi jej różniczkami, a uważać jako stałą różniczkę jednej z tych ilości, które chcemy zachować.

Różniczkowanie zrównań zamykających więcej niż jedną ilość zmienną niezależną.

135. Gdy mamy jedno tylko zrównanie, między trzema ilościami zmiennymi, wtenczas trzeba nadać wartość od upodobania dwóm którymkolwiek z tych ilości, dla otrzymania wartości ilości trzeciej; przeto ta ostatnia jest funkcją dwóch pierwszych. Niech będzie np. dane zrównanie

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

z którego nie będziemy mogli otrzymać wartości na z , jeżeli nie naznaczymy wartości ilościom, x i y ; lecz tu mamy uważać, że gdy żaden nie zachodzi związek między x i y , jedna z nich może się zmieniać a druga zostawać stałą, i wzajemnie.

Z tego wypada, że wartość funkcyi z zmieniać się może wielorako: 1^od dla zmian ilości x lub y tylko, 2^oe dla zmian obu tych ilości razem wziętych. W pierwszym razie, gdy jedna którakolwiek ilość x , lub y jest wzięta za stałą, dane zrównanie, jest tylko zrównaniem o dwu zmiennych; zatem biorąc samo x za zmienne, będzie

$$x dx + z dz = 0, \text{ albo } x + z \frac{dz}{dx} = 0,$$

biorąc zaś samo y za zmienne, wypadnie

$$y dy + z dz = 0, \text{ albo } y + z \frac{dz}{dy} = 0.$$

Wypada więc kolejno

$$dz = -\frac{x dx}{z}, \quad dz = -\frac{y dy}{z};$$

lecz tu uważmy, że pierwszą z tych różniczek otrzymaliśmy, różniczkując dane zrównanie w przypuszczeniu, że tylko ilość x jest zmienną niezależną, drugą zaś otrzymaliśmy różniczkując toż zrównanie, w założeniu że samo y jest zmienną niezależną; dla tego jedną nazywać będziemy *różniczką cząstkową* co do x , drugą zaś *różniczką cząstkową* co do y .

Że tych różniczek nie bierzemy jednej za drugą, służy nam do tego samo zadanie, i rozróżniamy je prócz tego dostatecznie, uważając różniczkę zmiennej niezależnej, do wyrażenia *różniczek cząstkowych* wchodzącą.

Spółczynniki różniczkowe cząstkowe są:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}.$$

136. Niech będzie $u=0$, zrównanie między x , y , z ; jeżeli uważać będziemy x , i y jako zmienne niezależne,

z będzie funkcją tak jednej jak drugiej, gdy zaś weźmiemy x za zmienną a y za stałą, wtedy z będzie funkcją samego x . W tém przypuszczeniu zrównanie $z=0$, powinno się uważać jako zrównanie o dwu zmiennych x, z ; więc będziemy mieli (48)

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dx} = 0,$$

a ztąd wyciągniemy współczynnik różniczkowy funkcyi z co do zmiennej x . Należy tu sobie przypomnieć (135), że w $\frac{dz}{dx}$, dz jest tylko różniczką cząstkową funkcyi z wziętą co do samej zmiennej x .

Gdybyśmy zaś z kolei wzięli y za zmienną, a x za stałą, mielibyśmy zrównanie między y, z , które różniczkując otrzymalibyśmy

$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dy} = 0.$$

Rozmnożywszy pierwsze zrównanie przez dx , a drugie przez dy , i dodawszy je do siebie, otrzymamy

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} \left(\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy \right) = 0;$$

a że $\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy$ nie co innego jest, jak różniczka zupełna funkcyi z (41), to jest dz , przeto będzie

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz = 0,$$

więc zrównanie $u=0$, różniczkowane co do wszystkich trzech zmiennych x, y, z , daje różniczkę, która jest równą zeru. Nie należy jednak zapominać iż ta różniczka powinna być uważana jako złożona z dwóch zrównań osobnych; gdyż położywszy w niej $\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy$ za dz , wypada, dla niezawistości od siebie przyrostków dx, dy , że współczynniki tychże przyrostków z osobna powinny być równe zeru.

137. Przyjdziemy do zrównań dających nam współczynniki wyższych rzędów, różniczkując równania

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dx} = 0, (X), \quad \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dy} = 0, (Y).$$

Założywszy nasamprzód, że samo jedno x jest zmienną niezależną, nie tylko z jako funkcyja zmieniać się będzie, ale nadto ze współczynnika $\frac{dz}{dx}$, powstanie współczynnik drugiego rzędu $\frac{d^2z}{dx^2}$. Więc różniczkując równanie (X) co do x i z , tylko, otrzymamy, podobnie jak w równaniach o dwóch zmiennych,

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2 \frac{d^2u}{dx dz} \frac{dz}{dx} + \frac{d^2u}{dz^2} \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{du}{dz} \frac{d^2z}{dx^2} = 0, (XX)$$

Jeżeli różniczkować będziemy równanie (X) co do y , i z , lub też równanie (Y) , do x , i z , pamiętając że w pierwszym razie $\frac{dz}{dx}$ daje $\frac{d^2z}{dy dx}$, a w drugim $\frac{dz}{dy}$ daje $\frac{d^2z}{dx dy} = \frac{d^2z}{dy dx}$, otrzymamy jeden i tenże sam wypadek, który będzie

$$\frac{d^2u}{dx dy} + \frac{d^2u}{dz dy} \frac{dz}{dx} + \frac{d^2u}{dz dx dy} + \frac{du}{dz} \frac{d^2z}{dx dy} + \frac{d^2u}{dz^2} \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy} = 0, (XY)$$

Nakoniec równanie (Y) różniczkowane co do dwóch tylko zmiennych y, z , da nam

$$\frac{d^2u}{dy^2} + 2 \frac{d^2u}{dy dz} \frac{dz}{dy} + \frac{d^2u}{dz^2} \frac{dz^2}{dy^2} + \frac{du}{dz} \frac{d^2z}{dy^2} = 0, (YY)$$

Ponieważ funkcyja ma tylko trzy współczynniki różniczkowe drugiego rzędu, przeto znajdziemy je z trzech zrównań poprzedzających.

Należy uważać, iż jeżeli pomnożymy równanie (XX) przez dx^2 , równanie (XY) przez $dx dy$, równanie (YY)

przez dy^2 i te mnogości dodamy kładąc w nich dz na miejscu

$$\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy,$$

a d^2z na miejscu

$$\frac{d^2z}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2z}{dxdy} dx dy + \frac{d^2z}{dy^2} dy^2,$$

będziemy mieli zrównanie zupełnie takie samo, jakie byśmy otrzymali różniczkując wprost zrównanie

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz = 0,$$

uważając w niem x, y, z, dz , jako ilości zmienne, a dx, dy , jako stałe, co by nam dało drugą całą różniczkę ilości u , w przypuszczeniu iż z jest funkcją ilości x i y .

139. Łatwo rozciągniemy te uwagi do jakiegokolwiek rzędu różniczkowania, i do jakiegokolwiek bąc liczby ilości zmiennych; wszystko bowiem zasada się na oznaczeniu czyli rozpoznaniu tych ilości, które za zmienne niezależne uważać mamy; takowe zaś oznaczenie wynika z natury pytania, które nas przyprowadziło do zrównania lub do zrównań danych; to wykonawszy należy różniczkować zrównanie z osobna co do każdej zmiennej niezależnej, uważając inne zmienne jako funkcyje zmiennych niezależnych.

Gdybyśmy *np* mieli dwa zrównania

$$u=0, \quad v=0,$$

między pięciu zmiennymi s, t, x, y, z ; postrzeżlibyśmy że trzy z pomiędzy tych zmiennych są niezależne. Przypuścimy że dwie z nich y, z , zależą od s, t, x , czyli że są ich funkcyami danymi przez te dwa zrównania, potrzeba będzie z kolei różniczkować u , co do s , co do t , i co do x ; tak otrzymamy

$$\frac{du}{ds} + \frac{du}{dy} \frac{dy}{ds} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{ds} = 0,$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{du}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dt} = 0,$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dx} = 0.$$

Jeżeli rozmnożymy te równania, pierwsze przez ds , drugie przez dt , trzecie przez dx , potem dodamy je do siebie, i podstawimy

$$dy \text{ na miejscu } \frac{dy}{ds} ds + \frac{dy}{dt} dt + \frac{dy}{dx} dx,$$

$$dz \text{ na miejscu } \frac{dz}{dt} ds + \frac{dz}{dt} dt + \frac{dz}{dx} dx,$$

otrzymamy

$$\frac{du}{ds} ds + \frac{du}{dt} dt + \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz = 0.$$

Wyciągniemy podobny wypadek ze równania $v=0$; a ztąd się wnosi że różniczkując równania $u=0, v=0$, przez wzgląd na wszystkie zmienne s, t, u, x, y, z , i podstawując w nich za dy , i dz , wyrażenia tych różniczek, jako należących do funkcji o trzech zmiennych (45), należy każdej ilości samozmiennej współczynnik różniczkowy uczynić równym zeru.

Uważając zaś same współczynniki różniczkowe jako nowe funkcyje samozmiennych, możnaby dalszych szukać różniczek; przeto dawszy kilka uwag, o rugowaniu ilości stałych i funkcji, zakończę to co się ściga do formowania równań różniczkowych.

139. Ponieważ równanie $u=0$, między trzema ilościami x, y, z , daje dwa równania różniczkowe pierwszego rzędu, przeto jasną jest rzeczą, że można z tych równań wyrzucić dwie ilości stałe, a wypadek wyrazi związek między zmiennymi x, y, z , i współczynnikami

$$\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \text{ niezależnie od ilości wyrzuconych.}$$

Gdy przydamy do równań poprzedzających trzy równania różniczkowe drugiego rzędu, będziemy mieli

sześć zrównań, za pomocą których będzie można wyrzucić pięć ilości, i t. d.

140. To prowadzi do ważnego postrzeżenia, to jest że ze zrównania o trzech lub większej liczby zmiennych, można wyrzucić funkcyę, których kształt jest całę nieznany. Niech będzie np zrównanie $z = f(ax + by)$, w którym f , oznacza jakąkolwiek bądź funkcyą, której kształt nie jest oznaczony; wyprowadzę z niego zrównanie między $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, nie zależące od tej funkcyi, a zároveň służące funkcyi $z = ax + by$, $z = \sqrt{ax + by}$, $z = \text{wst}(ax + by)$, i w ogulności wszystkim funkcyóm ilości $(ax + by)$, jakiegokolwiek bądź kształtu. Na ten koniec uczynimy $ax + by = t$, zrównanie podane zamieni się na $z = f(t)$, a zatem otrzymamy

$dz = f'(t) dt$, pisząc $f'(t)$ na miejscu $\frac{df(t)}{dt}$, aże

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy,$$

$$dt = \frac{dt}{dx} dx + \frac{dt}{dy} dy,$$

z kąd
$$\frac{dz}{dx} = f'(t) \frac{dt}{dx}, \quad \frac{dz}{dy} = f'(t) \frac{dt}{dy}$$

więc kładąc za $\frac{dt}{dx}$, $\frac{dt}{dy}$, ich wartości a , i b , potem rugując funkcyą t otrzymamy

$$b \frac{dz}{dx} - a \frac{dz}{dy} = 0.$$

To zrównanie jest cechą, po której można poznać, czy dana ilość jest funkcyą wyrażenia $(ax + by)$ lub nie, bo to zrównanie stosownie do swojego utworzenia się, powinno stać się tosamém to jest równém zeru, ile razy na miejscu $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dx}$: podstawimy wartości wynikające z różniczkowania funkcyi jakiej $ax + by$. Dajmy że nie-

wiemy początku wielowyrazu $a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$, uczynimy go $=z$, różniczkując będziemy mieli

$$\frac{dz}{dx} = 2a^2x + 2aby, \quad \frac{dz}{dy} = 2abx + 2b^2y,$$

te wartości podstawione w równaniu $b\frac{dz}{dx} - a\frac{dz}{dy} = 0$, czynią je tosamém, z czego się wnosi że dany wielowyras jest funkcją ilości $(ax+by)$, co i z kąd inąd jest widoczną rzeczą ponieważ

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = (ax+by)^2.$$

Widzimy w ogulności że gdy $u=0$, jest równaniem między x, y, z , i funkcją jakąkolwiek niewyznaczoną wyrażoną przez $f(t)$, a w której znany jest tylko związek między t i ilościami x, y, z , można będzie zawsze wyrzucić $f(t)$ i $f'(t)$, za pomocą równania $u=0$ i jego różniczek cząstkowych.

Biorąc różniczki drugiego rzędu, liczba równań powiększa się coraz więcej i w wielu zdarzeniach można wyrzucić dwie nieoznaczone funkcy; lecz nie będę wchodził w te szczegóły, ani w to co się ściąga do równań zawierających więcej nad trzy ilości zmienne.

Zastosowanie rachunku różniczkowego do teoryi powierzchni krzywych.

141. Ponieważ każde równanie o trzech zmiennych wyraża powierzchnią, przeto za przystawę tej powierzchni weźmiemy zmienną, którą uważamy jako oznaczoną przez dwie drugie. Wyrażając te trzy zmienne przez x, y, z , które w całym rozumowaniu będziemy uważali za odniesione do trzech osi prostopadłych między sobą, weźmiemy z za przystawę, x, y , za uciniki jakiegokolwiek punktu w ten sposób, iż z będzie funkcją ilości x i y .

Jako można uważać tworzenie się linii przez ruch punktu, tak można pojmować tworzenie się powierzch-

ni przez ruch linii. *Np.* walce i ostrokągi, któremi się zatrudniamy w początkowej geometrii, są szczególniemi tylko przypadkami dwóch gatunków powierzchni utworzonych przez linię prostą albo ruszającą się, równolegle do swego pierwszego położenia, albo przechodzącą statecznie przez punkt dany. Dla kierowania ruchem linii prostej, można na miejscu koła, z kądem wypadają ostrokągi i walce, podstawić inną jakąkolwiek linię krzywą położoną w przestrzeni jak zechcemy; lecz można, co jest rzeczą godną uwagi, przez użycie różniczek cząstkowych, usunąć to co się ściąga do kształtu linii krzywej, a wyrazić w ogólności cechę spólną wszystkim powierzchniom jednego tegoż samego gatunku.

Jakoż jeżeli przypuścimy, że wszystkie linie proste tworzące powierzchnię mają być równoległe między sobą, wypada że w ich zrównaniach

$$y = ax + a, \quad z = bx + \beta, \quad (\text{Trig. 181})$$

spółczynniki a i b muszą być stałe a ilości a i β razem się zmieniać, tak iż jedna musi być funkcją drugiej; albowiem gdy pierwsza jest dana, znajdziemy drugą szukając punktu, w którym linia krzywa wskazująca kierunek ruchu linii prostej tworzącej, jest przecięcia przez płaszczyznę rzucającą tę linię prostą na płaszczyznę xy ; więc będziemy mieli

$$y = ax + a, \quad z = bx + \varphi(a)$$

gdzie φ jest funkcją, której kształt zależy od linii krzywej kierującej; a że pierwsze z tych zrównań daje

$$a = y - ax,$$

przeto wypada

$$z - bx = \varphi(y - ax);$$

założywszy tu $b=0$, otrzymujemy zrównanie

$$z = \varphi(y - ax),$$

należące do rzędu zrównań wyrażonych pod liczbą 140.

Gdy z wyrażenia ogólnego wyrugujemy funkcją ϕ ,
założywszy $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$, otrzymamy

$$p+aq=b.$$

142. Gdy linije proste tworzące powierzchnią mają wszystkie przechodzić przez punkt jeden tenże sam, którego spółprzystawy są α , β , γ ; zrównania ich będą

$$y-\beta=a(x-\alpha), \quad z-\gamma=b(x-\alpha),$$

aże spółczynniki a i b razem się zmieniają na każde nowe położenie linii tworzącej, zatem należy położyć $b=\phi(a)$, co daje

$$a=\frac{y-\beta}{x-\alpha}, \quad \frac{z-\gamma}{x-\alpha}=b=\phi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right),$$

wyrugowawszy funkcją ϕ , otrzymamy

$$z-\gamma=p(x-\alpha)+q(y-\beta).$$

143. Łatwo także postrzegamy, iż jeżeli linija krzywa jakakolwiek leżąca na płaszczyźnie obraca się około osi z , każdy jej punkt nakreśli koło mające swój środek na osi z , a za promień przystawę linii krzywej tworzącej, odniesioną do teyże samej osi; promień tego koła zmienia się z odległością koła od płaszczyzny xy , to jest z odległością z . Więc jeżeli założymy zrównanie koła $x^2+y^2=a^2$, ilość a powinna być uważana jako funkcya ilości z , i wzajemnie; z kądem wypada

$$x^2+y^2=\phi(z), \quad \text{czyli } z=\psi(x^2+y^2),$$

gdzie ψ wyraża funkcją odwrotną funkcyi ϕ .

Wyrugowawszy ψ , otrzymujemy zrównanie

$$py-qx=0,$$

które jest cechą powierzchni zwanych *powierzchniami obrótowemi* (*surfaces de revolution*), a których szczególnym tylko przypadkiem jest kula. Dla uważania ich pod względem najogulniejszym, należałoby oś, około której obraca się linija krzywa tworząca powierzchnią, założyć w jakimkolwiek położeniu.

W wyrażenie powierzchni, któreśmy roztrząsali, wchodziła jedna tylko funkcyja dowolna, byłoby ich więcej, gdybyśmy założyli więcej warunków w ruchu lub we własnościach linii tworzących; lecz o tej rzeczy tu wzmieniamy tylko. Jednak wkrótce będziemy mieli zręczność dania poznać jeszcze jeden oddział powierzchni znakomitych, to jest tych, które, tak jak powierzchnie krzywe walców i ostrokęgów, mogą się rozwinąć na płaszczyźnie bez rozdarcia lub podwojenia i które z tego powodu nazywają się *powierzchniami rozwijalnemi* (*surfaces développables*). (161).

Nakoniec należałoby także okazać sposób postępowania dla uszczególnienia podług dawnego warunku, kształtu funkcyj dowolnych zawartych w pierwotnych zrównaniach różnych gatunków powierzchni; lecz że główne tego sposobu użycie stosuje się do rachunku całkowego, wyłożymy go po wyłożeniu sposobu całkowania zrównań różniczkowych cząstkowych.

144. Uważmy teraz różne sposoby przejścia, od jednego punktu do drugiego na jakiegokolwiek powierzchni.

Gdy samo tylko x zmienia się i staje się $x+h$, przechodzimy od punktu M , (*fig. 31*), do punktu m leżącego na przecięciu QMm , zrobioném przez płaszczyznę przez punkt M poprowadzoną równoległą do płaszczyzny xz , i rozwinięciem przystawy $m'm$ tego przecięcia jest szereg

$$z + \frac{dz}{dx} h + \frac{d^2z}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}$$

Jeżeli zaś y zmienia się na $y+k$, a x zostaje stałym, przechodzimy od punktu M do punktu n leżącego na przecięciu PMn , utworzoném przez płaszczyznę przechodzącą przez punkt M , równoległą do płaszczyzny yz ; i rozwinięciem przystawy $n'n$ tego przecięcia będzie

$$z + \frac{dz}{dy} k + \frac{d^2z}{dy^2} \frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dy^3} \frac{k^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}$$

Zmieniając razem x i y , przejdziemy od punktu M do punktu jakiegokolwiek N , a to zrobimy dwoma odmiennymi sposobami, to jest albo kładąc $y+k$ za y w pierwsze poprzedzające rozwinięcie, albo kładąc $x+h$ na miejscu x w rozwinięcie drugie. Przez jedno z tych działań przechodzimy od przystawy $m'm$ do przystawy $N'N$, na przecięciu pmN ; przez drugie przechodzimy od przystawy $n'n$ do przystawy $N'N$ na przecięciu qnM . Jasną jest rzeczą iż te dwa przecięcia zbiec się powinny w punkcie N , bez czego założona powierzchnia nie byłaby ciągłą; więc otrzymane pod liczbą 39 i 40, wypadki powinny być to same; przeto zrównanie $\frac{d^2z}{dx dy} = \frac{d^2z}{dy dx}$, od równości przytoczonych wypadków zależące, jest tylko wyrażeniem prawa ciągłości.

Mając szczególnie uważać szereg

$$z + \frac{dz}{dx}h + \frac{dz}{dy}k + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}h^2 + \frac{2d^2z}{dx dy}hk + \frac{d^2z}{dy^2}k^2\right) + \text{i t. d.},$$

który wyraża rozwinięcie wartości przystawy z odpowiadającej ucińkom $x+h$, $y+k$, dla skrócenia wyrażać będę przez

$$z + ph + qk + \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + \text{i t. d.},$$

gdzie jest

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dx dy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t;$$

Uważamy także że stosunek

$$\frac{k}{h} = \frac{N'm'}{M'm'} = \text{sty } N' M' m',$$

oznaczać kierunek linii $M'N'$ względem osi x , i y , pokazuje względem tychże osi kierunek płaszczyzny $M'MNN'$, prowadzonej prostopadle do płaszczyzny ABC i zamykającej przecięcie MN , uważane na danej powierzchni.

145. Z uwag poprzedzających i z uwag wyłożonych pod licz. 136, wypada, iż gdy $u=0$, wyraża zrównanie powierzchni krzywej, równania różniczkowe

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dx} = 0, \text{ i } \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dy} = 0,$$

należą odpowiednie do dwóch przecięć QMm i PMn ; spółprzystawa y do pierwszego równania wchodzi jako ilość stała oznaczająca położenie płaszczyzny przecinającej, toż samo jest względem spółprzystawy x w równaniu drugim. Nie należy mieszać różniczek dz będącej w jednym równaniu z różniczką dz będącą w równaniu drugim, ponieważ są to różniczki cząstkowe (135).

Różniczka zupełna dz , czyli zbiór wyrazów pierwszego rzędu, jest

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy = p dx + q dy,$$

przeto $dz = p dx$, jest różniczką przystawy przecięcia równoległego do płaszczyzny xz , podobnie $dz = q dy$ jest różniczką przystawy przecięcia równoległego do płaszczyzny yz .

Gdybyśmy szukali różniczki przystawy przecięcia zrobionego przez płaszczyznę jakąkolwiek $M'MNN'$ prostopadłą do płaszczyzny xy , poznajemy iż nie należałoby zmieniać ilości x , osobno bez ilości y , ponieważ równanie płaszczyzny $M'MNN'$, równie jak równanie wspólnego jej przecięcia MN' z płaszczyzną xy , będąc kształtu $y = ax + \beta$, stanowi związek między spółprzystawami x, y , zatem ilość z może jednym tylko zmieniać się sposobem; lecz należałoby użyć różniczki zupełnej $dz = p dx + q dy$, a uważając iż ze równania płaszczyzny przecinającej $y = ax + \beta$, wypada $dy = a dx$, otrzymamy

$$dz = (p + aq) dx.$$

Ten przykład daje sam tłumaczenie geometryczne uwag pod licz. 46 wyłożonych, względem użycia zupeł-

nych różniczek. Zakładając związek między dwiema ilościami zmiennymi, oznaczamy kierunek, podług którego przechodzimy od jednego punktu do drugiego na danej powierzchni; albowiem gdyby przecięcie MN nie było zrobionem przez płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny xy , a zatem gdyby tego przecięcia rzutem na płaszczyznę xy była linija krzywa, wtedy linija prosta $M'N'$ mogłaby uważaną być za styczną tej krzywej w punkcie M' , i oznaczałaby położenie linii prostej dotykającej się w punkcie M , przecięcia MN zrobionego na danej powierzchni.

146. Najpiérwsza uwaga która się przedstawuje jest ta, iż granica stosunku

$$\frac{NN' - MM'}{M'N'},$$

dając styczną trygonometryczną kąta zawartego między liniją prostą dotykającą się w punkcie M , przecięcia utworzonego na powierzchni przez płaszczyznę $M'MNN'$ (58) a jej rzutem $M'N'$, mierzy pochyłość tego przecięcia względem płaszczyzny xy , a zatem wskazuje pochyłość powierzchni w kierunku MN . Lecz dla przyjsia do granicy trzeba na miejscu wyrażen

$$NN' - MM', \text{ i } M'N' = \sqrt{M'm'^2 + N'n'^2},$$

podstawić różniczki odpowiadające

$$dz = dx(p + \alpha q), \quad \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \alpha^2} \quad (145),$$

ztađ na granicę szukaną wypada

$$\frac{p + \alpha q}{\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

To załóżywszy można szukać, jakie ma być położenie płaszczyzny przecinającej $M'MNN'$, iżby poprzedzające wyrażenie, odmieniające się razem z kątem $N'M'm'$, którego styczna jest $= \alpha$, miało wartość największą. Dla rozwiązania tego zadania, trzeba róż-

nieczkować to wyrażenie co do ilości α , i współczynnik pierwszego rzędu zrównać z zerem (101), co daje

$$\frac{q-p\alpha}{(1+\alpha)^2}=0, \quad \text{złąd} \quad q-p\alpha=0, \quad \alpha=\frac{q}{p};$$

kładąc za α wartość $\frac{dy}{dx}$, otrzymamy równanie różniczkowe

$$qdx - pdy = 0,$$

które spólnie ze równaniem powierzchni

$$dz = pdx + qdy,$$

da poznać kierunek, podług którego mają po sobie następować punkta, dla zbliżania się od punktu M do płaszczyzny xy , przez łuki najpochylsze, to jest da poznać linią największego spadku, prowadzącą od punktu M do płaszczyzny xy . Ta linija, która w ogólności będzie krzywą, często się wydarza w sztukach wykreślnych.

147. Przystąpmy teraz do ścisłego stykania się powierzchni; wyobraźmy ich dwie przechodzące przez jeden tenże sam punkt mający współprzystawy x, y, z ; równanie pierwszej powierzchni zmieniając w niem x , na $x+h$, y na $y+k$, staje się

$$z + ph + qk + \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + \text{i t. d.},$$

zrównanie zaś drugiej powierzchni w podobnym razie stanie się

$$z + Ph + Qk + (Rh^2 + 2Shk + Tk^2) + \text{i t. d.};$$

odległością ich w punktach następnych, które uważamy, w kierunku przystawy z , będzie szereg

$$(p-P)h + (q-Q)k \\ + \frac{1}{2}\{(r-R)h^2 + 2(s-S)hk + (t-T)k^2\} \\ + \text{i t. d.}$$

który uczynić można zmniejszającym się, biorąc h i k bardzo małe i który będzie zmniejszał swoją wartość

coraz bardziej, gdy następnie będzie tracił wyrazy leżące w linii pierwszej, w linii drugiej, i t. d.

Rozumując tu, jak rozumowaliśmy względem linii krzywych pod liczb. 75, przekonamy się iż trzecia powierzchnia, dla której te wyrazy nie zginą, będzie konieczne przechodziła zewnątrz dwóch pierwszych powierzchni we wszystkich punktach otaczających punkt ich spólny

Gdy będziemy mieli

$$p - P = 0, \quad q - Q = 0,$$

dwie pierwsze dane powierzchnie będą się stykały i ich stykanie się będzie rzędu pierwszego; a jeżeli razem mieć będziemy

$$r - R = 0, \quad s - S = 0, \quad t - T = 0,$$

będzie stykanie się rzędu drugiego, i tak dalej.

148. Jeżeli teraz założymy, iż zrównanie drugiej powierzchni zamyka pewną liczbę ilości stałych nieoznaczonych, można tym stałym nadać taką wartość, iżby pierwsze wyrazy szeregu wyrażającego odległość między dwiema powierzchniami zginęły, a przeto można między niemi zrobić stykanie się rzędu, jaki być może największy, to jest ściśle stykanie się.

Aby dwie powierzchnie miały punkt spólny, powinniśmy ze zrównania drugiej powierzchni zamieniając w niem x' i y' , na x i y , wyprowadzić

$$z' = z,$$

rozumiejąc przez x' , y' , z' , spółprzystawy drugiej powierzchni; kładąc potem na miejscu liter

$$p, q, r, s, t, \text{ i t. d.}, \quad P, Q, R, S, T, \text{ i t. d.},$$

spółczynniki różniczkowe, które one wyrażają, powinniśmy otrzymać

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz'}{dx'}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{dz'}{dy'},$$

jeżeli chcemy aby dwie powierzchnie miały stykanie się rzędu pierwszego; aby zaś miały stykanie się rzędu drugiego, powinno być

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d^2 z'}{dx'^2}, \quad \frac{d^2 z}{dx dy} = \frac{d^2 z'}{dx' dy'}, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{d^2 z'}{dy'^2},$$

i tak dalej; co pokazuje, iż różniczkóm cząstkowym pierwszego rzędu, potém różniczkóm rzędu drugiego i t. d. zrównania drugiej powierzchni staje się zadość, gdy w nich ilości x', y', z' , i ich różniczki, zamienimy na x, y, z i na różniczki tych ilości.

149. Zastosujmy poprzedzające uwagi do płaszczyzny, biorąc jej zrównanie

$$z' = Ax' + By' + D \text{ (Trig. 176);}$$

ponieważ w tém zrównaniu są tylko trzy ilości stałe, przeto trzem tylko warunkóm pierwszego stykania się można zadość uczynić. Pierwszy daje

$$z' - z = Ax + By + D,$$

a dwa drugie dają

$$\frac{dz'}{dx'} = A = \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz'}{dy'} = B = \frac{dz}{dy}.$$

Na mocy tych warunków wypada naprzód

$$z = \frac{dz}{dx} x + \frac{dz}{dy} y + D,$$

a odcinając to zrównanie od zrównania płaszczyzny otrzymujemy,

$$z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x) + \frac{dy}{dx}(y' - y),$$

czyli

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y);$$

i to jest zrównanie płaszczyzny stycznej do pierwszej powierzchni w punkcie, którego współprzystawy są x, y, z .

Oznaczylibyśmy jeszcze tę płaszczyznę z warunku, iż na niej powinny znajdować się styczne wszystkich przecięć, które na powierzchni przez punkt M utworzyć można, albowiem zrównanie tych stycznych jest

$$dz = (p + q) dx \text{ (145)}$$

a zrównanie płaszczyzny, kładąc w niem $dy = a dx$, daje

$$dz' = A dx' + B dy' = dx(A + aB),$$

wypadek to samy z poprzedzającym, jakkolwiek jest wartość ilości a , skoro $A = p$, $B = q$.

150. Linija prostopadła do płaszczyzny stycznej w punkcie, w którym ta płaszczyzna styka się z daną powierzchnią, nazywa się normalną; zrównania jej stosownie do zrównania płaszczyzny stycznej są:

$$x' - x + p(z' - z) = 0$$

$$y' - y + q(z' - z) = 0 \text{ (Trig. 182) (*)}.$$

Odległość punktu uważanego na powierzchni krzywej, od punktu któregokolwiek wziętego na normalnej, będzie podług zrównań wyższych

$$\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2} = (z' - z) \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

a jeżeli uczynimy $z' = 0$, wypadek

$$-z \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

oznaczy długość części normalnej zawartej między daną powierzchnią a płaszczyzną xy .

151. Ponieważ w stykaniu się stopnia drugiego sześciu warunków zadość uczynić należy (148), przeto kula nie wszystkie może je wypełnić, bo jej zrównanie ogólne zamyka cztery tylko ilości stałe, to jest trzy współprzystawy środka i promień (Trig. 184); więc nie we wszystkich kierunkach może mieć tę samą krzywość, którą ma dana powierzchnia. Dla mierzenia tej krzywości trzeba użyć dwóch różnych kół ścisłestycznych, które pierwszy Euler oznaczył, a do których potem Mąż (Monge) przyszedł przez rozważanie bardzo składne, które tu wyłożymy.

(*) Znajdziemy te same zrównania w dalszym ciągu (157) przez rozważanie największości i najmniejszości.

Widzieliśmy (80), iż punkta linii odwinionej, czyli środki krzywości linii krzywej, są granicami normalnych; rozciągnijmy to opisanie do powierzchni, szukając granic przecięć ich normalnych następujących po sobie, i na ten koniec weźmy zrównania wyżej otrzymane (150).

$$x' - x + p(z' - z) = 0 \quad (a),$$

$$y' - y + p(z' - z) = 0 \quad (b).$$

Ilości x, y, z, p, q , należące do punktu, na danej powierzchni uważanego, są stałe na jedną tęż samą normalną, lecz zmieniają wartość, gdy przechodzimy do normalnej drugiej; to przejście może odbywać się w nieskończonej liczbie kierunków, bo od punktu danego można przechodzić do każdego z punktów otaczających, przeto należy razem zmieniać x, y, z ; aże szukamy tylko punktu przecięcia się jednej normalnej z drugą, więc spółprzystawy x', y', z' , należące do tego punktu, będziemy uważali jako ilości stałe.

Różniczkując tym sposobem zrównania (a) i (b), i kładąc

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy, \quad (144 \text{ i } 144),$$

znajdziemy

$$-dx - p^2 dx - pqdy + (z' - z)(rdx + sdy) = 0, \quad (c),$$

$$-dy - p^2 dy - pqdx + (z' - z)(sdx + tdy) = 0, \quad (d),$$

ponieważ zrównania (a) i (b) dają wartość ilości $x' - x$, i $y' - y$, gdy wartość ilości $z' - z$ jest znajoma, przeto aby dane zadanie mogło być rozwiązaniem, dwa zrównania (c) i (d) powinny się zgadzać w oznaczeniu ilości $z' - z$, to jest powinno być

$$\frac{dx + p^2 dx + pqdy}{rdx + sdy} = \frac{dy + q^2 dy + pqdx}{sdx + tdy};$$

co ustanawia związek między dx i dy , i pokazuje że druga normalna wtedy tylko spotyka pierwszą, gdy punkt, z którego wychodzi znajduje się na kierunku

wskazany przez wartość $\frac{dy}{dx}$; lecz w zrównaniu poprzedzającym kładąc

$$dy = m dx,$$

i porządkując według potęg ilości m , otrzymujemy wypadek

$$\begin{aligned} & \{(1+q^2)s - pqt\}m^2 + \{(1+q^2)r - (1+p^2)t\}m \\ & - \{(1+p^2)s - pqr\} = 0 \dots\dots\dots (e), \end{aligned}$$

który daje dwie wartości ilości m ; więc w każdym punkcie powierzchni dwa tylko znajdują się kierunki, w których dwie normalne w porządku następnym idące przecinają się, a zatem znajdują się na jednej tejże samej płaszczyźnie.

Prosta zmiana spółprzystaw wystarcza dla okazania związku, między temi kierunkami na danej powierzchni zachodzącego. Jasną jest rzeczą, iż można płaszczyznę styczną wziąć za płaszczyznę xy , i początek spółprzystaw umieścić w punkcie stykania się, niezmieniając jednak względnego położenia danej powierzchni i jej normalnych; lecz wtedy mamy $x=0, y=0, z=0$, i jakiekolwiek są wartości spółprzystaw x', y', z' , powinno być w zrównaniu płaszczyzny stycznej $z'=0$, co daje $p=0, q=0$, i zrównanie (e) sprowadza do

$$sm^2 + (r-t)m - s = 0, \text{ czyli } m^2 + \frac{(r-t)m}{s} - 1 = 0;$$

nazywając przez m' i m'' pierwiastki tego zrównania, mamy

$$m'm'' + 1 = 0;$$

a ponieważ teraz wszystkie linie proste stykające się z powierzchnią daną w punkcie M , (*fig. 32*), zbiegają się z swojemi rzutami na płaszczyźnie xy , przeto ilości m' i m'' , oznaczając będą styczne kątów zawartych między osią x , a linijami prostymi wskazującemi kierunki, na których znajdują się normalne przecinające się, przeto te kierunki będą do siebie prostopadłe.

152. Widzimy także, iż poprowadzone przez oś z , która w teraźniejszym przypuszczeniu zbiega się z normalną MG , i przez każdą styczną MN' i Mn' , odpowiadającą wartościom m' , i m'' , płaszczyzny, przetrną daną powierzchnią w dwóch liniach krzywych, których koła ścisłestyczne będą kołami ścisłestycznymi powierzchni, ponieważ będą miały dwie normalne wspólne z tą powierzchnią, gdy inne krzywe mieć będą jedną tylko normalną wspólną.

Promienie tych kół służą do mierzenia krzywości powierzchni danej. Wyrażenie tych promieni jest widocznie wyrażeniem odległości

$$\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2},$$

między przecięciem się normalnych, a punktem nważanym na powierzchni. Kładąc za $(x'-x)$ i $(y'-y)$, wartości wyprowadzone ze zrównań (a) i (b), znajdziemy wyrażenie

$$(z'-z)\sqrt{1+p^2+q^2},$$

w którym trzeba tylko podstawić za $(z'-z)$, wartość wyprowadzoną ze zrównania (c), lub (d); lecz otrzymamy wartość niezależną od m , rugując naprzód z tych dwóch

zrównań $\frac{dy}{dx}$, co daje

$$\frac{-(1+p^2) + (z'-z)r}{pq - (z'-z)s} = \frac{pq - (z'-z)s}{-(1+q^2) + (z'-z)t},$$

a kładąc

$$z'-z\sqrt{1+p^2+q^2} = \delta, \text{ czyli } z'-z = \frac{\delta}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

potem tę wartość za $(z'-z)$ podstawując w zrównanie poprzedzające, niszcząc mianowniki i porządkując według potęg ilości δ , wypada zrównanie

$$(rt-s^2)\delta^2 - \left\{ (1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r \right\} \delta \sqrt{1+p^2+q^2} + (1+p^2+q^2)^2 = 0 \dots \dots \dots (f),$$

którego pierwiastki będą wyrażały promienie dwóch kół ścisłestycznych.

Ponieważ wartości m dane przez funkcyę ilości x , y , z , zmieniają się razem z temi zmiennými na każdy punkt danej powierzchni, przeto wypadają z nich zrównania różniczkowe

$$dy = m'dx, \quad dy = m''dx,$$

oznaczające na płaszczyźnie xy dwie linije krzywe przechodzące przez punkt M , (*fig. 31*), będące rzutami linij krzywych, w kierunku których idąc natrafimy na normalne przecinające się.

Każdy punkt M danej powierzchni znajduje się na dwóch takich linijach krzywych; linija krzywa odpowiadająca najmniejszej wartości δ , jest liniją największej krzywości, druga zaś jest liniją krzywości najmniejszej.

Gdy wartości δ mają jeden tenże sam znak, obie krzywości powierzchni są obrócone w jedną stronę, są zaś obrócone w strony przeciwne, gdy wartości δ mają znaki różne.

Ze zrównania danej powierzchni i ze zrównań (b), (c), (d), (e), (151), wyrzuciwszy ilości x , y , z , m , otrzymamy wyrażone przez spółprzystawy x , y , z , zrównanie powierzchni będącej miejscem wszystkich środków krzywości danej powierzchni, i w ogulności złożonej z dwóch osobnych części, z których jedna będzie zamykała wszystkie środki największej krzywości, druga wszystkie środki krzywości najmniejszej (*).

(*) W rozdziale V tomu I *Traité du calcul etc.* in 4to znajdują się wzory za pomocą których można z danych wymienionych krzywości, oznaczyć krzywość przecięcia zrobionego na powierzchni przez jakąkolwiek płaszczyznę.

O punktach osobliwych powierzchni krzywych, oraz o największościach i najmniejszościach maxima et minima funkcij o wielu zmiennych.

153. W powierzchniach krzywych punkta osobliwe nie tylko wypadają w liczbie ograniczonej i osobne, ale niekiedy następują ciągiem jedno po drugim, i tworzą linije, które możnaby nazwać linijami osobliwemi (*lignes singulières*); jedno i drugie odpowiadają szczególnym wartościom współczynników różniczkowych przystawy powierzchni danej, podobnym do wartości, które nas przywiodły do oznaczenia punktów osobliwych w linijach krzywych. Lecz dla poznania kształtu powierzchni, nie dosyć jest szukać punktów jej pojedynczo branych, ale potrzeba tak jak dla jej wykreślenia, wyobrazić zbiór przecięć utworzonych przez płaszczyzny lub powierzchnie ulegające prawu stałemu i oznaczonemu.

Tym to sposobem można rozpoznać w którym punkcie powierzchni, jej przystawa jest największa lub najmniejsza, to jest większa lub mniejsza od wszystkich przystaw bezpośrednie ją otaczających, z którejkolwiek strony branych, albowiem ta przystawa powinna być największą w każdym przecięciu, utworzonym na danej powierzchni przez różne płaszczyzny przez tę przystawę przechodzące. Jakoż na jedno z tych przecięć kładąc

$$dy = z dx,$$

współczynnik różniczkowy przystawy z , uważanej za przystawę tego przecięcia, wyrażający się przez

$$\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{p + aq}{\sqrt{1 + z^2}} \quad (146),$$

powinien być równy zeru, albo ilości nieskończenie wielkiej (101), niezależnie od wartości ilości a , skoro z ma mieć wartość największą na każde położenie płaszczyzny przecinającej.

Biorąc pierwszy warunek, mamy

$$p=0, \quad q=0, \quad \text{czyli} \quad \frac{dz}{dx}=0, \quad \frac{dz}{dy}=0;$$

za pomocą tych równań oznaczymy ućinki punktu szukanego; lecz tak jak w liniach krzywych, z tego jednego warunku nie można wnosić, czy jest największość lub najmniejszość, wypada tylko, że płaszczyzna styczna jest równoległa do płaszczyzny xy , bo równanie jej sprowadza się w tym razie do $z'-z=0$ (149).

Jeżeli daną powierzchnią jest powierzchnia kulista wyrażona przez równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

mamy

$$p = -\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{y}{z},$$

złąd

$$x=0, \quad y=0,$$

i wyrażenie

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

pokazuje nam, że wszystkie wartości przystawy z , odpowiadające ućinkom różnym od zera, są mniejsze od a .

154. Uważając tylko ciąg wartości przystawy z , natrafiamy też na największość i na najmniejszość, dla których współczynniki różniczkowe p i q , stają się nieskończenie wielkimi; oto jest przykład:

Jeżeli w równaniu

$$z = b + (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}},$$

założymy $x=0, y=0$, wypada $z=b$; biorąc zaś x i y różne od zera, mamy $z > b$, więc wartość $z=b$, jest najmniejszą; lecz kładąc $x=0, y=0$, w wyrażeniach

$$p = \frac{2x}{3(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}}, \quad q = \frac{2y}{3(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}},$$

otrzymujemy §. Dla poznania prawdziwej ich warto

zakładamy $y=mx$, co zamienia poprzedzające wyrażenia na

$$p = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}(1+m^2)^{\frac{2}{3}}}, \quad q = \frac{2m}{3x^{\frac{1}{3}}(1+m^2)^{\frac{2}{3}}},$$

które, gdy jest $x=0$, a m ma wartość skończoną, stają się rzeczywiście nieskończenie wielkimi, ztąd wypada $y=0$.

W istocie jeźlibyśmy szukali kształtu tej części powierzchni, poznalibyśmy bez trudności, że punkt odpowiadający ucińkom $x=0$, $y=0$, jest gatunkiem dziobu czyli zwrótu, za który dalej powierzchnia nie rozciąga się, podobnym do dziobu, jakiby się utworzył z obrótu linii krzywej EM , (*fig. 15*), około linii prostej PM . Postrzeglibyśmy także, iż p i q , przedstawiają się pod kształtem $\frac{0}{0}$, gdyż położenie płaszczyzny stycznej w tym punkcie jest nieoznaczone, bo każda płaszczyzna przez oś z przechodząca styka się z powierzchnią i ją przecina.

Znajdują się na powierzchniach krzywych szeregi punktów, czyli linije, od których powierzchnie zwracają się nazad, te linije nazywają się *krawędziami zwrotu* (*arêtes de rebroussement*), czego przykład wkrótce obaczymy; są także inne linije, w których krzywosc zmienia kierunek, i te nazywają się *linijami nagięcia* (*lignes d'inflexion*); można je rozeznac przez zmianę znaku promieni krzywosci; lecz te wszystkie szczegóły nie będą przedmiotem naszych uwag, bo wychodzą za granice, któreśmy sobie zakreslili.

Przejdźmy teraz do szukania zupełnie analitycznego największosci i najmniejszosci w funkcjach o dwu zmiennych.

155. Jasną jest rzeczą, iż różnica

$$u' - u = f(x+h, y+k) - f(x, y),$$

między dwiema następnemi wartościami funkcyi, gdy przyrostki są bardzo małe, powinna być dodatna, gdy

piérwotna wartość u jest najmniejszą, w przeciwnym zaś przypadku powinna być odjemna.

Dla roztrząszenia wypadków tego warunku, należy w ogulności różnicę wyżej wskazaną rozwinąć według rosnących potęg przyrostków h i k , lecz ponieważ ograniczamy się tu przypadkiem, w którym współczynniki różniczkowe nie stają się nieskończenie wielkimi, będziemy mogli użyć szeregu z liczby 41, i dla skrócenia wyrazimy współczynniki

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dxdy}, \frac{d^2u}{dy^2}, \text{ i t. d.,}$$

przez $B, C, D, E, F, \text{ i t. d.}$,
kładąc potem $h = \alpha h$, otrzymujemy szereg

$$u' - u = \frac{h}{1} (B - C\alpha) + \frac{h^2}{1.2} (D + 2E\alpha + F\alpha^2) + \text{ i t. d.,}$$

w którym wyraz mający przyrostek h w potęgde piérwszej, może stać się większym od summy wszystkich innych, a że odmieniałby znak razem z przyrostkiem h , przeto w punkcie największości, lub najmniejszości powinien ginąć, z tej uwagi wypada zrównanie

$$B + C\alpha = 0,$$

a ponieważ to zrównanie powinno służyć przy jakimkolwiek związku między h i k zachodzącym, to jest niezależnie od wartości α , przeto będziemy mieli

$$B = 0, C = 0, \text{ czyli } \frac{du}{dx} = 0, \frac{du}{dy} = 0,$$

tak jakośmy to już wyprowadzili z roztrząsania geometrycznego (153).

Gdy warunki takowe będą dopełnione, potrzeba jeszcze aby współczynniki D, E, F , nie stały się równe zeru, a nadto aby znak wyrazu mającego h^2 nie zależał od wartości α . Dając temu wyrazowi kształt

$$\frac{Fh^2}{1.2} \left(\frac{D}{F} + \frac{2E}{F}\alpha + \alpha^2 \right), \dots \dots \dots (a)$$

widzimy, iż znak jego zostanie zawsze tenże sam, skoro wielowyrząd

$$\frac{D}{F} + \frac{2F}{F'}a + a^2,$$

nie odmienni swego znaku; a to wypadnie wtedy, gdy zrównany z zerem daje wartości ilości a , albo urojone, albo rzetelne równe; te zaś wartości ogólnie wyrażone przez

$$a = \frac{E \pm \sqrt{E^2 - FD}}{F},$$

będą urojone gdy $E^2 < FD$, a równe gdy $E^2 = FD$.

Bez tych warunków nie będzie ani największości, ani najmniejszości, a że one wymagają, aby ilości F i D miały jeden tenże sam znak, więc gdy się tak wydarza, znak wyrażenia (a) będzie zależał tylko od znaku spółczynnika F , a gdy ten będzie dodatny, będziemy mieli najmniejszość, gdy zaś będzie odjemny, będziemy mieli największość.

Euler w dziele *Institutiones calculi differentialis*, wskazuje jeden tylko warunek, to jest iż D i F , powinny być z jednym tymże samym znakiem; pierwszy zaś Lagranż pokazał, iż ten jeden warunek nie jest dostatecznym, i dał w tej rzeczy teorię, do której brakło tylko roztrząsania przypadku, gdy $E^2 = FD$, co później Franse *Français* wykonał (*).

Jeżliby spółczynniki drugiego rzędu zginęły razem ze spółczynnikiem rzędu pierwszego, nie byłoby największości, ani najmniejszości, chyba wtedy kiedyby spółczynniki rzędu trzeciego także zginęły, i kiedyby znak summy wyrazów składających spółczynniki rzędu czwartego, nie zależał zgoła od znaku ilości a , to jest kiedyby wielowyrząd zamykający ilość a w potęgę czwartej, będąc uważany jako zrównanie tegoż stopnia

(*) Obacz *Traité de Calcul. etc.* in 4to Tom III str. 631.

dał pierwiastki to jest wartości ilości a albo urojone, albo rzetelne równe.

156. Dla przykładu weźmy zadanie podobne do zadania rozwiązanego pod liczb. 103, następne: *Podzielić ilość a na trzy części x , y , $a-x-y$, takie, aby mnożość $x^m y^n (a-x-y)^p$ miała wartość największą.*

Mamy przeto

$$u = x^m y^n (a-x-y)^p,$$

$$\frac{du}{dx} = x^{m-1} y^n (a-x-y)^{p-1} (ma - mx - my - px) = 0,$$

$$\frac{du}{dy} = x^m y^{n-1} (a-x-y)^{p-1} (na - nx - ny - py) = 0;$$

$$\text{mnożniki } m(a-x-y) - px, \quad n(a-x-y) - py,$$

zrównane z zerem dają równania

$$m(a-x-y) - px = 0, \quad n(a-x-y) - py = 0,$$

z których po wyrugowaniu mnożnika $(a-x-y)$, otrzymujemy

$$mpy - npy = 0, \quad \text{złąd } y = \frac{nx}{m},$$

potém wprowadzamy

$$x = \frac{ma}{m+n+p}, \quad y = \frac{na}{m+n+p}, \quad a-x-y = \frac{pa}{m+n+p}.$$

Dla dowiedzenia się czy te wartości należą w istocie do największości, podstawimy je w wyrażeniach ogólnych

$$\frac{d^2 u}{dx^2}, \quad \frac{d^2 u}{dx dy}, \quad \frac{d^2 u}{dy^2};$$

robiąc dla skrócenia $m+n+p=q$, znajdziemy

$$D = -(m+p) \left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1} \left(\frac{na}{q}\right)^n \left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1},$$

$$E = -\frac{mna}{q} \left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1} \left(\frac{na}{q}\right)^{n-1} \left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1},$$

$$F = -(n+p) \left(\frac{ma}{q}\right)^m \left(\frac{na}{q}\right)^{n-1} \left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1}.$$

Ilości D i F obie są odjemne, i przekonamy się bez trudności, że czynią zadosyć warunkowi $E^2 < DF$, skoro wykładniki m, n, p , są dodatne; a tak otrzymaliśmy największość szukaną.

157. Dla zastosowania do geometryi, oznaczmy najkrótszą odległość między powierzchnią a danym punktem.

Niech x, y, z , wyrażają spółprzystawy punktu szukanego na powierzchni, a x', y', z' , spółprzystawy punktu danego, odległość między temi dwoma punktami wyrazi się przez

$$u = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2},$$

co powinno być uważane jako funkcyja dwóch ilości zmiennych x , i y , bo z jest funkcyą tychże ilości, dla związku między niemi wyrażonego przez zrównanie danej powierzchni. Różniczkując podług tej uwagi ilość u (136), kładąc $dz = p dx + q dy$, i znosząc mianowniki w wartościach $\frac{du}{dx}$ i $\frac{du}{dy}$, znajdziemy zrównania

$$x' - x + (z' - z)p = 0, \quad y' - y + (z' - z)q = 0,$$

które są zupełnie takie, jakieśmy otrzymali na normalną danej powierzchni (150).

Jakoż widoczną jest rzeczą, iż ta linija daje najmniejszość, gdy punkt znajduje się ze strony powierzchni wypukłej; w przeciwném położeniu daje czasem najmniejszość, a czasem największość.

Zastosowanie rachunku różniczkowego do linii krzywych podwójnej krzywości i do powierzchni odwijalnych.

158. Wiemy iż jedno zrównanie z trzema ilościami zmiennymi należy do powierzchni, dwa zaś zrównania z trzema ilościami zmiennymi wyrażają liniją krzywą podwójnej krzywości.

Gdy chcemy do linii krzywych podwójnej krzywości zastosować rachunek różniczkowy, można je uważać jako granice wielokątów, których trzy boki po sobie następnie idące nie leżą na jednej płaszczyźnie. Przedłużenie jednego z tych boków, daje położenie stycznej równie jak w liniach krzywych płaskich.

Otrzymamy zrównania stycznej MT , (*fig. 33*), uważając że rzuty jej są stycznymi rzutów krzywej XM ; a ponieważ dosyć jest znać dwa jej rzuty, przeto weźmiemy rzuty znajdujące się na płaszczyznach xy , i xz . Więc oznaczając przez x, y, z , spółprzystawy punktu M , w którym styczna styka się z linią krzywą, a przez x', y', z' , spółprzystawy jakiegokolwiek punktu stycznej, zrównanie linii $T'M'$ stycznej do rzutu krzywej $X'M'$ będzie

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x) \quad (68),$$

zrównanie zaś linii $T''M''$, stycznej do rzutu krzywej $X''M''$, będzie

$$z' - z = \frac{dz}{dx}(x' - x),$$

w którym należy tylko za x, y i ich różniczki podstawić wartości wyprowadzone ze zrównań rzutów linii krzywej danej.

159. Dwie styczne następujące po sobie TM i tm , wskazują płaszczyznę przechodzącą przez dwa boki następne, którą nazywają płaszczyzną ściślestyczną (*plan osculateur*). Znaleść można jej zrównanie uważając ją jako przechodzącą przez trzy następne punkta linii krzywej; więc niech będzie jej zrównanie

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$

ponieważ ma się na niej znajdować punkt, którego spółprzystawy są x, y, z , przeto będzie

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

aby się zaś dwa następne punkta na niej znajdowały,

powinny też różniczki pierwszego i drugiego jej zrównania, być równe takimże różniczkom zrównania danej linii krzywej.

Można byłoby uważać jedną z różniczek dx , dy , dz , za stałą (133), lecz będzie symetryczniej brać je wszystkie razem za zmienne, co daje

$$Adx + Bdy + Cdz = 0, \quad Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = 0,$$

a ztąd

$$\frac{A}{C} = \frac{dyd^2z - dzd^2y}{dx d^2y - dy d^2x}; \quad \frac{B}{C} = \frac{dzd^2x - dx d^2z}{dx d^2y - dy d^2x},$$

potém odciągając zrównanie

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

od zrównania

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0$$

dzieląc przez C , i za $\frac{A}{C}$ i $\frac{B}{C}$ kładąc ich wartość, otrzymamy znakomity ze swego kształtu następny wypadek

$$(x' - x)(dyd^2z - dzd^2y) + (y' - y)(dzd^2x - dx d^2z) + (z' - z)(dx d^2y - dy d^2x) = 0$$

Kładąc w nim za dwie którekolwiek z trzech spółprzystaw x , y , z , wartości ich wyprowadzone ze zrównań danej linii krzywej, otrzymamy zrównanie płaszczyzny ściśle stycznej uszczególnione przez spółprzystawę pozostałą.

Tu się przedstawia zgręczność sprawdzenia tego cośmy czytali na końcu lic. 132, albowiem, jeżeli uważając naprzód y i z , jako funkcyje ilości x położymy

$$dy = p dx, \quad d^2y = q d^2x, \quad dz = p' dx, \quad d^2z = q' d^2x$$

a potem przypuścimy iż trzy ilości zmienne x , y , z , są funkcyami czwartej t , będziemy mieli (131) wartości

$$d^2y = q dx^2 + p d^2x, \quad d^2z = q' dz^2 + p' d^2x,$$

które podstawione w zrównanie płaszczyzny, zniszczą d^2x

i dadzą tenże sam wypadek, jakibyśmy otrzymali, biorąc różniczkę dx za stałą.

160. Uważmy także, że różniczka łuku linii krzywej ma wyrażenie

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

ponieważ jest to wyrażenie odległości punktów M i m , których współprzystawy odpowiednie są:

$$x, y, z, \quad x+dx, y+dy, z+dz.$$

161. Szereg stycznych do linii krzywej podwójnej krzywości, czyli co na to samo wychodzi, szereg płaszczyzn do niej ściśle stycznych, przez punkta niedalekie siebie prowadzonych, tworzy wielościan złożony z płaszczyzn kątowych stykających się jedna z drugą bokiem wspólnym, mogących się sprowadzić do jednej tej samej płaszczyzny, czyli rozwinąć, obracając się około boku wspólnego, co przedstawia figura 34. Jeżeli dla większej prostości, uważać naprzód będziemy na figurze linie tylko ciągłe, poznamy, jakim sposobem boki wielokąta $MM_1M_2M_3$ i t. d., przedłużone w jednym kierunku tworzą kąty

$$TM_1T_1, T_1M_2T_2, T_2M_3T_3, T_3M_4T_4, \text{ i t. d.},$$

położone naprzód na różnych płaszczyznach, które się sprowadzają do jednej, obracając je około linii

$$M_1T_1, M_2T_2, M_3T_3, \text{ i t. d.},$$

Uważając potem ich przedłużenia w kierunku przeciwnym, to jest części kropkowane i krzyżujące się z kierunkiem pierwszych, a przechodzące nad niemi, widzimy rodzącą się drugą część wielościanu, która spotyka część pierwszą na bokach wielokąta, który w tym razie staje się linią zwrotu wielościanu.

Z rzeczy tu wypadła uważać, że każdy bok tego wielokąta, może być uważany jako przecięcie się dwóch ścian przyległych wielościanu, a każdy kąt, jako przecięcie się trzech ścian następujących po sobie tegoż wielościanu.

To założywszy, jeżeli wyobrazimy że punkta hrane

na danej linii krzywej dla utworzenia wielokąta, zbliżają się do siebie coraz bardziej, wielościan ciągle dążyć będzie do ciała ciągłego, które będzie granicą wielościanu, tak jak walce i ostrokąty są granicami graniastopów i ostrostopów, a linia zwrotu zamieni się na linią krzywą daną, która się także nazywa *krawędzią zwrotu* (*Parête de rebroussement*) powierzchni utworzonej przez jej styczne. Taki jest początek najprostszego powierzchni odwijalnych pod liczb. 143 wzmiankowanych.

Mając zrównania danej linii krzywej, łatwo otrzymamy zrównanie powierzchni utworzonej przez jej styczne; albowiem, jeżeli w zrównaniach stycznej

$$y' - y = \frac{dy}{dx} (x' - x),$$

$$z' - z = \frac{dz}{dx} (x' - x) \quad (158),$$

dla opuszczenia krósek należących do jej spółprzystaw, zamienimy x, y, z , na α, β, γ , i w zrównaniach rzutów linii danej krzywej i w jej różniczkach, napiszemy

$$\beta = \varphi(\alpha), \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = \varphi'(\alpha), \quad \gamma = \psi(\alpha), \quad \frac{d\gamma}{d\alpha} = \psi'(\alpha),$$

zrównania stycznej staną się

$$y - \varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha)(x - \alpha) \dots \dots \dots (a),$$

$$z - \psi(\alpha) = \psi'(\alpha)(x - \alpha) \dots \dots \dots (b),$$

i takowa linia przez jedną tylko ilość α jest uszczególniona. Więc wyrzuciwszy ilość α , co zawsze wykonać można, skoro funkcyje φ i ψ są znajome, wypadające zrównanie między x, y, z , będzie należało do zbioru stycznych danej linii krzywej, a zatem będzie zrównaniem powierzchni przez styczne utworzonej.

Jasną jest rzeczą, że to zrównanie okaże nam, czy linia krzywa dana jest pojedynczej, lub podwójnej krzywości, ponieważ w pierwszym przypadku powierzchnia

wyrażona przez zrównanie będzie płaską, a w drugim krzywą.

Gdy kształt funkcyj ϕ i ψ nie jest dany, rugowanie ilości α odbywa się tylko przez różniczkowanie, i przychodzimy wtedy do ogólnej cechy powierzchni odwijalnych. Uważamy, że zrównanie (a) zamykając związek między x, y, α , pokazuje, że ilość α jest funkcją dwóch innych; więc pod tym względem różniczkując zrównanie (a) i (b), raz co do ilości x , drugi raz co do ilości y , i dla skrócenia kładąc

$$dz = p dx + q dy, \quad \frac{d\alpha}{dx} = \alpha', \quad \frac{d\alpha}{dy} = \alpha'';$$

po uproszczeniu otrzymując

$$\begin{aligned} 0 &= \phi'(\alpha) + (x - \alpha)\alpha' \phi''(\alpha), \\ 1 &= (x - \alpha)\alpha'' \psi''(\alpha), \\ p &= \psi'(\alpha) + (x - \alpha)\alpha' \phi''(\alpha), \\ q &= (x - \alpha)\alpha'' \psi''(\alpha); \end{aligned}$$

kładąc w wartościach p i q , za $(x - \alpha)\alpha'$, i za $(x - \alpha)\alpha''$, wartości wyprowadzone z dwóch pierwszych zrównań, będą p i q wyrażone przez dowolne funkcyje samej tylko ilości α , więc mieć będziemy

$$p = \pi(q),$$

gdzie π wyraża funkcją zależącą od ϕ i ψ i równie jak one dowolną.

Teraz jeżeli będziemy różniczkowali zrównanie $p = \pi(q)$, następnie raz co do ilości x , drugi raz co do ilości y , kładąc jak pod liczbą 151

$$dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy,$$

otrzymamy

$$r = \pi'(q)s, \quad s = \pi'(q)t,$$

rugując funkcją π' , otrzymamy w końcu zrównanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu

$$rt - s^2 = 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{d^2 z}{dx^2} \frac{d^2 z}{dy^2} - \left(\frac{d^2 z}{dx dy} \right)^2 = 0,$$

wyrażające ogólną cechę powierzchni odwijalnych przez Eulera odkrytą.

Uważmy iż zrównanie (f), z pod liczb. 152, kładąc w niem $rt-s^2=0$, sprowadza się do wyrazu pierwszego, co pokazuje iż powierzchnie odwijalne mają tylko jedną krzywosć, i że jedna z wartości δ w tym przypadku staje się nieskończenie wielką. Linija krzywosci do tego należąca, jest zupełnie linią stycznych tworzących, która przechodzi przez punkt uważany.

Płaszczyzna stykająca się z linią krzywą w tym punkcie, przechodzi przez tęż linią prostą, w której wszystkich punktach rozciąga się stykanie między płaszczyzną i daną powierzchnią, co łatwo jest widzieć, ponieważ ta płaszczyzna jest granicą płaszczyzn prowadzonych przez dwie styczne następujące po sobie.

Ta własność szczególna powierzchniów odwijalnym, i wypadająca z tej własności, iż są one złożone z linii prostych po dwie z sobą przecinających się, rozróżnia je od wszystkich innych powierzchni, których w ogólności w jednym tylko punkcie dotykać się płaszczyzna może.

162. Poprowadzenie normalnej, do linii krzywej uważanej w przestrzeni, jest zadaniem nieoznaczonem, bo znajduje się nieograniczona liczba linii prostych, które przechodząc przez jeden tenże punkt dany, są wszystkie razem prostopadłe do stycznej; zbiór tych linii prostych tworzy płaszczyznę prostopadłą do tejże stycznej, nazywaną płaszczyzną normalną (*plan normal*). Dając zrównaniom stycznej kształt (150)

$$x'-x=\frac{dx}{dz}(z'-z), \quad y'-y=\frac{dy}{dz}(z'-z),$$

widzimy, iż zrównanie płaszczyzny normalnej będzie

$$(x'-x)\frac{dx}{dz}+(y'-y)\frac{dy}{dz}+(z'-z)=0,$$

czyli

$$(x'-x)dx+(y'-y)dy+(z'-z)dz=0 \dots (1)$$

Uważmy teraz płaszczyznę normalną w punkcie następnym; jasną jest rzeczą, iż ta płaszczyzna przecnie się z płaszczyzną pierwej oznaczoną, i że tego przecięcia spółprzystawy x' , y' , z' , nie zmieniają się, chociaż x zmienia się na $x+dx$; więc wtedy będziemy mieli

$$(x'-x)d^2x+(y'-y)d^2y+(z'-z)d^2z-d^2s=0 \dots (2),$$

gdzie d^2s znaczy $dx^2+dy^2+dz^2$;

za pomocą zrównań (1) i (2) oznaczmy linią prostą, o którą rzecz idzie. Ze zrównania wyrażającego tę linią i ze zrównań danej linii krzywej rugując x , y , z , otrzymamy jedno tylko zrównanie należące do powierzchni, która jest granicą następujących po sobie przecięć płaszczyzn normalnych, tak jak linia odwiniona w liniach krzywych płaskich, jest granicą następujących po sobie przecięć ich linii normalnych (80).

Ta powierzchnia widocznie jest odwijalną, bo równie jak i powierzchnia stycznych składa się z linii prostych po dwie z sobą się przecinających, ponieważ, jeżeli na miejscu linii krzywej podstawimy wielokąt, przecięcia pierwszej płaszczyzny normalnej z drugą, i drugiej z trzecią, będą oba na płaszczyźnie drugiej, i tak dalej następnie.

Co potwierdza też analiza; albowiem, jeżeli zamienimy x na α , jak w liczbie poprzedzającej, weźmiemy różniczkę $d\alpha$ za stałą, i opuścimy kreski nad literami, zrównania (1) i (2) zamieniają się na

$$x-\alpha+\{y-\varphi(\alpha)\}\varphi'(\alpha)+\{z-\psi(\alpha)\}\psi'(\alpha)=0 \dots \dots \dots (1'),$$

$$\{y'-\varphi(\alpha)\}\varphi''(\alpha)+\{z'-\psi(\alpha)\}\psi''(\alpha)-1-\varphi'(\alpha)^2-\psi'(\alpha)^2=0. (2');$$

drugie zrównanie będąc różniczką pierwszego co do ilości α , pokazuje iż można różniczkować pierwsze ze względu na x i y nie odmieniając ilości α , ponieważ zbiór wyrazów ze zróżniczkowania tej ilości wypada-

jących jest, jak zrównanie (2') okazuje, równy zeru. Więc ze zróżniczkowania tylko pierwszego otrzymamy.

$$1 + p\psi'(\alpha) = 0, \quad \phi'(\alpha) + q\psi'(\alpha) = 0,$$

ząd wniesć, tak jak w liczb. poprzedzającej, wypada, że

$$p = \pi(q) (*).$$

163. Jesteśmy teraz w stanie oznaczenia krzywości czyli zgięć linii krzywej podwójnej krzywości. Pierwszą krzywością, którąby się i wtedy jeszcze znajdowała, kiedybyśmy odwinęli powierzchnię jej stycznych, czyli powierzchnią płaszczyzn jej ściślestycznych, jest krzywość koła będącego granicą wszystkich kół precho-

(*) Jeżeli w zrównaniu (1'), zamienimy x na z , y na x , z na y , i uczynimy

$$\text{możemy położyć} \quad \alpha + \phi(\alpha)\phi'(\alpha) + \psi(\alpha)\psi'(\alpha) = m,$$

$$\text{ząd wypada} \quad \phi'(\alpha) = -\Phi(m), \quad \psi'(\alpha) = -\Psi(m),$$

$$z - m = x\Phi(m) + y\Psi(m) \dots \dots \dots (1''),$$

$$-1 = x\Phi'(m) + y\Psi'(m) \dots \dots \dots (2''),$$

Te zrównania wypadające ze zrównania płaszczyzny $z = Ax + By + m$, w którym uczyniliśmy dwie z trzech ilości stałych funkcjami trzeciej, należą do szeregu przecięć płaszczyzny ruszającej się w przestrzeni jakimkolwiek sposobem; ten jest najzwyczajniejszy wykład tworzenia się powierzchni odwijalnych.

Łącząc do zrównań (1'') i (2''), różniczkę zrównania drugiego, wziętą ze względu tylko na ilość m , dla przejścia do punktu wspólnego dwóch po sobie następujących przecięć płaszczyzn tworzących, będziemy mieli na ten punkt

$$0 = x\Psi''(m) + y\Psi'(m); \dots \dots \dots (3''),$$

a jeżeli ze zrównań (1''), (2''), i (3''), wyrzucimy ilość m , otrzymamy zrównanie na krawędź zwrotu powierzchni odwijalnej (161).

Oddział powierzchni odwijalnych nie wszystkie zamyka powierzchnie przez ruch linii prostej utworzone; są prócz tego powierzchnie zwane, *powierzchniami skośnemi surfaces, gauches i réglées*. Obacz *Traité du Calcul* in 4to T. I. p. 606. T. III p. 566.

dających przez trzy po sobie następujące punkta linii krzywej, a zatem leżącego na płaszczyźnie ścisłestycznej. Jego środek będący przecięciem się płaszczyzny ścisłestycznej, z dwiema płaszczyznami normalnemi po sobie następującemi, oznacza się używając zrównań z lic. 159, i zrównań (1) i (2) z liczby poprzedzającej.

Z tychże zrównań oznaczone wartości

$$(x'-x), (y'-y), (z'-z),$$

podstawiwszy w wyrażenie

$$\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2},$$

otrzymamy promień szukany, który oznaczmy przez u .

Jeśli dla skrócenia założymy

$$dx d^2 y - dy d^2 x = Z,$$

$$dz d^2 x - dx d^2 z = F,$$

$$dy d^2 z - dz d^2 y = X,$$

oznaczając każde wyrażenie literą w niem nieznajdującą się, zrównanie płaszczyzny niemalstycznej (159) zamieni się na

$$X(x'-x) + F(y'-y) + Z(z'-z) = 0;$$

łącząc to zrównanie ze zrównaniem pierwszej płaszczyzny normalnej z liczby poprzedzającej, otrzymamy wyrażenie ilości $(x'-x)$ i $(y'-y)$ przez $(z'-z)$, które kładąc w zrównanie drugiej płaszczyzny normalnej, znajdziemy naprzód

$$z'-z = \frac{(Xdy - Fdx)ds^2}{D},$$

gdzie

$$D = (Xdz - Zdy)d^2 x + (Zdx - Xdz)d^2 y + (Fdy - Fdx)d^2 z,$$

potem

$$x'-x = \frac{(Fdz - Zdy)ds^2}{D},$$

$$y'-y = \frac{(Zdx - Xdz)ds^2}{D};$$

podstawując te wartości w wyrażenie u , znajdujemy

$$u^2 = \frac{\{ (Xdy - Ydx)^2 + (Zdx - Xdz)^2 + (Ydz - Zdy)^2 \} ds^4}{D^2};$$

a że, jak o tém łatwo przekonać się możemy,

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

przeto, dodając potęgę drugą tego wyrażenia do pierwszego mnożnika w liczniku ilości u , otrzymamy

$$u^2 = \frac{(X^2 + Y^2 + Z^2) ds^6}{D^2},$$

ilość D po uskuteczniöném uproszczeniu sprowadza się do $X^2 + Y^2 + Z^2$, przeto

$$u^2 = \frac{ds^6}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

Przecięcie się dwóch płaszczyzn normalnych po sobie następujących, będąc prostopadłe do płaszczyzny koła przechodzącego przez trzy punkta wzięte na linii krzywej danej, jest jego osią, i każdy punkt tej osi może służyć do nakręślenia koła wzmienionego, biorąc za promień odległość tego punktu od punktów okręgu koła; lecz między temi wszystkiemi promieniami odróżniamy pod nazwiskiem *bezwzględnego promienia krzywości*, promień znajdujący się na samej płaszczyźnie koła, któryśmy już znaleźli.

Wartość ilości x' , y' , z' , da poznać położenie środka krzywości; a wyrzucając ilości x , y , z , otrzymamy zrównania linii krzywej utworzonej przez wszystkie środki; lecz ta linija nie jest linią odwinioną linii krzywej danej, skoro ta nie leży na jednej płaszczyźnie.

164. Drugą krzywością czyli drugiem zgięciem linij krzywych podwójnej krzywości, jest krzywość powierzchni odwijalnych utworzonych przez ich styczne, którą wskazują kąty zawarte między płaszczyznami ściśle stycznymi, tak jak pierwsze zgięcie wskazują kąty

zawarte między ich stycznými. Lecz linije proste, które są przecięciami płaszczyzn normalnych, będąc prostopadłe do płaszczyzn ścislestycznych, zamykają między sobą tenże kąt, jaki mają te płaszczyzny; nadto ponieważ te linije proste tworzą swoim zbieżeniem się krawędź zwrótu powierzchni powstałej przez płaszczyzny normalne, jasną jest rzeczą, że styczne tej krawędzi czynią między sobą kąty równe kątom zawartym między odpowiednemi płaszczyznami ścislestycznými, a zatem iż *drugie zgięcie danej linii krzywej, jest równe zgięciu pierwszemu krawędzi zwrótu płaszczyzn normalnych.* Ten związek dostrzeżony przez P. *Fourier* jest wzajemny między dwiema linijami krzywemi, ponieważ styczne danej linii krzywej zamykają widocznie między sobą kąty równe kątom zawartym między płaszczyznami jej normalnemi, które są płaszczyznami ścislestycznými krawędzi zwrótu powierzchni odwijalnej, którą składają.

Tu byłoby miejsce mówić o punktach osobliwych linij krzywych podwójnej krzywości; lecz to roztrząsanie dalekoby mię zaprowadziło, przestanę na wzmianieniu, iż te linije mogą mieć dwa gatunki nagięcia: jedno należące do piérwszej ich krzywości okazuje się, jak w linijach o jednej krzywości, przez zmianę znaku promienia ich krzywości bezwzględego, drugie przez znak promienia krzywości powierzchni utworzonej przez ich styczne, czyli krawędzie zwrótu powierzchni płaszczyzn ich normalnych.

TRAKTAT POCZĄTKOWY RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO.

C Z E Ś Ć D R U G A

R A C H U N E K C A Ł K O W Y .

Całkowanie funkcyj wymiernych o jednej zmiennej.

165. **R**achunek całkowy jest wspaczny względem rachunku różniczkowego; zamierzamy w nim wrócić się od spółczynników różniczkowych do funkcyj, od których te spółczynniki pochodzą. W wykładaniu zasad tego rachunku zachowujemy podziały odpowiednie podziałom, któreśmy widzieli w rachunku różniczkowym. Może się przytrafić że spółczynniki różniczkowe funkcyi szukanej, będą wyrażone bezśrednie przez *zmiennie niezależne* (*variables indépendantes*), albo że tylko będzie dane zrównanie między niektórymi z tych spółczynników, i jedną lub kilku zmiennymi. Od pierwszego zaczniemy przypadku jako najprostszego.

Gdy spółczynnik różniczkowy pierwszego rzędu jest funkcją ilości x , będzie

$$\frac{dy}{dx} = X, \quad \text{ztađ} \quad dy = Xdx,$$

zatem Xdx , jest różniczką tej funkcyi, której szukamy; takowa funkcya wyraża się następującym sposobem:

$$y = fXdx,$$

cecha f jest wspaczną względem cechy d (*).

Dla zachowania porządku zastanawiać się będziemy nad funkcją daną X biorąc ją pod rozmaitemi kształtami, jakie mieć może, a które podzielić można w następujący sposób: funkcyę wymierne

$$\begin{aligned} Ax^m + Bx^n + Cx^p + \dots &= U, \\ \frac{Ax^m + Bx^n + Cx^p + \dots}{Ax^{m'} + B'x^{n'} + C'x^{p'} + \dots} &= \frac{U}{V}; \end{aligned}$$

funkcyę niewymierne

$$U \cdot V^{\frac{m}{n}};$$

funkcyę przestępne

$$f(V, lV), \quad f(U, \text{wst } V), \quad \text{i t. d.}$$

166. Widzimy zaraz, iż dla uskutecznienia całkowania należy przewrócić prawidła, które służyły do różniczkowania; podług pierwszego prawidła różniczkowania mamy

$$d(u+v-w) = du + dv - dw, \quad (10),$$

całkując pierwszą stronę zrównania przez opuszczenie cechy d , znajdujemy

$$u+v-w = f(du + dv - dw),$$

czyli co na to samo wychodzi

$$fdu + fdv - fdw = f(du + dv - dw);$$

(*) Litera f została użyta od tych, którzy pierwsi o rachunku całkowym pisali, jako początkowa wyrazu *summa*; bo gdy podług wyobrażeń Leibnica, różniczki wyrażają nieskończenie małe przyrostki ilości zmiennych, ztąd wypada że każda zmienna jest summą nieskończenie wielkiej liczby przyrostków, od samego jej początku aż do momentu, w którym jest uważaną, i dla tego funkcją, którą wypadłoby nazywać funkcją pierwotną (*fonction primitive*) nazwano całką (*Integrale*), uważając ją jako zbiór wszystkich różniczek; rozumiejąc dobrze te nazwiska, można bezwzględnie używać jednego lub drugiego.

a ztąd wypada

$$f(Pdx + Qdx - Rdx) = fPdx + fQdx - fRdx;$$

co nam pokazuje, że całka summy kilku funkcij różniczkowych, jest równa summie całek każdej z tych funkcij.

Z tego zaś, że $d.au = a du$ (11) wypada $fadu = afdu$, a ztąd $f a X dx = af X dx$, to jest, że można przed znak całkowy wyprowadzić mnożnik stały.

167. Ponieważ różniczka wyrażenia $Ax^m + B$, jest $mAx^{m-1}dx$, wniesiemy, iż całka różniczki ax^ndx , będzie $\frac{ax^{n+1}}{n+1} + B$, gdyż równając różniczkę ax^ndx , z różniczką $mAx^{m-1}dx$, znajdujemy

$$m-1=n, \quad mA=a, \quad \text{ztąd} \quad A=\frac{a}{m}=\frac{a}{n+1}.$$

Z tego przykładu okazuje się, że gdy jest $dy = ax^ndx$, będzie $y = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + B$, to jest, że dla zcałkowania różniczki ax^ndx , trzeba wykładnik zmiennej powiększyć jednością i potem przez ten wykładnik powiększony i przez dx podzielić cały wyraz.

Ilość stała B zostaje dowolna, co z wyższego można już było wnosić (7).

168. Nim dalej postąpimy, wypada zastanowić się nad jednym przypadkiem szczególnym, w którym wymienione prawidło jest niedostateczne; a ten jest gdy $n = -1$. Wypada bowiem w takowym razie

$$y = \frac{ax^0}{0} + B = \frac{a}{0} + B;$$

lecz jeżeli uważymy, że w tym przypadku

$$dy = ax^{-1}dx = a \frac{dx}{x} = ad.lx \quad (29),$$

poznamy zaraz, iż

$$y = alx + B,$$

i że ten wyjątek od prawidła w poprzedzającej liczbie

podanego, wynika z niepodobieństwa wyrażenia ilości przestępnej lx , przez skończoną liczbę wyrazów algebraicznych.

Jednak prosta zmiana kształtu ilości stałej B , wystarcza dla przyłączenia tego przypadku szczególnego do wzoru ogólnego, bo jeżeli za B , napiszemy $-\frac{a}{n+1} + B$, co zawsze można uczynić, ponieważ ilość stała jest dowolną, wtedy wzór ogólny będzie

$$y = \frac{ax^{n+1} - a}{n+1} + B,$$

i gdy założymy $n = -1$, stanie się 0; lecz jeżeli do niego zastosujemy sposób wyłożony pod liczbą 95, biorąc n za ilość zmienną, otrzymamy prawdziwą wartość

$$y = lx + B,$$

tę samą co wyżej.

169. Wyrażenie

$$dy = ax^m dx + bx^n dx - cx^p dx,$$

oznaczające wymierną i jakąkolwiek całkowitą różniczkę, po zastosowaniu do niego prawideł z liczb. 166 i 167, daje

$$y = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+1}}{n+1} + \frac{cx^{p+1}}{p+1} + B,$$

Dodajemy jedną tylko ilość stałą, bo gdybyśmy nawet dodali po jednej do każdego wyrazu, moglibyśmy zawsze na miejscu ich wszystkich, położyć jedną równą ich summie.

170. Gdybyśmy mieli $dy = (ax+b)^m dx$, rozwinęlibyśmy potęgę $(ax+b)^n$, i każdy wyraz z tego rozwinięcia otrzymamy zcałkowalibyśmy; lecz można otrzymać ten sam wypadek, nie uskuteczniając tego rozwinięcia. Dość jest bowiem uczynić $ax+b=z$, z kąd wy-
ciagniemy $x = \frac{z-b}{a}$, $dx = \frac{dz}{a}$; podstawując to w pierw-

szém wyrażeniu, znajdziemy $dy = \frac{z^m dz}{a}$; a następnie
 $y = \frac{z^{m+1}}{a(m+1)} + B$. Kładąc za z jego wartość, otrzymamy

$$y = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + B.$$

Gdybyśmy mieli $dy = (ax^n + b)^m x^{n-1} dx$; przerobienie jeszczeby się udało; gdyż uczyniwszy $ax^n + b = z$ otrzymalibyśmy $nax^{n-1} dx = dz$, a ztąd

$$x^{n-1} dx = \frac{dz}{na}, \quad dy = \frac{z^m dz}{na}, \quad y = \frac{z^{m+1}}{na(m+1)} + B.$$

zatem gdy $dy = (ax^n + b)^m x^{n-1} dx$, będzie

$$y = \frac{(ax^n + b)^{m+1}}{na(m+1)} + B.$$

171. Weźmy teraz funkcję ułamkową, a zaczynając od najprostszego przypadku, dajmy że $dy = \frac{Ax^m dx}{(ax+b)^n}$; czyniąc $ax+b=z$, znajdujemy

$$x = \frac{z-b}{a}, \quad dx = \frac{dz}{a},$$

a zatem

$$dy = \frac{A(z-b)^m dz}{a^{m+1} z^n};$$

rozwijając potęgę $(z-b)^m$, potem mnożąc przez dz , i dzieląc przez z^n , otrzymamy do całkowania szereg złożony z jednowyrazów.

Daymy np że $m=3$, $n=2$; otrzymamy

$$dy = \frac{A(z-b)^3 dz}{a^4 z^2} = \frac{A}{a^4} \{ z dz - 3b dz + 3b^2 z^{-1} dz - b^3 z^{-2} dz \};$$

stosując do każdego z tych wyrazów, prawidło ogólne, otrzymamy

$$y = \frac{A}{a^4} \left\{ \frac{z^2}{2} - 3bz + 3b^2 \ln z + b^3 z^{-1} \right\} + B.$$

Odkładając za z jego wartość, otrzymamy nakoniec, gdy

$$dy = \frac{Ax^5 dx}{(ax+b)^2},$$

$$y = \frac{A}{a^4} \left\{ \frac{1}{2} (ax+b)^2 - 5b(ax+b) + 3b^2 l(ax+b) + b^3 (ax+b)^{-1} \right\} + B.$$

Łatwoby znaleźć można wzór ogólny; i gdybyśmy mieli

$$dy = \frac{Ax^n dx + Bx^p dx + Cx^q dx + \dots}{(ax+b)^m},$$

napisałibyśmy następującym sposobem

$$dy = \frac{Ax^n dx}{(ax+b)^m} + \frac{Bx^p dx}{(ax+b)^m} + \frac{Cx^q dx}{(ax+b)^m} + \dots,$$

gdzie z każdym w szczególności wyrazem, należy odbyć działanie podobne, jakie z pierwszym uczyniliśmy.

172 Różniczki ułamkowe i wymierne, mają w ogólności kształt następujący

$$\frac{(Ax^m + Bx^n + Cx^p + \dots) dx}{A'x^{m'} + B'x^{n'} + C'x^{p'} + \dots},$$

co dla skrócenia wyrażę przez $\frac{Udx}{V}$. Trzeba naprzód uważać, że wykładnik ilości x w liczniku może być uważany że jest mniejszy niżli w mianowniku, bo w przeciwnym razie, dzieląc U przez V , i wyrażając przez Q iloraz wypadający z tego dzielenia, przez R resztę, otrzymalibyśmy $\int \frac{Udx}{V} = \int Qdx + \int \frac{Rdx}{V}$; a że Q jest funkcją wymierną i całkowitą, otrzymalibyśmy $\int Qdx$ bezśrednie stosując prawidło liczn. 146, i zostałby do zcałkowania wzór tylko $\int \frac{Rdx}{V}$, w którym funkcya R co do x jest niższego stopnia, niżli funkcya V . Węć najogulniejsza postać, pod którą ułamek $\frac{Udx}{V}$ wyrażać się może, będzie

$$\frac{(Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \dots + T)dx}{x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} \dots + T'}.$$

Ogólny sposób całkowania różniczek wyrażonych przez ułamki wymierne, zasada się na rozłożeniu ich na inne, którychby mianowniki były prostsze; takowe ułamki nazywają się *ułamkami cząstkowemi*, a otrzymują się następującym sposobem:

Czyniąc mianownik ułamku danego równym zeru, tworzy się równanie

$$x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} \dots + T' = 0,$$

i przypuszczając, że oznaczone pierwiastki tego równania, są wszystkie nierówne, i wyrażone przez

$$-a, -a', -a'', -a''', \text{ i t. d.}$$

pierwsza strona wyższego równania, czyli mianownik danego ułamku, wyrazi się pod postacią mnożności z liczby n mnożników

$$x-a, x-a', x-a'', x-a''', \text{ i t. d.}$$

To uczyniwszy, uważać będziemy ułamek dany jako sumę ułamków

$$\frac{N}{x-a}, \quad \frac{N'}{x-a'}, \quad \frac{N''}{x-a''}, \text{ i t. d.}$$

mianownikami będą mnożniki mianownika ułamku danego, a licznikami, ilości stałe nieoznaczone.

Dla dokładniejszego objaśnienia rzeczy, dajmy że różniczka do całkowania jest

$$\frac{(Ax^2 + Bx + C)dx}{x^3 + A'x^2 + B'x + C'},$$

i że znaleźliśmy

$$x^3 + A'x^2 + B'x + C' = (x-a)(x-a')(x-a'').$$

Przyprowadziwszy do jednego mianownika ułamki

$$\frac{Ndx}{x-a}, \quad \frac{N'dx}{x-a'}, \quad \frac{N''dx}{x-a''},$$

i zebrawszy razem, otrzymamy

$$\frac{N(x-a')(x-a'')+N'(x-a)(x-a'')+N''(x-a)(x-a')}{(x-a)(x-a')(x-a'')}dx,$$

mianownik będzie tenże sam, co ułamku danego, a licznik będzie koniecznzie co do x niższego stopnia od mianownika, to jest będzie stopnia drugiego. Jakoż rozwijając licznik otrzymujemy

$$\left\{ (N+N'+N'')x^2 - (N(a'+a'')+N'(a+a'')+N''(a+a'))x + Na'a''+N'aa''+N''aa' \right\} dx$$

Ta funkcyja zrównana z licznikiem danego ułamku, daje trzy równania,

$$N+N'+N''=A,$$

$$-N(a'+a'')-N'(a+a'')-N''(a+a')=B,$$

$$Na'a''+N'aa''+N''aa'=C,$$

które są pierwszego tylko stopnia co do nieoznaczonych N, N', N'' ; dla rozwiązania tych równań, dość jest rozmnóżyć pierwsze przez a^2 , drugie przez a , i tak rozmnóżone dodać do równania trzeciego; tym sposobem znajdujemy

$$\begin{aligned} Aa^2 + Ba + C &= N\{a^2 - (a'+a'')a + a'a''\} \\ &= N(a-a')(a-a'') \end{aligned}$$

a zatém

$$N = \frac{Aa^2 + Ba + C}{(a-a')(a-a'')},$$

w tym wypadku licznik jest danego ułamku licznikiem, w którym na miejscu x , jest położony jeden pierwiastek znaleziony, a a mianownikiem mnogość z różnic między tym pierwiastkiem a , a każdym z osobna z innych pozostałych.

Według tego prawa, będziemy mieli bez żadnego rachunku

$$N' = \frac{Aa'^2 + Aa' + C}{(a' - a)(a' - a'')}, \quad N'' = \frac{Aa''^2 + Ba'' + C}{(a'' - a)(a'' - a')}.$$

i niebyłoby trudną rzeczą zapewnić się, że to prawo służy nawet przypadkowi ogólnemu; lecz my przyjdziemy wkrótce do niego sposobem łatwiejszym.

Po wyłożeniu tego, ponieważ

$$\frac{(Ax^2 + Bx + C)dx}{x^3 + A'x^2 + B'x + C'} = \frac{Ndx}{x-a} + \frac{N'dx}{x-a'} + \frac{N''dx}{x-a''},$$

uczynimy $x-a=z$, i będziemy mieli $\frac{Ndx}{x-a} = \frac{Ndz}{z}$, czego całką jest $Nl z$, czyli $Nl(x-a)$. Znajdujemy także że

$$\int \frac{N'dx}{x-a} = N'l(x-a'), \quad \int \frac{N''dx}{x-a''} = N''l(x-a''),$$

a zatem mieć będziemy

$$\begin{aligned} & \int \frac{(Ax^2 + Bx + C)dx}{x^3 + A'x^2 + B'x + C'} \\ &= Nl(x-a) + N'l(x-a') + N''l(x-a'') + \text{stała} \\ &= l \left\{ (x-a)^N (x-a')^{N'} (x-a'')^{N''} \right\} + \text{stała}. \end{aligned}$$

173. Całkowanie więc ułamków wymiernych nie ma w sobie żadnej trudności, skoro są rozłożone, jakośmy widzieli, na ułamki cząstkowe, których mianownikami są dwówyrazy stopnia pierwszego; lecz takie mianowniki wtedy tylko wypadają, gdy mnożniki mianownika ułamku danego są pojedyncze, to jest wszystkie różne od siebie. Przypuszczając zaś w przykładzie poprzedzającym, iż $a=a'$, wartości ilości N , N' , N'' , stają się nieskończenie wielkimi, a to zależy od tego, że w zbiorze ułamków cząstkowych

$$\frac{Ndx}{x-a} + \frac{N'dx}{x-a} = \frac{(N+N')dx}{x-a},$$

nie znajduje się dostateczna liczba ilości nieoznaczonych,

bo summa ilości nieoznaczonych $N+N'$, to czyni, co jedna ilość.

Zaradzamy tej nieprzyzwoitości podstawując na miejscu tych dwóch ułamków, które składają tylko ułamek jeden, ułamek następny

$$\frac{(Nx+N')dx}{(x-a)^2},$$

i sprowadzając do jednego mianownika z trzecim ułamkiem $\frac{N''dx}{x-a''}$, otrzymujemy liczbę zrównań równą liczbie ilości nieznanych N, N', N'' .

Całkowanie nowej funkeyi nie jest zgoła trudne, bo robiąc $x-a=z$, przychodzimy do jednowyrazów, jakie mieliśmy w przykładzie pod liczb. 171, który jest tylko szczególnym przypadkiem.

W ogulności jeźliby mianownik V danego ułamku zamykał mnożnik $(x-a)^m$, należałoby wziąć odpowiadający temu mnożnikowi cząstkowy ułamek kształtu

$$\frac{Nx^{m-1}+N_1x^{m-2}+N_2x^{m-3}+\dots+N_{m-1}x^0}{(x-a)^m},$$

którybyśmy scałkowali kładąc

$$x-a=z, \quad \text{a ztąd} \quad x=z+a, \quad dx=dz;$$

lecz wypadek z tego podstawiania otrzymany będąc kształtu

$$\frac{\{M+M_1+M_2z^2+\dots+M_{m-1}z^{m-1}\}dz}{z^m},$$

czyli, co to samo znaczy

$$\frac{Mdx}{z^m} + \frac{M_1dz}{z^{m-1}} + \frac{M_2dz}{z^{m-2}} + \dots + \frac{M_{m-1}dz}{z},$$

pokazuje, że za pierwszy ułamek można podstawić następne

$$\frac{Mdx}{(x-a)^m} + \frac{M_1dx}{(x-a)^{m-1}} + \frac{M_2dx}{(x-a)^{m-2}} + \dots + \frac{M_{m-1}dx}{x-a},$$

które mają liczniki M, M_1, M_2 , i t. d. stałe, i mogą być scałkowane sposobem pod lic. 171 wyłożonym.

174. Ułamki tej ostatniej postaci i ułamki odpowiadające mnożnikom nierównym (170), są ułamkami najprostsze, na które ułamki wymierne dane do scałkowania mogą się rozłożyć, i wymagają dwóch poprzedniczych działań, to jest oznaczenia mianowników i liczników ułamków cząstkowych. Pierwsze zależące od znalezienia mnożników mianownika V , zależy, jakśmy to już powiedzieli, od rozwiązania równania $V=0$ (172), drugie to jest oznaczenie liczników skutecznia się kilkoma sposobami, z których najprostszy jest następny.

Odfaczywszy pojedynczy mnożnik $(x-a)$, mianownika ułamku danego, zakładamy

$$V=(x-a)Q, \quad \frac{U}{V}=\frac{N}{x-a}+\frac{P}{Q},$$

gdzie P jest funkcją ilości x , wypadającą ze sprowadzenia do jednego mianownika wszystkich ułamków, oprócz ułamku $\frac{N}{x-a}$, wchodzących do ułamku danego; więc funkcja P będzie względem ilości x funkcją całą. Przywodząc do jednego mianownika prawą stronę założonego równania, mamy

$$U=NQ+(x-a)P, \quad \text{z tego } P=\frac{U-NQ}{x-a},$$

a że P względem ilości x jest funkcją całą, więc licznik $U-NQ$, powinien być podzielny przez $x-a$, co podług składu równań wtedy tylko być może, gdy po zamienieniu x na a , wielowyrząd $U-NQ$ ginie, to jest sprowadza się do zera.

Wyrażając więc przez u i q , wartość, których nabývają ilości U i Q , przez położenie w nich a za x , a co nie odmienia nic zgoła ilości N , bo jest stała, będziemy mieli wyrażenie

$$u-Nq=0, \quad \text{z tego } N=\frac{u}{q}.$$

Wartość N zawsze będzie skończona, bo jej licznik i mianownik nie mogą stać się zero, gdyż ułamek $\frac{U}{V}$ jest sprowadzony do najprostszego wyrażenia, a przeto mnożnik $(x-a)$, nie wchodzi do składu licznika U ; nie wchodzi też do składu mnożnika Q , bo raz tylko znajduje się w mianowniku V ; więc zawsze będzie można otrzymać cząstkowy ułamek odpowiadający mnożnikowi $(x-a)$.

Jeżeli za literę u , położymy wyrażenie, które ona przedstawia (172), a za Q , wartość tojest mnogość z mnożników $(x-a')(x-a'')(x-a''')$ i t. d., otrzymamy wyrażenie

$$N = \frac{u}{q} = \frac{Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + Ca^{n-3} + \dots + T}{(a-a')(a-a'')(a-a''') \text{ i t. d.}},$$

które należy do prawa pod licz. 172 wyprowadzonego,

175. Obaczmy teraz jak znaleźć można liczniki ułamków cząstkowych, odpowiadających mnożnikom równym. Niech będzie $V = Q(x-a)^m$, załóżymy (173)

$$\frac{U}{V} = \frac{N}{(x-a)^m} + \frac{N_1}{(x-a)^{m-1}} + \frac{N_2}{(x-a)^{m-2}} + \dots + \frac{N_{(m-1)}}{(x-a)} + \frac{P}{Q}.$$

Przyczynę, dla której pod taką postacią piszemy ułamki, wskaże nam oznaczenie ilości nieznanych. Sprowadzając je do jednostajnego mianownika wypada

$$U = Q \{ N + N_1(x-a) + N_2(x-a)^2 + \dots + N_{(m-1)}(x-a)^{m-1} \} + P(x-a)^m,$$

złąd

$$P = \frac{U - Q \{ N + N_1(x-a) + N_2(x-a)^2 + \dots + N_{(m-1)}(x-a)^{m-1} \}}{(x-a)^m},$$

a że ilość P powinna być względem ilości x , funkcją całą, przeto licznik jej wyrażenia powinien być rozdzielny m razy następnie przez $x-a$, więc ten licznik stanie się zero, gdy w nim za x położymy a . Postrzegamy zaraz iż w tym przypadku sprowadza się on do wyrażenia $U - QN$, lecz aby $U - QN$ było rozdzielnem

przez $x-a$, powinno być; zachowując nazwania z liczn. poprzedzającej, $u-Nq=0$, czyli $N=\frac{u}{q}$.

Ta wartość zamieni wyrażenie $U-QN$, na $U-\frac{u}{q}Q$, które się może rozdzielić przez $(x-a)$; dzieląc rzeczywiście licznik i mianownik przez $(x-a)$, i dla skrócenia kładąc $U-\frac{u}{q}Q=U_1(x-a)$, będziemy mieli

$$P=\frac{U-Q\{N_1+N_2(x-a)+\dots+N_{(m-1)}(x-a)^{m-2}\}}{(x-a)^{m-1}}.$$

Teraz dla znalezienia N_1 , uczynimy $x-a=0$, i wyrażając przez u_1 wypadek, który otrzymujemy kładąc a za x , w U_1 , będzie

$$u_1-qN_1=0, \quad \text{Ztąd} \quad N_1=\frac{u_1}{q}.$$

Potém kładąc za N_1 , jego wartość $\frac{u_1}{q}$ w wyrażenie U_1-QN_1 , wypada ilość $U_1-\frac{u_1}{q}Q$, która jest rozdzielna przez $x-a$, bo ginie kładąc $x-a=0$, więc dzieląc licznik i mianownik wartości P przez $(x-a)$, i iloraz z rozdzielenia ilości $U_1-\frac{u_1}{q}Q$ nazywając przez U_2 , wypada,

$$P=\frac{U_2-Q\{N_2+N_3(x-a)+\dots+N_{(m-1)}(x-a)^{m-3}\}}{(x-a)^{m-2}},$$

ciągnąc dalej to samo znakowanie znajdziemy jeszcze u_2-qN_2 , ztąd $N_2=\frac{u_2}{q}$ i tak dalej; nigdy jednak nie wpadniemy na ilości nieskończenie wielkie.

176. Rachunek różniczkowy bardzo ułatwia działania poprzedzające. Jakoż jeżeli $(m-1)$ razy będziemy następnie różniczkowali zrównanie

$$U=Q\{N+N_1(x-a)+N_2(x-a)^2+\dots+N_{(m-1)}(x-a)^{m-1}\}+P(x-a)^m,$$

i jeżeli i w tém zrównaniu i w zrównaniach z niego wypadających założymy $x-a=0$, otrzymamy zrównania

$$U=NQ,$$

$$dU=NdQ+N_1Qdx,$$

$$d^2U=Nd^2Q+2N_1dQdx+2N_2Qdx^2,$$

$$d^3U=Nd^3Q+3N_1d^2Qdx+6N_2dQdx^2+6N_3Qdx^3,$$

i t. d.

każde z tych zrównań kładąc w niem a za x , służy za pomocą zrównań poprzedzających do oznaczenia ilości nieznanych N , N_1 , N_2 , i t. d.

Najprostszy sposób otrzymania w tym przypadku wartości Q , zależy na rozdzieleniu mianownika V przez $(x-a)^m$; możemy jednak otrzymać ją przez różniczkowanie, mamy bowiem $V=Q(x-a)^m$, więc różniczkując razy m następnie obie strony tego zrównania, a potem czyniąc $x-a=0$, znajdziemy

$$d^mV=m(m-1)\dots\dots 2.1. Qdx^m \quad (57),!$$

a ztąd
$$Q=\frac{d^mV}{1.2\dots\dots m dx^m}.$$

Wyrażenia zaś różniczek ilości Q , w przypuszczeniu że $(x-a)=0$, otrzymamy biorąc następnie różniczki rzędu $m+1$, $m+2$, i t. d. zrównania $V=Q(x-a)^n$, łatwo bowiem podług uwag pod lic. 57 wyłożonych możemy widzieć, iż w tém przypuszczeniu różniczka np $d^{m+1}V=d^{m+1}Q(x-a)^m$, sprowadza się do $(m+1)m\dots\dots 2.1dQdx^{m+1}$. Z tego wszystkiego wypada, iż można wartość ilości nieznanych otrzymać za pomocą różniczek licznika i mianownika danego ułamku.

177. Sposób postępowania w rachunku nie odmieniłby się, chociażby nie wszystkie pierwiastki a , a' , a'' , i t. d. były rzetelne, ilości bowiem urojone, któreby w tym razie weszły do liczników ułamków cząstkowych, zginęłyby przez sprowadzanie ułamków do jednego mia-

nownika, lecz prostszą może być rzeczą uniknąć takich wyrażeń rozkładając mianownik V na mnożniki rzetelne, co zawsze może być zrobioném, bo mnożniki urojone jakiegokolwiek wielowyrazu po dwa mnożone, biorąc je odpowiednie, dają mnożniki drugiego stopnia rzetelne

Takowe mnożniki mogą być ogólnie wyrażone przez

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2,$$

a dla otrzymania odpowiednich ułamków cząstkowych, potrzeba tylko nieco umiarkować sposoby pod liczb. 174 i 175 wyłożone.

Gdy mnożnik drugiego stopnia jest tylko jeden, kładniemy

$$\frac{U}{V} = \frac{Mx + N}{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2} + \frac{P}{Q},$$

zτάąd wyprowadzamy

$$U = Q(Mx + N) + P(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)$$

$$P = \frac{U - Q(Mx + N)}{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2},$$

a rozumując tak jak pod liczb. 174, ponieważ P powinno być zawsze funkcją całą względem x , przeto licznik $U - Q(Mx + N)$ powinien być rozdzielnym przez $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, i między swými mnożnikami powinien zamykać mnożniki tego dzielnika, i stawać się równym zeru, gdy te mnożniki stają się równe zeru. Mnożniki wyrażenia $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, są:

$$x - \alpha - \beta\sqrt{-1}, \quad x - \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

kładąc je równe zeru otrzymujemy wartości ilości x ,

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad x = \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

które kolejno wprowadzane w wyrażenie $U - Q(Mx + N)$, powinny je niszczyć. Więc kładąc te wartości w U i Q ,

i wypadki ztąd otrzymane wyrażając przez $u \pm u' \sqrt{-1}$,
i przez $q \pm q' \sqrt{-1}$, będziemy mieli zrównanie

$$u \pm u' \sqrt{-1} - (q \pm q' \sqrt{-1}) \{M(\alpha \pm \beta \sqrt{-1}) + N\} = 0 \quad (*),$$

które dla podwójnego znaku $\pm$ przed niektórymi wyrazami znajdującego się jest podwójne, i równe dwóm zrównaniom, które utworzymy kładąc osobno zbiór wyrazów rzetelnych a osobno zbiór wyrazów urojonych równym zeru. Stosownie do tej uwagi otrzymamy zrównania

$$u - q\alpha M + q'\beta M - qN = 0,$$

$$u' - q\beta M - q'\alpha M - q'N = 0,$$

służące do oznaczenia wartości M i N .

178. Jeżeli mianownik $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, który dla skrócenia wyrazimy przez R , znajduje się kilka razy w mianowniku V , np jeżeli mamy

$$V = Q(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^m = QR^m,$$

w tym przypadku weźmiemy ułamki (175)

$$\frac{Mx + N}{R^m} + \frac{M_1x + N_1}{R^{m-1}} + \frac{M_2x + N_2}{R^{m-2}} + \dots + \frac{P}{Q},$$

sprowadzając je do jednego mianownika i wyciągając wartość P , wypada

$$P = \frac{U - Q\{Mx + N + (M_1x + N_1)R + (M_1x^2 + N_2)R^2 \dots\}}{R^m}$$

Rozumując w tym przypadku tak jak w poprzedzających, wniesiemy, że licznik tego wyrażenia równie jak ilość R , powinny przez założenie $x = \alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, stać się każde z osobna, równiemi zeru; czyniąc takowe

(*) Rozwijając potęgi $(\alpha + \beta \sqrt{-1})^m$, i $(\alpha - \beta \sqrt{-1})^m$, postrzeżemy iż wyrażenia takie, jakim jest $Ax^m + Bx^n - Cx^p + \text{i t. d.}$ wezmą postać założoną.

podstawienie i zachowując to samo co wyżej nazwanie otrzymamy zrównanie

$$u \pm u' \sqrt{-1} - (q \pm q' \sqrt{-1}) \{M(a \pm \beta \sqrt{-1}) + N\} = 0,$$

z którego na oznaczenie ilości M i N utworzymy takie same zrównania, jakieśmy otrzymali pod licz. poprzedzającą. Gdy znalezioną wartość tych ilości podstawimy w P , wyrażenie $U - Q(Mx + N)$, a przeto i cały licznik stanie się rozdzielny przez $x^2 - 2ax + a^2 + \beta^2$. Uskuteczniając to dzielenie i wypadający z podzielenia wyrazów $U - Q(Mx + N)$, przez $x^2 - 2ax + a^2 + \beta^2$, iloraz wyrażając przez U_1 , będziemy mieli

$$P = \frac{U_1 - Q\{M_1x + N_1 + (M_2x + N_2)R + \dots\}}{R^{m-1}},$$

W tym nowym liczniku podstawując za x , wartość jego $a \pm \beta \sqrt{-1}$, i wypadek zakładając równym zeru, oznaczmy M_1 i N_1 jak wyżej oznaczyliśmy M i N ; ciągnąc dalej podobne działania znajdziemy wartości M_2 , N_2 , M_3 , N_3 , i t. d.

179. Ten przypadek jest zupełnie podobny do przypadku roztrząsanego pod licz. 175; i jednym tymże samym sposobem rachunek różniczkowy stosuje się do obu przypadków za pomocą zrównania

$$U = Q\{Mx + N + (M_1x + N_1)R + (M_2x + N_2)R^2 + \dots + PR^m\}$$

i jego różniczek, w których kładąc $R=0$, wszystkie wyrazu PR^m różniczeki aż do różniczki rzędu $(m-1)$ włącznie giną, i otrzymujemy zrównania

$$U = (Mx + N)Q,$$

$$dU = (Mx + N)dQ + MQdx + (M_1x + N_1)QdR,$$

i t. d.

każde z tych zrównań, jeżeli w niem za x położymy wartość wyprowadzoną ze zrównania $R=0$, czyli

$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0$, stanie się podwójnem Kładąc równą zero osobno część rzetelną, a osobno część urojoną, otrzymamy dostateczną liczbę zrównań do oznaczenia ilości M , N , M_1 , N_1 , i t. d.

Należy jeszcze uważać że ze zrównania

$$V = QR^m,$$

różniczkując je razy m , i kładąc $R=0$, otrzymamy

$$d^m V = Q d^m R^m,$$

ztaąd
$$Q = \frac{d^m V}{d^m R^m}.$$

Znajdziemy w tém samém przypuszczeniu, różniczki dQ , d^2Q , i t. d. biorąc różniczki rzędów $(m+1)$, $(m+2)$ i t. d. zrównania

$$V = QR^m,$$

i opuszczając wyrazy, które przez założenie $R=0$ stają się zero.

180. Dla scałkowania ułamku

$$\frac{(Mx+N)dx}{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2},$$

uważamy że $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = (x-\alpha)^2 + \beta^2$; czyniąc

$$x - \alpha = z,$$

wypada

$$\frac{(Mx+N)dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{(Mz + M\alpha + N)dz}{z^2 + \beta^2} = \frac{(Mz + N')dz}{z^2 + \beta^2},$$

gdzie

$$N' = M\alpha + N.$$

Lecz jest

$$\frac{(Mz + N')dz}{z^2 + \beta^2} = \frac{Mzdz}{z^2 + \beta^2} + \frac{N'dz}{z^2 + \beta^2};$$

zatem pierwsza część drugiej strony tego zrównania,

daje się scałkować; gdyż uczyniwszy $z^2 + \beta^2 = u$, mamy $zdz = \frac{du}{2}$, a ztąd

$$\int \frac{Mzdz}{z^2 + \beta^2} = \frac{M}{2} \int \frac{du}{u} = M \frac{1}{2} \ln u = M \ln \sqrt{z^2 + \beta^2}.$$

Co się ściąga do drugiej części $\frac{N'dz}{z^2 + \beta^2}$, jeżeli uczynimy $z = \beta u$, otrzymamy

$$\frac{N'dz}{z^2 + \beta^2} = \frac{N'}{\beta} \frac{du}{1 + u^2};$$

a że $\frac{du}{1 + u^2}$ jest różniczką łuku, którego styczna jest $= u$, (36); zatem

$$\begin{aligned} \int \frac{N'}{\beta} \frac{du}{1 + u^2} &= \frac{N'}{\beta} \text{ łuk (stycz} = u) + \text{stała} \\ &= \frac{N'}{\beta} \text{ łuk (stycz} = \frac{z}{\beta}) + \text{stała.} \end{aligned}$$

Łącząc te dwa wypadki, otrzymamy

$$\int \frac{(Mz + N')dz}{z^2 + \beta^2} = M \ln \sqrt{z^2 + \beta^2} + \frac{N'}{\beta} \text{ łuk (stycz} = \frac{z}{\beta}) + \text{stała.}$$

Należy tu uważać, że łuk, którego styczna jest $= \frac{z}{\beta}$,

ma za wstawę $\frac{z}{\sqrt{z^2 + \beta^2}}$, za dostawę $\frac{1}{\sqrt{z^2 + \beta^2}}$; gdyż ta uwaga podaje sposób wyrażania danej całki, pod wielu kształtami, oznaczając łuk przez wstawę lub dostawę.

Gdy włożymy za z , jego wartość, znajdziemy

$$\begin{aligned} &\int \frac{(Mx + N)dx}{x^2 - 2ax + a^2 + \beta^2} \\ &= M \ln \sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + \beta^2} + \frac{M a + N}{\beta} \text{ łuk (stycz} = \frac{x + a}{\beta}) + \text{stała.} \end{aligned}$$

Przystąpmy teraz do całkowania różniczki

$(Mx+N)dx$
 $(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^m$; uczynimy $x-\alpha=z$, $N+M\alpha=N'$,
 tym sposobem będziemy mieli do całkowania tylko
 $\int \frac{(Mz+N')dz}{(z^2+\beta^2)^m}$; co można wyrazić tak:

$$M \int \frac{zdz}{(z^2+\beta^2)^m} + N' \int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^m}.$$

Pierwsza część daje się bezśrednie całkować; co się
 wykonywa czyniąc $z^2+\beta^2=u$, $zdz=\frac{du}{2}$; zatem

$$M \int \frac{zdz}{(z^2+\beta^2)^m} = \frac{M}{2} \int \frac{du}{u^m} = \frac{Mu^{-m+1}}{2(1-m)}.$$

Co do drugiej części, należy ona do wzorów, któremi
 wkrótce będziemy się zatrudniali, i za pomocą których
 sprowadzamy jej całkowanie do całkowania wzoru
 $\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{m-1}}$ (200), w którym wykładnik mianownika
 jest mniejszy jedną jednością, i tak idąc następnie spro-
 wadzimy aż do wzoru $\int \frac{dz}{z^2+\beta^2}$, którego całkę jużśmy
 otrzymali.

Zbliżając wypadki liczb poprzedzających postrzeżemy
 bez wątpienia, że różniczki przedstawujące się pod
 kształtem ułamków wymiernych, mogą zawsze być
 całkowane albo algebraicznie, albo za pomocą logaryt-
 mów lub łuków koła.

181. Zastosujmy teraz prawidła poprzedzające.

Niech będzie ułamek

$$\frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3};$$

łatwo jest rozłożyć jego mianownik na mnożniki, gdyż
 można go wyrazić pod kształtem

$$x^5(x^5+x^4-x-1)=x^5(x+1)(x^4-1).$$

Mnożnik $x^4 - 1$ rozkłada się na

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1),$$

a zatem $x^8 + x^7 - x^4 - x^3 = x^3(x - 1)(x + 1)^2(x^2 + 1)$;

przeto ułamek dany może się rozłożyć na następujące (172 173),

$$\frac{A dx}{x - 1} + \frac{B dx}{(x + 1)^2} + \frac{C dx}{x + 1} + \frac{D dx}{x^3} + \frac{E dx}{x^2} + \frac{F dx}{x} + \frac{(Gx + H) dx}{x^2 + 1}.$$

Przywiodłszy do jednego mianownika i zrównawszy wypadek z ułamkiem $\frac{dx}{x^8 + x^7 - x^4 - x^3}$, oznaczylibyśmy liczniki nieznane; lecz użyjemy tu sposobów wyżej podanych.

Na ten koniec uważam z osobna cztery czynniki

$$x - 1, (x + 1)^2, x^3, \text{ i } x^2 + 1,$$

które składają mianownik ułamku danego. Pierwszemu odpowiada ułamek $\frac{N}{x - 1}$; ilości $U = 1$, $Q = x^2(x + 1)^2$

($x^2 + 1$), kładąc w nich $x = 0$, dają $u = 1$, $q = 3$, więc mamy (174) $N = \frac{1}{8}$, i pierwszy ułamek cząstkowy $= \frac{1}{8} \frac{1}{x - 1}$.

Należy uważać że bezśrednie znaleźlibyśmy wartość q , różniczkując mianownik $x^8 + x^7 - x^4 - x^3$, a potem kładąc $x = 1$ (176).

Mnożnikowi $(x + 1)^2$ odpowiadają dwa ułamki cząstkowe kształtu $\frac{N}{(x + 1)^2} + \frac{N_1}{x + 1}$ (175); w tym razie

$Q = x^3(x - 1)(x^2 + 1)$; czyniąc $x + 1 = 0$, ztąd $x = -1$, $q = 4$, $\frac{u}{q} = \frac{1}{4}$; a tak drugi ułamek cząstkowy jest

$$\frac{1}{4} \frac{1}{(x + 1)^2}.$$

Kładąc w wyrażeniu U_1 (175) za N jego wartość $\frac{1}{4}$ mamy

$$U_1 = \frac{U - NQ}{x + 1} = \frac{1 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3}{4(x + 1)} = \frac{-x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + 4}{4}$$

a ztąd $\frac{u_1}{q} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$; więc trzeci ułamek cząstkowy jest $\frac{9}{8} \frac{1}{x+1}$.

Cheąc tu przystosować rachunek różniczkowy utworzylibyśmy zrównanie (176)

$$1 = Q\{N + N_1(x+1)\} + P(x+1)^2,$$

które dosyć byłoby raz jeden różniczkować; kładąc potem $x = -1$, otrzymalibyśmy

$$1 = NQ, \quad 0 = NdQ + N_1 Q dx.$$

Ponieważ $Q = x^6 - x^5 + x^4 - x^3$, zatem pierwsze zrównanie dałoby $N = \frac{1}{4}$, a drugie $N_1 = \frac{9}{8}$.

Mnożnik x^3 daje trzy ułamki cząstkowe

$$\frac{N}{x^3} + \frac{N_1}{x^2} + \frac{N_2}{x},$$

które oznaczamy za pomocą zrównania

$$1 = Q\{N + N_1 x + N_2 x^2\} + P x^5,$$

i jego różniczek pierwszej i drugiej. Pamiętając że $Q = x^5 + x^4 - x - 1$, i czyniąc $x = 0$, w ilościach Q, dQ, d^2Q , znajdziemy $N = -1, N_1 = 1, N_2 = -1$; zatem będziemy mieli $-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$.

Nie zostaje więcej jak jeden ułamek cząstkowy odpowiadający mnożnikowi $x^2 + 1$, a którego kształt jest $\frac{Mx + N}{x^2 + 1}$. Można by go wyprowadzić odejmując od ułamku danego wszystkie poprzedzające; lecz otrzymamy to bezśrednie przez wzory z lic. 177. Mamy naprzód $Q = x^3(x-1)(x+1)^2 = x^6 + x^5 - x^4 - x^3$; potem uczyniwszy $x^2 + 1 = 0$, będziemy mieli $x = \pm \sqrt{-1}, \alpha = 0, \beta = 0$, a ztąd $q \pm q' \sqrt{-1} = -2 \pm 2 \sqrt{-1}, u = 1, u' = 0$; zrównania, z których wyciągają się wartości M, N , zamieniają się na

$$1 + 2M + 2N = 0, \quad 2M - 2N = 0;$$

tak więc znajdziemy $M=N=-\frac{1}{4}$.

Owoż więc ułamek dany $\frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3}$, jest rozłożony na następujące

$$\frac{1}{8} \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4} \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{9}{8} \frac{dx}{x+1} - \frac{dx}{x^5} + \frac{dx}{x^2} - \frac{dx}{x} - \frac{1(x+1)dx}{4(x^2+1)}.$$

Całkowanie każdego z nich nie ma żadnej trudności, i otrzymamy wypadek

$$\frac{1}{8}l(x-1) - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} + \frac{9}{8}l(x+1) + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} - lx - \frac{1}{8}l(x^2+1) - \frac{1}{4} \text{łuk}(\text{stycz}=x) + \text{stała}.$$

Złączone wszystkie wyrazy algebraiczne dadzą ułamek

$$\frac{2-2x-5x^2}{4x^2(1+x)}, \text{ wyrazy zaś logarytmowe dadzą}$$

$$\frac{1}{8}l(x-1) + \frac{1}{8}l(x+1) + l(x+1) - \frac{1}{8}l(x^2+1) - lx = \frac{1}{8}l\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) + l\left(\frac{x+1}{x}\right);$$

zatem

$$\int \frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3} = \frac{2-2x-5x^2}{4x^2(1+x)} + \frac{1}{8}l\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) + l\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{4} \text{łuk}(\text{stycz}=x) + \text{stała}.$$

Całkowanie funkcji niewymiernych.

182. Funkcye niewymierne powinny się uważać jako scałkowane, skoro przez jakie przerobienie, staną się wymiernymi, albo przynajmniej gdy będą zamienione na szereg jednowyrazów niewymiernych; bo wtedy można do nich bezśrednie zastosować poprzedzające prawidła.

Niech będzie np. $\frac{(1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2})dx}{1+\sqrt[5]{x}}$: jasna rzecz

jest że uczyniwszy $x=z^6$, będzie można wszystkie pierwiastki wskazane wyciągnąć; ztąd wypadnie

$$\frac{6z^5 dz(1+z^5-z^4)}{1+z^2}; \text{ uskuteczniając dzielenie będziemy}$$

mieli różniczkę

$$-6\left\{z^7dz - z^6dz - z^5dz + z^4dz - z^3dz + dz - \frac{dz}{1+z^2}\right\}$$

której całka jest

$$-6\left\{\frac{z^8}{8} - \frac{z^7}{7} - \frac{z^6}{6} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^3}{3} + z - \text{łuk (stycz=z)}\right\} + \text{stała,}$$

a odkładając za z jego wartość $\sqrt[6]{x}$, otrzymamy

$$-\frac{3}{4}x\sqrt[5]{x} + \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + x - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} \\ + 6\text{łuk}(\text{stycz} = \sqrt[6]{x}) + \text{stała.}$$

183. Pierwszy gatunek funkcyj niewymiernych, o których tu mówić będziemy, jest ten, który zawiera tylko jeden pierwiastek $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$, i który wyraża się albo pod kształtem $Xdx\sqrt{A+Bx+Cx^2}$, albo też pod kształtem $\frac{Xdx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$, gdzie X jest funkcją wymierną ilości x . Naprzód uważać należy, że pierwsza z tych postaci może być zamieniona na drugą, gdyż można wyrazić ją następującym sposobem:

$$Xdx \frac{\sqrt{A+Bx+Cx^2} \times \sqrt{A+Bx+Cx^2}}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}} \\ = \frac{X(A+Bx+Cx^2)dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}},$$

wtenczas licznik tego wypadku jest funkcją wymierną.

Pierwiej niżli podamy sposoby zamienienia wyrażenia $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$ na wymierne co do x , napiszmy ilość $A+Bx+Cx^2$ pod kształtem $C\left(\frac{A}{C} + \frac{B}{C}x + x^2\right)$; a uczyniwszy dla skrócenia

$$C = \gamma^2, \quad \frac{A}{C} = \alpha, \quad \frac{B}{C} = \beta,$$

będzie

$$\sqrt{A+Bx+Cx^2} = \gamma\sqrt{\alpha + \beta x + x^2}.$$

To założywszy jeźli weźmiemy $\sqrt{a+\beta x+x^2}=z-x$,
podnosząc do potęgi drugiej otrzymamy $a+\beta x=z^2-2xz$,
a ztąd $x=\frac{z^2-a}{2z+\beta}$.

Zatem $\sqrt{A+Bx+Cx^2}=\gamma(z-x)=\gamma\left(\frac{a+\beta z+z^2}{2z+\beta}\right)$;

$$dx=-\frac{2(a+\beta z+z^2)dz}{(2z+\beta)^2}.$$

Za pomocą tych wartości zamienimy różniczkę

Xdx
 $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$, na inną Zdz ; gdzie Z jest funkcją
wymierną ilości z i rzetelną, dopóki C będzie dodatne;
lecz gdyby C było ujemne, γ stałoby się urojone, i
funkcja przerobiona mogłaby się także stać urojoną.

W tym razie, mielibyśmy $\sqrt{A+Bx-Cx^2}$; zatem
czyniąc $C=\gamma^2$, $\frac{A}{C}=a$, $\frac{B}{C}=\beta$, otrzymalibyśmy

$\gamma\sqrt{a+\beta x-x^2}$. Ilość $x^2+\beta x-a$, może się zawsze roz-
łożyć na mnożniki rzetelne pierwszego stopnia, i
jeźli oznaczymy je przez $x-a$, $x-a'$, jasna jest
rzecz, że $a+\beta x-x^2=-(x^2-\beta x-a)=(x-a)(a'-x)$.

Czyniąc potem $\sqrt{(x-a)(a'-x)}=(x-a)z$, podnosząc o-
bie strony do potęgi drugiej, wypadek da się podzielić
przez $(x-a)$, tak otrzymamy $a'-x=(x-a)z^2$; ztąd
wyciągniemy wartości

$$x=\frac{az^2+a'}{z^2+1}, \quad (x-a)z=\frac{(a'-a)z}{z^2+1}, \quad dx=\frac{2(a-a')zdz}{(z^2+1)^2},$$

które zamienią także różniczkę podaną na wymierną.

184. Biorę za przykład różniczkę $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$;
pierwsze z poprzedzających przerobień daje różniczkę
 $\frac{2dz}{\gamma(2z+\beta)}$, której całka jest $\frac{1}{\gamma}=\ln(2z+\beta)+\text{stała}$. Od-
stawując nazad za z jego wartość $x+\sqrt{a+\beta x+x^2}$, a
za a, β , i γ ilości $\sqrt{C}$, $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, otrzymamy wypadek

$$+\frac{1}{\sqrt{C}}\left\{\frac{2}{\sqrt{C}}\left(\frac{2B}{\sqrt{C}}+x\sqrt{C}+\sqrt{A+Bx+x^2}\right)\right\}+ \text{stała},$$

który może być wyrażony pod następującym kształtem

$$\frac{1}{\sqrt{C}}\left\{\frac{B}{2\sqrt{C}}+x\sqrt{C}+\sqrt{A+Bx+Cx^2}\right\}+\frac{1}{\sqrt{C}}\frac{2}{\sqrt{C}}+ \text{st.}$$

dla złączenia potem wyrazu stałego $\frac{1}{\sqrt{C}}\frac{2}{\sqrt{C}}$, z ilością stałą dowolną.

185. Niech będzie drugi przykład $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}}$; używając przerobienia będziemy mieli różniczkę z lic. 133, $\frac{-2dz}{\gamma(z^2+1)}$, której całka jest

$$-\frac{2}{\gamma} \text{ łuk (stycz} = z) + \text{stała}.$$

Podstawując za z jego wartość $\frac{\sqrt{a'-x}}{\sqrt{x-a}}$, wyciągnięą ze zrównania $a'-x=(x-a)z^2$, i kładąc $\sqrt{C}$ za γ , otrzymamy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A+Bx-Cx^2}} = -\frac{2}{\sqrt{C}} \text{ łuk} \left(\text{stycz} = \frac{\sqrt{a'-x}}{\sqrt{x-a}} \right) + \text{stała},$$

a i a' są pierwiastki zrównania $x^2 - \frac{B}{C}x - \frac{A}{C} = 0$.

Jeżeli położymy $A=C=1$, $B=0$, różniczka dana zamieni się w tym szczególnym przypadku na $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, a wzoru poprzedzającego będzie całka

$$-2 \text{ łuk} \left(\text{stycz} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \right) + \text{stała}; \text{ gdyż } a \text{ i } a' \text{ są}$$

wtenczas pierwiastkami zrównania $x^2-1=0$, więc potrzeba wziąć $a=-1$, $a'=1$, a to ażeby nie wpaść na wyrażenie urojone.

Pokażę teraz, że ten wypadek wyraża także łuk koła, którego wstawa $= x$, i którego różniczką, jak wiemy (36), jest $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Na ten koniec przypomnijmy sobie, że

$$\text{stycz } 2A = \frac{2 \text{ stycz } A}{1 - \text{stycz}^2 A},$$

złąd wypada że łuk dwa razy większy od tego, który jest wskazany w poprzedzającym wzorze, ma za styczną $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, że zatem jest dopełnieniem tego łuku,

któregoby $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ było styczną, a x wstawą (*Trig*).

Więc nazywając ten łuk ostatni, przez s , otrzymamy $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = s - \frac{\pi}{2} + \text{stała}$, a przydając $-\frac{\pi}{2}$ do stałej dowolnej, będzie $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = s + \text{stała}$.

W ogólności, we wszystkich przypadkach, gdy otrzymujemy jednej tej samej różniczki dwie całki na pozor odmienne, różnica między niemi zależy tylko od ilości stałej dowolnej; bo jeżeli dwie funkcye V i X są takie iż $dX = dV$, albo $dX - dV = d(X - V) = 0$, musi być koniecznie $X - V = \text{stała}$.

186. Można zamienić prosto różniczkę

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}} = \frac{dx}{\gamma \sqrt{\alpha + \beta x - x^2}}, \text{ na różniczkę łuku}$$

koła; bo czyniąc naprzód $x - \frac{\beta}{2} = z$, otrzymamy

$$\frac{dz}{\gamma \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}\beta^2 - z^2}}; \text{ biorąc potem } \alpha + \frac{1}{4}\beta^2 = g^2, z = gu, \text{ znaj-}$$

dziemy $\frac{dz}{\gamma \sqrt{1-u^2}}$, której całka jest $\frac{1}{\gamma}$ łuk (wst $= u$) + stała.

187. Całkowanie wzoru $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, może się także

odbyć za pomocą logarytmów, i prowadzi w ten czas do wyrażeń urojonych wstawy i dostawy, które na wielką zasługują uwagę.

Porównyując ten wzór z różniczką $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$, otrzymamy $A=1$, $B=0$, $C=-1$ a całka ogólna zamieni się (184) na $\frac{1}{\sqrt{-1}} \ln(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}) + \text{stała}$.

Jeżeli wyrazimy przez z łuk, którego różniczką jest $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, będziemy mieli

$$z = \frac{1}{\sqrt{-1}} \ln(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}) + \text{stała}.$$

Lecz jeżeli chcemy, ażeby ten łuk niknął razem z ilością x , trzeba opuścić stałą dowolną; gdyż czyniąc $x=0$, druga strona równania przywiedzie się, do tej jednej ilości stałej z przyczyny że $1=0$ (*).

To założywszy, ponieważ x jest wstawą łuku z ,

(*) Może być rzeczą użyteczną pokazać, że ta całka otrzymuje się bezpośrednio kładąc

$$\sqrt{1-x^2} = t - x\sqrt{-1},$$

$$\text{złąd wypada} \quad 1 = t^2 - 2xt\sqrt{-1},$$

potém różniczkując i dzieląc przez 2

$$0 = (t - x\sqrt{-1})dt - tdx\sqrt{-1},$$

złąd mamy

$$\frac{dx}{t - x\sqrt{-1}} = \frac{dt}{t\sqrt{-1}},$$

a zatem

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{dx}{t - x\sqrt{-1}} = \int \frac{dt}{t\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \ln t + \text{stała} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-1}} \ln \left\{ \sqrt{1-x^2} + x\sqrt{-1} \right\} + \text{stała}. \end{aligned}$$

a $\sqrt{1-x^2}$ jest jego dostawą, równanie wyższe zamieni się na

$$z\sqrt{-1} = l(\text{dost } z + \sqrt{-1} \text{ wst } z);$$

a jeżeli weźmiemy z odjemne, ponieważ

$$\text{wst } (-z) = -\text{wst } z, \text{ dost } (-z) = \text{dost } z,$$

otrzymamy wypadek

$$-z\sqrt{-1} = l(\text{dost } z - \sqrt{-1} \text{ wst } z).]$$

który złączony z poprzedzającym, daje równanie,

$$\pm z\sqrt{-1} = l(\text{dost } z \pm \sqrt{-1} \text{ wst } z).$$

Biorąc z każdej strony równania liczby odpowiadające logarytmóm, otrzymamy równanie

$$e^{\pm z\sqrt{-1}} = \text{dost } z \pm \sqrt{-1} \text{ wst } z,$$

które może być sprawdzone kładąc na miejscu ilości wykładniczej, na miejscu wstawy i dostawy, ich rozwinięcia wyprowadzone z licz. 27 i 37.

Uważając osobno równania

$$e^{z\sqrt{-1}} = \text{dost } z + \sqrt{-1} \text{ wst } z,$$

$$e^{-z\sqrt{-1}} = \text{dost } z - \sqrt{-1} \text{ wst } z,$$

jeżeli dodamy jedno do drugiego, otrzymamy

$$\text{dost } z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2};$$

odejmując drugie od pierwszego, będzie

$$\text{wst } z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Te wyrażenia w gruncie swoim, są tylko czystými znakami algebraicznými, przez które pod postacią skróconą, wyrażają się szeregi z licz. 37, a lubo nie można wynaleść odpowiadającej im wartości pod kształtem skończonym, dają się jednak używać w rachunku z największą łatwością, i

wykazują wszystkie własności linii trygonometrycznych przez nie wyrażanych.

Kładąc nz za z w zrównaniu

$$\begin{aligned} e^{\pm z\sqrt{-1}} &= \text{dost } z \pm \sqrt{-1} \text{ wsta } z, \\ \text{będzie} \quad e^{\pm nz\sqrt{-1}} &= \text{dost } nz \pm \sqrt{-1} \text{ wst } nz. \end{aligned}$$

Aż jest także

$$\begin{aligned} e^{\pm nz\sqrt{-1}} &= (e^{\pm z\sqrt{-1}})^n = (\text{dost } z \pm \sqrt{-1} \text{ wst } z)^n, \\ \text{zatem } (\text{dost } z \pm \sqrt{-1} \text{ wst } z)^n &= \text{dost } nz \pm \sqrt{-1} \text{ wst } nz. \end{aligned}$$

Te zrównania prowadzą nas do wniosków bardzo ważnych (*); tu zastanowimy się nad użyciem ich do odkrycia mnożników dwówyrazu $x^n + a^n$, gdyż to badanie jest potrzebne do całkowania ułamków $\frac{x^m dx}{x^n + a^n}$.

188. Funkcya $x^n + a^n$ przerabia się na $a^n(y^n + 1)$, czyniąc $x = ay$; a dla poznania mnożników dosyć jest rozwiązać zrównanie

$$y^n + 1 = 0, \text{ czyli } y^n = \pm 1.$$

Wyrażenie $y = \text{dost } z + \sqrt{-1} \text{ wst } z$, czyni zadość temu zrównaniu, przez wyznaczenie bardzo proste łuku z ; gdyż mamy

$$y^n = (\text{dost } z + \sqrt{-1} \text{ wst } z)^n = \text{dost } nz + \sqrt{-1} \text{ wst } nz;$$

aż, wyraziwszy przez π połowę okręgu koła, a przez m jakąkolwiek liczbę całą, mamy

$$\text{wst } m\pi = 0, \quad \text{dost } m\pi = \pm 1,$$

podług tego jak m będzie parzyste lub nieparzyste; zatem dla otrzymania $y^n = \pm 1$, dosyć będzie założyć $nz = m\pi$.

Ażeby lepiej rozróżnić m parzyste od m nieparzystego, napiszmy za m , w pierwszym razie $2m$, w drugim zaś $2m+1$, i położmy

$$nz = 2m\pi, \quad nz = (2m+1)\pi.$$

(*) Obacz notę B na końcu dzieła.

W pierwszym założeniu, otrzymamy

$$y = \text{dost} \frac{2m\pi}{n} + \sqrt{-1} \text{wst} \frac{2m\pi}{n}, \text{ a } y^n = +1,$$

w drugim

$$y = \text{dost} \frac{(2m+1)\pi}{n} + \sqrt{-1} \text{wst} \frac{(2m+1)\pi}{n}, \text{ i } y^n = -1.$$

189. Za pomocą nieoznaczonej liczby m , otrzymujemy ze wzorów poprzedzających wszystkie wartości, które y mieć może, albowiem pierwsze wyrażenie, czyniąc w niem

$$m=0, \text{ daje } y=1;$$

$$m=1, \quad y = \text{dost} \frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1} \text{wst} \frac{2\pi}{n};$$

$$m=2, \quad y = \text{dost} \frac{4\pi}{n} + \sqrt{-1} \text{wst} \frac{4\pi}{n};$$

.....

$$m=n-2, \quad y = \text{dost} \frac{(2n-4)\pi}{n} + \sqrt{-1} \text{wst} \frac{(2n-4)\pi}{n};$$

$$m=n-1, \quad y = \text{dost} \frac{(2n-2)\pi}{n} + \sqrt{-1} \text{wst} \frac{(2n-2)\pi}{n}.$$

190. Przeszedłszy ten wyraz, nie znajdujemy już wartości nowych, lecz tylko poprzedzające, które idą w tymże samym porządku. Jakoż jeśli założymy $n=m$, będzie tylko $y = \text{dost} 2\pi = 1$, i wypadamy na wartość pierwszą, która powtarzać się będzie każdego razu, gdy za m weźmiemy ilość wielokrotną ilości n . Czyniąc potem $m=n+1$, wypada łuk

$$\frac{(2n+2)\pi}{n} = 2\pi + \frac{2\pi}{n},$$

którego wstawa i dostawa są takie, jakie są łuku $\frac{2\pi}{n}$,

co sprowadza do wartości drugiej, i tak o innych.

200. Zdaje się że tablica poprzedzająca, jedną tylko wartość ilości y rzetelną dać może, to jest pierw-

szą, lecz znajdujemy drugą, gdy n jest parzyste, ponieważ wtedy przechodzimy przez $m = \frac{n}{2}$, co daje $y = \text{dost } \pi + \sqrt{-1} \text{ wst } \pi = -1$.

3cie Wartości urojone poprzedzającej tablicy łączą się z sobą po dwie, jakoto ostatnia z pierwszą, przedostatnia z drugą, i tak dalej, ponieważ

$$\frac{(2n-2)\pi}{n} = 2\pi - \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{(2n-4)\pi}{n} = 2\pi - \frac{4\pi}{n}, \quad \text{i t. d.}$$

i w ogulności

$$\text{dost}(2\pi - \alpha) = \text{dost } \alpha, \quad \text{wst}(2\pi - \alpha) = -\text{wst } \alpha.$$

Zatém gdy n jest liczbą nieparzystą, a przeto $n-1$ parzystą, wszystkie pierwiastki urojone od $m=1$, aż do $m=n-1$, łączą się w $\frac{n-1}{2}$ par kształtu

$$y = \text{dost } \frac{2m\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \text{ wst } \frac{2m\pi}{n},$$

gdzie nadawać wartości ilości m dość jest tylko od 0, aż do $\frac{n-1}{2}$.

Gdy n jest liczbą parzystą, tworzy się tylko $\frac{n-1}{2}$ par, bo pierwiastek odpowiadający ilości $\frac{n}{2}$, i który jest rzetelny, zajmuje średnie miejsce między pierwiastkami, które są urojone.

Przychodzimy do podobnych wniosków względem zrównania $y^n + 1 = 0$ do którego służy wzór

$$y = \text{dost } \frac{(2m+1)\pi}{n} + \sqrt{-1} \text{ wst } \frac{(2m+1)\pi}{n},$$

który, gdy w nim położymy

$$m=0, \quad \text{daje } y = \text{dost } \frac{\pi}{n} + \sqrt{-1} \text{ wst } \frac{\pi}{n},$$

$$m=1, \quad y = \text{dost } \frac{3\pi}{n} + \sqrt{-1} \text{ wst } \frac{3\pi}{n},$$

.....

$$m=n-2, \quad y = \text{dost } \frac{(2n-3)\pi}{n} + \sqrt{-1} \text{ wst } \frac{(2n-3)\pi}{n},$$

$$m=n-1, \quad y = \text{dost } \frac{(2n-1)\pi}{n} + \sqrt{-1} \text{ wst } \frac{(2n-1)\pi}{n},$$

za tym wyrazem nie znajdziemy już wartości nowych, ale te same powtarzać się będą, tak jak w przypadku poprzedzającym i dla tej samej przyczyny. Wartość rzetelna wtedy tylko być może, gdy ilość n jest nieparzysta i odpowiada wartości

$$m = \frac{n-1}{2}, \text{ co daje } y = \text{dost } \pi + \sqrt{-1} \text{ wst } \pi = -1;$$

ponieważ ta wartość jest środkową między wszystkiemi wartościami, przeto pierwiastki urojone, które są od niej równie dalekie, mogą być złączone w jedną parę, takowych par wypada $\frac{n-1}{2}$, wzór ich ogólny będzie

$$y = \text{dost } \frac{(2m+1)\pi}{n} + \sqrt{-1} \text{ wst } \frac{(2m+1)\pi}{n},$$

i dla otrzymania wszystkich wartości ilości y , dość jest w tym wzorze za m kłaść liczby całe od 0, aż do $\frac{n-1}{2}$.

Gdy zaś liczba n jest parzysta, trzeba za m kłaść liczby od 0, aż do $\frac{n}{2}$, bo w tym razie nie masz innych pierwiastków, jak tylko urojone.

Jeżlibyśmy w zrozumieniu tych wykładów mieli jaką trudność, moglibyśmy ją sobie ułatwić, nadając ilości n wartości szczególne.

190. Łatwo możemy z poprzedzających wzorów wyprowadzić mnożniki rzetelne wyrażenia $y^n = 1$.

$$\text{Wzór } y = \text{dost } \frac{2m\pi}{n} + \sqrt{-1} \text{ wst } \frac{2m\pi}{n},$$

daje na mnożniki pierwszego stopnia ilości $y^n - 1$, dwa wyrażenia urojone

$$\left(y - \text{dost } \frac{2m\pi}{n}\right) - \sqrt{-1} \text{ wst } \frac{2m\pi}{n},$$

$$\left(y - \text{dost } \frac{2m\pi}{n}\right) + \sqrt{-1} \text{ wst } \frac{2m\pi}{n},$$

mnożąc je otrzymujemy wyrażenie

$$y^2 - 2y \text{dost } \frac{2m\pi}{n} + 1,$$

zamykające w sobie wszystkie mnożniki rzetelne drugiego stopnia.

Znajdziemy także iż mnożniki drugiego stopnia rzetelne ilości $y^n + 1$ są

$$y^2 - 2y \text{dost } \frac{(2m+1)\pi}{n} + 1.$$

Należy uważać że te wzory zamykają także mnożniki rzetelne stopnia pierwszego, lecz przedstawują się te mnożniki jako podwójne, albowiem we wzorze pierwszym kładąc $m=0$, albo $m=n$, wypada

$$y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2,$$

a jeżeli n jest parzyste, kładąc $m = \frac{n}{2}$, będzie wypadek

$$y^2 + 2y + 1 = (y + 1)^2,$$

który także z drugiego wzoru otrzymamy gdy n jest nieparzyste, to jest kładąc $m = \frac{n-1}{2}$.

191. Funkcye kształtu $x^{2n} - 2px^n + q$, mogą być traktowane na wzór tych, które zawierają dwa tylko wyrazy. Rozwiązując je sposobem zrównań drugiego stopnia, wyciągniemy z nich mnożniki $x^n - (p \pm \sqrt{p^2 - q})$, które będą rzetelne, dopóki będzie $p^2 > q$; czyniąc zaś wtenczas

$$a^n = p + \sqrt{p^2 - q}, \quad a'^n = p - \sqrt{p^2 - q},$$

otrzymamy funkcyę kształtu $x^n = a^n$, mające się rozkładać na mnożniki.

Gdy będzie $p^2 < q$, uczynimy $p = a^2$, $q = \beta^{2n}$, $x = \beta y$, a otrzymamy

$$\beta^{2n} y^{2n} - 2a^n \beta^n y^n + \beta^{2n} = \beta^{2n} \left(y^{2n} - \frac{2a^n}{\beta^n} y^n + 1 \right);$$

lecz że warunek $p^2 < q$, czyli $a^{2n} < \beta^{2n}$, daje $a^n < \beta^n$, ilość $\frac{a^n}{\beta^n}$ będzie ułamkiem, i będzie mogła być wyrażoną przez dostawę łuku danego δ ; zatem funkcyę dana zamieni się na

$$\beta^{2n} (y^{2n} - 2y^n \text{dost } \delta + 1),$$

po czém dosyć będzie rozwiązać zrównanie

$$y^{2n} - 2y^n \text{dost } \delta + 1 = 0.$$

Ztąd wyciągniemy naprzód $y^n = \text{dost } \delta \pm \sqrt{-1} \text{wst } \delta$,

biorąc potem $y = \text{dost } z \pm \sqrt{-1} \text{wst } z$,

otrzymamy (187) $y^n = \text{dost } nz \pm \sqrt{-1} \text{wst } nz$,

a równając dwa wyrażenia wartości y^n , jedno z drugim znajdziemy

$$\text{dost } nz = \text{dost } \delta, \quad \text{wst } nz = \text{wst } \delta.$$

Czyni się zadość tym zrównaniom w ogólności zakładając $nz = 2m\pi + \delta$, gdzie m wyraża jakąkolwiek liczbę całkowitą, gdyż $\text{dost}(2m\pi + \delta) = \text{dost } \delta$, $\text{wst}(2m\pi + \delta) = \text{wst } \delta$;

zatem $z = \frac{2m\pi + \delta}{n}$, $y = \text{dost } \frac{2m\pi + \delta}{n} \pm \sqrt{-1} \text{wst } \frac{2m\pi + \delta}{n}$;

a mnożniki pierwszego stopnia funkcyi

$$y^{2n} - 2y^n \text{dost } \delta + 1$$

będą zawarte we wzorze

$$y = \left\{ \text{dost } \frac{2m\pi + \delta}{n} \pm \sqrt{-1} \text{wst } \frac{2m\pi + \delta}{n} \right\}.$$

Gdybyśmy mieli $x^{2n} + 2px^n + q = 0$, założylibyśmy jeszcze $\frac{a^n}{\beta^n} = \text{dost } \delta$; lecz wzięlibyśmy $y^{2n} - 2y^n \text{dost}(\pi - \delta) + 1$, gdyż $\text{dost}(\pi - \delta) = \text{dost } \delta$. To uczyniwszy wypadłoby

$$\text{dost } nz = \text{dost}(\pi - \delta), \quad \text{wst } nz = \text{wst}(\pi - \delta),$$

$$\text{a zatem} \quad nz = 2m\pi + \pi - \delta = (2m + 1)\pi - \delta (*).$$

Całkowanie różniczek dwówyrazowych.

192. Te różniczki wyrażają się pod postacią

$$x^{m-1} dx (a + bx^n)^{\frac{P}{Q}},$$

Ten wzór nie będzie mniej ogólny, jeśli przypuścimy, że m i n są liczby całkowite; bo gdybyśmy np mieli $x^{\frac{1}{3}} dx (a + bx^{\frac{1}{2}})^{\frac{P}{Q}}$, uczynilibyśmy $x = z^6$, ztądby wypadło $6z^7 dz (a + bz^5)^{\frac{P}{Q}}$. Można też uważać n zawsze jako dodatne; bo gdybyśmy mieli $x^{m-1} dx (a + bx^{-n})^{\frac{P}{Q}}$, założylibyśmy $x = \frac{1}{z}$, i otrzymalibyśmy $-z^{-m-1} dz (a + bz^n)^{\frac{P}{Q}}$.

Wzór takż $x^{m-1} dx (ax^r + bx^n)^{\frac{P}{Q}}$ sprowadza się do wzoru poprzedzającego, gdy wyniesiemy ilość x^r przed nawias, co daje

$$x^{m + \frac{pr}{Q} - 1} dx (a + bx^{n-r})^{\frac{P}{Q}},$$

Chcąc znaleźć, w jakim przypadku wyrażenie $x^{m-1} dx (a + bx^n)^{\frac{P}{Q}}$ może się stać wymierném, uczynimy

(*) Wzory z liczb. 190 i 191 zamykają niewidocznie twierdzenia matematyków Cotes i Moivre, i zastępują miejsce tych twierdzeń, które samej tylko ciekawości są teraz przedmiotem; i dla tego twierdzenia te nie zostały tu umieszczone; znaleźć je można w *Traité du Calcul* in 4to T. I. p. 125.

$a+bx^n=z^q$, ztąd otrzymamy $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=z^p$, potem znajdziemy

$$x^n = \frac{z^q - a}{b}, x^m = \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{m}{n}}, x^{m-1} dx = \frac{q}{nb} z^{q-1} \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{m}{n}-1} dz;$$

a że tym sposobem różniczka dana zamienia się na

$$\frac{q}{nb} z^{p+q-1} dz \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{m}{n}-1},$$

ztąd się pokazuje, że wtedy będzie wymierną, kiedy $\frac{m}{n}$ będzie liczbą całą.

Wyrażenie $x^8 dx (a+bx^3)^{\frac{p}{q}}$ zadość czyni temu warunkowi, gdyż $m=9$, $n=3$, $\frac{m}{n}=3$, i przerabia się na

$$\frac{q}{3b} z^{p+q-1} dz \left(\frac{z^3 - a}{b} \right)^3.$$

Wyrażenie $x^{m-1} dx (a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ może mieć inny kształt, gdy uczynimy odjemnym wykładnik ilości x w nawiasach, czyli gdy podzielimy ilość $a+bx^n$ przez x^n ; będzie zatem

$$x^{m-1} dx (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = x^{m-1} dx \left((ax^{-n} + b)x^n \right)^{\frac{p}{q}};$$

$$= x^{m-1} dx (ax^{-n} + b)^{\frac{p}{q}} x^{\frac{np}{q}};$$

$$= x^{m+\frac{np}{q}-1} dx (ax^{-n} + b)^{\frac{p}{q}}.$$

Biorąc to ostatnie wyrażenie zamiast pierwszego okazuje się, że trzeba zamienić m na $m+\frac{np}{q}$, n na $-n$, a na b , b na a . Czyniąc tę zamianę w wyrażeniu otrzymaném z przerobienia wyższego, znajdziemy

$$-\frac{q}{na} z^{p+q-1} dz \left(\frac{z^q - b}{a} \right)^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}-1},$$

co będzie wymierném gdy $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ jest liczbą całą.

Do tego przypadku stosuje się różniczka

$$x^4 dx (a + bx^3)^{\frac{1}{3}},$$

w której $\frac{m}{n} = \frac{5}{3}, \frac{p}{q} = \frac{1}{3}, \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{6}{3} = 2.$

193. Ponieważ nie mamy ogólnego sposobu całkowania wzoru $\int x^{m-1} dx (a + bx^n)^{\frac{p}{l}}$, przeto najpierwsza myśl, na jaką wpadamy, jest ta, ażeby dany wzór sprowadzić do przypadku najprostszego, jaki może zamykać.

Przychodzimy do tego dość łatwo za pomocą sposobu *całkowania przez części*, który służy do sprowadzenia jednej całki do innej. Wyprowadza się przez całkowanie dwóch stron równania

$$duv = u dv + v du \quad (11),$$

z którego wypada

$$uv = \int u dv + \int v du, \quad \text{złąd } \int u dv = uv - \int v du,$$

Co pokazuje, że jeżeli w różniczce $X dx$, funkcyja X może się rozłożyć na dwa mnożniki P i Q , i jeżeli umiemy scałkować różniczkę $Q dx$, wyrażając tę całkę przez v , i kładąc $u = P$, będziemy mieli

$$\int P Q dx = P v - \int v dP,$$

w czém cała trudność zależy na scałkowaniu $\int v dP$.

194. Dla skrócenia nieco wypadków otrzymywanych ze wzoru $x^{m-1} dx (a + bx^n)^{\frac{p}{l}}$, będziemy pisali p zamiast $\frac{p}{q}$, rozumiejąc przez p , jakąkolwiek liczbę ułamkową, przeto będziemy mieli wzór

$$x^{m-1} dx (a + bx^n)^p.$$

Z pomiędzy wielu sposobów rozłożenia tej różniczki

na mnożniki, obraliśmy sposób, za pomocą którego zmniejsza się wykładnik ilości x niezajętej nawiasem, a co się wykonywa pisząc wzór podany tak:

$$\int x^{m-n} x^{n-1} dx (a+bx^n)^p,$$

Tym sposobem mnożnik $x^{n-1} dx (a+bx^n)^p$ daje się scałkować, jakiebykolwiek było p (170); wyraziwszy ten mnożnik przez dv , będzie

$$v = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)nb}, \text{ a } u = x^{m-n},$$

złąd wypada

$$\int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)nb} - \frac{m-n}{(p+1)nb} \int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^{p+1};$$

a że

$$\begin{aligned} \int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^{p+1} &= \int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^p (a+bx^n) = \\ &= a \int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^p + b \int x^{m-1} dx (a+bx^n)^p; \end{aligned}$$

podstawiwszy zatem tę ostatnią wartość w poprzedzającym zrównaniu, i zebrawszy wszystkie wyrazy mnożone przez $\int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^p$, będzie

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{m-n}{(p+1)n}\right) \int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^p &= \\ &= \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - a(m-n) \int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^p}{(p+1)nb}; \end{aligned}$$

$$\text{złąd wyciągamy (A) } \dots \dots \dots \int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - a(m-n) \int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^p}{b(pn+m)}.$$

Jasno z tego wzoru widzimy, że scałkowanie wzoru $\int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^p$ zależy od scałkowania wzoru $\int x^{m-n-1} dx (x+bx)^p$, ten ostatni zależeć będzie od wzoru $\int x^{m-2n-1} dx (a+bx^n)^p$, pisząc $m-n$ za m w zrównaniu

(A); potem odmieniwszy jeszcze m na $m-2n$, w témże samém zrównaniu, zcałkowanie $\int x^{m-2n-1} dx (a+bx^n)^p$ zależeć będzie od $\int x^{m-3n-1} dx (a+bx^n)^p$; i t. d.

W ogulności, jeżeli r wyraża liczbę wykonanych działań, przyjdziemy do $\int x^{m-rn-1} dx (a+bx^n)^p$, a ostatni wzór będzie

$$\int x^{m-(r-1)n-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{x^{m-rn} (a+bx^n)^{p+1} - a(m-rn) \int x^{m-rn-1} dx (a+bx^n)^p}{b(pn+m-(r-1)n)}.$$

Ten ostatni wzór jasno pokazuje, że gdy ilość m jest wielokrotną ilości n , wtedy $\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^p$ daje się zcałkować algebraicznie, gdyż ostatnia całka $\int x^{m-rn} dx (a+bx^n)^p$ mająca współczynnik $m-rn=0$, staje się równą zeru. Ten wypadek zgadza się z wypadkiem pod licz. 192.

195. Można też daną różniczkę na inne rozłożyć mnożniki, przez co wykładnik nawiasowy p zmniejszy się jednością; na ten koniec uważamy, że

$$\begin{aligned} \int x^{m-1} dx (a+bx^n)^p &= \int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{p-1} (a+bx^n) = \\ &= a \int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{p-1} + b \int x^{m+n-1} dx (a+bx^n)^{p-1}, \end{aligned}$$

i że we wzorze (A) odmieniwszy m na $m+n$, i p na $p-1$, otrzymamy

$$\int x^{m+n-1} dx (a+bx^n)^{p-1} = \frac{x^m (a+bx^n)^p - a m \int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{p-1}}{b(pn+m)}.$$

Podstawivszy tę wartość w poprzedzającym zrównaniu, mieć będziemy (B)

$$\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{x^m (a+bx^n)^p + p n a \int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{p-1}}{(pn+m)}.$$

Za pomocą tego wzoru (B) odejmiemy następnie od liczby p wszystkie w niej zawarte jedności; a używając obudwu wzorów (A) i (B) razem, całka

$$\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^p \text{ zależeć będzie od } \int x^{m-nr-1} dx (a+bx^n)^{p-r};$$

gdzie rn jest największą liczbą wielokrotną ilości n , zawartą w $m-1$, a s największą liczbą całą zawartą w p .

Całka $\int x^7 dx (a+bx^5)^{\frac{5}{2}}$ np, za pomocą wzoru (A), zostanie przewidziona kolejno do

$$\int x^4 dx (a+bx^5)^{\frac{5}{2}}, \quad \int x dx (a+bx^5)^{\frac{5}{2}},$$

całka zaś $\int x dx (a+bx^5)^{\frac{5}{2}}$, przez wzór (B) zależeć będzie od $\int x dx (a+bx^5)^{\frac{5}{2}}$, a ta od $\int x dx (a+bx^5)^{\frac{1}{2}}$.

196. Gdyby m i n były ujemne, jasna jest, że wzory (A) i (B) nie odpowiadałyby zamierzonemu celowi, owszem powiększyłyby wykładniki i nawiasu, i ilości x nawiasem niezajętej; lecz biorąc odwrótnie te wzory, utworzymy inne, które się stosują do rzeczonych przypadków

$$\text{Ze wzoru (A) wyciągniemy } \int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - b(m+np) \int x^{m-1} dx (a+bx^n)^p}{a(m-n)};$$

a kładąc $-m+n$ za m , otrzymamy wzór (C).

$$\int x^{-m-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{x^{-m}(a+bx^n)^{p+1} + b(m-n-np) \int x^{-m+n-1} dx (a+bx^n)^p}{an},$$

który zmniejsza wykładniki ilości x niezajętej w nawiasie.

Chcąc ze wzoru (B) wyciągnąć wzor odwrótny, bierzemy

$$\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{p-1} = \frac{x^m(a+bx^n)^p - (m+np) \int x^{m-1} dx (a+bx^n)^p}{pna};$$

potém pisząc $-p+1$ za p , otrzymamy wzór (D)

$$\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{-p} = \frac{x^m(a+bx^n)^{-p+1} - (m+n-np) \int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{-p+1}}{(p-1)na},$$

który odpowiada założonemu celowi.

Wzory (A), (B), (C), (D), na nie się nie przydadzą, gdy ich mianownik równy będzie zeru. Co się przytrafia wzorowi (A) np, gdy $m = -np$; lecz we wszystkich tego gatunku zdarzeniach, różniczka podana może być przywiedzioną do jednowyrazu albo do ułamku wymiernego (*).

197. Weźmy funkcją $\int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$, gdzie m wyraża ilość całą dodatnią; znajdziemy za pomocą wzoru (A), uczyniwszy w nim $a=1$, $b=-1$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$,

$$\int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-2} \sqrt{1-x^2}}{m-1} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

pisząc zaś m za $m-1$, będzie

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1} \sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Nadając kolejno ilości m rozmaite wartości, zaczawszy od liczb nieparzystych, otrzymamy

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + \text{stała},$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{3} x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3} \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{5} x^4 \sqrt{1-x^2} + \frac{4}{5} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{7} x^6 \sqrt{1-x^2} + \frac{6}{7} \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

i t. d.

(*) Obacz *Traité du Calcul* in 4to T. II, str. 41.

Ztąd wyciągniemy

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + \text{stała},$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{1} \frac{2}{3}\right)\sqrt{1-x^2} + \text{stała},$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{5}x^4 + \frac{1.4}{3.5}x^2 + \frac{1.2.4}{1.3.5}\right)\sqrt{1-x^2} + \text{stała},$$

$$\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{7}x^6 + \frac{1.6}{5.7}x^4 + \frac{1.4.6}{3.5.7}x^2 + \frac{1.2.4.6}{1.4.5.7}\right)\sqrt{1-x^2} + s.,$$

i t. d.

prawo tych wyrażeń jest widoczne.

Biorąc wartości m parzyste, i zakładając $m=2$,
 $m=4$, $m=6$, i t. d. znajdujemy

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{4}x^3\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{4}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{6}x^5\sqrt{1-x^2} + \frac{5}{6}\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

i t. d.

w tym przypadku wszystkie całki podane zależą
 będą od

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{łuk}(\text{wst}=x) + \text{stała} \quad (36),$$

a oznaczając ten łuk przez A , będzie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = A + \text{stała},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} A + \text{stała},$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{4} x^3 + \frac{1.3}{2.4} x\right) \sqrt{1-x^2} + \frac{1.3}{2.4} A + \text{stała},$$

$$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{6} x^5 + \frac{1.5}{4.6} x^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x\right) \sqrt{1-x^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6} A + \text{sta.};$$

i t. d.

198. Poszukajmy teraz wzorów odpowiadających przypadków, w których m jest ujemne. Mamy wten-
czas przez wzór (C) (196),

$$\int \frac{x^{-m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{-m} \sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m} \int \frac{x^{-m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

pisząc $-m$ za $-m-1$, otrzymamy

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{x^{m-2} \sqrt{1-x^2}}.$$

Nie można brać $m=1$, bo ta wartość czyni mianownik równym zeru; trzeba więc szukać *a priori* całki funkcji $\frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}}$. Znajdziemy ją łatwo z liczby 192; uczyniwszy $1-x^2=z^2$, będzie

$$x = \sqrt{1-z^2}, \quad dx = \frac{-z dz}{\sqrt{1-z^2}};$$

a zatem

$$\frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} = \frac{-dz}{1-z^2},$$

drugiej strony tego zrównania całką jest

$$-\frac{1}{2} \ln(1+z) + \frac{1}{2} \ln(1-z) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right);$$

która po przywróceniu za z , jego wartości, będzie

$$-\frac{1}{2}l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right);$$

a po rozmnożeniu przez $1+\sqrt{1-x^2}$, licznika i mianownika pod znakiem 1, wypada

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}l\left(\frac{(1+\sqrt{1-x^2})^2}{x^2}\right) &= -\frac{1}{2}l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2 = \\ &= -l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right); \end{aligned}$$

przeto nakoniec będziemy mieli

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -l\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + \text{stała};$$

Teraz uczyniwszy $m=3$, $m=5$, i t. d. otrzymamy

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{4x^4} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^7\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{6x^6} + \frac{5}{6} \int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}}$$

i t. d.

Kładąc potem $m=2$, $m=4$, $m=6$, i t. d. będzie

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \text{stała}$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3x^3} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^6\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{5x^5} + \frac{4}{5} \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}$$

i t. d.

Z tych dwóch szeregów zrównań wyciągniemy, jak w liczbie poprzedzającej, dwie klasy wzorów, z których jedna będzie zcałkowana przez logarytmy, druga zaś algebraicznie.

199. Różniczka $x^{n-1} dx(ax^r + bx^n)^p$, mogąc się sprowadzić do kształtu $x^{m+p-1} dx(a+bx^{n-r})^p$ (192), może ulegać tym samym przerabianiom, jakim ta ostatnia

ulega. Weźmy za przykład różniczkę $\frac{x^q dx}{\sqrt{2cx-x^2}}$ wydarzającą się w mechanice. Mamy zaraz

$$\int \frac{x^q dx}{\sqrt{2cx-x^2}} = \int x^q dx (2cx-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \int x^{q-\frac{1}{2}} dx (2c-x)^{-\frac{1}{2}};$$

wzór (A) (194), gdy w nim uczynimy

$$m=q+\frac{1}{2}, \quad n=1, \quad p=-\frac{1}{2}, \quad a=2c, \quad b=-1,$$

daje

$$\int x^{q-\frac{1}{2}} (2c-x)^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{x^{q-\frac{1}{2}} (2c-x)^{\frac{1}{2}}}{q} + \frac{2c(q-\frac{1}{2})}{q} \int x^{q-\frac{3}{2}} (2c-x)^{-\frac{1}{2}} dx;$$

lecz uważając że

$$x^{q-\frac{1}{2}} = x^q x^{-\frac{1}{2}}, \quad x^{q-\frac{3}{2}} = x^{q-1} x^{-\frac{1}{2}},$$

potém ułamkowe potęgi ilości x wprowadzając pod nawias, i zamieniając je na ilości pierwiastkowe, otrzymamy wzór

$$\int \frac{x^q dx}{\sqrt{2cx-x^2}} = -\frac{x^{q-1} dx \sqrt{2cx-x^2}}{q} + \frac{(2q-1)c}{q} \int \frac{x^{q-1} dx}{\sqrt{2cx-x^2}}.$$

200. Oba poprzedzające przykłady stosują się do wzoru (A); wyciągamy niemniej pożyteczne wypadki ze wzoru (D) (196); służy on do całkowania różniczki

$$\frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^m} = dz(\beta^2 + z^2)^{-m},$$

którąśmy zostawili całkując ułamki wymierne (180); kładąc bowiem

$$x=z, \quad m=1, \quad n=2, \quad p=m, \quad a=\beta^2, \quad b=1,$$

wrór (D) staje się

$$\int dz(\beta^2 + z^2)^{-m} = \frac{z(\beta^2 + z^2)^{-m+1} + (2m-3)\int dz(\beta^2 + z^2)^{-m+1}}{(2m-2)\beta^2}$$

z kąd wypada,

$$\int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^m} = \frac{1}{(2m-2)\beta^2} \frac{z}{(z^2 + \beta^2)^{m-1}} + \frac{2m-5}{(2m-2)\beta^2} \int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^{m-1}}.$$

Upraszczanie wskazane w tym wzorze, zatrzymuje się na różnicze $\int \frac{dz}{z^2 + \beta^2}$, bo gdybyśmy założyli $m=1$, dzielnik $2m-2$ stając się równym zeru, uczyniłby drugą stronę zrównania nieskończenie wielką. Łatwo możemy widzieć, że ta okoliczność jest tego samego rodzaju, jakiego była okoliczność pod licz. 168, albowiem gdybyśmy mogli przejść od $m=1$, do $m=0$, wypadlibyśmy na całkę $\int dz=z$, i mielibyśmy algebraiczną całkę $\int \frac{dz}{z^2 + \beta^2}$, która koniecznie jest przestępną (180).

Całkowanie przez szeregi.

201. Otrzymamy łatwo całkę $\int X dx$, gdy rozwiniemy funkcję X na szereg, tym bowiem sposobem będziemy mieli same tylko jednowyrazy, do których bezśrednie stosuje się prawidło z licz. 167. Jakoż niech będzie $X = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + \text{i t. d.}$ mnożąc obie strony zrównania przez dx , i całkując każdy z osobna wyraz drugiej strony, otrzymamy

$$\int X dx = \frac{Ax^{m+1}}{m+1} + \frac{Bx^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{Cx^{m+2n+1}}{m+2n+1} + \text{stała.}$$

Gdy w rozwinieniu funkcji X zdarzy się wyraz kształtu $\frac{A}{x}$, ztąd wypadnie w całce wyraz $A \ln x$ (168).

202. Najprostsza funkcja do zamienienia na szereg jest $\frac{1}{a+x}$, ztąd wypada

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \text{i t. d.}$$

zatém

$$\int \frac{dx}{a+x} = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc.} + \text{stała}$$

lecz wiemy z wyższego, że $\int \frac{dx}{a+x} = l(a+x)$, więc
będzie $l(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \text{i t. d.} + \text{stała}$.

Aby znaleźć co znaczy ilość stała, dosyć jest uczynić $x=0$, z tego założenia, otrzymamy $la = \text{stała}$ a następnie

$$l(a+x) - la = l\left(1 + \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \text{i t. d.}$$

co się zgadza z wypadkiem pod liczb. 29.

Niech będzie różniczka $\frac{adx}{a^2+x^2}$, którą możemy wy-

razić pod postacią $\frac{\frac{dx}{a}}{1 + \frac{x^2}{a^2}}$, a która tém samém należy

do łuku, którego styczną $= \frac{x}{a}$, (56); rozwijając $\frac{a}{a^2+x^2}$ na szereg, będzie

$$\frac{a}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} - \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^4}{a^5} - \frac{x^6}{a^7} + \text{i t. d.}$$

całkując każdy wyraz osobno, otrzymamy,

$$\begin{aligned} \int \frac{adx}{a^2+x^2} &= \text{łuk}\left(\text{stycz} = \frac{x}{a}\right) + \text{stała} = \\ &= \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \text{i t. d.} + \text{stała}. \end{aligned}$$

Chcąc wyciągnąć z tego zrównania wartość najmniejszego łuku, którego styczną jest $\frac{x}{a}$, należy opuścić stałą dowolną, bo łuk jest zero, gdy $x=0$; więc będzie

$$\text{łuk} \left(\text{styczna} = \frac{x}{a} \right) = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \text{i t. d.},$$

co się zgadza z wypadkiem pod licz. 38.

Podobnież działając z różniczką $\frac{x^m dx}{a^n + x^n}$, otrzymamy

$$\int \frac{x^m dx}{a^n + x^n} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)a^n} - \frac{x^{m+n+1}}{(m+n+1)a^{2n}} + \frac{x^{m+2n+1}}{(m+2n+1)a^{3n}} - \text{i t. d.} + \text{stała.}$$

203. Ponieważ zamiarem całkowania przez szeregi jest wynalezienie przybliżonych wartości całek, których z dokładnością otrzymać nie możemy, wiele na tém zależy, aby mieć kilka szeregów na wyrażenie jednejże całki dla wybrania z pomiędzy nich tego, który staje się najbardziej malejącym przez nadanie szczególnej wartości na ilość x . Szeregi postępujące według dodatnich potęg ilości x , których wykładniki w następujących po sobie wyrazach co raz się powiększają, czyli szeregi rosnące (*séries ascendantes*), wtenczas tylko pospolicie w następnych wyrazach maleją, gdy zmienna x jest bardzo mała; przeciwnie, szeregi postępujące według potęg ujemnych ilości x , czyli szeregi ubywające, (*séries descendantes*) tém bardziej maleją, im zmienna x jest większa.

Chcąc otrzymać szereg tego gatunku w przykładzie poprzedzającym trzeba odmienić porządek ilości dwówwyrazu $a^n + x^n$, to jest napisać x na miejscu a w rozwinięciu $\frac{1}{a^n + x^n}$, a tak otrzymalibyśmy

$$\frac{1}{x^n + a^n} = \frac{1}{x^n} - \frac{a^n}{x^{2n}} + \frac{a^{2n}}{x^{3n}} - \frac{a^{3n}}{x^{4n}} + \text{i t. d.},$$

rozmnożywszy zaś przez $x^m dx$, i zcałkowawszy będzie

$$\int \frac{x^m dx}{x^n + a^n} = -\frac{1}{(n-m-1)x^{n-m-1}} + \frac{a^n}{(2n-m-1)x^{2n-m-1}} - \frac{a^{2n}}{(3n-m-1)x^{3n-m-1}} + \text{i t. d.} + \text{stała.}$$

Ten szereg nie dałby nam prawdziwej wartości całki szukanej, gdyby mianownik któregośkolwiek z jego wyrazów stał się równym zeru, bo w tym przypadku wartość całki wypadłaby równa ilości nieskończenie wielkiej, co być nie powinno; toby się zaś przytrafiło, jeśliby $m+1$ było wielokrotném liczby n ; w tym razie różniczka rozwinięta zawierałaby w sobie wyraz $a^{(i-1)n} \frac{dx}{x}$, którego całką byłoby $a^{(i-1)n} \ln x$.

Gdy w poprzedzającym wypadku uczynimy $m=0$, $n=2$, $a=1$, będzie

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \text{i t. d.} + \text{stała,}$$

lubo $\frac{dx}{1+x^2}$ jest różniczką łuku, którego styczną jest $=x$, ztąd jednak wnosić nie należy, że szereg poprzedzający jest rozwinięciem tego łuku, gdyż ten szereg staje się nieskończenie wielkim, gdy $x=0$. Względ na stałą dowolną, ułatwi tę trudność, gdy uważymy, że chcąc poznać prawdziwą wartość szeregu, zawsze od tego przypadku zaczynać należy, w którym szereg jest malejącym. Aże szereg $-\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \text{i t. d.}$ tém bardziej maleje, im ilość x jest większą, i nakoniec staje się $=0$, gdy $x=\infty$; zatem zrównanie

$$\text{łuk}(\text{stycz}=x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \text{i t. d.} + \text{stała,}$$

zamienia się w swojej granicy na łuk $= 1^{c.k.} = \frac{\pi}{2} = \text{stałej}$;

podstawiwszy $\frac{\pi}{2}$ za stałą, będzie

$$\text{Łuk}(\text{stycz} = x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \text{i t. d.}$$

Możnaby także całkować ułamek wymierny $\frac{Udx}{V}$

(172) rozwijając $\frac{U}{V}$ na szereg; lecz ten sposób prowadziłby nas do szeregów bardzo zawikłanych, a rzadko kiedy malejących, prócz tego, rachunki te byłyby prawie niepożyteczne, bo umiemy już całkować taką różniczkę bądź przez logarytmy, bądź też przez łuki kołowe, których wartość otrzymujemy za pomocą tablic trygonometrycznych.

204. Wzór $\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ łatwo daje się całkować przez rozwinięcie ilości $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ na szereg; tym sposobem otrzymamy

$$\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \left\{ \frac{x^m}{m} + \frac{p b x^{m+n}}{q a (m+n)} + \frac{p(p+q)b^2}{1.2.q^2 a^2} \frac{x^{m+2n}}{m+2n} + \frac{p(p-q)(p-2q)b^3}{1.2.3.q^3 a^3} \frac{x^{m+3n}}{m+3n} + \text{i t. d.} \right\} + \text{stała.}$$

Gdybyśmy chcieli mieć szereg malejący ze względu na x trzeba by wyrazić daną różniczkę pod następującym kształtem $x^{m+\frac{pn}{q}-1} dx (b+ax^{-n})^{\frac{p}{q}}$; a otrzymalibyśmy, po rozwinięciu mnożnika $(b+ax^{-n})^{\frac{p}{q}}$, na szereg, rozmnożeniu tego szeregu przez $x^{m+\frac{pn}{q}-1} dx$, i całkowaniu,

$$\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = b^{\frac{p}{q}} \left\{ \frac{q x^{m+\frac{pn}{q}}}{mq+np} + \frac{p a}{q b} \frac{q x^{m+\frac{(p-q)n}{q}}}{mq+(p-q)n} + \frac{p(p-q)a^2}{1.2.q^2 b^2} \frac{q x^{m+\frac{(p-2q)n}{q}}}{mq+(p-2q)n} + \text{i t. d.} \right\} + \text{stała.}$$

Gdy obie ilości a i b są dodatne, lub gdy q jest nieparzyste, tedy można używać bezwzględnie któregokolwiek z poprzedzających szeregów, lecz gdy q jest parzyste, a a^p ujemne, wtedy pierwszy wzór stanie się urojonym, z przyczyny mnożnika $\frac{p}{a^q}$; to samo stanie się z drugim wzorem, gdy b^q jest ujemne.

205. Niech będzie $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ różniczka łuku, którego wstawia $=x$ (36); otrzymamy

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8 + \text{i t. d.}$$

a ztąd

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1x^3}{2.3} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7} + \text{i t. d.} + \text{stała.}$$

Opuszczając ilość stałą, szereg staje się równy zeru gdy $x=0$; tym więc sposobem otrzymamy wartość najmniejszego łuku, którego wstawia jest x , co się zgadza z liczb. 38;

Obaczmy jeszcze niektóre różniczki łatwe wprowadzić do scałkowania, podług tego co poprzedziło; lecz które nie od rzeczy będzie poznać

$$\text{106. } \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}; \text{ gdy uczynimy } \sqrt{x}=u, \text{ bę-}$$

dzie $\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}}$; lecz podług poprzedzającego szeregu mamy

$$\int \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\left(u + \frac{1.u^3}{2.3} + \frac{1.3.u^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5.u^7}{2.4.6.7} + \text{i t. d.}\right) + \text{stała}$$

zatem

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = 2\left(1 + \frac{1.x}{2.3} + \frac{1.3.x^2}{2.4.5} + \frac{1.3.5.x^3}{2.4.6.7} + \text{i t. d.}\right)\sqrt{x} + \text{st.}$$

2re. $dx\sqrt{2ax-x^2} = (2a)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}};$

a że

$$\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{x}{2a} - \frac{1.1.x^2}{2.4.4a^2} - \frac{1.1.3.x^3}{2.4.6.8a^3} - \text{i t. d.}$$

zatem

$$\int dx\sqrt{2ax-x^2} = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5.2a} - \frac{1.1}{2.4}\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7.4a^2} - \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{2x^{\frac{9}{2}}}{9.8a^3} - \text{i t. d.}\right)\sqrt{2a} + \text{stała},$$

czyli $\int dx\sqrt{2ax-x^2} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\frac{x}{5.2a} - \frac{1.1}{2.4}\frac{x^2}{7.4a^2} - \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{x^3}{9.8a^3} - \text{i t. d.}\right)2x\sqrt{2ax} + \text{stała},$

3cie. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, po rozwinięciu $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ na szereg i

całkowaniu, daje

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} \text{ i t. d.} + \text{stała},$$

4te. $\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = 1x - \frac{1}{1.2x^2} - \frac{1.3}{2.4.4x^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6.6x^6} - \text{i t. d.} + \text{st.}$

Szereg ten zamykający przestępną $1x$, tém bardziej maleje, im x jest większe; można otrzymać inny szereg, zupełnie algebraiczny, i tém bardziej malejący, im mniej x różni się od jedności. Na ten koniec uczynimy $x=1+u$; złąd wypada

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2u+u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int u^{-\frac{1}{2}} du \left(1+\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

rozwinąwszy $\left(1 + \frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ na szereg, rozmnożywszy każdy wyraz przez $u^{-\frac{1}{2}}du$, i zcałkowawszy, otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{du}{\sqrt{2u+u^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3.2} + \frac{1.3.2u^{\frac{5}{2}}}{2.4.5.4} - \frac{1.3.5.2u^{\frac{7}{2}}}{2.4.6.7.8} + \text{i t. d.} \right) \\ &\quad + \text{stała} \\ &= \left(1 - \frac{1.u}{2.3.2} + \frac{1.3.u^2}{2.4.5.4} - \frac{1.3.5.u^3}{2.4.6.7.8} + \text{i t. d.} \right) + \text{st.}, \end{aligned}$$

a, że $u=x-1$, zatem wyrazy tego szeregu tym są mniejsze, im mniejsze jest $x-1$.

206. Ponieważ celem zamieniania różniczek na szeregi jest przerobienie ich na zbiór wyrażeń, z którychby każde dało się zcałkować w szczególności; przeto nie ma koniecznej potrzeby, aby one były jednowyrazowe.

Weźmy np.

$$\frac{dx \sqrt{1-e^2 x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

i niech e oznacza ilość bardzo małą, i ażeby pierwiastek $\sqrt{1-x^2}$ nie stał się urojonym przypuszczamy, że jest $x^2 < 1$, przeto można rozwinąć $\sqrt{1-e^2 x^2}$ na szereg bardzo malejący, który będzie

$$\sqrt{1-e^2 x^2} = 1 - \frac{1}{2} e^2 x^2 - \frac{1.1}{2.4} e^4 x^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 x^6 - \text{i t. d.}$$

więc będziemy mieli do całkowania szereg

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \left(1 - \frac{1}{2} e^2 x^2 - \frac{1.1}{2.4} e^4 x^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 x^6 - \text{i t. d.} \right)$$

którego każdy wyraz zgadza się ze wzorem $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (licz. 197).

Podstawując za

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{i t. d.}$$

wyrażenia z liczb. 197, otrzymamy

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx \sqrt{1-e^2 x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = A + \\ & + \frac{1}{2} e^2 \left\{ \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} A \right\} \\ & + \frac{1.1}{2.4} e^4 \left\{ \left(\frac{1}{4} x^5 + \frac{1.3}{2.4} x \right) \sqrt{1-x^2} - \frac{1.3}{2.4} A \right\} \\ & + \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 \left\{ \left(\frac{1}{6} x^5 + \frac{1.5}{4.6} x^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x \right) \sqrt{1-x^2} - \frac{1.3.5}{2.4.6} A \right\} \\ & + \text{i t. d.} \dots \dots \dots + \text{stała.} \end{aligned}$$

Podobnież postąpilibyśmy z różniczką

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(a+x)}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a+x}},$$

rozwijając na szereg ilość $\frac{1}{\sqrt{a+x}} = (a+x)^{-\frac{1}{2}}$.

Różniczka zaś $\frac{dx}{\sqrt{(2cx-x^2)(b-x)}}$,

nadarzająca się w mechanice, przez rozwinięcie

$$\begin{aligned} (b-x)^{-\frac{1}{2}} &= b^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{b} \right)^{-\frac{1}{2}} = b^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x}{b} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2}{b^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \frac{x^3}{b^3} + \text{i t. d.} \right) \end{aligned}$$

zostałaby sprowadzoną do scałkowania wzoru

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2cx-x^2}} \quad (199).$$

*Całkowanie funkcji logarytmicznych
i wykładniczych.*

207. Niech będzie naprzód różniczka $fPdx (lx)^n$, gdzie P jest funkcją algebraiczną ilości x ; całkowanie przez części podaje nam sposób uproszczenia jej, zmniejszając wykładnik ilości lx .

Jakoż jeśli w ogólnym wyrażeniu $z^n Pdx$, będziemy mogli zcałkować mnożnik Pdx i założymy

$$Pdx = dv, \quad u = z^n \quad \text{i} \quad dz = z' dx,$$

wzór $\int u dv = uv - \int v du$ (193) da wypadek

$$\int z^n Pdx = z^n v - n \int z^{n-1} v z' dx \dots \dots \dots (1)$$

w którym różniczkowanie zmniejszyło jedną jednostką wykładnik ilości z , skoro tylko jest dodatny.

Przeciwnie dział się będzie, gdy wykładnik jest ujemny, wtedy należy odmienić sposób postępowania, i całkowanie zwrócić na mnożnik x^n , co może być wykonanem, uważając, iż zrównanie

$$dz = z' dx, \quad \text{daje} \quad dx = \frac{dz}{z'},$$

przeto mamy

$$\int \frac{Pdx}{z^n} = \int \frac{Pdz}{z' z^n} = - \frac{P}{(n-1) z' z^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{1}{z^{n-1}} d \frac{P}{z'}, \quad (2).$$

208. Gdy mamy różniczkę $x^m dx (lx)^n$, kładniemy

$$x^m dx = dv, \quad \text{z} \quad \text{t} \quad v = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

i zrównanie (1) przyprowadza się do zrównania

$$\int x^m dx (lx)^n = \frac{x^{m+1} (lx)^n}{n+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m dx (lx)^{n-1}.$$

Gdy w tém zrównaniu zamienimy kolejno n na $n-1$, na $n-2$, i t. d. otrzymamy

$$\int x^m dx (lx)^{n-1} = \frac{x^{m+1} (lx)^{n-1}}{m+1} - \frac{n-1}{m+1} \int x^m dx (lx)^{n-2},$$

$$\int x^m dx (lx)^{n-2} = \frac{x^{m+1} (lx)^{n-2}}{m+1} - \frac{n-2}{m+1} \int x^m dx (lx)^{n-3},$$

i t. d.

Wykonywając dalej podobne działania odejmiemy od wykładnika n , jeżeli jest ułamkowy, wszystkie jednostości, które zamyka; i za pomocą tych działań można utworzyć ogólny wzór następujący:

$$\begin{aligned} \int x^m dx (lx)^n = & \frac{x^{m+1}}{m+1} \left\{ (lx)^n - \frac{n}{m+1} (lx)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2} (lx)^{n-2} \right. \\ & \left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3} (lx)^{n-3} + \text{i t. d.} \right\} + \text{stała,} \end{aligned}$$

który będzie skończony, gdy n jest liczbą całą i dodatnią.

Biorąc kolejno $n=1$, $n=2$, otrzymujemy

$$\int x^m dx (lx) = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left\{ (lx) - \frac{1}{m+1} \right\} + \text{stała,}$$

$$\int x^m dx (lx)^2 = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left\{ (lx)^2 - \frac{2}{m+1} (lx) + \frac{1 \cdot 2}{(m+1)^2} \right\} + \text{stała,}$$

Gdy $m=-1$, wzór poprzedzający nie może już być zastosowany; lecz czyniąc $lx=u$, mamy

$$\int \frac{dx}{x} (lx)^n = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + \text{stała} = \frac{1}{n+1} (lx)^{n+1} + \text{stała};$$

i różniczka $\frac{dx}{x} U$, w którejby U oznaczało funkcję algebraiczną ilości lx , stałaby się algebraiczną jeżeli byśmy uczynili $lx=u$.

Gdy n jest ujemne lub ułamkowe, szereg będzie nieskończony; biorąc np. $n = -\frac{1}{2}$, otrzymamy

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1x}} = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left\{ \frac{1}{(1x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2(m+1)(1x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1 \cdot 3}{4(m+1)^2(1x)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8(m+1)^3(1x)^{\frac{7}{2}}} + \text{i t. d.} \right\} + \text{stała.}$$

209. Zamiast używania wzoru z lic. poprzedzającej, w którym wykładnik ilości $1x$ powiększa się bezustannie, należy, gdy n jest ujemne, używać wzoru (2) z lic. 207, podług którego znajdujemy

$$\int \frac{x^m dx}{(1x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(1x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{x^m dx}{(1x)^{n-1}};$$

a powtarzając to uproszczenie, przez zamienianie n na $n-1$, na $n-2$, i t. d. otrzymamy

$$\begin{aligned} \int \frac{x^m dx}{(1x)^n} = & -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(1x)^{n-1}} - \frac{(m+1)x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(1x)^{n-2}} \\ & - \frac{(m+1)^2 x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(n-3)(1x)^{n-3}} \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \dots + \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2) \dots \dots 1} \int \frac{x^m dx}{1x}, \end{aligned}$$

przypuszczając że n jest liczbą całą.

Jeżeli $m = -1$, wzór poprzedzający przywodzi do wypadku

$$\int \frac{dx}{x(1x)^n} = -\frac{1}{(n-1)(1x)^{n-1}} + \text{stała,}$$

który staje się niedostatecznym gdy $n=1$; lecz różniczka $\frac{dx}{x1x}$ odpowiadająca temu przypadkowi całkuje się

bezsrednie, czyniąc $lx=u$, bo zamienia się na $\frac{du}{u}$, i mamy jej całkę $l(lx)+stała$.

210. Pierwotna $\int \frac{x^m dx}{lx}$, od której zależy $\int \frac{x^m dx}{(lx)^n}$ gdy n jest liczbą całą, okazuje się być przestępną osobnego gatunku. Wyrazić ją można pod prostszą postacią, czyniąc $x^{m+1}=z$; gdyż wtenczas mamy $x^m dx = \frac{dz}{m+1}$,

$lx = \frac{lz}{m+1}$, a zatem

$$\int \frac{x^m dx}{lx} = \int \frac{dz}{lz}.$$

Niżej obaczmy rozwinięcie na szereg tej ostatniej funkcji, która także należy do funkcji wykładniczych, kładąc $lz=u$, co daje $z=e^u$, $dz=e^u du$, $\int \frac{dz}{lz} = \int \frac{e^u du}{u}$.

211. Obaczmy teraz jak się całkują funkcyje wykładnicze: uważmy naprzód, że zrównanie $d.a^x=a^x dx la$ (27) daje

$$a^x dx = \frac{1}{la} d.a^x, \text{ ztąd } \int a^x dx = \frac{a^x}{la} + stała.$$

Ztąd także wypada $dx = \frac{d.a^x}{a^x la}$; tym sposobem różniczka $V dx$ stając się $\frac{V d.a^x}{a^x la}$, zamienia się na $\frac{V du}{ula}$, gdy uczynimy $a^x=u$, i jest algebraiczną względem ilości u , gdy V jest funkcją algebraiczną ilości a^x . Tym sposobem znajdziemy $\frac{a^x dx}{\sqrt{1+a^{nx}}} = \frac{du}{la \sqrt{1+u^n}}$.

212. Weźmy wzór $\int a^x x^n dx$, od którego zależy $\int P a^x dx$, gdy P jest funkcją wymierną i całą ilości x . Zrównanie (1) pod lic. 207 daje

$$\int a^x x^n dx = \frac{a^x x^n}{la} - \frac{n}{la} \int a^x x^{n-1} dx;$$

ciągnać dalej uproszczenie, to jest za n kładąc $n-1$, $n-2$, it. d. gdy n jest całe dodatnie, otrzymujemy

$$\int a^x x^n dx = \frac{a^x}{1a} \left\{ x^n - \frac{n}{1a} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(1a)^2} x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{(1a)^3} x^{n-3} \dots \right. \\ \left. \dots \dots \dots \pm \frac{n(n-1) \dots 1}{(1a)^n} \right\} + \text{stała.}$$

213. Gdy wykładnik n jest ujemny, zastosowanie wzoru (2) z lic. 207 przywodzi do

$$\int a^x x^{-n} dx = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1a}{n-1} \int \frac{a^x dx}{x^{n-1}},$$

a gdy wykładnik n jest cały, otrzymujemy

$$\int \frac{a^x}{x^n} dx = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a^x 1a}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} \\ - \frac{a^x (1a)^2}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}} : \dots - \frac{a^x (1a)^{n-2}}{(n-1)(n-2) \dots 1 x} \\ + \frac{(1a)^{n-1}}{(n-1)(n-2) \dots 1} \int \frac{a^x dx}{x} + \text{stała.}$$

Nie można dalej ciągnąć tego szeregu jak do wyrazu $\int \frac{a^x dx}{x}$; gdyż zrównanie

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1a}{n-1} \int \frac{a^x dx}{x^{n-1}}$$

nie daje, gdy $n=1$.

W tym przykładzie wpadamy znowu na przestępną $\int \frac{a^x dx}{x}$, o której już mówiliśmy pod lic. 210; i gdybyśmy mogli otrzymać jej wyrażenie, otrzymalibyśmy tym samym pierwotną $\int a^x x^n dx$ na wszystkie przypadki w których n jest liczbą całą.

Gdy n jest ułamkiem, dwa teraz podane szeregi nie kończą się. Gdyby np. było $n = -\frac{1}{2}$, znaleźlibyśmy z pierwszego szeregu

$$\int \frac{a^x dx}{\sqrt{x}} = \frac{a^x}{1a\sqrt{x}} \left\{ 1 + \frac{1}{2 \cdot 1a} + \frac{1 \cdot 3}{4x^2(1a)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8x^3(1a)^3} + \text{i t. d.} \right\} + \text{st.}$$

kładąc zaś $n = \frac{1}{2}$, mielibyśmy z drugiego

$$\int \frac{a^x dx}{\sqrt{x}} = 2a^x \sqrt{x} \left\{ \frac{1}{1} - \frac{2x \cdot 1a}{1 \cdot 3} + \frac{4x^2(1a)^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{8x^3(1a)^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \text{i t. d.} \right\} + \text{st.}$$

214. Kładąc w funkcyi $\int P a^x dx$, za a^x , jego rozwinięcie (27) otrzymamy

$$\begin{aligned} \int P a^x dx &= \int P dx + \frac{1a}{1} \int P x dx + \frac{(1a)^2}{1 \cdot 2} \int P x^2 dx + \frac{(1a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \int P x^3 dx \\ &+ \frac{(1a)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \int P x^4 dx + \text{i t. d.} \end{aligned}$$

co nam daje nowe rozwinięcie funkcyi $\int P a^x dx$ w każdym razie, w którym możemy otrzymać pierwotne $\int P dx$, $\int P x dx$, $\int P x^2 dx$, i t. d.

Jeżeli $P = x^n$, otrzymamy

$$\begin{aligned} \int a^x x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2} 1a}{1(n+2)} + \frac{x^{n+3} (1a)^2}{1 \cdot 2(n+3)} + \\ &+ \frac{x^{n+4} (1a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3(n+4)} + \text{i t. d.} + \text{stała.} \end{aligned}$$

i trzeba będzie kłaść w tym szeregu $1x$ za $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, gdy będzie $n = -1$.

Ten sposób zastosowany do $\int \frac{a^x dx}{x}$, daje następujące rozwinięcie

$$\int \frac{a^x dx}{x} = 1x + \frac{x 1a}{1 \cdot 1} + \frac{x^2 (1a)^2}{1 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{x^3 (1a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{x^4 (1a)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4} + \text{i t. d.} + \text{st.}$$

które przez przypuszczenie, że $a^x = z$, a ztąd $x = \frac{\lg z}{\lg a}$,
i $\lg z = \lg z - \lg a$, przerabia się na

$$\int \frac{dz}{z} = \lg z + \frac{\lg z}{1} + \frac{1}{2} \frac{(\lg z)^2}{1.2} + \frac{1}{3} \frac{(\lg z)^3}{1.2.3} + \frac{1}{4} \frac{(\lg z)^4}{1.2.3.4} + \text{i t. d.} + \text{st.}$$

215. Jest jeszcze inny sposób całkowania funkcyi wykładniczey takiej np. jaką jest $\frac{e^x dx}{(1+x)^2}$; który na tém zależy, ażeby ją porównać z różniczką funkcyi $e^x P$, to jest z różniczką $e^x(dP + Pdx)$, gdzie P oznacza funkcją algebraiczną ilości x . Przenikliwość tylkoi wprawa w rachunku przewodniczyć mogą w tej mierze. W podanym przykładzie, który jest bardzo prosty, dosyć jest uczynić $1+x=z$, wtedy otrzymamy

$$\frac{e^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^{z-1}(z-1)dz}{z^2} = \frac{1}{e} \left\{ e^z \left(\frac{1}{z} dz - \frac{dz}{z^2} \right) \right\};$$

prócz tego łatwo widzimy, że gdy $-\frac{dz}{z^2}$ jest różniczką ilości $\frac{1}{z}$, należy wziąć $P = \frac{1}{z}$, ztąd wypada całka $\frac{e^z}{ez} + \text{stała}$. Przywracając za z , jego wartość, znajdujemy $\int \frac{e^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + \text{stała}$.

Całkowanie funkcji kołowych.

216. Za pomocą zrównania (1) z liczby 207, i uważając że

$$\text{d. łuk}(\text{wst} = x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (36),$$

znajdziemy że

$$\int x^n dx \text{ łuk}(wst=x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ łuk}(wst=x) - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

a wyrażenie $\int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$ było roztrząsane pod liczbami 197 i 198.

Ten przykład jest dostatecznym do pokazania że całka $\int Pz dx$, w której z oznacza łuk koła, a x którąkolwiek linią trygonometryczną tego łuku, będzie mogła być sprowadzoną do całki różniczki algebraicznej, skoro P jest funkcją algebraiczną tejże ilości zmiennej, ponieważ różniczki łuku są takimiż funkcjami (56).

Przypuszczając że x jest wstawą łuku z , otrzymujemy przez zrównanie (1)

$$\int z^n dx = xz^n - n \int z^{n-1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int z^{n-1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -z^{n-1} \sqrt{1-x^2} + (n-1) \int z^{n-2} dx$$

i tak dalej, ztąd wnosimy że będzie

$$\int z^n dx = z^n x + n z^{n-1} \sqrt{1-x^2} -$$

$$- n(n-1) z^{n-2} x - n(n-1)(n-2) z^{n-3} \sqrt{1-x^2} + \text{i t. d.}$$

szereg skończony, gdy n jest liczbą całą i dodatnią.

Gdybyśmy mieli $Pdx=dz$, pierwotna $\int Pz^n dx$ zamieniłaby się na $\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + \text{stała}$; a jeźlibyśmy

podstawili za z^n jakąkolwiek funkcją algebraiczną ilości z , pierwotna uważana przez wzgląd na z , należałaby do któregośkolwiek ze wzorów wyżej podanych.

217. Funkcye, z którymi mamy najczęściej do czynienia, nie zamykają łuku, lecz tylko jego różniczkę, a dla ich scałkowania przypomnieć należy, że podług liczb 35 i 34, mamy

$$d. \text{ wst } nz = ndz \text{ dost } nz, \text{ ztąd } \int dz \text{ dost } nz = \frac{1}{n} \text{ wst } nz + \text{stała.}$$

$$d. \text{ dost } nz = -ndz \text{ wst } nz, \quad \int dz \text{ wst } nz = -\frac{1}{n} \text{ dost } nz + \text{stała.}$$

$$d. \text{ sty } nz = \frac{ndz}{(\text{dost } nz)^2}, \quad \int \frac{dz}{(\text{dost } nz)^2} = \frac{1}{n} \text{ sty } nz + \text{stała.}$$

$$d. \text{ dosty } nz = -\frac{ndz}{(\text{wst } nz)^2}, \quad \int \frac{dz}{(\text{wst } nz)^2} = -\frac{1}{n} \text{ dosty } nz + \text{stała.}$$

$$d. \text{ sie } nz = \frac{ndz \text{ wst } nz}{(\text{dost } nz)^2}, \quad \int \frac{dz \text{ wst } nz}{(\text{dost } nz)^2} = \frac{1}{n} \text{ sie } nz + \text{stała.}$$

$$= \frac{1}{n \text{ dost } nz} + \text{stała.}$$

$$d. \text{ dosie } nz = -\frac{ndz \text{ dost } nz}{(\text{wst } nz)^2}, \quad \int \frac{dz \text{ dost } nz}{(\text{wst } nz)^2} = -\frac{1}{n} \text{ dosie } nz + \text{stała.}$$

$$= -\frac{1}{n \text{ wst } nz} + \text{stała.}$$

218. Z tych całkowań wynika zaraz całkowanie wszystkich funkcyj wymiernych i całych wstaw i dostaw, ponieważ za pomocą wyrażen

$$\text{wst } a \text{ dost } b, \quad \text{dost } a \text{ wst } b, \quad \text{wst } a \text{ wst } b, \quad \text{dost } a \text{ dost } b,$$

przytoczonych w tablicy wzorów trygonometrycznych (*Trig.* 29), można je zamienić na wstawy i dostawy pojedyncze.

Niech będzie np .

$$dx \text{ wst}(mx+n) \text{ dost}(px+q);$$

jeżeli uczynimy

$$a = mx+n, \quad b = px+q,$$

znajdujemy

$$\begin{aligned} \text{wst}(mx+n) \text{ dost}(px+q) &= \frac{1}{2} \text{wst} \frac{1}{2}(m+p)x + n + q \frac{1}{2} \\ &+ \frac{1}{2} \text{wst} \frac{1}{2}(m-p)x + n - q \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

a kładąc

$$(m+p)x + n + q = z, \quad (m-p)x + n - q = z',$$

zład

$$dx = \frac{dz}{m+p}, \quad dx = \frac{dz'}{m-p},$$

będziemy tylko mieli do scałkowania różniczkę

$$\frac{1}{2(m+p)} dz \text{ wst } z + \frac{1}{2(m-p)} dz' \text{ wst } z',$$

która daje

$$-\frac{1}{2(m+p)} \text{dost } z - \frac{1}{2(m-p)} \text{dost } z' + \text{stała};$$

po przywróceniu za z i z' ich wartości, będzie

$$-\frac{\text{dost}\{(m+p)x+n+q\}}{2(m+p)} - \frac{\text{dost}\{(m-p)x+n-q\}}{2(m-p)} + \text{stała}.$$

Nie masz już trudności co do wstaw i dostaw podniesionych do potęg całych i dodatnych, bo za pomocą wymienionych wzorów trygonometrycznych można zamienić te potęgi na wstawy i dostawy łuków mnogich. Tak wzór

$$\text{wst}^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{dost } 2a,$$

zamieniając

$$\text{wst}^2(mx+n) \text{ na } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{dost } 2(mx+n),$$

prowadzi do całkowania wyrażenia

$$dx \text{ wst}^2(mx+n);$$

albowiem jeżeli uczynimy

$$2(mx+n)=z, \quad \text{zład } dx = \frac{dz}{2m},$$

otrzymamy różniczkę

$$\frac{dz}{2m} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{dost } z \right),$$

której całka jest

$$\frac{z - \text{wst } z}{4m} + \text{stała} = \frac{2(mx+n) - \text{wst } 2(mx+n)}{4m} + \text{stała}.$$

219. Łatwo byśmy teraz postępowali od wyrażen $\text{wst}^3 a$, $\text{dost}^3 a$, do wyrażen $\text{wst}^5 a$, $\text{dost}^5 a$, i dalej po-

dobnie, lecz wyrażenia z liczby 187. prowadzą do wzorów zamykających wszystkie te szczególne przypadki.

Jakoż mamy zaraz z tej liczby

$$\text{dost}^n z = \frac{(e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}})^n}{2^n},$$

czyli

$$2^n \text{dost}^n z = (e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}})^n;$$

a jeżeli rozwiniemy drugą stronę tego zrównania, uważając wykładnik n jako ilość całą, będzie

$$2^n \text{dost}^n z = e^{nz\sqrt{-1}} + \frac{n}{1} e^{(n-2)z\sqrt{-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2} e^{(n-4)z\sqrt{-1}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} e^{(n-6)z\sqrt{-1}} + \dots + \frac{n}{1} e^{-(n-2)z\sqrt{-1}} + e^{-nz\sqrt{-1}},$$

lecz gdy zamienimy z , na mz , zrównanie

$$e^{\pm z\sqrt{-1}} = \text{dost } z \pm \sqrt{-1} \text{wst } z,$$

dając

$$e^{\pm mz\sqrt{-1}} = \text{dost } mz \pm \sqrt{-1} \text{wst } z,$$

dostarcza sposobu wyrażenia przez wstawy i dostawy, wszystkich wyrazów poprzedzającego rozwinięcia, które potem może napisać się w sposób następny

$$\begin{aligned} & \text{dost } nz + \frac{n}{1} \text{dost}(n-2)z + \frac{n(n-1)}{1.2} \text{dost}(n-4)z + \\ & + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \text{dost}(n-6)z + \dots + \frac{n}{1} \text{dost}-(n-2)z + \text{dost}-nz \\ & + \sqrt{-1} \left\{ \text{wst } nz + \frac{n}{1} \text{wst}(n-2)z + \frac{n(n-1)}{1.2} \text{wst}(n-4)z + \right. \\ & \left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \text{wst}(n-6)z + \dots + \frac{n}{1} \text{wst}-(n-2)z + \text{wst}-nz \right\} \end{aligned}$$

gdzie wyrazy mające mnożnik $\sqrt{-1}$ niszczą się, jak to wkrótce obaczymy.

188. Gdy n jest nieparzyste, liczba tych wyrazów jest parzysta, i wszystkie wyrazy od końcowych równie

odległe, mają jeden tenże sam współczynnik, lecz są z przeciwnemi znakami, ponieważ $\text{wst} - mz = -\text{wst} mz$ (Tryg. 26), jakiegokolwiek jest m ; więc część pierwsza niszczy się przez część drugą, i zostaje z rozwinięcia część tylko rzetelna. Jeźlibyśmy w pojmowaniu uwag poprzedzających mieli jaką trudność, dość byłoby dla jej zniesienia, odbyć rachunek nadając ilości n wartość szczególną, jak np. 3, albo 5.

W tém działaniu postrzeżemy bez trudności, iż część rzetelna składająca wartość ilości $2^n \text{dost}^n z$, gdy n jest nieparzyste, może być sprowadzoną do połowy jej wyrazów, uważając iż $\text{dost} - mz = \text{dost} mz$ (Tryg. 26), z kąd wynika, że wyrazy umieszczone w równej odkońcowych odległości są równe; więc można przestać na wyrazach składających pierwszą połowę wzoru, bylebyśmy je podwoili. Tym sposobem znajdujemy

$$2^n \text{dost}^n z = 2 \text{dost} n z + \frac{2n}{1} \text{dost}(n-2)z + \frac{2n(n-1)}{1.2} \text{dost}(n-4)z + \text{it. d.}$$

albo, dzieląc obie strony przez 2,

$$2^{n-1} \text{dost}^n z = \text{dost} n z + \frac{n}{1} \text{dost}(n-2)z + \frac{n(n-1)}{1.2} \text{dost}(n-4)z + \text{it. d.}$$

zatrzymując się na ostatnim łuku dodatnym, który jest $\{n - (n-1)\}z = z$.

2re. Gdy wykładnik n jest parzysty, każda część rozwinięcia ma liczbę wyrazów nieparzystą, lecz część urojona ginie, bo wyraz środkowy będąc kształtu

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots \left(n - \frac{n}{2} + 1\right)}{1.2.3 \dots \frac{n}{2}} \text{wst}(n-n)z,$$

także ginie sam przez się.

Wyraz zaś środkowy części rzetelnej, jako mający w sobie wyrażenie $\text{dost}(n-n)z = \text{dost} 0 = 1$, sprowadza się do swego współczynnika tego samego jaki

był wyżej, i z przyczyny, że jest pojedynczym we wzorze, należy go wziąć połowę, jeżeli chcemy podciągnąć go pod spólny mnożnik 2, któryśmy w przypadku poprzedzającym opuścili; przeto, można używać tego samego wzoru, jakiegośmy używali w przypadku poprzedzającym, bylebyśmy wzięli połowę współczynnika dostawy łuku zero, który wtedy wypada.

Za pomocą tej uwagi, można będzie ułożyć tablicę następującą:

$$\text{dost } z = \text{dost } z,$$

$$2 \text{ dost}^2 z = \text{dost } 2z + 1,$$

$$4 \text{ dost}^3 z = \text{dost } 3z + 3 \text{ dost } z,$$

$$8 \text{ dost}^4 z = \text{dost } 4z + 4 \text{ dost } 2z + 3,$$

$$16 \text{ dost}^5 z = \text{dost } 5z + 5 \text{ dost } 3z + 10 \text{ dost } z,$$

$$32 \text{ dost}^6 z = \text{dost } 6z + 6 \text{ dost } 4z + 15 \text{ dost } 2z + 10,$$

$$64 \text{ dost}^7 z = \text{dost } 7z + 7 \text{ dost } 5z + 21 \text{ dost } 3z + 35 \text{ dost } z,$$

i t. d.

220. Wyrażenie wstawy (187) daje zrównanie

$$\text{wst}^n z = \frac{(e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}})^n}{2^n(\sqrt{-1})^n},$$

a zatem

$$\begin{aligned} 2^n(\sqrt{-1})^n \text{wst}^n z &= (e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}})^n = \\ &= e^{nz\sqrt{-1}} - \frac{n}{1} e^{(n-2)z\sqrt{-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2} e^{(n-4)z\sqrt{-1}} - \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} e^{(n-6)z\sqrt{-1}} + \dots \pm \frac{n}{1} e^{-(n-2)z\sqrt{-1}} \mp e^{-nz\sqrt{-1}}, \end{aligned}$$

w którym wyrazy drugiej strony są naprzemian dodatne i odjemne. Gdy na miejscu ilości wykładniczych podstawimy ich wartości zamykające w sobie wstawy i dostawy (219) otrzymamy

$$\begin{aligned}
& 2^n (\sqrt{-1})^n \text{wst}^n z = \\
& = \text{dost } nz - \frac{n}{1} \text{dost}(n-2)z + \frac{n(n-1)}{1.2} \text{dost}(n-4)z - \\
& - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \text{dost}(n-6)z \dots \pm \frac{n}{1} \text{dost}-(n-2)z \mp \text{dost}-nz \\
& [+ \sqrt{-1} \left\{ \text{wst } nz - \frac{n}{1} \text{wst}(n-2)z + \frac{n(n-1)}{1.2} \text{wst}(n-4)z - \right. \\
& \left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \text{wst}(n-6)z \dots \pm \frac{n}{1} \text{wst}-(n-2)z \mp \text{wst}-nz \right\}
\end{aligned}$$

gdzie należy rozróżnić dwa przypadki.

1^od. Gdy n jest nieparzyste, liczba wyrazów każdej części rozwinięcia jest parzysta, i część rzetelna ginie, bo wyrazy w równej odległości od skrajnych mając współczynniki równe ze znakami przeciwnymi niszczą się, gdyż $\text{dost}-mz = \text{dost } mz$. Część zaś urojona nie ginie, wyrazy w równej od końcowych odległości dodają się, gdyż wyrazy drugiej połowy odmieniają swoje znaki ponieważ $\text{wst}-mz = -\text{wst } mz$. W tym przypadku zrównanie poprzedzające zamykając tylko pierwszą stronę i z drugiej strony część urojoną, daje się dzielić przez $\sqrt{-1}$, i ilorazy

$$\begin{aligned}
2^{n-1} (\sqrt{-1})^{n-1} \text{wst}^n z &= \text{wst}nz - \frac{n}{1} \text{wst}(n-2)z + \frac{n(n-1)}{1.1.} \text{wst}(nz-4)z \\
&- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \text{wst}(n-6)z \dots \pm \frac{n}{1} \text{wst}-(n-2)z \mp \text{wst}-nz,
\end{aligned}$$

są oba rzetelne, bo $(n-1)$ będąc liczbą parzystą czyni

$$(\sqrt{-1})^{n-1} = \mp 1,$$

podług tego jak $(n-1)$ dzieli się tylko przez 2, lub przez 4.

Wyrazy znajdujące się w odległości równej od końcowych mają jedną tęż samą wartość, przeto można wziąć część tylko pierwszą, podwajając wszystkie jej wyrazy, i zastanawiając się na ostatnim łuku dodatnym.

2^{re}. Gdy n jest parzyste, wyrazy równie od końcowych/odległe mają tenże sam znak, przeto tak jak pod liczbą poprzedzającą, część urojona ginie, a rzeczywista z wyrazem środkowym zostaje, więc uważając iż $(\sqrt{-1})^n = \mp 1$, i opuszczając z każdej strony mnożnik 2, można położyć

$$\mp 2^{n-1} \text{wst}^n z = \text{dost } nz - \frac{n}{1} \text{dost}(n-2)z + \frac{n(n-1)}{1.2} \text{dost}(n-4)z - \text{i t. d.}$$

bylebyśmy się zatrzymali na łuku ostatnim dodatnim i wzięli połowę spółczynnika, przyszedłszy do łuku o.

Za pomocą tego wzoru, odmieniając wszystkie znaki na przeciwne, gdy znak pierwszej strony jest odjemny, znajdziemy wartości potęg wstaw zawarte w tablicy następnej:

$$\begin{aligned} \text{wst } z &= \text{wst } z, \\ 2 \text{ wst}^2 z &= -\text{dost } 2z + 1, \\ 4 \text{ wst}^3 z &= -\text{wst } 3z + 3 \text{ wst } z, \\ 8 \text{ wst}^4 z &= \text{dost } 4z - 4 \text{ dost } 2z + 3, \\ 16 \text{ wst}^5 z &= \text{wst } 5z - 5 \text{ wst } 3z + 10 \text{ wst } z, \\ 32 \text{ wst}^6 z &= -\text{dost } 6z + 6 \text{ dost } 4z - 15 \text{ dost } 2z + 10, \\ 64 \text{ wst}^7 z &= -\text{wst } 7z + 7 \text{ wst } 5z - 21 \text{ wst } 3z + 35 \text{ wst } z, \\ \text{i t. d. (*)}. \end{aligned}$$

(*) W poprzedzających wzorach uważaliśmy wykładnik n za cały, bo ten jeden tylko przypadek jest potrzebnym do wielu zastosowań; względem innych wykładników zostawano w błędzie, który zniósł pierwszy P. Poisson, a może jeszcze zostają niektóre wątpliwości nieobjasnione. (*Obacz Traité du Calcul in 4to. tom III str. 605 i 616.*)

Ponieważ te wzory umieściłem tu ze względu tylko na ich użycie w całkowaniu, dla tego nie sądziłem za rzecz konieczną mówić w texcie o wzorach służących do wyrażania wstawy

221. Weźmy do całkowania, różniczkę $/dz$ dost⁴ z ; wyciągniemy naprzód ze wzorów liczby 299,

$$\text{dost}^4 z = \frac{1}{8} \text{dost}^4 z + \frac{1}{2} \text{dost}^2 z + \frac{3}{8},$$

i dostawy łuku mnogiego, przez potęgi wstawy i dostawy łuku pojedynczego, jednak, ponieważ te wzory są ważne, wskażę ich ułożenie.

Mamy z liczby 187.

$$\text{dost}^n z + \sqrt{-1} \cdot \text{wst}^n z = (\text{dost} z + \sqrt{-1} \text{wst} z)^n$$

$$\text{dost}^n z - \sqrt{-1} \cdot \text{wst}^n z = (\text{dost} z - \sqrt{-1} \text{wst} z)^n$$

biorąc sumę tych dwóch zrównań otrzymujemy

$$\text{dost}^n z = \frac{(\text{dost} z + \sqrt{-1} \text{wst} z)^n + (\text{dost} z - \sqrt{-1} \text{wst} z)^n}{2}$$

odejmując drugie zrównanie od pierwszego wypada

$$\text{wst}^n z = \frac{(\text{dost} z + \sqrt{-1} \text{wst} z)^n - (\text{dost} z - \sqrt{-1} \text{wst} z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

te wyrażenia, chociaż mają wyrazy urojone, są jednak rzeczywiste, bo przez rozwinięcie potęg wskazanych wszystkie wyrazy urojone giną. Jakoż mamy

$$\begin{aligned} (\text{dost} z + \sqrt{-1} \text{wst} z)^n &= \text{dost}^n z + \frac{n}{1} \sqrt{-1} \text{dost}^{n-1} z \text{wst} z - \\ &\quad - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \text{dost}^{n-2} z \text{wst}^2 z - \text{i t. d.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{dost} z - \sqrt{-1} \text{wst} z)^n &= \text{dost}^n z - \frac{n}{1} \sqrt{-1} \text{dost}^{n-1} z \text{wst} z - \\ &\quad - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \text{dost}^{n-2} z \text{wst}^2 z + \text{i t. d.} \end{aligned}$$

podstawiając te szeregi w poprzedzających wyrażeniach, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{dost}^n z &= \text{dost}^n z - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \text{dost}^{n-2} z \text{wst}^2 z + \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{dost}^{n-4} z \text{wst}^4 z - \text{i t. d.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{wst}^n z &= n \text{dost}^{n-1} z \text{wst} z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{dost}^{n-3} z \text{wst}^3 z + \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \text{dost}^{n-5} z \text{wst}^5 z - \text{i t. d.} \end{aligned}$$

i mieć będziemy

$$\begin{aligned} \int dz \operatorname{dost}^4 z &= \frac{1}{8} \int dz \operatorname{dost} 4z + \frac{1}{2} \int dz \operatorname{dost} 2z + \frac{3}{8} \int dz \\ &= \frac{1}{32} \operatorname{wst} 4z + \frac{1}{4} \operatorname{wst} 2z + \frac{3}{8} z + \text{stała.} \end{aligned}$$

Ten przykład jasno pokazuje, jak sobie postąpić należy we wszystkich podobnych zadaniach.

222. Wzory

$$\operatorname{wst} z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad \operatorname{dost} z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$$

zamieniając funkcyę wstaw i dostaw na funkcyę wykładniczą, tém samém zamieniają całkowanie jednych na całkowanie drugich.

Można także zamienić różniczkę $dz \operatorname{wst}^m z \operatorname{dost}^n z$, na inną należącą do różniczek dwówyrazowych: dosyć jest na ten koniec uczynić $\operatorname{wst} z = x$, z kąd wypada

$$\operatorname{dost} z = \sqrt{1-x^2}, \quad dz = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (36),$$

więc będzie

$$\int dz \operatorname{wst}^m z \operatorname{dost}^n z = \int x^m dx (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

To ostatnie wyrażenie zawsze się da scałkować, skoro wykładniki m i n są całe; albowiem wtedy $\frac{n-1}{2}$ wychodzi na $\pm i - \frac{1}{2}$, gdzie i jest liczbą całą, a użycie być wzoru B (195), być wzoru D (196), przeprowadza do całki

$$\int x^m dx (1-x)^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

roztrząsanej pod liczbami 197 i 198.

We wszystkich innych przypadkach sprowadzimy całkowanie danej różniczki, do całkowania różniczki podobnej do różniczki ostatniej najprostszej.

Jasną jest rzeczą, że można podobnym sposobem przerobić wyrażenia zamykające inne linije trygonometryczne.

223. Nim dalej postąpimy, stosowną jest rzeczą uważać, że jeżeli jeden z wykładników m i n jest nieparzysty, całka $\int dz \operatorname{wst}^m z \operatorname{dost}^n z$ sprowadza się natychmiast do funkcyj algebraicznych całych, ponieważ

$$\int dz \operatorname{wst}^{2p+1} z \operatorname{dost}^q z = \int dz \operatorname{wst} z \operatorname{dost}^q z (\operatorname{wst}^2 z)^p,$$

$$\int dz \operatorname{wst}^p z \operatorname{dost}^{2q+1} z = \int dz \operatorname{dost} z \operatorname{wst}^p z (\operatorname{dost}^2 z)^q,$$

$$\text{a} \quad (\operatorname{wst}^2 z)^p = (1 - \operatorname{dost}^2 z)^p, \quad (\operatorname{dost}^2 z)^q = (1 - \operatorname{wst}^2 z)^q,$$

$$\text{i} \quad dz \operatorname{wst} z = -d.\operatorname{dost} z, \quad dz \operatorname{dost} z = d.\operatorname{wst} z,$$

przeto kładąc $\operatorname{dost} z = u$, albo $\operatorname{wst} z = u$, otrzymujemy wyrażenia

$$- \int u^q du (1 - u^2)^p, \quad \int u^p du (1 - u^2)^q,$$

które po rozwinięciu całych potęg $(1 - u^2)$ dadzą się scałkować.

224. Wzory (A), (B), (C), (D) pod liczbami 194, 195, i 196 mogłyby łatwo być przerobione względem różniczki $dz \operatorname{wst}^m z \operatorname{dost}^n z$, lecz prosto można przyjsć do tych samych wypadków, rozkładając tę różniczkę na mnożniki.

Wyrażając ją pod kształtem $dz \operatorname{wst} z \operatorname{dost}^n z \operatorname{wst}^{m-1} z$, ponieważ pierwszy mnożnik $dz \operatorname{wst} z \operatorname{dost}^n z$, z przyczyny iż $dz \operatorname{wst} z = -d.\operatorname{dost} z$, może się scałkować, otrzymamy

$$\begin{aligned} \int dz \operatorname{wst}^m z \operatorname{dost}^n z &= \int dz \operatorname{wst} z \operatorname{dost}^n z \operatorname{wst}^{m-1} z = \\ &= -\frac{1}{n+1} \operatorname{dost}^{n+1} z \operatorname{wst}^{m-1} z + \frac{m-1}{n+1} \int dz \operatorname{dost}^{n+2} z \operatorname{wst}^{m-2} z, \end{aligned}$$

$$\text{a że } \operatorname{dost}^{n+2} z = \operatorname{dost}^n z \operatorname{dost}^2 z = \operatorname{dost}^n z (1 - \operatorname{wst}^2 z)$$

przeto

$$\int dz \operatorname{dost}^{n+2} z \operatorname{wst}^{m-2} z = \int dz \operatorname{dost}^n z \operatorname{wst}^{m-2} z - \int dz \operatorname{dost}^n z \operatorname{wst}^m z,$$

podstawując to w pierwszym równaniu i wyciągając wartość na $\int dz \operatorname{wst}^m z \operatorname{dost}^n z$, wypada wzór (A)

$$\int dz \operatorname{wst}^m z \operatorname{dost}^n z = - \frac{\operatorname{wst}^{m-1} z \operatorname{dost}^{n+1} z}{m+n} + \int dz \operatorname{wst}^{m-2} z \operatorname{dost}^n z$$

225. Można tym samym sposobem wyprowadzić wzór służący do zmniejszenia wykładnika ilości $\operatorname{dost} z$, lecz można go bezpośrednio otrzymać ze wzoru poprzedzającego kładąc

$$z = 1^{c.k.} - y, \text{ z kład} dz = -dy, \operatorname{wst} z = \operatorname{dost} y, \operatorname{dost} z = \operatorname{wst} y.$$

Tym sposobem wzór (A), odmieniając w nim wszystkie znaki na przeciwne, zamienia się na

$$\int dy \operatorname{dost}^m y \operatorname{wst}^n y = \frac{\operatorname{dost}^{m-1} y \operatorname{wst}^{n+1} y}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int dy \operatorname{dost}^{m-2} y \operatorname{wst}^n y;$$

a jeżeli położymy z na miejscu y , n (na miejscu m , i wzajemnie, otrzymamy wzór (B)

$$\int dz \operatorname{wst}^m z \operatorname{dost}^n z = \frac{\operatorname{wst}^{m+1} z \operatorname{dost}^{n-1} z}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int dz \operatorname{wst}^m z \operatorname{dost}^{n-2} z.$$

226. Wzory (A) i (B), jeżeli wykładnik, który chcemy zmniejszać, jest ujemny, powinny być przewrócone tak, jak wzory im odpowiednie w różniczkach dwó-wyrazowych (196).

Wyprowadzając wartość całki z drugiej strony wzoru (A) otrzymujemy

$$\int dz \operatorname{wst}^{m-2} z \operatorname{dost}^n z = \frac{\operatorname{wst}^{m-1} z \operatorname{dost}^{n+1} z}{m-1} + \frac{m+n}{m-1} \int dz \operatorname{wst}^m z \operatorname{dost}^n z;$$

zamieniając potem m na $-m+2$, i przenosząc potęgę ujemne do mianownika wypada wzór (C),

$$\int \frac{dz \operatorname{dost}^n z}{\operatorname{wst}^m z} = - \frac{\operatorname{dost}^{n+1} z}{(m-1) \operatorname{wst}^{m-1} z} + \frac{m-n-2}{m-1} \int \frac{dz \operatorname{dost}^n z}{\operatorname{wst}^{m-2} z}.$$

Działając podobnie ze wzorem (B) wyprowadzamy z niego wzór (D)

$$\int \frac{dz \operatorname{wst}^n z}{\operatorname{dost}^n z} = \frac{\operatorname{wst}^{n+1} z}{(n-1) \operatorname{dost}^{n-1} z} + \frac{n-m-2}{n-1} \int \frac{dz \operatorname{wst}^m z}{\operatorname{dost}^{n-2} z}.$$

227. Obaczmy teraz użycie tych czterech wzorów.

Jeżeli zastosujemy *np.* do $\int dz \operatorname{wst}^4 z \operatorname{dost}^2 z$ wzór pierwszy, otrzymamy naprzód

$$\int dz \operatorname{wst}^4 z \operatorname{dost}^2 z = \frac{\operatorname{wst}^5 z \operatorname{dost}^3 z}{6} + \frac{5}{6} \int dz \operatorname{dost}^2 z \operatorname{wst}^2 z;$$

potém

$$\int dz \operatorname{wst}^2 z \operatorname{dost}^2 z = -\frac{\operatorname{wst} z \operatorname{dost}^3 z}{4} + \frac{1}{4} \int dz \operatorname{dost}^2 z;$$

wzór zaś drugi, czyniąc w nim $m=0$, $n=2$, daje

$$\int dz \operatorname{dost}^2 z = \frac{\operatorname{wst} z \operatorname{dost} z}{2} + \frac{1}{2} \int dz = \frac{\operatorname{wst} z \operatorname{dost} z}{2} + \frac{z}{2};$$

od tych wartości wracając do wartości całki założonej, wypada

$$\begin{aligned} \int dz \operatorname{wst}^4 z \operatorname{dost}^2 z &= -\frac{1}{6} \operatorname{wst}^5 z \operatorname{dost}^3 z - \frac{5.1}{6.4} \operatorname{wst} z \operatorname{dost}^5 z \\ &\quad + \frac{5.1.1}{6.4.2} \operatorname{wst} z \operatorname{dost} z + \frac{5.1.1}{6.4.1} z + \text{stała.} \end{aligned}$$

Z tego przykładu postrzegamy, iż powtórzone użycie wzoru pierwszego, wyczerpuje wykładnik m , gdy jest parzysty, i prowadzi do całki $\int dz \operatorname{dost}^n z$, z którą postępujemy według wzorów (B) lub (D), podług tego jak n jest dodatnie lub ujemne; gdy zaś wykładnik m jest nieparzysty, wpadamy wtedy na całkę $\int dz \operatorname{wst} z \operatorname{dost}^n z$, która się otrzymuje bezśrednie, ponieważ

$$dz \operatorname{wst} z = -d. \operatorname{dost} z \quad (223).$$

Wzór (B), kładąc w nim $m=0$, prowadzi widocznie do $\int dz = z$, gdy n jest parzyste, a w przypadku przeciwnym do $\int dz \operatorname{dost} z = \operatorname{wst} z$; przeto skoro wykładniki m i n są całe i dodatnie, całka $\int dz \operatorname{wst}^m z \operatorname{dost}^n z$ otrzymuje się bez trudności.

Jeżeli m jest ujemne, wzór (D) będąc użytym przy-

wodzi, gdy n jest parzyste, do $\int \frac{dz}{\text{wst}^m z}$; a wtedy wzór (C) nisczy $\text{wst } z$, gdy m jest parzyste, przywodzi zaś do $\int \frac{dz}{\text{wst } z}$, gdy m jest nieparzyste. Ten ostatni wypadek ponieważ w poprzedzających wzorach niejest zawarty, powinien być osobno uważany. Wzory (A) i (B) przywiodłyby takż od $\int \frac{dz \text{wst}^m z}{\text{dost}^n z}$ do $\int \frac{dz}{\text{dost } z}$, gdyby m było parzyste, a n nieparzyste; nakoniec jeśliby m i n były oba odjemne i nieparzyste, wzór (C) przywiodłby naprzód do całki

$$\int \frac{dz \text{dost}^{-n} z}{\text{wst } z} = \int \frac{dz \text{wst}^{-1} z}{\text{dost}^n z},$$

którą potem wzór (D) sprowadziłby do wyrażenia nowego

$$\int \frac{dz \text{wst}^{-1} z}{\text{dost } z} = \int \frac{dz}{\text{wst } z \cdot \text{dost } z},$$

które takż osobno roztrząsać należy.

228. Tu się więc zastanowimy nad całkowaniem trzech następujących różniczek

$$\frac{dz}{\text{wst } z}, \quad \frac{dz}{\text{dost } z}, \quad \frac{dz}{\text{wst } z \text{dost } z}.$$

Pierwsza zamienia się kolejno na

$$\frac{dz}{\text{wst } z} = \frac{dz \text{wst } z}{\text{wst}^2 z} = \frac{dz \text{wst } z}{1 - \text{dost}^2 z} = - \frac{dx}{1 - x^2},$$

gdy uczynimy $\text{dost } z = x$; jej całka jest

$$\int \frac{dz}{\text{wst } z} = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\text{dost } z}{1-\text{dost } z} \right) = \ln \frac{\sqrt{1-\text{dost } z}}{\sqrt{1+\text{dost } z}}$$

Druga daje

$$\frac{dz}{\text{dost } z} = \frac{dz \text{dost } z}{\text{dost}^2 z} = \frac{dz \text{dost } z}{1 - \text{wst}^2 z} = \frac{dx}{1 - x^2},$$

gdy uczynimy $\text{wst } z = x$; zatem

$$\int \frac{dz}{\text{dost } z} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\text{wst } z}{1-\text{wst } z} = \ln \frac{\sqrt{1+\text{wst } z}}{\sqrt{1-\text{wst } z}} + \text{stała}.$$

Można tym całkom nadać kształt prostszy za pomocą wzorów

$$\text{stycz } \frac{1}{2}(A+B) \text{ stycz } \frac{1}{2}(A-B) = \frac{\text{dost } B - \text{dost } A}{\text{dost } B + \text{dost } A}.$$

$$\frac{\text{stycz } \frac{1}{2}(A+B)}{\text{stycz } \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\text{wst } A + \text{wst } B}{\text{wst } A - \text{wst } B} \quad (\text{Trig. 27}),$$

bo czyniąc $\text{dost } B=1$, $\text{dost } A=\text{dost } z$, otrzymamy $B=0$, $A=z$; przez co wzór pierwszy zamieni się na

$$(\text{stycz } \frac{1}{2}z)^2 = \frac{1-\text{dost } z}{1+\text{dost } z},$$

i da następnie

$$\int \frac{dz}{\text{wst } z} = \ln \text{stycz } \frac{1}{2}z + \text{stała}.$$

Jeżeli zaś uczynimy w drugim wzorze $\text{wst } A=1$, $\text{wst } B=\text{wst } z$ wypadnie $A=1^{c.k.}$, $B=z$,

$$\text{złąd} \quad \frac{1+\text{wst } z}{1-\text{wst } z} = \frac{\text{sty}(o^{c.k.}, 5+\frac{1}{2}z)}{\text{sty}(o^{c.k.}, 5-\frac{1}{2}z)};$$

$$\text{a że } \text{sty}(o^{c.k.}, 5-\frac{1}{2}z) = \text{dosty} \frac{1}{2}(o^{c.k.}, 5+\frac{1}{2}z) = \frac{1}{\text{sty}(o^{c.k.}, 5+\frac{1}{2}z)}$$

$$\text{zatem} \quad \frac{1+\text{wst } z}{1-\text{wst } z} = \{\text{sty}(o^{c.k.}, 5+\frac{1}{2}z)\}^2;$$

$$\text{zatem} \quad \int \frac{dz}{\text{dost } z} = \ln \text{sty}(o^{c.k.}, 5+\frac{1}{2}z) + \text{stała}.$$

Co do różniczki $\frac{dz}{\text{wst } z \text{ dost } z}$, można, dzieląc licznik i mianownik przez $\text{dost}^2 z$, nadać jej postać

$$\frac{\frac{dz}{\text{dost}^2 z}}{\frac{\text{wst } z}{\text{dost } z}} = \frac{\text{d.sty } z}{\text{sty } z} \quad (34),$$

zkuąd wypada

$$\int \frac{dz}{\text{wst } z \text{ dost } z} = \ln \text{sty } z + \text{stała}.$$

Postrzegamy więc, że całka różniczki dz wst $z^m \text{dost}^n z$ zawsze się wynajdzie, gdy m i n będą całkowite bądź dodatne bądź odjemne. Inaczej się rzecz ma gdy te wykładniki są ułamkowe; należy się wtedy udać do szeregów, wyjąwszy małą liczbę przypadków, w których zpierwotnienie samo się, że tak rzekę, nastęcza.

*Sposób ogólny wynalezienia wartości pierwotnych
czyli całek przez przybliżenie.*

229. Rozwinięcie całek na szeregi, wtenczas tylko daje wartości przybliżone, gdy te szeregi są malejące, co nie zawsze się przytrafia; dla tego matematycy szukali sposobów otrzymania wartości przybliżonych funkcyj pierwotnych, jakiebykolwiek były dane funkcyje różniczkowe. Wzór Taylora najprostszy sposobem prowadzi do wzorów w tym celu od Eulera podanych; lecz nim je wyłożymy, wprzód poznajmy niektóre nazwiska, ściągające się do rozmaitych względów, pod którymi całki bywają uważane.

Potrzeba przydania ilości stałej dowolnej do całki, w celu wystawienia jej pod względem ogólnym, pokazuje, że te funkcyje z dwóch miar są nieoznaczone, gdyż nie dosyć jest nadać wartość ilości zmiennej od której one zależą, ale nadto trzeba oznaczyć wartość ilości stałej dowolnej, która może mieć rozmaite wartości. Zwyczajnie oznacza się ilość stałą nadając ilości zmiennej taką wartość, któraby uczyniła funkcyą daną $= 0$. Widzieliśmy już kilka tego przykładów (187, 202, 203); co w ogólności następującym można wyłożyć sposobem.

Niech będzie $\int X dx = P + C$, gdzie P oznacza funkcyą zmienną otrzymaną prosto z całkowania, C ilość stałą dowolną, i niech funkcyja całka staje się $= 0$, na wartość $x = a$, która odmienna P , na A ; będziemy mieli zrównanie $A + C = 0$, a ztąd

$$C = -A, \quad \int X dx = P - A$$

Pod tym kształtem całka $\int X dx$ jest tylko różnicą między wartością, której nabywa funkcya P , gdy $x=a$, i wartością, której nabywa na wszelką inną wielkość tejże zmiennej. Jeżeli np. $x=b$, zamienia P na B , wypadnie

$$\int X dx = B - A.$$

Uważać należy że ten wypadek otrzymuje się prosto nie oznaczając stałej dowolnej, lecz biorąc tylko różnicę między wypadkami otrzymanymi przez podstawienie wartości $x=a$, $x=b$, które odmieniają wyrażenie $P+C$ na $A+C$, i na $B+C$.

Wartość $x=a$, dla której całka staje się $=0$, jest jej początkiem, i mówi się, że *całka powinna się zacząć, gdy $x=a$* . Ponieważ zaś wartość na której się zatrzymujemy odpowiada ilości $x=b$, mówimy, że *całka jest zupełna gdy $x=b$* .

Dwie wartości $x=a$, $x=b$, nazywają się powszechnie *granicami całki*.

Każda całka, której nie naznaczamy początku czyli nie wymieniamy granic, nazywa się *całką nieoznaczoną* czyli *niezupełną*, aby zaś była *zupełną*, powinna zawierać w sobie *ilość stałą dowolną*.

Jeżeli są naznaczone granice, całka nazywa się *oznaczoną*. Jeżeli te granice są np. $x=a$, $x=b$, mówimy że całka $\int X dx$, powinna być wzięta od $x=a$, aż do $x=b$, co się wykona *rachując wartość funkcji zmiennej gdy $x=a$, potem gdy $x=b$, i odejmując wypadek pierwszy od drugiego*. W tym razie nie potrzeba do funkcji pierwotnej dodawać ilości stałej dowolnej, gdyż ona ginie w odejmowaniu.

Wiele na tém zależy, aby się spoufalić z temi wyrażeniami, które się często powtarzać będą, a których znaczenie w następującym wykładzie jeszcze się mocniej da uczuć.

230. Szereg Tajlora, gdy położymy w nim $x+h$ za x , dając

$$y' = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

nie oznacza jeszcze wartości, jaką ma w tym razie funkcyja, której znane są tylko współczynniki zaczynając od pierwszego rzędu, bo wartość pierwotna y zostaje nieoznaczona, zatem wyraża ilość stałą dowolną; lecz różnica między tą wartością y i wartością drugą odpowiadającą ilości $x+h$, zależąca od szeregu

$$\frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

jest zupełnie znana.

Gdy uczynimy $\int X dx = y$, otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = X, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dX}{dx}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2X}{dx^2}, \quad \text{i t. d.},$$

wszystkie współczynniki różniczkowe wyprowadzą się z funkcyi danej X , zatem wypadnie

$$X \frac{h}{1} + \frac{dX}{dx} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^2X}{dx^2} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}$$

Cheąc wyciągnąć z tego wzoru wartość całki $\int X dx$, od $x=a$, do $x=b$, dosyć wziąć $h=b-a$, i podstawić a za x w funkcyi X i jej współczynnikach różniczkowych, które wtenczas wyraziwszy przez $A, A', A'', \text{i t. d.}$ otrzymamy między granicami $x=a$, $x=b$,

$$\int X dx = A \frac{(b-a)}{1} + A' \frac{(b-a)^2}{1.2} + A'' \frac{(b-a)^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}$$

Ten szereg w ogólności tym bardziej maleje im mniejsza jest ilość $b-a$; lecz gdy ta wartość jest zawielka, dzielić ją należy na taką liczbę części równych, aby każda z nich była dosyć mała; potem rachować trzeba z osobna wartość całki odpowiadającą każdej takowej części. Przypuśćmy, że różnica $b-a$,

jest podzielona na n części równych ilości α , i że ilości $A, A', A'',$ i t. d. gdy położymy w nich $\alpha + \alpha, \alpha + 2\alpha,$ i t. d. za α , zamieniają się na $A_1, A'_1, A''_1,$ i t. d. $A_2, A'_2, A''_2,$ i t. d.; otrzymamy naprzód między α i $\alpha + \alpha,$

$$\frac{A\alpha}{1} + \frac{A'\alpha^2}{1.2} + \frac{A''\alpha^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

między $\alpha + \alpha,$ i $\alpha + 2\alpha,$

$$\frac{A_1\alpha}{1} + \frac{A'_1\alpha^2}{1.2} + \frac{A''_1\alpha^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

między $\alpha + 2\alpha$ i $\alpha + 3\alpha$

$$\frac{A_2\alpha}{1} + \frac{A'_2\alpha^2}{1.2} + \frac{A''_2\alpha^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}$$

i t. d.

Summa tych wszystkich szeregów, których liczba jest n , składa całą wartość funkcji $\int X dx$ między granicami $x = a, x = b$, która zatem będzie (1)

$$\int X dx = \begin{cases} \frac{\alpha}{1} (A + A_1 + A_2 \dots + A_{n-1}) \\ + \frac{\alpha^2}{1.2} (A' + A'_1 + A'_2 \dots + A'_{n-1}) \\ + \frac{\alpha^3}{1.2.3} (A'' + A''_1 + A''_2 \dots + A''_{n-1}) \\ + \text{i t. d.} \end{cases}$$

231. Wzór poprzedzający, który wyraża różnicę między dwiema wartościami funkcji y , jedną odpowiadającą ilości x , drugą odpowiadającą ilości $x+h$, otrzymaliśmy przechodząc od pierwszej wartości do drugiej; lecz można otrzymać tę samą różnicę przechodząc od x do $x-h$, za pomocą wzoru

$$y = y - \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} - \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

w którym y , odpowiada ilości $x-h$, co daje

$$y-y_1 = \frac{dy}{dx} \frac{h}{1} - \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} - \text{i t. d.}$$

Chcąc ten ostatni wzór przystosować do $\int X dx$, potrzeba w X i w jego współczynnikach różniczkowych, zamienić x na b ; i przypuszczając, że te współczynniki zamieniają się na $B, B', B'', \text{i t. d.}$, znajdziemy między granicami $x=a, x=b$,

$$\int X dx = \frac{B(b-a)}{1} - \frac{B'(b-a)^2}{1.2} + \frac{B''(b-a)^3}{1.2.3} - \text{i t. d.}$$

Jeżeli zaś podzielimy ilość $b-a$ na n części równych ilości a , otrzymamy za pomocą wyższego wzoru szeregi, między granicami $a+a, \text{ i } a$,

$$\frac{A_1 a}{1} - \frac{A'_1 a^2}{1.2} + \frac{A''_1 a^3}{1.2.3} - \text{i t. d.},$$

między $a+2a, \text{ i } a+a$

$$\frac{A_2 a}{1} - \frac{A'_2 a^2}{1.2} + \frac{A''_2 a^3}{1.2.3} - \text{i t. d.},$$

między $a+3a, \text{ i } a+2a$

$$\frac{A_3 a}{1} - \frac{A'_3 a^2}{1.2} + \frac{A''_3 a^3}{1.2.3} - \text{i t. d.},$$

i t. d.

summa tych szeregów, których liczba jest n , daje w granicach $x=b, x=a, \dots \dots \dots$ (II)

$$\int X dx = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{1} (A_1 + A_2 + A_3 \dots + A_n) \\ - \frac{a^2}{1.2} (A'_1 + A'_2 + A'_3 \dots + A'_n) \\ + \frac{a^3}{1.2.3} (A''_1 + A''_2 + A''_3 \dots + A''_n) \\ - \text{i t. d.} \end{array} \right.$$

232. Każdy z tych dwóch wzorów może być zastosowany w szczególności, lecz porównanie ich odkrywa granice przybliżenia które dają.

Dla ustanowienia tego porównania należy naprzód uważać, iż w szeregu mającym postać

$$Ma + Na^2 + Pa^5 + \text{i t. d.},$$

w którym żaden ze współczynników M , N , P , i t. d., nie staje się nieskończenie wielkim, w którym można przypuścić a tak małe ile zechcemy, a zatem uczynić wyraz którykolwiek większym od summy wszystkich wyrazów po nim następujących (62), błąd który popełniamy, biorąc pewną tylko liczbę wyrazów początkowych, ma znak przeciwny znakowi, który leży przed wyrazem pierwszym z wyrazów opuszczonych, to jest, iż wypadek będzie mniejszy od prawdziwego, jeżeli pierwszy z opuszczonych wyrazów jest dodatni, będzie zaś większy od prawdziwego, gdy pierwszy ten wyraz jest ujemny.

Ztąd wypada iż jeżeli wartości funkcji X powiększają się od $x=a$, do $x=b$, i jeżeli w każdym wzorze przestajemy na wyrazach mnożonych tylko przez a , wzór pierwszy będzie dawał wartość mniejszą a drugi większą od wartości prawdziwej; albowiem jeżeli szereg

$$A, A_1, A_2, \text{ i t. d.},$$

jest rosnącym, wszystkie odpowiednie wartości

$$A', A'_1, A'_2, \text{ i t. d.}$$

współczynnika różniczkowego $\frac{dX}{dx}$ będą dodatne (62),

przeto wyrazy mnożone przez a^2 , będą w pierwszym wzorze dodatne, a w drugim ujemne, więc między granicami $x=a$, $x=b$, będziemy mieli

$$\int X dx > a(A + A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1})$$

$$< a(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n).$$

Nadto różnica $\alpha(A_n - A)$ tych dwóch granic stanie się tym mniejszą, im mniejszą ilość α weźmiemy, co się uczyni powiększając liczbę n , bez odmienienia ilości A i A_n odpowiadających ilościom α i b .

Ztąd wypada, iż każda granica całki $\int X dx$, będzie mogła przybliżyć się ile zechcemy, do prawdziwej wartości tej całki, która tym sposobem może być uważaną za summę różniczek, ponieważ mnogości A_α , $A_{\alpha/2}$, i t. d., są wartościami wyrażenia $X dx$ odpowiadającymi ilościom $x = a$, $x = a + \alpha$, i t. d., w których α jest wzięte za dx .

W tym wniosku, który sprawdzimy wkrótce przez geometryczne uwagi, przypuszczamy, jak się okazuje, iż funkcye x i $\frac{dX}{dx}$ nie odmieniają znaku, i w granicach $x = a$, $x = b$, nie stają się nieskończenie wielkimi, co zawsze możemy otrzymać, oddzielając wyrażenia jedno od drugiego, w których zachodzi jedna z wymienionych okoliczności.

Jasną także jest rzeczą, że porządek granic całki $\int X dx$ byłby wspaczny, gdyby wartości ilości X pomniejszały się; pierwsza linija pierwszego wzoru dałaby wartość większą, a pierwsza linija wzoru drugiego dałaby wartość mniejszą od prawdziwej.

255. Te same uwagi mogą być rozciągnięte do wyrazów mnożonych przez potęgi ilości α wyższe nad pierwszą, ztąd wypada, tak jak wyżej, że gdy dwie linije odpowiednie w każdym wzorze, mają znaki przeciwnie, summa linij poprzedzających w jednym wzorze daje wartość większą, a w drugim mniejszą od prawdziwej, a zatem jeżeli nie wiemy, jak się to dzieje prawie zawsze, wielkości błędu popełnianego, to jest ilości opuszczanej, stosowną będzie rzeczą wziąć między dwoma wypadkami wypadek średni. Jeżeli to uczynimy z dwoma wzorami, wypadnie (III)

$$\int X dx = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega}{1} \left((A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{n-1} + \frac{1}{2}(A + A_n)) \right) \\ + \frac{\omega^2}{1.2} \frac{1}{2} (A' - A'_n) \\ + \frac{\omega^3}{1.2.3} \left(A''_1 + A''_2 + A''_3 + \dots + A''_{n-1} + \frac{1}{2}(A'' + A''_n) \right) \\ + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{2} (A''' - A'''_n) \\ + \text{i t. d.} \end{array} \right.$$

234. Uwagi pod liczbą 232 wyłożone, dla całek dostarczają granic prostszych, które jednak mogą być bardzo użyteczne.

Jeżeli między granicami od $x=a$, do $x=b$, wyrazimy największą wartość ilości X , przez M , a najmniejszą przez m , i w pierwszym wyrażeniu granic całki $\int X dx$, położymy m na miejscu A_1 , A_1 , i t. d., a w drugim położymy M , otrzymamy

$$\int X dx > nam < nM$$

czyli $\int X dx > (b-a)m < (b-a)M$,

ponieważ $na = b-a$ (230).

Jeżlibyśmy chcieli otrzymać całkę $\int X Q dx$, a umieli już scałkować $\int Q dx$, ponieważ między granicami ilości x , mielibyśmy zawsze.

$$X Q dx > m Q dx, \quad X Q dx < M Q dx,$$

zawisłość ta sama zachodziłaby między całkami, i mielibyśmy

$$\int X Q dx > m \int Q dx, \quad \int X Q dx < M \int Q dx,$$

gdzie należałoby tylko za całkę $\int Q dx$ położyć jej wartość między granicami $x=a$, $x=b$.

235. Uważanie linii krzywych prowadzi sposobem bardzo prostym do główniejszych wniosków, któreśmy w poprzedzających liczbach wyłożyli.

Dajmy że $\int Xdx$ oznacza powierzchnią odcinka linii krzywej, której przystawa jest X (65) (*fig. 35*). Jeżeli BCZ wyraża tę linią krzywą, a początek ucinków jest w A , i jest $X=PM$; wyrażenie Xdx równie będzie różniczką odcinków BMP , $DEMP$, jakoteż i odcinka $ACMP$ który się zaczyna w początku ucinków, zatem przystawa zamykająca odcinek z tej strony, będzie zupełnie nieoznaczona. Przystawa MP która jest granicą z drugiej strony, równie zostaje nieoznaczoną, póki nie dajemy żadnej wartości ucinkowi AP , lecz gdy będą wiadome ucinki pierwszej i ostatniej przystawy, odcinek zostanie zupełnie oznaczony.

Jeżeli funkcyja zmienna P całki $\int Xdx = P + C$, nieknie sama przez się w punkcie B , ta funkcyja wyraża bezśrednie powierzchnie BCA , BED , BMP ; wtenczas jeżeli zechcemy zacząć ucinki od przystawy AC , należy odjąć od tych powierzchni plac BCA , który to plac wyraża stałą dowolną, w taki sposób oznaczoną, aby ilość $P + C$ niknęła w punkcie A ; lecz uważając razem dwie granice odcinka, nie masz potrzeby zatrudniać się oznaczeniem ilości stałej dowolnej; bo czy to zaczniemy rachować powierzchnie od punktu B , czy od punktu A na osi ucinków, zawsze odcinek równać się będzie różnicy odcinków BMP , BED , lub też odcinków $ACMP$, i $ACED$.

236. Figura 35 pokazuje, że powierzchnia odcinka jakiejkolwiek linii krzywej, zawsze jest zawarta między summą prostokątów wpisanych PR , $P'R'$, $P''R''$, i t. d., i summą prostokątów opisanych $P'S$, $P''S'$, $P'''S'''$, i t. d., pierwsze mają za wysokość najmniejszą przystawę trapezów krzywokręślnych PM' , $P'M''$, $P''M'''$, i t. d. drugie zaś największą. Jakoż prostokąt $MRQN$ jest widocznie równy summie prostokątów

$$MRM'S, MR'M''S', M''R''M'''S'',$$

składających różnicę między wielokątami

$$PMRM'R''M'''R''', PSMS'M''S'''M''''S''''',$$

jednym wpisany a drugim opisany na odcinku $PMM'M''M'''P''''$; lecz ten prostokąt $MRQN$, ma za wysokość MN różnicę między dwiema przystawami skrajnemi PM i $P''M''$, która się nie zmienia, skoro przestrzeń PP'' zostaje taż sama, chociaż podstawa $MR=PP'$, przez powiększenie liczby przystaw pośrednich, może być uczynioną tak małą ile zechcemy, więc i sam prostokąt może być tak małym ile się podoba.

To założywszy, jeżeli weźmiemy

$$AP=a, \quad PP'=P'P''=P''P'''=i.t.d.=a,$$

będziemy mieli

$$PM=A, \quad P'M'=A_1, \quad P''M''=A_2, \quad P'''M'''=A_3 \text{ i t. d.,}$$

summa prostokątów wpisanych będzie

$$Aa+A_1a+A_2a+\dots+A_{n-1}a\dots\dots(1),$$

summa zaś opisanych

$$A_1a+A_2a+A_3a+\dots+A_na\dots\dots(2),$$

i te dwie summy będą mogły dać wartość powierzchni odcinka $PMM'M''M'''P''''$ tak bliską prawdziwej, ile zechcemy, przez co się stwierdza wniosek pod liczbą 232 wyciągnięty z zasady umniejszania się szeregów.

Postrzegamy jeszcze przez to, jakim sposobem całka $\int Xdx$, może być wziętą za summę elementów, ponieważ wyrażając powierzchnią odcinka linii krzywej, jest granicą summy prostokątów

$$Aa, \quad A_1a, \quad A_2a, \quad \text{i t. d.,}$$

które są przyrostkami powierzchni wielokątów wpisanego i opisanego na odcinku.

W figurze 35, w której przystawy coraz się powiększają, prostokąty wpisane mają za wysokość najpierwszą przystawę każdego trapeza krzywokreślnego, a prostokąty opisane ostatnią; lecz jeżeli przystawy przechodzą przez największość jak w *fig. 36*, wten-

czas w części tylko CM'' leżącej przed największością, byłoby jak w figurze poprzedzającej, w części zaś leżącej po największości, działałoby się przeciwnie; wtedy szereg (1) z razu mniejszy od placu krzywokreślnego stałby się większym, a szereg (2) z razu większy od tego placu, stałby się mniejszym od niego.

237. Więcej się zbliżymy do prawdziwej wartości odcinka linii krzywej danej, biorąc zamiast prostokątów wpisanych i opisanych, summę trapezów zakończonych cięciwami łuków MM' , $M'M''$, $M''M'''$, i t. d.

Ponieważ te trapezy mają tę samą wysokość PP' , a każda przystawa, prócz pierwszej i ostatniej, jest spólna dwóm trapezom, zatem ich summa będzie się zupełnie równała szeregowi

$$\alpha\{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{n-1} + \frac{1}{2}(A + A_n)\},$$

trzymającemu środek między szeregami (1), (2) (*).

Nakoniec jasno się pokazuje z fig. 37, że powierzchnia krzywokreślna $PMNQ$ jest mniejsza od prostokąta QE , a większa od prostokąta PF , z których jeden za wysokość ma największą, a drugi najmniejszą z przystaw zawartych w granicach AP , i AQ tego odcinka.

238. Można doświadczyć niejakich trudności w zastosowaniu wzoru (III) z lic. 235. Nie można go użyć, gdy funkcyja X staje się nieskończenie wielką; i w wielkościach ucinka zbliżających się do tej wartości, która czyni funkcyją X nieskończenie wielką; nie dosyć jest zmniejszyć ilość α , czyli zbliżyć przystawy; aby zaradzić skutkom nagłego ich wzrastania, lecz nadto trzeba jeszcze użyć przyzwoitych przerobień.

(*) Można zamiast wielokąta prostokreślnego użyć wielokąta złożonego z łuków linii krzywej prostszej, niż jest linija krzywa założona, i do niej bardziej zbliżających się, niż linije proste; i na to w gruncie swoim wychodzą wzory (I) i (II). Obacz *Traité du calcul* in 4to tom II. str. 140.

Weźmy np. $X = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$; jasną jest rzeczą, że gdy x zbliża się do jedności, bardzo mała w wartości tej zmiennej odmiana, sprawuje bardzo wielką odmianę w wartości X ; więc gdyby chciano mieć wartość całki $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ od $x=0$, do $x=1-\delta$, i gdyby δ było ilością bardzo małą, trzeba by dochodząc do ostatniej granicy, pomnożyć znacznie liczbę pośrednich wartości nadawanych ilości x . Nadto, ta sama całka nie może być rachowaną do $x=1$, gdyż wtenczas ilość X stałaby się nieskończenie wielką, chociaż wartość $\int X dx$ jest skończona, bo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x} + \text{stała}.$$

Trudność ta zależy na tém, że w całkowaniu mnożnik $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ przechodzi z mianownika do licznika; co w ogólności zawsze się przytrafi, gdy X będzie $= \frac{V}{(a-x)^{\frac{p}{q}}}$, i gdy $p < q$. Dla ułatwienia tej trudności uczynimy $x-a=z^q$, co daje

$$x=a-z^q, \quad dx = -qz^{q-1}dz, \quad Xdx = -qVz^{q-p-1}dz,$$

ta ilość już nie staje się nieskończenie wielką gdy $x=a$, czyli $z=0$; jeżeli tylko funkcja V w tymże razie zostaje skończoną. Wtedy więc wyrachujemy całkę $\int V z^{q-p-1} dz$, od $z=0$, do $z=\delta$, wyrażając przez δ ilość bardzo małą; tym sposobem otrzymamy część wartości całki $\int \frac{V dx}{(a-x)^{\frac{p}{q}}}$, odpowiadającą ilości zawartej między $x=a$, i $x=a-\delta$.

Można jeszcze otrzymać całkę od $x=a$, do $x=a-\delta$, uczyniwszy tylko $x=a-z$ gdyż małość zmiennej z , zawartej między bardzo ciasnymi granicami, 0, i δ , do-

Przystając na wyrazach tu napisanych, i czyniąc $n=10$, znajdziemy podług Eulera wartość całki $\int e^{-\frac{1}{x}} dx$, różniącą się od prawdziwej wartości prawie milionową częścią jedności; ta wartość jeszcze dwadzieścia razy będzie dokładniejszą, gdy weźmiemy $n=20$.

Szczegóły zawarte w tej i w poprzedzających liczbach dostatecznie pokazują, jak za pomocą przerabiania i przez wyrachowanie wartości jakiej całki wielu częściami, przychodzi się do wartości przybliżonej, gdy szeregi ją wyrażające są malejącemi w pewnym tylko obrębie.

240. Wzór Tajlora daje także dwa ogólne rozwinięcia całki $\int X dx$. Oznaczając przez C wartość tej całki gdy $x=0$, i wyrażając przez $A, A', A'',$ i t. d. te ilości, na które się w tym razie zamieniają wartości $X, \frac{dX}{dx}, \frac{d^2 X}{dx^2},$ i t. d. otrzymamy szereg

$$\int X dx = C + A \frac{x}{2} + A' \frac{x^2}{1.2} + A'' \frac{x^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

w którym C zastępuje miejsce stałej dowolnej.

Zaczynając od ogólnej wartości $\int X dx$, którą wyrazimy przez y , i chcąc przyjść do wartości odpowiadającej $x=0$, którą oznaczamy przez C , jasną jest rzeczą, że trzeba we wzorze Tajlora uczynić $h=-x$, co da

$$C = y - \frac{dy}{dx} \frac{x}{1} + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{x^2}{1.2} - \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{x^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

potém odstawiając w tém zrównaniu za $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2},$ i t. d., ich wartości, i biorąc wartość $\int X dx$, otrzymamy

$$\int X dx = C + \frac{Xx}{1} - \frac{dX}{dx} \frac{x^2}{1.2} + \frac{d^2 X}{dx^2} \frac{x^3}{1.2.3} - \text{i t. d.},$$

i ta ilość C znaczy ilość stałą dowolną.

Całkowanie przez części prowadzi także do tego samego rozwinięcia. Jakoż, jeżeli rozłożymy różniczkę

Xdx na dwa czynniki X i dx , i gdy scałkujemy dx otrzymamy $\int Xdx = Xx - \int x dX$, potem

$$\begin{aligned}\int x dX &= \int \frac{dX}{dx} \cdot x dx = \frac{1}{2} x^2 \frac{dX}{dx} - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{d^2 X}{dx^2}, \\ \int x^2 \frac{d^2 X}{dx^2} &= \int \frac{d^2 X}{dx^2} \cdot x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{1}{3} \int x^3 \frac{d^3 X}{dx^3}, \\ \int x^3 \frac{d^3 X}{dx^3} &= \int \frac{d^3 X}{dx^3} \cdot x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \frac{d^3 X}{dx^3} - \frac{1}{4} \int x^4 \frac{d^4 X}{dx^4}, \\ &\text{i t. d.}\end{aligned}$$

kładąc następnie za $\int x dX$, $\int x^2 \frac{d^2 X}{dx^2}$, i t. d., ich wartości, wypadnie

$$\int Xdx = X \frac{x}{1} - \frac{dX}{dx} \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^2 X}{dx^2} \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \text{i t. d.}$$

aby zaś wyrażenie całki było zupełne, trzeba do tego rozwinienia przydać jeszcze stałą dowolną, tym sposobem to rozwinienie stanie się podobnem do poprzedzającego. Ten wzór został podany najpierw przez Jana Bernullego i dla tej przyczyny nosi jego nazwisko, tak jak wzór z liczby 20, nazywa się wzorem Tajlora; wzór Bernullego tém jest w rachunku całkowym, czém jest wzór Tajlora w rachunku różniczkowym.

241. Dotąd uważaliśmy tylko współczynnik różniczkowy pierwszego rzędu; lecz gdybyśmy zamiast niego znali współczynnik różniczkowy drugiego rzędu, trzeba by wtenczas dwóch następnych całkowań dla wrócenia się do funkcji pierwotnej, od której on pochodzi. Niech X wyraża współczynnik różniczkowy drugiego rzędu funkcji y , w tym razie będzie; $\frac{d^2 y}{dx^2} = X$, a mnożąc obie strony przez dx , wypada $\frac{d^2 y}{dx} = Xdx$; a że $\frac{d^2 y}{dx}$ jest różniczką współczynnika $\frac{dy}{dx}$ biorąc dx za stałą, więc będzie $\frac{dy}{dx} = \int Xdx$. Niech P wyraża funkcją pier-

wotną ilości x , równą funkeyi $fXdx$, C stałą dowolną, będzie $\frac{dy}{dx} = P + C$; mnożąc potem dwie strony przez dx , otrzymamy $dy = Pdx + Cdx$, co całkując znajdziemy $y = fPdx + Cx + C'$; tu ilość C' jest drugą stałą dowolną. Jeżeli za P odłożymy $fXdx$ otrzymamy wyrażenie $y = fdx fXdx + Cx + C'$, które wskazuje dwa następne działania.

Idźmy teraz do różniczek trzeciego rzędu. Niech X wyraża współczynnik różniczkowy trzeciego rzędu funkeyi y , będzie $\frac{d^3y}{dx^3} = X$, ztąd $\frac{d^2y}{dx^2} = Xdx$;

a że $\frac{d^3y}{dx^3} = d \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$, ztąd $\frac{d^2y}{dx^2} = fXdx + C$,

co daje $\frac{d^2y}{dx^2} = dx fXdx + Cdx$.

Całkując to znowu, będzie $\frac{dy}{dx} = fdx fXdx + Cx + C'$,

ztąd $dy = dx fdx fXdx + Cxdx + C'dx$,

a całkując raz trzeci, wypadnie

$$y = fdx fdx fXdx + \frac{1}{2} Cx^2 + C'x + C''.$$

W tém wyrażeniu można zamienić $\frac{1}{2}C$ na C , bo ilość stała C jest dowolna; należy też dobrze pamiętać, że każdy znak całkowy powinien być uważany, jako stosujący się do wszystkich po nim leżących; i dla tego to, opuszczając stałe dowolne, wyrażamy następne całkowania jeszcze prościej sposobem następującym: gdy X wyraża współczynnik różniczkowy drugiego rzędu, mamy $d^2y = Xdx^2$, a biorąc całki z obu stron zrównania, otrzymujemy $dy = fXdx^2$; to całkując jeszcze raz, będzie $y = \int fXdx^2 = f^2 Xdx^2$. Gdy zaś X jest współczynnikiem różniczkowym trzeciego rzędu, mamy $d^3y = Xdx^3$, a całkując wypadnie następnie

$$d^2y = fXdx^5, \quad dy = \int fXdx^5, \quad y = \int \int fXdx^5 = \int^5 Xdx,$$

i tak dalej podobnie względem wyższych rzędów.

242. Można te wyrażenia sprowadzić do całek pojedynczych, za pomocą całkowania przez części, albowiem w wyrażeniu $\int^2 Xdx^2 = \int dx fXdx$, kładąc P na miejscu $fXdx$, wypada

$$\int dx fXdx = \int Pdx - \int x dP = x fXdx - \int Xxdx,$$

ztađ $\int^2 Xdx^2 = x fXdx - \int Xxdx.$

Przechodząc potem do $\int^5 Xdx^5 = \int dx \int^2 Xdx^2$ i za $\int^2 Xdx^2$ kładąc wartość poprzedzającą otrzymujemy

$$\int^5 Xdx^5 = \int x dx fXdx - \int dx \int Xxdx,$$

uważając wtedy że

$$\int x dx fXdx = \frac{1}{2} x^2 \int fXdx - \frac{1}{2} \int Xx^2 dx,$$

$$\int dx \int Xxdx = x \int Xxdx - \int Xx^2 dx,$$

znajdujemy

$$\int^5 Xdx^5 = \frac{1}{2} (x^2 \int fXdx - 2x \int Xxdx + \int Xx^2 dx),$$

i tak dalej postępując ułożymy tablicę:

$$\int Xdx = \int fXdx,$$

$$\int^2 Xdx^2 = \frac{1}{1} \{ x fXdx - \int Xxdx \}.$$

$$\int^3 Xdx^3 = \frac{1}{1.2} \{ x^2 \int fXdx - 2x \int Xxdx + \int Xx^2 dx \},$$

$$\int^4 Xdx^4 = \frac{1}{1.2.3} \{ x^3 \int fXdx - 3x^2 \int Xxdx + 3x \int Xx^2 dx - \int Xx^3 dx \}.$$

i t. d.

Spółczynniki licbowne tych wyrażen są też same, co i spółczynniki potęg dwówyrazu $a-b$; i gdy wykładnik ilości x przed $\int$ zmniejsza się w każdym wyrażeniu jednością, idąc ku prawej stronie, wykładnik tejże ilości pod znakiem $\int$ powiększa się jednością.

Wróćmy stałe dowolne opuszczone w tym wzorze. pisząc $\int Xd'x + C$ za $\int Xdx$; $\int Xxdx + C'$ za $\int Xxdx$; $\int Xx^2dx + C''$ za $\int Xx^2dx$, toż się ma rozumieć o innych, gdyż ilości stałe C , C' , C'' i t. d., będąc mnożone przez rozmaite potęgi x , nie mogą się między sobą upraszczać.

243. W różniczkach dotąd wyłożonych, braliśmy dx za stałą, gdyż tylko takowe różniczki mają współczynnik pojedynczy. Lecz gdy razem dy i dx , są zmienne, mamy (131) $d^2y = qdx^2 + pd^2x$; więc gdybyśmy mieli różniczkę $Udx^2 + Vd^2x$, trzebaby też mieć $V = p$, i $U = q$, ztąd wypada $U = \frac{dV}{dx}$, i gdy się ten warunek spełnia, mamy do całkowania, ilość tylko $\int Vdx$.

Ten warunek nie byłby potrzebny, gdybyśmy uszczegulnili związek, który przypuszczamy między x i t , bo tym sposobem wyrzucilibyśmy x , dx , i d^2x , a otrzymalibyśmy różniczkę d^2y wyrażoną tylko przez t i dt .

Przystosowanie rachunku całkowego do znalezienia powierzchni zawartych linijami krzywymi i do wyprostowania tych linij; do znalezienia objętości ciał ograniczonych powierzchniami krzywymi, i do znalezienia wielkości tychże powierzchni.

Znalezienie powierzchni zawartych linijami krzywymi.

244. Rozwiązanie ogólnego zagadnienia o znalezieniu powierzchni zawartych linijami krzywymi zależy od zcałkowania różniczki Xdx , gdzie X funkcyja ilości x , wyraża przystawę y linii danej (65). To co poprzedziło, zawiera wykład sposobów analitycznych dotąd wynalezionych, w celu zcałkowania tej różniczki, bądź ściśle, bądź przez przybliżenie; zastanawiać się tu będziemy tylko nad przystosowaniem tych sposobów do linii krzywych znajomszych.

Linije, których zrównanie jest najprostsze, są parabole rozmaitych stopni, wyrażone przez zrównanie $y^n = px^m$; ztąd się wyciąga $y = p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}}$, a zatem

$$\int X dx = \int p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{np^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m+n}{n}}}{m+n} + \text{stała}.$$

We wszystkich tych parabolach wyrażenie powierzchni odcinka zawartego między ich łukiem, osią ucinków i przystawą jest skończone i algebraiczne. Łatwo jest, mając wyrażenie powierzchni tego odcinka, znaleźć wyrażenie każdej innej powierzchni, zawartej między częścią linii krzywej i linijami prostymi formującymi z ucinkami i przystawami wielokąty, których wymiar podaje geometrya początkowa; obaczmy tego przykłady niżej (252—255).

Podane linije krzywe, przechodzą przez początek ucinków, gdyż razem mamy $x=0$, i $y=0$; jeżeli chcemy wyrazić ich powierzchnią, zaczynając od tego punktu, trzeba opuścić stałą dowolną, gdyż ilość

$\frac{np^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m+n}{n}}}{m+n}$ sama przez się niknie, gdy w niej uczynimy

$x=0$. Ażeby potem mieć powierzchnią *BCMP* (fig. 38), zawartą między przystawami *BC* i *PM*, odpowiadającymi ucinkom $AB=a$, $AP=x$, dosyć będzie

odjąć od $\frac{np^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m+n}{n}}}{m+n}$, co wyraża powierzchnią *ACMP*,

ilość $\frac{np^{\frac{1}{n}} a^{\frac{m+n}{n}}}{m+n}$, równającą się powierzchni *ACB*; tak mieć będziemy

$$BCMP = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n} \left(x^{\frac{m+n}{n}} - a^{\frac{m+n}{n}} \right).$$

Gdy wykładnik n jest parzysty, wyrażenie

$\frac{np^{\frac{1}{n}}}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$, może mieć znak podwójny $\pm$, a że wtenczas też same ucinki należą do dwóch odnóg krzywych ACM , i Acm , ztąd też dwa są odcinki $ACMP$, $AcmP$; odcinek mający przystawy dodatne, ma wartość dodatnią, drugi ma wartość ujemną.

Jeżeli wykładniki m i n są oba nieparzyste, ilość $x^{\frac{m+n}{n}}$ ma znak tylko jeden, i zawsze zostaje dodatnia, jakibykolwiek był znak ilości x ; lecz łatwo się pokazuje, że w tym razie jedna z dwóch odnóg danej linii krzywej, ma swoje ucinki i przystawy razem odjemne; więc ztąd wypada, że powierzchnie odpowiadające ucinkom i przystawom odjemnym powinny być uważane jako dodatne.

Jeżeli tylko n jest nieparzyste, wtedy ilość $x^{\frac{m+n}{n}}$ staje się odjemną razem z ilością x ; lecz w tym razie dwie odnogi danej linii krzywej, są położone po jednej stronie linii ucinków a przystawy zostają zawsze dodatne.

Z tych uwag wypada, że powierzchnia figury krzywokróśnej jest dodatnia gdy uciniek i przystawa mają znaki też same, odjemna gdy mają znaki przeciwne.

Wszystkie odcinki paraboliczne są w stosunku stałym z prostokątem $ADMP$ z ucinika i przystawy zrobyonym; ponieważ za pomocą zrównania $y = p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}}$,

wyrażenie $\frac{n}{m+n} p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m+n}{n}} = \frac{n}{m+n} x p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}}$, zamienia się na $\frac{n}{m+n} xy$.

Gdy $m=n$, parabola staje się linią prostą, gdyż wtenczas $y = p^{\frac{1}{n}} x$; odcinek $ACMP$ zamienia się na trójkąt AMP , którego wartość, tak podług wzoru wyższego, jakoteż podług geometryi początkowej, równa się $\frac{1}{2}xy$.

Czyniąc $n=2$, $m=1$, wpadamy na parabolę zwy-
czajną, i znajdujemy wartość odcinka $ACMP=\frac{2}{3}xy$.

245. Zatrudnimy się teraz wynalezieniem wartości
odcinka linii krzywych wyrażonych przez zrównanie
 $x^m y^n = p$, które się wyciąga ze zrównania $y^n = px^{\frac{m}{n}}$,
zamieniając w niem $+m$ na $-m$; ztąd $y = p^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{m}{n}}$, i

$$\int X dx = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m} x^{\frac{n-m}{n}} + \text{stała}.$$

Są to hiperbole różnych stopni, odniesione do swych
niemalstycznych, i są złożone z wielu odnóg takich,
jaką jest UMV , fig. 39, zawartych w kątach uformowa-
nych z tych linii prostych. Odcinki rachowane od po-
czątku ucinków, zajmują plac nieograniczony, za-
warty między częścią CV linii krzywej i jej niemal-
styczną AV ; wartość tego placu jest nieskończona lub
skończona podług tego, jak m jest większe lub mniejsze
niż n . Jakoż chcąc znaleźć plac $BCMP$, wzięty od
ucinka $AB=a$, aż do ucinka $AP=b$, trzeba uczynić

następnie $x=a$, $x=b$, (235) w wyrażeniu $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m} x^{\frac{n-m}{n}}$,
i odciągnąć pierwszy wypadek od drugiego, co da

$$BCMP = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m} \left(b^{\frac{n-m}{n}} - a^{\frac{n-m}{n}} \right).$$

Jeżeli teraz przypu-
ścimy $a=0$, punkt B padnie na punkt A , a plac
 $BCMP$ zamieni się na $YAPMV$; a że ilość $a^{\frac{n-m}{n}}$
będzie nieskończenie wielką gdy $m > n$, albo będzie $=0$,
gdy $m < n$; ztąd w pierwszym razie

$$YAPMV = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{m-n} \left(\frac{1}{0} - b^{\frac{n-m}{n}} \right),$$

w drugim razie

$$YAPMV = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m} \left(b^{\frac{n-m}{n}} - 0 \right) = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m} b^{\frac{n-m}{n}}.$$

Naznaczając pewną wielkość ilości a , a czyniąc $b = \infty$, otrzymamy plac nieograniczony, $XBCU$, który będzie $= \infty$, jeżeli $m < n$; będzie zaś $= \frac{np^{\frac{1}{n}}}{m-n} a^{\frac{n-m}{n}}$, jeżeli $m > n$. Ztąd wypada, że gdy $m = n$, z dwóch placów niemalstycznych, jeden jest nieskończenie wielki, drugi równy ilości skończonej.

Przyczyna tej różnicy wynika z mniej lub więcej nagłego zbliżania się linii krzywej do swojej niemalstycznej; a że $y = \frac{p^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{m}{n}}}$, $x = \frac{p^{\frac{1}{m}}}{y^{\frac{n}{m}}}$, łatwo widzieć mo-

żna, że gdy $m > n$, wtedy y maleje daleko prędzej niżeli x , że zatem linija krzywa daleko prędzej się zbliża do niemalstycznej równoległej do ucinków, niż do niemalstycznej która jest równoległa do przystaw, i wzajemnie.

Kładąc y za $p^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{m}{n}}$, w wyrażeniu

$$\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m} x^{\frac{n-m}{n}} = \frac{n}{n-m} x \cdot p^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{m}{n}},$$

zamienimy je na $\frac{n}{n-m} xy$, a wartość powierzchni

$YAPMV$ będzie $\frac{nxy}{n-m} + \text{stała}$. Zdawałoby się, że

wyraz $\frac{nxy}{n-m}$ powinien zniknąć gdy $x=0$; lecz poprzedzający wykład widocznie pokazuje, że nie powinniśmy stanowić w tej mierze wprzód, aż podstawimy za y jego wartość wyrażoną przez x .

236. Gdy $m=n$, będzie $xy = p^{\frac{1}{n}}$, albo $xy = p$, gdy zamienimy $p^{\frac{1}{n}}$ na p , co jest rzeczą obojętną; linija krzywa, o którą tu idzie, jest hiperbola zwyczajna i równoramienna gdy kąt spółprzystaw jest prosty. Wy-

rażenie ogólne powierzchni pod liczbą poprzedzającą wynalezione, pokazuje się wtenczas pod kształtem nieskończonej ilości, przy jakiegokolwiek wartości x , a różniczka tego wyrażenia będąc $\frac{pdx}{x}$, daje całkę $plx +$

stała. Obadwa place niemalstyczne są $= \infty$, bo czy założymy, $x=0$, czy $x=\infty$, zawsze będzie $lx = \infty$. Niech będzie UMV (fig. 40) jedną z odnóg hiperboli równobocznej, w której połowa osi większej jest $AC=a$, a potęga $\overline{BC} \cdot \overline{AB} = \overline{AB}^2 = \frac{1}{2}a^2$ (Trig. 164); będziemy mieli $p = \frac{1}{2}a^2$, a biorąc powierzchnie od przystawy BC odpowiadającej wierzchołkowi C , otrzymujemy $BCMP = \frac{1}{2}a^2 l.AP - \frac{1}{2}a^2 l.AB = \frac{1}{2}a^2 l. \frac{AP}{AB}$. Jeżeli weźmiemy $AB=1$,

otrzymamy, z przyczyny że $l.1=0$, $BCMP = l.AP$. Podobnie będzie $l.AP' = BCM'P'$, $l.AP'' = BCM''P''$, i t. d., ząd wypada, że, jeżeli ucinki AP, AP', AP'' , i t. d. są w postępie ilorazowym, powierzchnie im odpowiadające $BCMP, BCM'P', BCM''P''$, i t. d. będą w postępie różnicowym.

47. Hiperbola teraz wzmiankowana będąc równoboczną, daje tylko logarytmy Neperowe; lecz odmiennając kąt między niemalstycznymi, i czyniąc $AB=1$, można otrzymać nieograniczoną liczbę innych układów logarymowych. Niech będzie UMV fig. 41 jakakolwiek hiperbola; prowadząc przystawy równoległe do niemalstycznej AV , dowiedzimy rozumując podobnie jak pod licz. 65, że równoległobok $PMRP'$ jest różniczką placu $BCMP$. Gdy zaś poprowadzimy $P'Q$ prostopadłą do PM , znajdziemy $P'Q = PP' \cdot \text{wst } P'PQ = PP' \cdot \text{wst } XAV$; wyrażając przez ω kąt między niemalstycznymi, będzie $P'Q = dx \text{ wst } \omega$, a zatem $PMRP' = \gamma dx \text{ wst } \omega$. Jeżeli podstawimy $\frac{1}{x}$ za γ , wypadnie $\frac{\omega}{x} \text{ wst } \omega$, różniczka placu $BCMP$, a przeto $BCMP = lx = l.AP$, biorąc $\text{wst } \omega$ za zamiennik. (28)

Zamiennik logarytmów zwyczajnych jest $0,4342945$, zatem $\text{wst} = 0,4342945$; a ztąd wypada, że niemalstyczne hiperboli, której powierzchnie dają logarytmy zwyczajne czynią między sobą kąt $= 0^{\circ}.P, 28801$.

248. W wyrażeniu analitycznym powierzchni hiperboli zwyczajnej, natrafiamy na szczególność, której milczeniem przeminać nie można, a ta jest, iż powierzchnie niemalstyczne $YApM$, fig. 40, odpowiadające ucińkom odjemnym, nie mogą być zawarte w tym samym wzorze, w którym są zawarte powierzchnie $YAPM$, odpowiadające ucińkom dodatnym. Jakoż funkcyja lx wyrażająca powierzchnią $YAPM$ (246), nie tylko staje się nieskończenie wielką, gdy $x=0$, lecz przechodzi na urojoną, gdy x staje się odjemnym, bo zrównanie $u=lx$, pochodząc od $x=e^u$, nie przypuszcza żadnej odjemnej wartości na ilość x .

Ta trudność, nad którą nie możemy się tu zatrzymywać, należy do przejścia przystawy y przez warość nieskończenie wielką, które zdaje się zrywać niekiedy związek ciągłości między powierzchniami (*). Każda jednak z tych powierzchni w szczególności wyraża się bardzo dobrze, bo jeżeli weźmiemy na odjemnej stronie osi ucińków części $Ab=AB$, $Ap=AP$, będziemy mieli $bcmp=BCMP=1 \frac{AP}{AB}=1 \frac{Ap}{Ab}$ (246).

To samo także wypada z rachunku, uważając, iż gdy zamienimy $+x$ na $-x$, różniczka powierzchni stając się $\frac{-dx}{-x} = \frac{dx}{x}$, ma za całkę $lx + \text{stała}$.

249. Gdy uczynimy $AC=a$, $AP=x$, $PN=y$, (fig. 42), zrównanie koła ANE będzie $y^2=2ax-x^2$, a odcinek ANP mieć będzie wyrażenie $\int dx \sqrt{2ax-x^2}$, które

(*) Obacz *Traité du calcul in 4to* T. I. str. 134 i T. II. str. 161 i T. III. str. 615.

zamienimy na $-\int du(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}$, czyniąc $x=a-u$.
A że wzór (B) (195) daje

$$\begin{aligned} -\int du(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2}u(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}a^2 \int du(a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{2}a^2 \int \frac{-du}{\sqrt{a^2-u^2}}; \end{aligned}$$

nadto mamy

$$\int \frac{-du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{łuk} \left(\text{dost} = \frac{u}{a} \right) \quad (36),$$

przeto,

$$-\int du(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{2}a^2 \text{łuk} \left(\text{dost} = \frac{u}{a} \right),$$

przywracając wartość za u , wypada

$$\int dx \sqrt{2ax-x^2} = -\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2} + \frac{1}{2}a^2 \text{łuk} \left(\text{dost} = \frac{a-x}{a} \right),$$

cały ten wypadek ginie, gdy $x=0$.

Łatwo postrzegamy że $\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2}$, wyraża powierzchnią trójkąta CPN , i że $\frac{1}{2}a^2 \text{łuk} \left(\text{dost} = \frac{a-x}{a} \right)$ czyli $\frac{1}{2}AC \cdot \text{łuk} AN$ wyraża powierzchnią wycinka ACN .

Gdy założymy $x=2a$, wyrażenie powierzchni trójkąta APN staje się $=\frac{1}{2}a^2 \text{łuk}(\text{dost}=-1) = \frac{1}{2}a^2\pi$, gdzie π wyraża połowę okręgu koła, którego promień $=1$; i wyraża połowę powierzchni koła; cała zaś powierzchnia będzie $a^2\pi = \frac{1}{2}a \cdot 2a\pi$, jak się to dowiodło w początkowej geometryi.

Rozwiniona funkcyja $\int dx \sqrt{2ax-x^2}$ (205) daje przybliżone wartości powierzchni APN .

Odnosząc zrównanie Koła do środka, znaleźlibyśmy

$$\int da \sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2 \text{łuk} \left(\text{wst} = \frac{x}{a} \right).$$

250. Ponieważ przystawa éllipsy jest $\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}$,

więc odcinek élliptyczny będzie $=\frac{b}{a} \int dx \sqrt{2ax-x^2}$,

a że w jednymże czasie niknie co i odcinek kołowy ANP , będzie $ANP:AMP=a:b$; łatwo bowiem wnieść z (236), że gdy dwie różniczki zachowują między sobą stosunek stały, takowy stosunek jest także stosunkiem całek, jeżeli te całki stają się zero z jednejże przyczyny.

Podług tego co poprzedziło, gdy plac koła napisanego na wielkiej osi ellipsy wziętej za średnicę, ma się do placu ellipsy, jak wielka oś do małej, zatem ellipsa równa się kołu takiemu, którego promień jest średnią ilorazowo proporcjonalną między połowami tych osi. Jakoż z wyższego stosunku wypada, że plac ellipsy jest równy $\pi a^2 \cdot \frac{b}{a}$ czyli πab , a ta ostatnia ilość widocznie oznacza powierzchnią koła, którego promień jest $=\sqrt{ab}$.

251. Zrównanie hiperboli odniesionej do jej osi poprzecznej jest

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax + x^2),$$

złąd więc

$$AQR = \frac{b}{a} \int dx \sqrt{2ax + x^2}.$$

Ta całka może się otrzymać przez logarytmy (183), lub też rozwinąć na szereg; lecz nie zatrzymując się nad wyrachowaniem tych wypadków, zastanowimy się raczej nad wycinkami eliptycznemi i hiperbolicznemi których różniczki często się przytrafiają.

252. Niech będzie $ABab$ ellipsa, w której połowa osi wielkiej jest $AC=a$, połowa osi małej $BC=b$; gdy uczynimy $CP=x$, będzie

$$PM=y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Jasną jest rzeczą, że wycinek

$$ACM = CMP + AMP,$$

i że

$$d ACM = d CMP + d AMP,$$

$$CMP = \frac{1}{2} CP \times PM = \frac{1}{2} \frac{bx}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$d.CMP = \frac{1}{2} \frac{b}{a} \left(dx \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right),$$

$$d.AMP = - \frac{b}{a} dx \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Ostatnia różniczka jest odjemna z przyczyny, że powierzchnia AMP maleje gdy x wzrasta; dodając różniczki będzie

$$d.ACM = - \frac{1}{2} \frac{b}{a} \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Gdy uczynimy $\frac{b}{a} = 1$, wycinek eliptyczny ACM zamieni się na wycinek ACN należący do koła $AEae$, którego średnicą jest wielka oś Aa ; będzie więc

$$d.AC N = - \frac{1}{2} \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2} a \times - \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

lecz że $-\frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ jest różniczką łuku AN , wypada ztąd, jak i z geometryi początkowej, że

$$ACN = \frac{1}{2} a \times AN = \frac{1}{2} AC \times AN;$$

a ponieważ wycinki ACN , i ACM , spólny mają początek w punkcie A , ztąd wniesiemy (250) że wycinek eliptyczny

$$ACM = \frac{b}{a} ACN = \frac{1}{2} BC \times AN.$$

253. W hiperboli XAx której osi są spólne z ellipsą $ABab$, i której zrównanie jest

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

będzie wycinek $ACR = CQR - AQR$, co daje

$$d.ACR = d.CQR - d.AQR,$$

a że

$$CQR = \frac{1}{2} CQ \times QR = \frac{1}{2} \frac{bx}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

$$d.CQR = \frac{1}{2} \frac{b}{a} \left(dx \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right),$$

$$d.AQR = \frac{b}{a} dx \sqrt{x^2 - a^2},$$

zatem będzie

$$d.ACR = \frac{1}{2} \frac{b}{a} \frac{a^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}};$$

z kąd się pokazuje, że różniczka wycinka hiperbolicznego, oprócz znaków jest ta sama, co wycinka eliptycznego.

254. Wycinek hiperboliczny *ACM* fig. 41, równy jest placowi niemalstycznemu *BCMP*, gdyż

$$ABC = \frac{AB \times BC \times \text{wst } B}{2} = \frac{AP \times PM \times \text{wst } B}{2} = AMP,$$

przeto $ACM = ACM + AMP - ABC = BCMP$.

255. To co poprzedziło jasno pokazuje, jak rachunek całkowity stosować należy do znalezienia powierzchni ograniczonych linijami krzywemi; podamy jednak niektóre wypadki interesujące, do których geometrowie przyszli, względem linij przestępnych.

W logarytmice, której zrównanie jest $y = lx$, mamy $\int y dx = \int dx lx = xlx - x + \text{stała}$. Część zmienna tej ilości niknie gdy $x = 0$; bo uczyniwszy $x = \frac{1}{m}$, wyrazimy ją pod postacią $-\frac{lm}{m} - \frac{1}{m}$, pod którą ona zniknie

gdy $m = \infty$ (99); ztąd się więc pokazuje iż do niej nie potrzeba dodawać stałej dowolnej, gdy chcemy mieć odcinki zaczynające się od punktu *A*. (fig. 25).

Gdy uczynimy w niej $x = AE = 1$, otrzymamy wyrażenie placu niemalstycznego *cAEx*, który jest skończony i równy $= -1$.

Jeżeli weźmiemy przystawy na miejscu ucinków, będziemy mieli $\int x dy = \int dx = x$, wyrażenie płacu $cOMx$ opartego na osi przystaw AC , i którego wyrażenie jest algebraiczne; nie należy do niego przydawać stałej dowolnej, gdyż ono niknie razem z ucinikiem x . Płac $cAEEx$ odpowiadający ucinкови $x = AE = 1$, ma podług tego wzoru, tęż samą wartość co i podług wzoru poprzedzającego, prócz znaku tylko.

Przypuściliśmy, że zamiennik jest $= 1$, gdyby zaś był wyrażony przez M , mielibyśmy

$$\int dx lx = x lx - \int M dx = x lx - Mx; \quad \int x dy = Mx.$$

256. Roztrząsając linią krzywą, której zrównanie jest.

$$y = \frac{a^x}{x},$$

znajdziemy bez trudności, że kształt jej wskazany jest przez figurę 45. CC' oś przystaw jest niemalstyczną odnog HF , $R'F'$, a AB' strona odjemna osi ucinków x , jest niemalstyczną odnogi $M'K'$.

Znalezienie powierzchni ograniczonej tą linią krzywą zależy od całki $\int \frac{a^x dx}{x}$. Szereg wyrażający tę całkę (214) zdaje się iż nie może być stosowanym do powierzchni odpowiadającej ucinikom odjemnym, z przyczyny że pierwszy jego wyraz lx staje się w tym przypadku urojonym; jednak używając sposobu pod licz. 235 podanego, otrzymamy wypadki rzetelne. Takową trudność, która jest tego rodzaju, jaka była wyrażona pod liczbą 248, znosimy odmienając znak ucinika x wprzód, nim scałkujemy; tym sposobem znajdziemy

$$\int \frac{a^{-x} \times -dx}{-x} = \int \frac{a^{-x} dx}{x} =$$

$$= lx - \frac{x \cdot la}{1.1} + \frac{x^2 (la)^2}{1.2.2} - \frac{x^3 (la)^3}{1.2.3.3} + \text{i t. d.} + \text{stała},$$

ten sam wypadek, jakibyśmy otrzymali zamieniając $+x$

na $-x$, w wyrazach tylko algebraicznych wymienionego szeregu.

Dla poznania, czém są trzy place niemalstyczne linii krzywej danej, należy szukać wartości całki

$$\int \frac{a^x dx}{x}, \text{ między granicami}$$

$$x=0 \text{ i } x=n, \quad x=0 \text{ i } x=-n, \quad x=n \text{ i } x=-\infty,$$

gdzie n znaczy jakąkolwiek ilość skończoną. W pierwszym i drugim przypadku znajdujemy wypadek nieskończenie wielki, bo i szeregi tak z liczby 214, jakoteż niedawno przytoczony, kładąc w nich $x=0$, sprowadzają się do l.o; lecz niczego wyrzec nie można względem przypadku trzeciego, ponieważ wyrazy rozwinięcia $\int \frac{a^{-x} dx}{x}$ mają na przemian znaki dodatne i odjemne, przeto wydarzyć się może, iż różnica między częścią dodatną a częścią odjemną będzie skończoną, chociaż każda z tych części jest nieskończenie wielką, co się wistocie przydarza, jak tego dowiodł Maskeroni (*Mascheroni*) oznaczając ilość stałą dowolną w ten sposób, iżby całka ginęła gdy bierzemy ilość x nieskończenie wielką, przeto niemalstyczny plac $B'P'M'K'$ zawarty między granicami $x=-n$, i $x=-\infty$, jest wielkością skończonej (*).

Funkcya przerobiona $\int \frac{dz}{lz}$ (214) otrzymana z założenia $a^x=z$, znajduje się w tych samych okolicznościach, z przyczyny wyrazu lz , który jest pierwszym w rozwinięciu i staje się urojonym, gdyż lz jest odjemny.

257. Zrównanie cykloidy jest

$$dx = \frac{y dy}{\sqrt{2ay - y^2}} \quad (114),$$

(*) Obacz *Traité du calcul in 4to T. III, str. 512.*

złąd wypada

$$\int y dx = \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{2ay - y^2}};$$

łatwobyśmy scałkowali to wyrażenie przez łuki koła, za pomocą wzoru pod liczbą 199; lecz możemy przyjść do wypadku prostszego biorąc różniczkę wycinka $ACDM$ (fig. 20), której przystawa $DM = AC - PM = 2a - y$, kładąc bowiem $2a - y = z$, będziemy mieli $d.ACDM = z dx$ i otrzymamy

$$z dx = \frac{(2ay - y^2) dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = dy \sqrt{2ay - y^2},$$

więc $ACDM = \int dy \sqrt{2ay - y^2} + \text{stała}.$

Ta całka wyraża powierzchnię odcinka koła, którego średnicą jest $2a$, a ucinkiem y (249), przeto wyraża odcinek qmn , który razem z odcinkiem $ACDM$ niknie, gdy $y = 0$, więc $ACDM = qmn$. W punkcie K , gdzie $y = 2a$ odcinek ACK staje się równy półkołu $qmgq$. Nakoniec widoczną jest rzecz, że plac

$$KMD = ACK - ACDM = qmn.$$

Prostokąt AK mając swoją wysokość $JK = gq$, a podstawę $AJ = gmq$, będzie 4 razy większy od półkoła $qmgq$; a odjąwszy od tego prostokąta plac $ACK = qmgq$, zostanie $AMKJ = 3gmq$. Złąd wypada, że plac $AKLA$ zawarty odnogą cykloidy i jej osią, jest trzy razy większy od koła rodzającego.

258. Pozostaje nam jeszcze mówić o spiralnych; na-przód zastanowimy się nad temi, które są wyrażone przez zrównanie $u = at^n$ (117), w którym t równa się łukowi ON , fig. 27, $u = AM$. Ponieważ przystawy są biegunowe, różniczka powierzchni będzie $\frac{u^2 dt}{2}$ (120); kładąc za u jego wartość i całkując otrzymamy $\frac{a^2 t^{2n+1}}{4n+2} + \text{stała}$; gdy n jest dodatne nie trzeba dodawać ilości stałej,

jeżeli zaczynamy rachować powierzchnie od linii AO , na której $t=0$; wtedy powierzchnia $ACM = \frac{a^2 t^{2n+1}}{4n+2}$.

Po jednym obiegu promienia kreślącego, otrzymamy plac $ACMO = \frac{a^2 (2\pi)^{2n+1}}{4n+2}$, gdzie π wyraża połowę okręgu koła OQN .

W spiralnej Archimeda (117), $a = \frac{1}{2\pi}$, $n=1$, i $ACM = \frac{t^5}{24\pi^2}$, który to wypadek, gdy w nim uczynimy

$t=2\pi$, daje $ACMO = \frac{\pi}{3}$, to jest trzecią część koła OQN , bo tu mamy do czynienia z jednościami kwadratowymi, i powierzchnia koła tego jest $\pi(1)^2$.

Po drugim obiegu, promień wiodący AN , przechodzi po powierzchni przebieżonej w pierwszym obiegu, i tak następnie za każdym obiegiem; przeto powierzchnia po m^{ty} obiegu promienia, odpowiada całce $\int \frac{u^2 dt}{2}$, wziętej między granicami $t=(m-1)2\pi$, i $t=m \cdot 2\pi$. Przeto w spiralnej Archimedesa znajdujemy $\frac{m^5 - (m-1)^5}{5} \pi$.

Jeżeli wyrachujemy powierzchnią zakończoną obrotem następnym to jest $(m+1)^{ty}$, i odejmiemy powierzchnią która ją poprzedza, będziemy mieli plac zawarty między dwoma obrótami, czyli skrętami

$$\frac{(m+1)^5 - 2m^5 + (m-1)^5}{5} \pi = 2m\pi,$$

co staje się $=2\pi$, gdy $m=1$, i pokazuje, że plac zawarty między m^{ty} a $(m+1)^{ty}$ obrotem, jest równy m razy wziętemu placowi między pierwszym obrotem i drugim; co wynalazł też Archimedes.

W spiralnej hiperbolicznej, w której $n=-1$, otrzymujemy

$$ACM = -\frac{a^2}{2t}.$$

Powierzchnia tej krzywej czyniącej około punktu A nieskończoną liczbę obiegów, jest nieskończenie wielka gdy $t=0$; postąpimy więc tu jak czyniliśmy z hiperbolami, a powierzchnia zawarta między dwoma promieniami kresłącemi odpowiadającemi $t=b$, i $t=c$, będzie

$$\frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right).$$

Nakoniec w spiralnej logarytmowej (128) $t=lu$, $dt = \frac{du}{u}$; a różniczka $\frac{u^2 dt}{2}$ zamieniając się na $\frac{u du}{2}$, daje $ACM = \frac{u^2}{4}$. Powierzchnia jest $=0$, gdy $u=0$, lecz wtenczas $t=\infty$; gdyż podana linija krzywa równie jak poprzedzająca czyni nieskończoną liczbę obrotów około bieguna A .

Wyprostowanie linij krzywych.

259. Różniczka łuku jakiejkolwiek linii krzywej, odniesionej do spółprzystaw prostopadłych między sobą, wyraża się przez $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ (64); takowa różniczka podstawując w niej za dy^2 , wartość wyciągniętą ze zrównania różniczkowego danej linii krzywej, wyrazi się pod kształtem Xdx , a jej całka da długość tejże linii krzywej. Żądać długości łuku, jestto żądać jego wyprostowania, gdyż rozwiązanie tego zadania, gdy może być ściśle otrzymane, podaje nam sposób naznaczenia linii prostej równej łukowi danemu.

260 Weźmy za pierwszy przykład parabole różnych stopni, wyrażone przez zrównanie $y = px^n$, gdzie n wyraża jakąkolwiek liczbę całą lub ułamkową; otrzymamy

$$dy = np x^{n-1} dx, \quad \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + n^2 p^2 x^{2n-2}};$$

więc łuk paraboliczny będzie wyrażony przez

$$\int (1 + n^2 p^2 x^{2n-2})^{\frac{1}{2}} dx.$$

Otrzymamy tę całkę pod skończoną i algebraiczną postacią, jeżeli wykładnik $2n-2$, będzie równy jedności, lub też w niej zawierać się będzie ilekolwiek razy bez reszty (192).

Niech będzie naprzód $2n-2=1$, wypada ztąd $n=\frac{5}{2}$, a

$$\int (1 + n^2 p^2 x^{2n-2})^{\frac{1}{2}} dx = \frac{8}{27p^2} \left(1 + \frac{9}{4} p^2 x \right)^{\frac{5}{2}} + \text{stała},$$

ta linia krzywa, dana będzie przez zrównanie $y = px^{\frac{5}{2}}$, czyli $y^2 = p^2 x^5$, a zatem będzie to parabola trzeciego stopnia która jest odwinioną paraboli zwyczajnej (81). Jeżeli rachować będziemy łuki zaczynając od punktu, w którym $x=0$, będzie

$$\frac{8}{27p^2} \left\{ \left(1 + \frac{9}{4} p^2 x \right)^{\frac{5}{2}} - 1 \right\}.$$

Czyniąc $\frac{1}{2n-2} = i$, gdzie i znaczy liczbę całą znajdziemy $n = \frac{2i+1}{2i}$, a zrównanie $y^{2i} = p^2 i x^{2i+1}$ daje nieskończoną liczbę parabol mogących się wyprostować; co do innych, nie można otrzymać ich łuków, tylko przez przybliżenie.

Względem paraboli zwyczajnej, w której $n=2$, mamy $\int dx (1 + 4p^2 x^2)^{\frac{1}{2}}$; podług wzoru (B) z lic. 195, znajdziemy

$$\int dx (1 + 4p^2 x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x (1 + 4p^2 x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4p^2 x^2}};$$

a że

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4p^2 x^2}} = \frac{1}{2p} \ln(2px + \sqrt{1 + 4p^2 x^2}) + \text{stała} \quad (184),$$

zatem

$$\int dx (1 + 4p^2 x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x (1 + 4p^2 x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4p} \ln(2px + \sqrt{1 + 4p^2 x^2}) + \text{sta.}$$

Taka jest wartość jakiegokolwiek łuku paraboli zwyczajnej; można w niej opuścić stałą dowolną biorąc początek całki od $x=0$.

Łuk hiperbół danych przez równanie $y=px^{-n}$ wyraża się przez $\int x^{-n-1} dx (x^{2n+2} + n^2 p^2)^{\frac{1}{2}}$, i tylko przez przybliżenie może być otrzymany.

261. Różniczka łuku koła jest $\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, gdy bierzemy równanie $y^2=a^2-x^2$ (64), jest zaś $\frac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, gdy używamy równania $y^2=2ax-x^2$; w jednym i drugim razie jego całka może być tylko przez przybliżenie otrzymana; takowych funkcji mieliśmy wyżej kilka rozwinień (205).

262. Idźmy do ellipsy, i weźmy jej równanie $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$; różniczka jej łuku będzie $\frac{dx\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}}$;

gdy dla skrócenia uczynimy wielką oś $a=1$, a kwadrat mimośrodów $a^2-b^2=1-b^2=e^2$, łuk wyrazi się przez

$\int \frac{dx\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$. Wyżej już (206) wyprowadziliśmy szereg, który daje wartość przybliżoną tej całki, gdy e jest ilością małą, a który służy ellipsom niewiele spłaszczonym.

Gdy w tym szeregu uczynimy $x=1$, i położymy $\frac{\pi}{2}$ za łuk A , który jest wtenczas $=1^{c.k.}$, wypada szereg

$$\frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{1.1}{2.2} e^2 - \frac{1.1.1.3}{2.2.4.4} e^4 - \frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6} e^6 - \text{i t. d.} \right),$$

bardzo malejący, gdy e jest małym ułamkiem.

263. Różniczka łuku eliptycznego bardzo prostym wyraża się sposobem, za pomocą łuku jemu odpowiadającego w kole mającemu oś większą za średnicę. Niech

będzie $EN = \varphi$, (*fig.* 42), będzie

$$CP = x = \text{wst } \varphi, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\varphi.$$

a zatem

$$d.BM = d\varphi \sqrt{1 - e^2 \text{wst}^2 \varphi}.$$

264. Zrównanie hiperboli

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2),$$

daje swego łuku różniczkę $= \frac{dx \sqrt{(a^2 + b^2)x^2 - a^4}}{a \sqrt{x^2 - a^2}}$;

gdy uczynimy $a=1$, $a^2 + b^2 = 1 + b^2 = e^2$, łuk ten wyrazi się przez $\int \frac{dx \sqrt{e^2 x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$, i może, gdy e mało się różni od jedności, rozwinąć się na szereg według sposobu wyżej (206) podanego.

265. Zostaje nam jeszcze mówić o liniach przestępnych. Ze zrównania cykloidy $dx = \frac{y dy}{\sqrt{2ay - y^2}}$ (114) wyciągniemy różniczkę łuku

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy \sqrt{2a}}{\sqrt{2a - y}},$$

której całka jest

$$= -2\sqrt{2a(2a - y)} + \text{stała}.$$

Lecz jasna jest rzecz, że $\sqrt{2a(2a - y)}$ jest wyrażeniem cięciwy mg , *fig.* 26, koła tworzącego; a że część zmienna całki niknie w punkcie K gdzie $y=2a$, przeto ona wyraża łuk MK : więc mamy $MK=2mg$, $AK=2gg$, a zatem $AM=AK-MK=2(gg-mg)$. te wypadki zgadzają się z wypadkiem z liczby 115.

266. Abym dał przykład użycia wzoru $\sqrt{u^2 dt^2 + du^2}$ wyrażającego różniczkę łuku linii krzywej odniesionej do spółprzystaw biegunowych (125), wezmę spiralne, których zrównanie jest $u=at^n$, i będę miał do scałkowania różniczkę

$$dt\sqrt{a^2 t^{2n} + n^2 a^2 t^{2n-2}} = at^{n-1} dt(t^2 + n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Gdy $n=1$, będzie tylko $adt(t^2+1)^{\frac{1}{2}}$, różniczka tegoż kształtu, co i różniczka łuku paraboli zwyczajnej (260); ztąd wypada, że spiralna Archimedesowa wyprostowaną być może podług wzoru na parabolę zwyczajną.

W spiralnej logarytmowej mamy $t=lu$, co daje $\sqrt{u^2 dt^2 + du^2} = du\sqrt{2}$; więc łuk tej spiralnej wyraża się przez $u\sqrt{2}$ + stała, lub tylko przez $u\sqrt{2}$, zaczynając od początku promieni wiodących; ztąd zaś widzimy, że lubo się znajduje między tym początkiem i jakimkolwiek punktem tej linii krzywej nieskończona liczba obrotów, jednak one czynią długość skończoną, i równą przekątnej kwadratu mającego za bok, promień wiodący.

Znalezienie objętości ciał zakończonych powierzchniami krzywymi, znalezienie tychże powierzchni; i całkowanie różniczek cząstkowych.

267. Powierzchnie krzywe, które geometrowie na-przód wzięli pod uwagę, są powierzchnie obrótowe (*de révolution*), gdyż różniczki ich płaców i objętości, które zamykają są prostsze, niżeli różniczki płaców powierzchni krzywych w ogólności.

Niech będzie u objętość ciała utworzonego przez odcinek AMP fig. 44, jakiejkolwiek linii krzywej AZ , obracającej się około osi AB wziętej na jej płaszczyźnie, jasna jest, że ta objętość zakończona płaszczyzną kołową napisaną przez przystawę MP , jest funkcją ucinika $AP=x$. Jeżeli weźmiemy inny uciniek AP' , i poprowadzimy drugą przystawę MP' , i linie proste MR , SM' , równoległe do PP' , obaczmy że objętość u wzrasta objętością, którą nakręśla czworokąt krzywoliniowy $PMM'P'$ obracając się koło linii PP' , i że

ta ostatnia bryła zawarta między walcami utworzonemi przez prostokąty MP' , $M'P$, tym mniej się różni od każdego z nich, im bardziej są zbliżone do siebie punkta M , i M' , tak dalece, że granicą stosunków tych trzech ciał jest jedność; więc można, gdy idzie o granice, wziąć walec utworzony przez MP' za ciało utworzone przez $MPP'M$. Walec ten ponieważ ma za podstawę koło nakręślane promieniem $PM=y$, będzie miał objętość $=\pi y^2 \times PP'$, nazywając przez π , stosunek okręgu do średnicy; a rozumując jak pod liczb. (65), znajdziemy że $\frac{du}{dx} = \pi y^2$, z kąd $u = \pi \int y^2 dx$. Więc gdy mieć będziemy zrównanie linii krzywej AMZ , podstawimy za y jego wartość wyrażoną przez x , a całka pokaże objętość odcinka jakiegokolwiek bryły utworzonej przez tę linię krzywą.

268. Chcąc znaleźć różniczkę powierzchni tegoż samego ciała uważać należy, że jej przyrostek, czyli powierzchnia napisana przez łuk MOM' , niestannie zbliżający się do swojej cięciwy MM' , zbliża się ciągle do równości z powierzchnią boczną ostrokągu ściętego prostego, napisaną przez tę cięciwę; a idąc do granic można wziąć jedno za drugie. Lecz powierzchnia ściętego ostrokągu prostego napisana przez MM' , ma następujące wyrażenie

$$\frac{1}{2}MM'(2\pi MP + 2\pi M'P) = \pi MM'(MP + M'P);$$

dzieląc je przez przyrostek ucinka PP' otrzymamy stosunek przyrostku powierzchni do przyrostku ucinka

$$\pi \frac{MM'}{PP'} (MP + M'P);$$

a idąc do granic, $M'P$ staje się $MP=y$, a $\frac{MM'}{PP'} =$

$$\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \quad (64); \text{ zatem współczynnik różniczkowy po-}$$

wierzchni napisanej przez łuk AM , jest

$$2\pi y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

a zatem różniczką tej powierzchni będzie

$$2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Można prosto przyjść do różniczki objętości i różniczki powierzchni, uważając linią krzywą AMZ , jako wielokąt; gdyż wtenczas za przyrostek objętości brać można walec napisany przez prostokąt MP' , a za przyrostek powierzchni, powierzchnią krzywą ściętego ostrokągu napisaną przez bok MM' .

269. Nie będę się rozciągał nad przystosowaniami, które z siebie żadnej nie mają trudności. Jeżeli weźmiemy np. zrównanie ellipsy, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, znajdziemy, że objętość odcinka bryły utworzonej przez obrót ellipsy około wielkiej osi, wyraża się przez

$$\int \frac{\pi b^2}{a^2}(2ax - x^2)dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right) + \text{stała} \quad (243),$$

a całka wzięta od $x=0$, do $x=2a$, daje $\frac{4\pi ab^2}{3}$ objętość całej ellipsoidy.

Gdy $a=b$, ciało podane zamienia się na kulę, a wyrażenie jej objętości jest $\frac{4\pi a^3}{3}$, takie samo jakie się znajduje za pomocą geometryi początkowej.

Jeźliby ellipsa była odniesiona do swego środka, to jest gdybyśmy wzięli zrównanie $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, objętość odcinka byłaby wtenczas

$$\int \frac{\pi b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = \frac{\pi b^2}{3a^2}(3a^2x - x^3) + \text{stała},$$

biorąc tej całki wartość w granicach od $x=-a$, do $x=a$, otrzymalibyśmy wartość ellipsoidy tę samą, jakąśmy wyżej znaleźli a wyrażenie powierzchni byłoby

$$\int \frac{2\pi b dx \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a^2}.$$

Gdy $a > b$, ta całka odnosi się łatwo do powierzchni odcinka kołowego, którego uciniek jest x , a promień $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$; staje się logarytmiczną gdy $a < b$, bo ilość pierwiastkowa bierze wtedy kształt $\sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}$; наконец przypuściwszy $a = b$, zamienia się na

$$\int 2\pi a dx = 2\pi ax + \text{stała},$$

a biorąc ją od $x = -a$, do $x = a$, otrzymamy $4\pi a^2$ wyrażenie całej powierzchni kuli.

270. Uważmy teraz powierzchnie krzywe w ogólności, odnosząc je do trzech płaszczyzn do siebie nawzajem prostopadłych, za pomocą trzech spółprzystaw $AP = x$, $PM = y$, $MM = z$ fig. 45.

Odcinek $APGMM'QH$, mający swoją podstawę $APM'Q$ na płaszczyźnie xy , i zakończony dwiema płaszczyznami, $PM'MG$, $QM'MH$, pierwszą równoległą do płaszczyzny yz , a drugą do płaszczyzny xz , oraz daną powierzchnią krzywą, jest koniecznien funkcją dwóch zmiennych niezależnych x i y ; może się on rozciągać kolejno w stronę jednej lub drugiej płaszczyzny, lub też razem w obie strony. Jakoż jeżeli przypuścimy że ilość y jest stałą, a x zamienia się na $AP + Pp$, wtedy ten odcinek wzrośnie warstwą $PGMM'm'mgp$; a warstwą $QHMM'nn'hq$, gdy sama tylko ilość y powiększy się ilością Qq ; nakoniec jeżeli x i y zamieniają się razem na $AP + Pp$, i $AQ + Qq$, ten sam odcinek mieć będzie za granice płaszczyzny $pN'Ng$, $qN'Nh$, i różnicę się będzie od pierwiastkowego stanu dwiema wspomnianymi warstwami, i graniastostupem $M'm'N'n'nMmN$, który jest przyrostkiem pierwszej warsty, gdy w niej samo y bierzemy za zmienną, lub przyrostkiem warsty drugiej gdy w niej samo tylko x jest zmienną.

Jeżeli funkcją ilości x i y , wyrażającą objętość odcinka

$APGMM'QH$ oznaczmy przez u , jasną jest rzeczą, iż w wyrażeniu całej zmiany tej funkcji (41), wyrazy, w których się tylko x odmieniło, dadzą wyrażenie pierwszej warsty, wyrazy zaś w których się tylko y odmieniło, dadzą wyrażenie drugiej warsty, inne zaś wyrazy należąc będą do graniastosłupa ściętego MN ; więc będziemy mieli

$$MN = \frac{d^2u}{dxdy}hk + \frac{1}{2}\frac{d^3u}{dx^2dy}h^2k + \frac{1}{2}\frac{d^3u}{dxdy^2}hk^2 + \text{it. d.};$$

dzieląc obie strony tego równania przez hk , i przechodząc do granic, w przypuszczeniu iż h i k są równe zeru, granicą drugiej strony będzie $\frac{d^2u}{dxdy}$;

graniastosłup zaś MN zbliża się bezprzestannie do równoległoscianu mającego za podstawę $M'm'N'n'$ a za wysokość przystawę MM' , i może do niego zbliżyć się tyle ile sami zechcemy; więc, ponieważ tu idzie o granicę, jeżeli za graniastosłup MN podstawimy równoległoscian $M'm'.N'n'.MM'$, i uczynimy

$M'm' = Pp = h$, $M'n' = Qq = k$, stosunek $\frac{MN}{hk}$ zamie-

ni się na $MM' = z$; ztąd wypada, że $\frac{d^2u}{dxdy} = z$, i że

dla otrzymania odcinka $APGMM'QH$, trzeba przez całkowanie wrócić się od spółczynnika różniczkowego $\frac{d^2u}{dxdy}$ do funkcji u .

271, Lubo spółczynnik różniczkowy $\frac{d^2u}{dxdy}$ zależy od dwóch zmiennych, można jednak przyjść do funkcji jego pierwotnej za pomocą sposobów podanych na całkowanie funkcji o jednej zmiennej, gdyż każda ze zmiennych jest kolejno uważana jako stała. Jakoż

z przyczyny że $\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d}{dy}\frac{du}{dx}$ mieć będziemy $\frac{d}{dy}\frac{du}{dx}dy = zdy$;

i całkując każdą stronę, przez wzgląd tylko na zmienną, y wypadnie $\frac{du}{dx} = f z dy$, ząd mamy

$$\frac{du}{dx} dx = dx f z dy;$$

całkując znowu, lecz przez wzgląd tylko (na x , otrzymamy $u = \int dx f z dy$.

Uważając to badanie ze strony samej tylko analizy, jasną jest rzeczą, że ilość stała dowolna, którą trzeba dodać dla uzupełnienia pierwszej całki, może zawierać w sobie x jakimkolwiek bądź sposobem, że stała dodana po drugiem całkowaniu, powinna być uważana jako funkcyja ilości y ; a to dla tego, że każda funkcyja samej tylko ilości x , powinna zniknąć jako ilość stała, gdy różniczkujemy przez wzgląd na ilość zmienną y , i że to samo się dzieje ze wszelką funkcyą ilości y , gdy ją różniczkujemy przez wzgląd tylko na x .

Porządek całkowania jest obojętny (40). Jeżelibyśmy zaczęli całkowanie przez wzgląd na zmienną x , mie-

libyśmy $\frac{d^2 u}{dx dy} = \frac{d}{dy} \frac{du}{dx}$; ząd kolejno

$$\frac{du}{dy} = f z dx, \quad u = \int dy f z dx.$$

Ten i poprzedzający wypadek piszą się następującym sposobem

$$u = \int \int f z dy dx, \quad u = \int \int f z dx dy,$$

przenosząc obie różniczki pod znak $\int$, co jest wolno, pamiętając że każdy znak stosuje się do jednej tylko zmiennej w szczególności.

Na objaśnienie i stwierdzenie poprzedzającego rozumowania, weźmy $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$; otrzymamy

$$u = \int \int \frac{dx dy}{x^2 + y^2} = \int dx \int \frac{dy}{x^2 + y^2} = \int dy \int \frac{dx}{x^2 + y^2}.$$

Pierwsze następstwo całek daje wypadek

$$\int \frac{dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x} \text{ luk } \left(\text{stycz} = \frac{y}{x} \right) + X',$$

w którym X' wyraża funkcją dowolną ilości x , przydaną dla uzupełnienia całki; całkując znowu przez wzgląd na x , i czyniąc $\int X' dx = X$, znajdziemy

$$\begin{aligned} \int dx \int \frac{dy}{x^2 + y^2} &= \int dx \left\{ \frac{1}{x} \text{ luk } \left(\text{sty} = \frac{y}{x} \right) + X' \right\} \\ &= \int \frac{dx}{x} \text{ luk } \left(\text{stycz} = \frac{y}{x} \right) + X. \end{aligned}$$

Całka $\int \frac{dx}{x} \text{ luk } \left(\text{sty} = \frac{y}{x} \right)$ otrzymuje się przez szereg, kładąc za luk $\left(\text{sty} = \frac{y}{x} \right)$, jego rozwinięcie $\frac{y}{x} - \frac{y^3}{3x^3} + \frac{y^5}{5x^5} - \text{i t. d. (202)}$; aże po tém całkowaniu należy przydać funkcją dowolną ilości y , przeto wyrażając ją przez F , będziemy nakoniec mieli

$$\iint \frac{dx dy}{x^2 + y^2} = X + F - \frac{y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} - \text{i t. d.}$$

Działając odwrotnie podług drugiego następstwa całek, otrzymamy

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + y^2} &= \frac{1}{y} \text{ luk } \left(\text{sty} = \frac{x}{y} \right) + F', \\ \int dy \int \frac{dx}{x^2 + y^2} &= \int dy \left\{ \frac{1}{y} \text{ luk } \left(\text{sty} = \frac{x}{y} \right) + F' \right\} \\ &= \int \frac{dy}{y} \text{ luk } \left(\text{sty} = \frac{x}{y} \right) + F; \end{aligned}$$

lecz jeżeli uważymy, że

$$\text{luk} \left(\text{sty} = \frac{x}{y} \right) = \frac{\pi}{2} - \text{luk} \left(\text{sty} = \frac{y}{x} \right),$$

otrzymamy po ostateczném zcałkowaniu i dodaniu funkcji dowolnej z ilości x ,

$$\iint \frac{dx dy}{x^2 + y^2} = \frac{\pi}{2} ly - \int \frac{dy}{y} \text{ luk} \left(\text{sty} = \frac{y}{x} \right) + F + X;$$

a ponieważ można dołączyć wyraz $\frac{\pi}{2} ly$ do funkcji dowolnej F , ten wypadek, który przez to zamienia się na

$$\iint \frac{dx dy}{x^2 + y^2} = X + F - \int \frac{dy}{y} \text{ luk} \left(\text{sty} = \frac{y}{x} \right),$$

będzie ten sam co poprzedzający, o czém można się przekonać kładąc na miejscu łuku $\left(\text{sty} = \frac{y}{x} \right)$, jego rozwinięcie.

272. Gdy uważamy $\iint z dx dy$, jako ilość wyrażającą objętość jakiego ciała, trzeba mieć wzgląd na granice w których powinna być wzięta każda całka, a która zależy od powierzchni, któremi ciało podane z boków jest zakończone.

Najprostszy przypadek jest ten, gdy ciało jest zamknięte czterma płaszczyznami, które po parze są równoległe do płaszczyzn spółprzystawionych CAD , BAD . Przypuściwszy że pierwsze odpowiadają ucinkóm $x=a$, $x=a'$, a drugie ucinkóm $y=b$, $y=b'$, weźmiemy całkę $\int z dx$ od $x=a$, do $x=a'$, uważając y za ilość stałą; a wyraziwszy wypadek otrzymany przez P , pozostanie wziąć całkę $\int P dy$ od $y=b$, do $y=b'$.

Gdy ciało podane zakończone jest z boków powierzchniami krzywými, wartości ostateczne jednej zmiennej, są powiązane z wartościami drugiej, jak się da widzieć w następującym przykładzie, gdzie idzie o wynalezienie objętości knli mającej środek w punkcie A , której promień jest $=r$.

Mamy $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, a zatem

$$\iint z dx dy = \iint dx dy \sqrt{r^2 - x^2 - y^2},$$

biorąc y za stałą, otrzymujemy ilość

$$\int z dx = \int dx \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} = \frac{1}{2} x \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} + \\ + \frac{1}{2} (r^2 - y^2) \times \text{łuk} \left(\text{wst} = \frac{x}{\sqrt{r^2 - y^2}} \right).$$

Całka $\int z dx$ wyrażając powierzchnią przecięcia zrobionego w kuli równoległe do płaszczyzny xz , i w odległości $AQ=y$, powinna być wzięta między granicami tego przecięcia, któremi są z jednej strony płaszczyzna CAD , a z drugiej łuk koła $BFEC$, powstający z przecięcia powierzchni kuli przez płaszczyznę BAC . W pierwszej granicy jest $x=0$, w drugiej $x=QF$, lecz QF jest związane z AQ , gdyż w zrównaniu na kulę uczyniwszy $z=0$, otrzymamy $x^2 + y^2 = r^2$ zrównanie koła $BFEC$, z kąd wypada że $QF = \sqrt{r^2 - AQ^2}$, a zatem, na jakąkolwiek wartość ilości y , wartości ostateczne ilości x , będą $x=0$, $x=\sqrt{r^2 - y^2}$.

Za pomocą tych wartości wypadek wyżej znaleziony zamienia się na $\frac{\pi}{4} (r^2 - y^2)$, gdyż łuk ($\text{wst}=1$) $= \frac{\pi}{2}$, a całka $\int dy \int z dx$ zamienia się na

$$\frac{\pi}{4} \int dy (r^2 - y^2) = \frac{\pi}{4} \left(r^2 y - \frac{y^3}{3} \right).$$

Ta ostatnia powinna być wzięta od najmniejszej wartości ilości y , którą kładniemy $y=0$, zamykając z tej strony ciało przez płaszczyznę BAD , aż do największej, która w teraźniejszym przypadku jest $AC=r$; więc objętość odcinka $ABCD$, który jest ósmą częścią kuli, będzie $\frac{\pi r^5}{6}$, a zatem objętość całej kuli będzie $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Dobrze jest wiedzieć że można bezśrednie otrzymać objętość całej półkuli wymienionej nad płaszczyzną BAC , biorąc pierwszą całkę od $x = -\sqrt{r^2 - y^2}$, do

$x = +\sqrt{r^2 - y^2}$, gdyż w tym razie wartości ostateczne ilości x kończą się z jednej i drugiej strony na okręgu koła $BFEC$, którego promień jest AC , tym sposobem mieć będziemy wartość zupełną $\int x dx = \frac{\pi}{2}(r^2 - y^2)$.

Biorąc potem całkę

$$\frac{\pi}{2} \int dy (r^2 - y^2) = \frac{\pi}{2} \left(r^2 y - \frac{y^3}{3} \right),$$

przez całą część osi y zawartą w kole $BFEC$, to jest od końca jednego średnicy znajdującego się za płaszczyzną BAD , gdzie $y = -r$, aż do końca drugiego C , gdzie $y = +r$ znajdziemy $\frac{2\pi r^3}{3}$, a podwoiwszy otrzymamy jak wyżej, $\frac{4\pi r^3}{3}$ objętość całej kuli.

273. Uważając różniczki jako przyrostki nieskończenie małe ilości zmiennych, można zaniedbać różnicę zachodzącą między graniastostupem ściętym $M'N$ a graniastostupem całym mającym wysokość, MM' , i uważać ten graniastostup jako złożony z małych równoległoscianów, mających za podstawę prostokąt $M'm'Nn'$, a wysokość dz , a zatem wyrażonych przez $xdydz$. Dla otrzymania summy równoległoscianów zawartych w graniastostupie całym, należy to wyrażenie całkować ze względu tylko na ilość z , co da $\int x dy dz = z dx dy$, tak jakośmy wyżej znaleźli.

Uważmy potem, że wartość zupełna funkcji $\int dy \int z dx$, wyraża summę równoległoscianów zamykających się w warście $FHQghf$, zawartej między dwiema płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny ABD , przechodzącej przez osie x i z ; lecz gdy $\int z dx$ jest powierzchnią przecięcia FHQ , stąd wypada że warsta nieskończenie cienka $FHQghf$, może być uważana jako równa mnożności $FHQ \times Qg$, to jest placowi linii krzywej służącemu jej za podstawę, rozmnożonemu przez grubość Qg . Widzimy w reszcie, że $\int dy \int z dx$ wyraża

wyraża summę wszystkich warst podobnych zawartych w objętości szukanej.

Jasną jest rzeczą, że wyrazimy te wszystkie działania, uważając całą potrójną $\iint \int dx dy dz$, której każdy znak całkujący stosuje się do jednej z ilości zmiennych $x, y, i z$.

274. W ogulności, jeżeli trzeba oznaczyć część podanego ciała, zakończonego z boków przez walec wyniesiony prostopadłe do płaszczyzny ABC , fig. 46, na danej linii krzywej $E'N'G'$, tedy wezmie się całka $\int dx$ od $x=AP$, aż do $x=Ap$, iżby wyrażenie $dy \int dx$ oznaczało warstę $MM'N'Nnn'm'm$. Linie AP i Ap względnie równe linijom QM' i QN' będą funkcyami ilości $AQ=y$, danemi przez zrównanie linii krzywej $E'N'G'$, której one są ucinkami; wyraziwszy je przez $F(y)$ i $f(y)$, trzeba będzie brać $\int dx$ od $x=F(y)$, aż do $x=f(y)$, co jak widzimy, wprowadzi nowe funkcyę ilości y , których z nie miało, i powiększy lub zmniejszy trudność drugiego całkowania. Żeby otrzymać potem w powtórniem całkowaniu wartość przestrzeni szukanej całą, czyli summę warst, których już mamy wyrażenie ogulne, trzeba wziąć $\int dy \int dx$ od $y=AF$, do $y=AH$, które to wartości odpowiadają granicom E' i G' , linii krzywej $E'N'G'$ w kierunku przystaw y .

Mogłoby się przytrafić, że obwód $E'N'G'$, zamiast formowania ciągłej jednej linii krzywej, jest zbiorem wielu części odmiennych linii krzywych; przystosowanie powyższych zasad do tego przypadku tak jest łatwe, że nie masz potrzeby nad tém się zastanawiać.

275 Znajdziemy wyrażenie ogulne różniczki placu powierzchni krzywej, wyobrażając tę powierzchnię podzieloną na pasy np $EGge$, fig. 48, przez płaszczyzny równoległe do jednej z płaszczyzn spółprzystawionych; wystawiając sobie, że każdy z tych pasów jest przecięty na części czworokątne $MmNn$, przez płaszczyzny równoległe do drugiej płaszczyzny spółprzystawionej. Sama figura pokazuje, że plac $DGMH$,

który wyrażmy przez s , powiększa się czworokątem krzywoliniowym $GMmg$, gdy x powiększa się ilością Pp , powiększa się zaś czworokątem $MmNn$, gdy y przedłuża się ilością Qq . Podobnym rozumując sposobem jak pod liczbą 270, obaczymy, że granica stosunku $\frac{MmNn}{Pp \times Qq}$, jest równa współczynnikowi różniczkowemu $\frac{d^2 s}{dx dy}$.

Żeby otrzymać tę granicę, trzeba uważać naprzód, że cztery płaszczyzny

$$m'M \text{ i } N'n, \quad n'M \text{ i } N'm,$$

parami równoległe do płaszczyzn spółprzystawionych xz , i yz , które ograniczają czworokąt krzywokreślny $MmNn$, ograniczają także na płaszczyźnie stycznej w punkcie M (*fig. 47*) równoległobok $MXYZ$, w którym wszystkie linie prowadzone z punktu M , byłyby stycznymi do rozmaitych przecięć uczynionych w czworokącie krzywokreślnym, przez płaszczyzny prowadzone przez przystawę MM' , i miałyby z łukami tych przecięć stosunek dążący bezprzestannie do jedności (63); więc można w granicy szukanej podstawić za czworokąt krzywy $MmNn$, równoległobok $MXYZ$, którego powierzchnia tak się ma do powierzchni jego rzutu $M'm'N'n'$, jak promień do dostawy kąta zawartego między płaszczyzną styczną a płaszczyzną xy . Lecz że normalna MG jest prostopadłą do płaszczyzny stycznej, a przystawa MM' jest prostopadłą do płaszczyzny xy , przeto kąt zawarty między temi płaszczyznami jest spełnieniem kąta GMM' , i ma dostawę

$$= - \frac{M'M}{MG} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad (150),$$

co daje

$$MXYZ = M'm'N'n' \frac{MG}{MM'} = dx dy \sqrt{1+p^2+q^2},$$

więc mamy

$$s = \iint dx dy \sqrt{1+p^2+q^2},$$

należy tu uważać że wyrażenie $dy \int dx \sqrt{1+p^2+q^2}$ oznacza powierzchnią pasa $FHhf$ (fig. 45).

276. Jeżeli za przykład weźmiemy kulę, jej zrównanie $x^2+y^2+z^2=r^2$, daje

$$p = -\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{y}{z}, \quad \sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{r}{z},$$

przeto

$$\int dx \sqrt{1+p^2+q^2} = \int \frac{r dx}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}};$$

ta całka, kładąc $r^2-y^2=r'^2$, staje się

$$r \int \frac{dx}{\sqrt{r'^2-x^2}} = r \cdot \text{łuk} \left(\text{wst} = \frac{x}{r'} \right) \quad (186),$$

a biorąc w granicach od $x=0$, do $x=r'=\sqrt{r^2-y^2}$, wypada $\frac{\pi}{2}$, przeto do drugiego całkowania mamy tylko

$$\frac{\pi r}{2} \int dy, \text{ co daje } \frac{\pi r}{2} y.$$

Jasną jest rzeczą, że z przyczyny iż pierwiastek $\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ braliśmy ze znakiem tylko dodatnym, otrzymaliśmy część powierzchni leżącej nad płaszczyzną xy , i że granice naznaczone ilości x , zajmują tylko połowę części górnej pasa prostopadłego do osi y , cały zaś pas byłby wyrażony przez $2\pi r y$, to jest przez mnożość z okręgu koła, przez część średnicy zawartą między płaszczyznami ograniczającemi pas uważany, tak jak to samo mieliśmy w geometryi początkowej. Co do granic ilości y , widoczną jest rzeczą, iż należy wziąć je $-r$, i $+r$, gdy chcemy otrzymać całą powierzchnią kuli.

277. Przystosowanie analizy do mechaniki prowadzi często do całek pod postacią $\iiint V dx dy dz$, nazywanych całkami potrójnemi, w których funkcyja V

może zawierać trzy zmienne x, y, z , uważane jako niezależące jedne od drugich, tak iż każdy znak $\int$ należy do jednej tylko w szczególności (273). Łatwo się daje widzieć że te całki wynikają z oznaczenia funkcji u zależącej od trzech zmiennych x, y, z , a której znamy tylko współczynnik różniczkowy $\frac{d^5 u}{dx dy dz}$, dany

przez zrównanie $\frac{d^5 u}{dx dy dz} = V$; albowiem działając jak pod liczbą 271, wyciągamy

1^{od}. Uważając x , i y za stałe,

$$\frac{d^5 u}{dx dy dz} dz = d \cdot \frac{d^2 u}{dx dy} = V dz, \quad \frac{d^2 u}{dx dy} = \int V dz + T'',$$

T'' jest funkcją dowolną ilości x, y ;

2^{re}. biorąc x i z za stałe,

$$\frac{d^3 u}{dx dy} dy = d \cdot \frac{du}{dx} = dy \int V dz + T'' dy, \quad \frac{du}{dx} = \int dy \int V dz + T' + S',$$

T' jest funkcją dowolną ilości x , i y , wynikającą z $\int T'' dy$, a S' funkcją dowolną ilości x i z .

3^{cie}. nakoniec biorąc y i z za stałe,

$$\frac{du}{dx} dx = dx \int dy \int V dz + T' dx + S' dx,$$

$$u = \int dx \int dy \int V dz + T + S + R,$$

T i S wyrażają funkcje dowolne pochodzące z $\int T' dx$, i z $\int S' dx$, R zaś jest funkcją dowolną ilości y i z ; więc zupełna całka zamyka trzy funkcje dowolne, to jest, jedną ilości x i y , drugą ilości x i z , trzecią ilości y i z . Łącząc różniczki pod ostatnim znakiem $\int$, zamieni się $\int dx \int dy \int V dz$ na $\int \int \int V dx dy dz$, i pod tym ostatnim kształtem ma też samo znaczenie, co i pod poprzedzającym.

Przykład ten dostatecznie pokazuje, jakim sposobem możemy wrócić się od współczynnika różniczkowego, rzędu jakiegokolwiek funkcji o wielu zmiennych, do samej

funkcyi pierwotnej. Funkcye dowolne tu wprowadzone, stosują się tylko, jak pod liczbą 272 do przypadku, kiedy całki biorą się w granicach, w których zmienne x, y, z , nie zależą jedno od drugich; lecz najczęściej się zdarza, że całka co do z powinna być wzięta od $z=F(x, y)$ aż do $z=f(x, y)$, F i f znaczą funkcye dane; całka co do y , od $y=F'(x)$ do $y=f'(x)$, nakoniec całka co do x , od $x=a$, do $x=a'$.

Całkowanie różniczek zupełnych zamykających kilka ilości zmiennych od siebie niezależnych.

278. Funkcye zamykające kilka ilości zmiennych od siebie niezależnych, mają różniczki dwojakiego gatunku, jakoto: różniczki cząstkowe i różniczki zupełne (46); i pod liczbami 271, 277, widzieliśmy, jakim sposobem od różniczek cząstkowych można przejść do funkcyi pierwotnej, i zadanie takiego rodzaju może być zawsze uskutecznióm, bo stosuje się bezpośrednio do całkowania różniczki z jedną ilością zmienną. Nie jest to samo, gdy za różniczkę zupełną funkcyi o trzech ilościach zmiennych, bierzemy wyrażenie dowolne kształtu $Mdx + Ndy$, ponieważ zrównanie $\frac{d^2u}{dydx} = \frac{d^2u}{dxdy}$ (40), stanowi między ilościami M i N związek, bez którego nie mogą pochodzić od tej samej funkcyi pierwotnej.

Jakoż jeżeli założymy

$$du = Mdx + Ndy,$$

z tą wypada

$$\frac{du}{dx} = M, \quad \frac{du}{dy} = N, \quad \frac{d^2u}{dydx} = \frac{dM}{dy}, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = \frac{dN}{dx},$$

a zatem

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}.$$

Każda więc funkcyja $Mdx + Ndy$, ażeby wyrażała różniczkę zupełną, powinna zadość czynić zrównaniu $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$; i gdy temu warunkowi zadość się stanie, łatwo będzie przejść do funkcyi pierwotnej, gdyż wtenczas będzie $M = \frac{du}{dx}$, $N = \frac{du}{dy}$, a ztąd wyciągniemy wartości różniczek cząstkowych.

Wziąwszy np. różniczkę przez wzgląd na x , otrzymamy $\frac{du}{dx} dx = Mdx$, a następnie $u = \int Mdx + Y$. Tu się dodaje, równie jak pod liczbą 271, funkcyja dowolna ilości y , bo szukaliśmy pierwotnej przez wzgląd na jedną tylko zmienną x ; lecz w niniejszym przypadku dodana funkcyja dowolna ilości y daje się oznaczyć, z przyczyny że funkcyja u , powinna zadość uczynić zrównaniu $N = \frac{du}{dy}$.

Zrównanie $u = \int Mdx + Y$, daje

$$\frac{du}{dy} = \frac{d \int Mdx}{dy} + \frac{dY}{dy},$$

wyraziwszy $\int Mdx$ przez v , będziemy mieli

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dy} + \frac{dY}{dy} = N,$$

ztąd

$$\frac{dY}{dy} = N - \frac{dv}{dy},$$

a całkując, będzie

$$Y = \int \left(N - \frac{dv}{dy} \right) dy;$$

zatem funkcyja

$$u = \int Mdx + \int \left(N - \frac{dv}{dy} \right) dy,$$

jest pierwotną czyli całką danej różniczki.

Wypadek ten uczy nas, że funkcyja $N - \frac{dv}{dy}$, jedną

tylko zmienną y zamykać w sobie powinna, inaczej przypuszczenie, że Mdx i Ndy są różniczkami cząstkowymi tej samej funkcji u , nie byłoby prawdziwem. Ztąd wypada że funkcyja $N - \frac{dv}{dy}$ nie zamykając ilości x , nie powinna ze względu na nią ulegać odmianie, a zatem

$$\frac{dN}{dx} - \frac{d^2v}{dxdy} = 0;$$

lecz mamy

$$\frac{d^2v}{dxdy} = \frac{d^2v}{dydx} = \frac{d}{dy} \frac{dv}{dx}, \text{ i } \frac{dv}{dx} = M,$$

więc wypada

$$\frac{d^2v}{dxdy} = \frac{dM}{dy}, \text{ i } \frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy} = 0.$$

Zatém warunek ten wyżej już znaleziony, jest jednym warunkiem koniecznym potrzebnym do zapewnienia się, czy funkcyja $Mdx + Ndy$ da się scałkować; a gdy się on nie dopełnia, wyrażenie $Mdx + Ndy$, nie mogąc wyznikać ze zróżniczkowania funkcji pierwotnej o dwóch ilościach zmiennych, nie może być różniczką zupełną.

279. Funkcyja $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ napisana pod kształtem

$$\frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

daje kolejno

$$M = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad N = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{dM}{dy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{dN}{dx},$$

$$\int Mdx = \int \frac{ydx}{x^2 + y^2} = \int \frac{\frac{dx}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \text{łuk} \left(\text{stycz} = \frac{y}{x} \right) = Y,$$

zatém

$$u = \text{łuk} \left(\text{stycz} = \frac{y}{x} \right) + F.$$

Różniczkując wszystkie wyrazy jako zmienne otrzymamy

$$du = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} + dF,$$

a porównyując z daną funkcją, będzie $dF=0$, ztąd $F=\text{stała}$; a zatem

$$\int \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \text{łuk} \left(\text{stycz} = \frac{x}{y} \right) + \text{stała} (*).$$

Weźmy jeszcze wyrażenie

$$\frac{dx}{x} + \frac{y^2 dx}{x^5} - \frac{y dy}{x^2} + \frac{(ydx - xdy)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^5} + \frac{dy}{2y};$$

porównyując je ze wzorem $Mdx + Ndy$, otrzymamy

$$M = \frac{x^2 + y^2 + y\sqrt{x^2 + y^2}}{x^5}, \quad N = \frac{-y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2} + \frac{1}{2y},$$

potém

$$\frac{dM}{dy} = \frac{2y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x^5} + \frac{y^2}{x^5 \sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{dN}{dx} = \frac{2y + 2\sqrt{x^2 + y^2}}{x^5} - \frac{x}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}};$$

te wartości uproszczone dadzą

$$\frac{dM}{dy} = \frac{2y}{x^5} + \frac{x^2 + 2y^2}{x^5 \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{dN}{dx},$$

a zatem podane zrównanie może się bezśrednie całować. Naprzód będziemy mieli

$$\int Mdx = lx - \frac{y^2}{2x^2} + y \int \frac{dx}{x^5} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

(*) Zatrzymaliśmy się nad tém całkowaniem, ponieważ na niem się zasadza bardzo piękne dowodzenie składu sił dane przez Laplasa (*Laplace*) w dziele *Mécanique céleste*.

$$\text{a że} \quad = y \int \frac{dx}{x^5} \sqrt{x^2 + y^2} = -\frac{y \sqrt{x^2 + y^2}}{2x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{(-y + \sqrt{x^2 + y^2})}{x},$$

$$\text{zatem } \int M dx = lx - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y \sqrt{x^2 + y^2}}{2x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{(-y + \sqrt{x^2 + y^2})}{x} = v,$$

Potém znajdujemy

$$N \frac{dv}{dy} = -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2x^2} + \frac{y^2}{2x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{2y},$$

z kąd wypada $F = \frac{1}{2} ly + \text{stała}$, nakoniec

$$u = lx - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y \sqrt{x^2 + y^2}}{2x^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{-y^2 + y \sqrt{x^2 + y^2}}{x} \right) + \text{sta.}$$

280. Różniczki zamykające jakąkolwiek liczbę ilości zmiennych, całkują się sposobem podobnym do poprzedzającego. Okażmy to na funkcyi z trzema ilościami zmiennymi. Niech będzie

$$Mdx + Ndy + Pdz,$$

różniczką, w której M , N , P , oznaczają funkcye ilości x , y , z ; uważając w niej kolejno ilości x , y , z , za stałe, to jest przypuszczając na przemiany że dx , dy , dz , jest równe zeru, otrzymamy następnie trzy różniczki zupełne między dwiema ilościami zmiennymi, jakoto.

$$Mdx + Ndy, \quad Mdx + Pdz, \quad Ndy + Pdz,$$

z których wypada koniecznie

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}, \quad \frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx}, \quad \frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy} \quad (278).$$

Jeżeli się te zrównania warunkowe sprawdzają, różniczka dana jest zupełną, i może być zcałkowaną, zaczynając działanie od którejkolwiek różniczki, z dwiema ilościami zmiennymi już wyprowadzonej. Weźmy np. różniczkę pierwszą $Mdx + Ndy$, stosując do niej sposób całkowania wyłożony pod liczbą 278 otrzymamy wypadek, który wyrażmy przez v , przeto będziemy mieli

$$\int (Mdx + Ndy + Pdz) = v + Z,$$

gdzie Z jest funkcją jednej tylko ilości z , pochodzącą z wyrazów szukanej funkcji pierwotnej niezamykających ilości x i y . Jeżeli zróżniczkujemy to równanie zmieniając w niem wszystkie ilości x , y , i z , wypada

$$M = \frac{dv}{dx}, \quad N = \frac{dv}{dy}, \quad P = \frac{dv}{dz} + \frac{dZ}{dz}.$$

Ostatnie z tych równań daje

$$\frac{dZ}{dz} = P - \frac{dv}{dz},$$

z ką

$$Z = \int \left(P - \frac{dv}{dz} \right) dz + \text{stała},$$

i ażebyśmy mogli ztąd wyprowadzić wartość nieznanej funkcji Z , druga strona wyższego równania nie powinna zamykać ani x , ani y , więc powinno być

$$\frac{dP}{dx} - \frac{d^2v}{dx dy} = 0, \quad \frac{dP}{dy} - \frac{d^2v}{dy dz} = 0,$$

co, gdy przewrócimy porządek różniczkowania ilości v , i na miejscu $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, położymy M i N , zamienia się na

$$\frac{dP}{dx} - \frac{dM}{dz} = 0, \quad \frac{dP}{dy} - \frac{dN}{dz} = 0;$$

te dwa warunki znalezione i trzeci

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx},$$

wynikający ze scałkowania różniczki $Mdx + Ndy$, są te same, jakie wypadły na początku tej liczby, i pokazują że są dostateczne do przekonania się, czy funkcja jakakolwiek różniczkowa z trzema ilościami zmiennymi może być scałkowana; przeto funkcja różniczkowa, w której tym warunkóm zadość się nie czyni, nie pochodzi od żadnej funkcji pierwotnej zamykającej tę samą liczbę ilości zmiennych niezależnych.

Stosując poprzedzające uwagi do funkcyj zamykających coraz większą liczbę ilości zmiennych, okazuje się że różniczka zupełna mająca liczbę n ilości zmiennych, da liczbę $\frac{n(n-1)}{2}$ różniczek zupełnych z dwiema ilościami zmiennymi, z których wypada także sama liczba zrównań warunkowych; ztąd możnaby przejść do warunków jakie powinny zachodzić w różniczkach wyższych rzędów; lecz okażą się one prawie same przez się w rachunku zmienności, dla tego nad niemi tu się nie zatrzymujemy.

281. Postępowanie, któregośmy używali pod liczb. 278 dla otrzymania wyrażenia $\frac{dv}{dy}$, równego wyrażeniu $\frac{dfMdx}{dy}$, prowadzi do wzoru bardzo pożytecznego, z którego uczymy się, jak wyrażenie będące pod znakiem f różniczkować ze względu na ilość zmienną inną od tej, do której znak f stosuje się.

Jakoż zrównanie

$$\frac{d^2v}{dx dy} = \frac{dM}{dy},$$

to samo znacząc co

$$\frac{d \frac{dv}{dy}}{dx} = \frac{dM}{dy}, \text{ daje } \frac{d \frac{dv}{dy}}{dx} dx = \frac{dM}{dy} dx,$$

całkując obie strony tego zrównania ze względu na ilość x , wypada

$$\frac{dv}{dy} = \int \frac{dM}{dy} dx,$$

czyli, kładąc za v , wartość $fMdx$,

$$\frac{dfMdx}{dy} = \int \frac{dM}{dy} dx (*).$$

(*) To twierdzenie Lejbnic jego wynalazca nazywał *differentiatio de curva in curvam*, bo w pytaniu, które sobie założył

Całkowanie zrównań różniczkowych o dwóch zmiennych.

Oddzielenie zmiennych w zrównaniach różniczkowych pierwszego rzędu.

282. Dotąd przypuszczaliśmy, że współczynniki różniczkowe są wyrażone bezśrednie przez ilość zmienną, od której zależy funkcyja ich pierwotną; lecz najczęściej mamy, tylko zrównanie różniczkowe zamykające w sobie razem współczynniki różniczkowe i ilość zmienną. Takowe zrównanie, jeżeli zamyka różniczki pierwszego rzędu i pierwszego stopnia, mieć będzie postać $Mdx + Ndy = 0$, i wyraża jakośmy już widzieli pod lic. 48, związek zachodzący między zmienną x , funkcyą y , i jej współczynnikiem różniczkowym $\frac{dy}{dx}$.

Sposób, który najpierw przyszedł Analistom na myśl w celu odkrycia zrównania pierwotnego, od którego zrównanie różniczkowe pochodzi, był ten, ażeby oddzielić zmienne, to jest ażeby przywieść zrównanie

do rozwiązania, przechodził od jednej linii krzywej do innej tegoż samego gatunku, zmieniając ilość stałą.

Do tego twierdzenia przyjść także można szukając bezśrednie różniczki wyrazu $\int Mdx$, ze względu na ilość y ; albowiem jasną jest rzeczą, iż dla otrzymania tej różniczki, należy w funkcyi $\int Mdx$, za y , położyć $y+dy$, która przez to zamienia się na

$$\begin{aligned} \int \left(M + \frac{dM}{dy} dy + \text{i t. d.} \right) dx &= \int Mdx + \int \frac{dM}{dy} dx dy + \text{i t. d.} \\ &= \int Mdx + dy \int \frac{dM}{dy} dx + \text{i t. d.} \end{aligned}$$

ponieważ znak $\int$ odnosi się tylko do ilości zmiennej x ; więc będziemy mieli

$$\frac{d \int Mdx}{dy} = \int \frac{dM}{dy} dx.$$

$Mdx + Ndy = 0$, do kształtu $Xdx + Ydy = 0$, gdzie X byłoby funkcją samej ilości x , Y zaś funkcją ilości y . Jakoż mając zrównanie pod takową postacią, można scałkować wyrazy Xdx , Ydy , podług wyżej podanych sposobów; tak więc otrzymamy $\int Xdx + \int Ydy = s$, wyrażając przez s ilość stałą dowolną.

Dla dania przykładu przypadków, w których zrównanie różniczkowe okazuje się pod kształtem wyżej rzeczonym, niech będzie $x^m dx + y^n dy = 0$; znajdziemy natychmiast $\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{n+1}}{n+1} = s$.

Gdyby zrównanie dane było $ydx + xdy = 0$, odłączenie zmiennych byłoby łatwe, bo dzieląc przez xy , otrzymalibyśmy $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$, całkując oddzielnie każdy wyraz, mielibyśmy $\ln x + \ln y = s$, czyli $\ln \frac{x}{y} = s$; a ponieważ możemy ilość stałą uważać za logarytm, przeto $\ln \frac{x}{y} = \ln s$; przechodząc zaś do liczb, będzie $\frac{x}{y} = s$, czyli $x = sy$.

Z tego przykładu jasno się pokazuje, że tymże samym sposobem oddzielenie zmiennych wykona się w zrównaniach $Ydx - Xdy = 0$, $X'Y'dx - YX'dy = 0$; gdyż z pierwszego wyciągniemy

$$\frac{dx}{X} - \frac{dy}{Y} = 0,$$

z drugiego zaś

$$\frac{Xdx}{X'} - \frac{Ydy}{Y'} = 0.$$

W ogólności, jeśli w daném zrównaniu znajdziemy że $\frac{dy}{dx} = \frac{X'Y}{X}$, tedy łatwo ztąd wyciągniemy

$$Xdx - \frac{dy}{Y} = 0,$$

a następnie

$$\int Xdx - \int \frac{dy}{Y} = s.$$

283. Jest jeszcze przypadek jeden bardzo obszerny, w którym łatwo się dają oddzielić ilości zmienne, a ten jest gdy M i N są funkcyami jednorodnemi ilości x i y . To się zasada na twierdzeniu następującem; że jeżeli w funkcyi algebraicznej ilości x, y, z , i t. d. summa wykładników tych liter jest też sama we wszystkich wyrazach i równa ilości m , i jeżeli podstawimy Px za y , Qx za z , i t. d., wypadek da się podzielić przez x^m . Jakoż każdy wyraz tej funkcyi mogący się wyrazić pod kształtem $Ax^n y^p z^q$ i t. d., zamieni się przez takowe podstawienie na $AP^p Q^q \dots x^{n+p+q} +$ i t. d., a że z założenia mamy we wszystkich wyrazach $n+p+q +$ i t. d. $= m$, zatem x^m będzie spólnym mnożnikiem. Ztąd idzie, że gdyby funkcyja dana była uczynioną $= 0$, lub gdyby była ułamkiem mającym za licznik i mianownik dwa wielowyrazy jednorodne tegoż samego stopnia, takową funkcyą oswoobodzilibyśmy zupełnie od x .

Podług uwag poprzedzających, dosyć będzie dla odłączenia zmiennych w zrównaniu $Mdx + Ndy = 0$; uczynić $y = xz$, tym sposobem funkcyje M i N zamieniają się na Zx^m , $Z'x^m$, gdzie Z i Z' , są funkcyami nowej zmiennej z , a że $dy = zdx + xdz$, zatem dzieląc przez x^m otrzymamy $Zdx + Z'(zdx + xdz) = 0$, co możemy wyrazić pod kształtem następunym

$$\frac{dx}{x} + \frac{Z'dz}{Z + zZ'} = 0,$$

ztąd mamy

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{Z'dz}{Z + zZ'} = s.$$

Przystosujmy to naprzód do zrównania

$$xdx + ydy = nydx,$$

które, gdy przeniesiemy wszystkie wyrazy na jedną stronę, zamienia się na

$$(x - ny)dx + ydy = 0,$$

porównyując zaś z wyższym wzorem, otrzymamy

$$Z=1-nz, \quad Z'=z, \quad \text{ i } \int \frac{dx}{x} + \int \frac{zdz}{1-nz+z^2} = s.$$

czyli $lx + \int \frac{zdz}{1-nz+z^2} = s.$

Całka $\int \frac{zdz}{1-nz+z^2}$ może się uprościć gdy uważamy że $\frac{zdz}{1-nz+z^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2zdz - ndz}{1-nz+z^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{ndz}{1-nz+z^2};$

wprowadzając bowiem to wyrażenie otrzymamy

$$lx + \frac{1}{2}l(1-nz+z^2) + \frac{1}{2} \int \frac{ndz}{1-nz+z^2} = s.$$

Zcałkowanie wyrazu $\int \frac{ndz}{1-nz+z^2}$ zależy będzie od logarytmów jeżeli $\frac{n}{2} > 1$, od łuków koła jeżeli $\frac{n}{2} < 1$, będzie zaś algebraiczne jeżeli $\frac{n}{2} = 1$.

Poszukajmy całki stosującej się do tego ostatniego przypadku; w tym razie wyraz $\int \frac{ndz}{1-nz+z^2}$ zamienia się na

$$\int \frac{2dz}{(1-z)^2} = \frac{2}{1-z} \quad \text{ a wyraz } l(1-nz+z^2) \text{ na } l(1-z)^2,$$

przeto będzie $lx + l(1-z) + \frac{1}{1-z} = s$, czyli odstawując

za z , jego wartość $z = \frac{y}{x}$, będzie $l(x-y) + \frac{x}{x-y} = s.$

Wyraz $\frac{x}{x-y}$ można zamienić na logarytm, pamiętając, że według opisanego logarytmów Nepera, ilość jakakolwiek u jest logarytmem liczby e^u ; stosownie więc do tej uwagi, zrównanie poprzedzające wyrazić się może pod kształtem

$$l(x-y) + 1e^{\frac{x}{x-y}} = s,$$

a ztąd wyciągniemy następnie

$$\ln(x-y)e^{\frac{x}{x-y}} = \ln s, \quad (x-y)e^{\frac{x}{x-y}} = s.$$

Pożyteczną będzie rzeczą wrazić sobie w pamięć takowy sposób przechodzenia od logarytmów do liczb, ponieważ często bywa używany.

Weźmy jeszcze zrównanie

$$xdy - ydx = dx\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Uczyniwszy $y = xz$, i podzieliwszy przez x wszystkie wyrazy przeniesione na jedną stronę zrównania, otrzymamy

$$dx\sqrt{1+z^2} - xdz = 0,$$

a ztąd

$$\frac{dx}{x} - \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = 0.$$

Po zcałkowaniu każdego wyrazu w szczególności będzie

$$\ln x - \ln(z + \sqrt{1+z^2}) = \ln s, \quad \text{czyli} \quad \frac{x}{z + \sqrt{1+z^2}} = s,$$

a przywróciwszy za z , wartość $\frac{y}{x}$, otrzymamy

$$\frac{x^2}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} = s, \quad \text{lub też mnożąc licznik i mianownik przez } y - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{będzie } -y + \sqrt{x^2 + y^2} = s, \quad \text{albo na koniec gdy zniemiemy pierwiastek, wypadnie } x^2 = s^2 + 2sy.$$

284. Zrównanie

$$(a + mx + ny)dx + (b + px + qy)dy = 0,$$

może być łatwo przywiedzione do jednorodności. Czyniąc $x = t + \alpha$, $y = u + \beta$, i biorąc ilości α i β za stałe, będzie $dx = dt$, $dy = du$, i

$$(a + m\alpha + n\beta + mt + nu)dt + (b + p\alpha + q\beta + pt + qu)du = 0;$$

wyrazy stałe w tém zrównaniu zniemiemy założywszy $a + m\alpha + n\beta = 0$, $b + p\alpha + q\beta = 0$, ztąd wyciągniemy war-

tości α i β , tym sposobem otrzymamy równanie różniczkowe

$$(mt + nu)dt + (pt + qu)du = 0,$$

jednorodne, względem nowych zmiennych u i t .

Poprzedzające przerobienie jest to samo, którego używają do przemiany początku współrzędnym na płaszczyźnie (*Trig.* 122); nie daje ono żadnego wypadku gdy $mq - np = 0$, bo wartości α i β , w tym razie stają się nieskończenie wielkimi; lecz wtenczas mamy $q = \frac{np}{m}$, co czyni

$$px + qy = \frac{p}{m}(mx + ny);$$

i zamienia dane równanie na

$$adx + bdy + (mx + ny)\left(dx + \frac{p}{m}dy\right) = 0,$$

dla rozłączenia ilości zmiennych w tém równaniu, dosyć jest uczynić $mx + ny = z$.

Podstawivszy tę wartość, i ztąd wynikającą wartość dy , oraz oswobodzivszy dx , znajdziemy

$$dx + \frac{(bm + pz)dz}{amn - bm^2 + (mn - pm)z} = 0,$$

całka tego równania zawierać będzie logarytmy, wyjąwszy przypadek, kiedy $mn - pm = 0$, wtenczas całka będzie

$$x + \frac{2bmz + pz^2}{2(amn - bm^2)} = C,$$

Przerobienie w tym ostatnim przypadku użyte, zamieniło dane równanie na inne jedną tylko zmienną zawierające, i łatwo daje się postrzegać, że możemy każde równanie przerabiając tym sposobem przywieść do kształtu $dx + Zdz = 0$, gdzie Z jest funkcją samej tylko ilości z , i że ztąd otrzymamy $x + \int Zdz = C$.

285. Oddzielenie zmiennych łatwo się daje wykonać

na zrównaniu $dy + Pydx = Qdx$, gdzie P i Q są funkcjami ilości x . Podstawując w niem Xz , i $zdX + Xdz$ za y , dy , otrzymamy

$$zdX + Xdz + PXzdx = Qdx.$$

Ponieważ X jest funkcją nieoznaczoną ilości x , zatem wolno nam jest rozdzielić poprzedzające zrównanie na dwa inne, w którychby zmienne łatwo się mogły odłączyć; jasną zaś jest rzeczą, że temu warunkowi zadość się uczyni, gdy będzie $Xdz + PXzdx = 0$, a ztąd $zdX = Qdx$. Dzieląc pierwsze zrównanie przez X , otrzymamy $dz + Pzdx = 0$, ztąd $\frac{dz}{z} + Pdx = 0$, $lz + \int Pdx = ls$,

a przechodząc do liczb, $z = se^{-\int Pdx}$. Biorąc potem z drugiego zrównania wartość dX , i podstawując w niej za z wartość teraz wynalezioną, otrzymamy

$$dX = \frac{1}{s} e^{\int Pdx} Qdx, \quad X = \frac{1}{s} \int e^{\int Pdx} Qdx + S,$$

a zatem

$$y = e^{-\int Pdx} \left(\int e^{\int Pdx} Qdx + s \right),$$

zamieniając dowolną mnogość sS na s ; co pokazuje, iż można było założyć $ls = 0$.

Zrównanie $dy + Pydx = Qdx$, w tém jest godne uwagi, że ilość y i jej różniczka znajdują się w niem w pierwszym stopniu, i dla tego jest nazywane *zrównaniem linijowém* pierwszego rzędu, które należałoby raczej nazywać *zrównaniem pierwszego stopnia i pierwszego rzędu* (*).

(*) Wyraz *linijowe* jest niewłaściwy, stosuje się do geometryi, i gdy mówimy *zrównanie linijowe*, mamy na widoku linią prostą, w zrównaniu której przystawa i uciniek są tylko w pierwszym stopniu; nie właściwie więc nazywają się linijowemi zrównania kształtu $dy + Pydx = Qdx$, które pospolicie należą do linii krzywych przestępnych.

286. Pierwsi Analisiści trudniący się rachunkiem całkowym, klasyfikowali równania różniczkowe podług liczby ich wyrazów. W równaniach dwuwyrazowych kształtu $\beta u^g z^h dz = \alpha u^e z^f du$, ilości zmienne łatwo się oddzielają, ponieważ otrzymujemy równanie $\beta z^{h-f} dz = \alpha u^{e-g} du$; inaczej się rzecz ma, gdy są równania z trzech wyrazów złożone, kształtu.

$$\gamma u^i z^k dz + \beta u^g z^h du = \alpha u^e z^f du.$$

Można to równanie prościej wyrazić, dzieląc wszystkie wyrazy przez $\gamma u^i z^f$; co zamienia je na

$$z^{k-f} dz + \frac{\beta}{\gamma} u^{g-i} z^{h-f} du = \frac{\alpha}{\gamma} u^{e-i} du;$$

czyniąc potem $z^{k-f} dz = \frac{dy}{k-f+1}$, $u^{g-i} du = \frac{dx}{g-i+1}$,

otrzymujemy $z^{k-f+1} = y$, $u^{g-i+1} = x$,

przez co równanie poprzedzające zamienia się na

$$dy + \frac{(k-f+1)\beta}{(g-i+1)\gamma} y^{\frac{h-f}{k-f+1}} dx = \frac{(k-f+1)\alpha}{(g-i+1)\gamma} x^{\frac{e-g}{g-i+1}} dx;$$

a gdy dla skrócenia uczynimy

$$\frac{(k-f+1)\beta}{(g-i+1)\gamma} = b, \quad \frac{(k-f+1)\alpha}{(g-i+1)\gamma} = a, \quad \frac{h-f}{k-f+1} = n, \quad \frac{e-g}{g-i+1} = m,$$

wypadnie równanie $dy + by^n dx = ax^m dx$.

287. Po równaniu pierwszego stopnia, najprostszy jest przypadek, gdy $n=2$. Wpadamy w ten czas na równanie $dy + ay^2 dx = bx^m dx$, zwane równaniem *Rykkatego* (*Riccati*), który je pierwszy całkował.

Zmienne łatwo się odłączają w tym równaniu gdy $m=0$; otrzymujemy naprzód

$$dy + by^2 dx = a dx, \quad \text{a ztąd}$$

$$dx = \frac{dy}{a - by^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left\{ \frac{dy}{\sqrt{a + y\sqrt{b}}} + \frac{dy}{\sqrt{a - y\sqrt{b}}} \right\},$$

całkując znajdziemy

$$x = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \left(\frac{\sqrt{a} + y\sqrt{b}}{\sqrt{a} - y\sqrt{b}} \right) + C.$$

Żeby doświadczyć, czy to zrównanie może się przerobić na inne jednorodne, uczynimy $y = z^k$, tym sposobem zamienimy je na

$$kz^{k-1}dz + bz^{2k}dx = ax^m dx,$$

i stanie się jednorodnym, jeżeli $k-1 = 2k = m$, z kąd wypada $k = -1$, $m = -2$; a tak otrzymamy

$$-\frac{dz}{z^2} + \frac{bdx}{x^2} = \frac{adx}{x^2}.$$

Nie będziemy się zatrzymywać nad całkowaniem tego ostatniego zrównania; ale wyłożymy sposób przerobienia ogólniejszy, zależący na podstawieniu $Ax^p + x^qz$ za y .

W tém założeniu znajdziemy

$$dy = (pAx^{p-1} + qx^{q-1}z)dx + x^qdz,$$

$$y^2dx = (A^2x^{2p} + 2Ax^{p+q}z + x^{2q}z^2)dx,$$

a następnie

$$x^qdz + (qx^{q-1} + 2bAx^{p+q} + bx^{2q}z)zdx$$

$$+ (pAx^{p-1} + bA^2x^{2p})dx = ax^m dx.$$

To zrównanie przywiedzie się do trzech wyrazów, jeżeli będą miały miejsce następujące zrównania

$$p-1 = 2p, \quad pA + bA^2 = 0, \quad q-1 = p+q, \quad q + 2bA = 0.$$

Z pierwszego i trzeciego wypada $p = -1$, z drugiego i czwartego $A = \frac{1}{b}$, $q = -2$, te wartości prowadzą do

$$y = \frac{1}{bx} + \frac{z}{x^2},$$

$$x^{-2}dz + bx^{-4}z^2dx = ax^m dx,$$

$$\text{albo} \quad dz + bz^2 \frac{dx}{x^2} = ax^{m+2} dx.$$

Przez ten sposób dane równanie stanie się jednorodnem, jeżeli $m = -2$; prócz tego jasną jest rzeczą, że można oddzielić zmienne, jeżeli $m = -4$, ponieważ w tym razie będzie

$$dz + (bz^2 - a) \frac{dx}{x^2} = 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{dz}{bz^2 - a} + \frac{dx}{x^2} = 0.$$

Jeżeli w równaniu $dz + bz^2 \frac{dx}{x^2} = ax^{m+2} dx$, uczynimy $z = \frac{1}{y'}$, otrzymamy

$$-dy' + b \frac{dx}{x^2} = ay'^2 x^{m+2} dx, \quad \text{czyli} \quad dy' + ay'^2 x^{m+2} dx = b \frac{dx}{x^2},$$

założywszy potem $x^{m+2} dx = \frac{dx'}{m+3}$, znajdziemy

$$x^{m+3} = x', \quad dx = \frac{1}{m+3} x' - \frac{m+2}{m+3} dx',$$

$$dy' + \frac{a}{m+3} y'^2 dx' = \frac{b}{m+3} x' - \frac{m+4}{m+3} dx',$$

uczyniwszy potem dla skrócenia

$$\frac{a}{m+3} = b', \quad \frac{b}{m+3} = a', \quad -\frac{m+4}{m+3} = m',$$

wpadniemy na równanie

$$dy' + b'y'^2 dx' = a'x'^{m'} dx',$$

podobne równaniu danemu, które tymże sposobem przerobić możemy; zatem oddzielenie zmiennych x' , y' będzie się mogło skutecznici, po uczynieniu

$$y' = \frac{1}{b'x'} + \frac{z'}{x'^2}, \quad \text{jeżeli} \quad m' = -4.$$

Gdyby się temu warunkowi zadość nie stało, należałoby to ostatnie równanie znowu przerobić czyniąc

$$z' = \frac{1}{y''}, x'^{m'+3} = x'', \frac{a'}{m'+3} = b'', \frac{b'}{m'+3} = a'', -\frac{m'+4}{m'+3} = m''.$$

podobność tych wyrażeń z poprzedzającymi, prowadzi koniecznie do zrównania

$$dy'' + b'' y''^2 dx'' = a'' x''^{m''} dx''.$$

podobnego zrównaniu podanemu, w którym przeto będzie można oddzielić ilości zmienne, jeżeli $m'' = -4$.

Tym sposobem dalej postępując, przyjdziemy do zrównania odpowiadającego warunkom potrzebnym do oddzielenia zmiennych, gdy w liczbie wykładników

$$m, m' = -\frac{m+4}{m+3}, m'' = -\frac{m'+4}{m'+3}, m''' = -\frac{m''+4}{m''+3}, \text{ i t. d.,}$$

znajdzie się którykolwiek $= -4$. Przypuściwszy z kolei, że $m = -4$, $m' = -4$, $m'' = -4$, i t. d. otrzymamy na wartość ilości m , liczby następujące

$$-4, -\frac{8}{3}, -\frac{12}{5}, -\frac{16}{7} \text{ i t. d.,}$$

zajęte wzorem

$$m = -\frac{4i}{2i-1},$$

gdzie i wyraża jakąkolwiek liczbę całą. Ten wzór daje także wartość $m=0$, wyżej w tymże numerze uważaną; wartość $m=-2$ odpowiada wartości ilości i nieskończenie wielkiej (*).

(*) Do tego wzoru przychodzimy prosto, odnosząc do ilości m , wartości ilości m' , m'' , i t. d., bo wprowadzając wartość ilości m' do wartości ilości m'' , a wypadek ztąd otrzymany na m'' wprowadzając do wartości ilości m''' , i tak dalej, znajdujemy

$$m' = -\frac{m+4}{m+3}, m'' = -\frac{3m+8}{2m+5}, m''' = -\frac{5m+12}{3m+7} \text{ i t. d.}$$

a ztąd wnosimy że

$$m^{(i)} = -\frac{(2i-1)m+4i}{im+2i+1}.$$

Wyłożone przypadki nie zamykają wszystkich przypadków, które z przerobień poprzedzających można wyprowadzić. Dla znalezienia nowego ich szeregu, dość jest w daném równaniu uczynić $y = \frac{1}{y'}$, co da

$$dy' + ay'^2 x^m dx = b dx,$$

a kładąc

$$x^{m+1} = x', \quad \frac{a}{m+1} = b', \quad \frac{b}{m+1} = a', \quad -\frac{m}{m+1} = m';$$

wypadnie równanie

$$dy' + b'y'^2 dx' = a'x'^{m'} dx',$$

podobne do równania założonego, a zatem mogące podobnym ulegać przerabianiom; przeto czyniąc

$$y' = \frac{1}{b'x'} + \frac{z'}{x'^2},$$

i dalsze wykonywając przerabiania, tak jak wskazaliśmy w poprzedzających przypadkach, przyszlubiemy do równania, w którym ilości zmienne mogłyby się

Ta wartość sprawdza się uważając, że

$$m^{(i+1)} = -\frac{m^{(i)}+4}{m^{(i)}+3} = -\frac{[2(i+1)-1]m+4(i+1)}{(i+1)m+2(i+1)+1},$$

co pokazuje, że prawo służące na liczbę jakąkolwiek i , służyć też będzie na liczbę następującą $i+1$.

Podane równanie daje się całkować, gdy wykładnikiem ilości x w drugiej stronie równania jest zero, więc jeżeli uczynimy $m^{(i)}=0$, znajdziemy

$$m = -\frac{4i}{2i-1}.$$

Czyniąc zaś $m^{(i)} = -4$, otrzymamy

$$m = -\frac{4i-4}{2i+1} = -\frac{4(i+1)}{2(i+1)-1},$$

co daje jedno przekształcenie więcej, jak w przypadku poprzedzającym; to samo otrzymalibyśmy kładąc $m^{(i+1)}=0$.

oddzielić, skoro liczba m' byłaby zamknięta we wzo-
rze $-\frac{4i}{2i-1}$, a zatem jeźlibyśmy mieli

$$\frac{-m}{m+1} = \frac{-4i}{2i-2}.$$

Ztąd wyciągamy $m = \frac{-4i}{2i-1}$;

nadając literze i wartości 1, 2, 3, i t. d., otrzymamy
na wartości m , szereg liczb

$$-\frac{4}{3}, -\frac{8}{5}, -\frac{12}{7}, -\frac{16}{9}, \text{ — i t. d.}$$

Z tego wszystkiego co poprzedziło wypada, że zmienne w równaniu Rikatego dają się odłączyć, gdy wy-
kładnik $m = -2$, lub gdy jest zajęty wzorem $\frac{-4i}{2i \pm 1}$.

Możnaby tu przytoczyć więcej przykładów; lecz wszystkie te szczególne równania, pospolicie dziwacz-
nego kształtu, nienadarzające się nigdy w przystoso-
waniach nic uczącego nie mają; dla tego wyłożymy
tu inny od Eulera podany sposób.

*Szukanie mnożnika, przez który należy zrówna-
nie różniczkowe pierwszego rzędu mnożyć, dla
zrobienia go równaniem mogącym się scał-
kować.*

288. Należy sobie przypomnieć że równanie róż-
niczkowe nie zawsze wynika z bezpośredniego różniczkowa-
nia równania z dwiema zmiennymi, lecz że w ogul-
ności jest wypadkiem wyrzucania ilości stałej dowolnej,
między równaniem pierwotnem i różniczką bezpośrednią
tegoż równania (53).

Ilość stała wyrzuca się przez samo różniczkowa-
nie, gdy równanie pierwotne jest kształtu $u=c$, gdzie
 u oznacza jakąkolwiek funkcją ilości x i y , bo róż-

żniczkując mamy $du=0$. Jeżeli funkcyja du nie ma żadnego mnożnika, przez któryby mogła być podzielona, zachowa kształt różniczki zupełnej o dwóch ilościach zmiennych, a zatem będzie się mogła scałkować sposobem wyłożonym pod liczbą 278.

289. Jeżeli zrównanie pierwotne nie jest pod kształtem $u=c$, lub jeżeli różniczka $du=0$, zamyka mnożniki, które giną, wypadające ztąd zrównanie pierwszego rzędu, nie może być bezśrednie zcałkowanym. Gdybyśmy np. mieli $u=y-cx=0$, znaleźlibyśmy $du=dy-cdx=0$, a wyrzucając c otrzymalibyśmy $xdy-ydx=0$, zrównanie nieczyniące zadość warunkowi potrzebnemu do zcałkowania, bo daje

$$M=-y, \quad N=x, \quad \frac{dM}{dy}=-1, \quad \frac{dN}{dx}=1.$$

Lecz jeżeli oswobodzimy ilość stałą c , będziemy mieli $\frac{y}{x}=c$, a różniczkując otrzymamy $\frac{xdy-ydx}{x^2}=0$; pod tym kształtem daje

$$M=-\frac{y}{x^2}, \quad N=\frac{1}{x}, \quad \frac{dM}{dy}=-\frac{1}{x^2}=\frac{dN}{dx};$$

ztąd widzimy że zcałkowanie zrównania $xdy-ydx=0$, zależy od przywrócenia mnożnika $\frac{1}{x^2}$, który zniknął po różniczkowaniu i wyrzuceniu ilości stałej dowolnej.

W ogulności, każde zrównanie różniczkowe o dwóch ilościach zmiennych, i w którym różniczki nie przechodzą stopnia pierwszego, może stać się różniczką zupełną za pomocą mnożnika, jeżeli tylko odpowiada jakimukolwiek zrównaniu pierwotnemu. Jakoż niech będą zrównania

różniczkowe $Mdx+Ndy=0$, pierwotne $u=c$; pierwsze zrównanie powinno dać spółczynnika $\frac{dy}{dx}$ tę samą wartość, jaką daje zrównanie

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = 0,$$

które jest bezśrednią różniczką drugiego; więc powinno być

$$-\frac{M}{N} = -\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)}, \quad \text{z kąd} \quad \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{N} = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{M};$$

nazywając te ilorazy przez z , otrzymujemy

$$\frac{du}{dx} = Mz, \quad \frac{du}{dy} = Nz, \quad du = Mzdx + Nzdy.$$

Oznaczylibyśmy przeto mnożnik z , gdyby całka danego zrównania była znana, bo dość byłoby rozwiązać tę całkę ze względu na ilość stałą dowolną, dla dania jej kształtu $u=c$; a jak zobaczymy wkrótce, iż wszystkie zrównania różniczkowe o dwóch ilościach zmiennych, mają koniecznie całkę zupełną przynajmniej pod kształtem szeregu, przeto wypada, że znajduje się przynajmniej pod tym kształtem, mnożnik mogący zrównanie różniczkowe pierwszego rzędu o dwóch ilościach zmiennych uczynić zupełną różniczką.

290. Gdy całka nie jest znaną, dla oznaczenia mnożnika z , mamy tylko warunek

$$\frac{d.Mz}{dy} = \frac{d.Nz}{dx},$$

wynikający z zupełnej różniczki

$$Mzdx + Nzdy = du;$$

rozwijając ten warunek wypada

$$\frac{Mdz}{dy} + z\frac{dM}{dy} = N\frac{dz}{dx} + z\frac{dN}{dx},$$

czyli

$$M\frac{dz}{dy} - N\frac{dz}{dx} + \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)z = 0 \quad (A).$$

Gdybyśmy mieli ogólny sposób wyciągnięcia z tego zrównania wartości z , możnaby każdego zrównania różniczkowego znaleźć całkę sposobem pod liczb. 278 podanym; lecz zrównanie (A) większym prawie zawsze podlega trudnościom; niż zrównanie dane, gdyż funkcyja z , w niem zawarta, zależy od dwóch zmiennych, z dwoma współczynnikami różniczkowemi, i jest z gatunku tych funkcyj, których tworzenie się było wskazane pod liczbą 140. Nie będziemy się trudnili teraz rozwiązaniem tego zrównania, które, jak w dalszym ciągu obaczymy, prowadzi nas znowu do tegoż samego punktu, od któregośmy zaczęli, lecz wykażemy niektóre własności mnożnika z . Należy uważać że znając jedną wartość mnożnika z , możemy ztąd wyprowadzić nieograniczoną liczbę innych mnożników, bo gdy rozmnożymy obie strony zrównania $zMdx + zNdy = du$, przez jakąkolwiek ilość u funkcyją, którą oznaczmy przez $\varphi(u)$, wtedy obie strony rozmnożonego zrównania

$$z\varphi(u)Mdx + z\varphi(u)Ndy = \varphi(u)du,$$

będą także różniczkami zupełnemi, więc gdy z jest mnożnikiem, przez który rozmnożone zrównanie $Mdx + Ndy = 0$, daje się całkować, przeto i mnogość $z\varphi(u)$ też samę mieć będzie własność.

Ztąd wypada że gdybyśmy odkryli dwa różne mnożniki, mogące uczynić zupełną różniczką dane zrównanie różniczkowe, mielibyśmy natychmiast jego całkę, bo jeden z tych mnożników biorąc za z , drugi byłby $z\varphi(u)$, a kładąc $\frac{z\varphi(u)}{z} = c$, mielibyśmy $\varphi(u) = c$, co wychodzi na to, że jest $u = \text{stała}$.

291. Są przypadki, że mnożnik z jedną tylko zmienną x lub y w sobie zamyka; w tym razie łatwo jest otrzymać jego wyrażenie za pomocą zrównania (A). Jakoż założywszy w tém zrównaniu $\frac{dz}{dy} = 0$; mamy

$$-N \frac{dz}{dx} + z \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right) = 0,$$

a ztąd wyciągniemy zrównanie

$$\frac{dz}{z} = \frac{1}{N} \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right) dx,$$

które wtedy będzie służyło, gdy ilość

$$\frac{1}{N} \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right),$$

będzie funkcją ilości x . Wyrażając takową funkcją przez X , i całkując otrzymamy

$$Iz = \int X dx, \text{ czyli } z = e^{\int X dx}.$$

Stosując ten wzór do zrównania

$$dy + Py dx = Q dx,$$

$$\text{mamy } M = Py - Q, \quad N = 1, \quad \frac{1}{N} \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right) = P,$$

a zatem $z = e^{\int P dx}$. Mnożąc potem zrównanie

$dy + Py dx - Q dx = 0$ przez $e^{\int P dx}$, będziemy mieli
 $e^{\int P dx} dy + (Py - Q) e^{\int P dx} dx = 0$; całkując wyraz $e^{\int P dx} dy$
 przez wzgląd na y , otrzymamy $u = y e^{\int P dx} + X$, gdzie
 X funkcją ilości x jest oznaczona przez zrównanie

$$\frac{d(y e^{\int P dx})}{dx} + \frac{dX}{dx} = (Pp - Q) e^{\int P dx},$$

z którego wyciągniemy

$$\frac{dX}{dx} = - e^{\int P dx} Q, \quad X = - \int e^{\int P dx} Q dx,$$

$$\text{a zatem } y e^{\int P dx} - \int e^{\int P dx} Q dx = s,$$

$$\text{albo, jak pod licz. 285, } y = e^{-\int P dx} \left(\int e^{\int P dx} Q dx + s \right).$$

Pomijamy przypadek, kiedy mnożnik z od jednej tylko zmiennej y zależy; jasną bowiem jest rzeczą, że jego w tym razie wyrażenie będzie $z = e^{\int Y dx}$,

jeżeli uczynimy
$$\frac{1}{M} \left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy} \right) = V,$$

i że to wtenczas tylko przytrafić się może, gdy V bynajmniej nie zależy od x .

292. Między funkcją jednorodną i jej współczynnikami różniczkowymi, zachodzą szczególne stosunki, które bardzo ułatwiają całkowanie.

Funkcja jednorodna ilości x, y , i t. d. jeżeli ją wyrazimy przez V , i w niej za x, y , i t. d., położymy tx, ty , i t. d., przybierze kształt $t^m V$, gdzie m znaczy sumę wykładników ilości zmiennych w każdym wyrażeniu (283). Założywszy potem że t zamienia się na $1+g$, otrzymamy $(1+g)^m V$ zamiast V . W témże samém założeniu x, y , i t. d. zamienią się na $x+gx, y+gy$, i t. d., i pisząc gx za h, gy za k , we wzorze pod liczbą 41, przyjdziemy do równania

$$\left. \begin{aligned} &V + \frac{dV}{dx} gx + \frac{dV}{dy} gy + \text{i t. d.} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 V}{dx^2} g^2 x^2 + 2 \frac{d^2 V}{dx dy} g^2 xy + \frac{d^2 V}{dy^2} g^2 y^2 + \text{i t. d.} \right) \\ &+ \text{i t. d.} \end{aligned} \right\} = (1+g)^m V.$$

Rozwijając drugą stronę i porównywając z sobą wyrazy mnożone przez tęż samą potęgę ilości nieoznaczonej g , otrzymamy

$$\frac{dV}{dx} x + \frac{dV}{dy} y + \text{i t. d.} = mV.$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} x^2 + 2 \frac{d^2 V}{dx dy} xy + \frac{d^2 V}{dy^2} y^2 + \text{i t. d.} = m(m-1)V,$$

i t. d.

293. Za pomocą tych zrównań, mnożnik z , z łatwością się oznacza w zrównaniach różniczkowych jednorodnych. Sposób, podług którego *Poisson* przyszedł do wypadku, dokładniejszy od sposobu dotąd używanego, jest następujący.

Jeżeli $Mdx + Ndy = 0$ jest zrównaniem jednorodnym, i jeżeli summa wykładników ilości x, y , w M i N jest $=m$, przypuściwszy, że z jest także funkcją jednorodną stopnia n , i uczyniwszy $zMdx + zNdy = du$, znajdujemy podług dowiedzionego pod liczbą poprzedzającą twierdzenia że

$$\frac{d(Mz)}{dx}x + \frac{d(Nz)}{dy}y = (m+n)Mz;$$

lecz aby dana różniczka była zupełną, powinien zachodzić związek

$$\frac{d(Mz)}{dy} = \frac{d(Nz)}{dx},$$

za pomocą którego wyrzuciwszy z poprzedzającego zrównania wyraz $\frac{d(Mz)}{dy}$, otrzymujemy

$$\frac{d(Mz)}{dx}x + \frac{d(Nz)}{dx}y = (m+n)Mz,$$

widoczną zaś jest rzeczą, iż

$$\frac{d(Mzx)}{dx} = \frac{d(Mz)}{dx}x + Mz, \quad \frac{d(Nzy)}{dx} = \frac{d(Nz)}{dx}y;$$

przeto wyższe zrównanie może być napisane pod kształtem

$$\frac{d(Mzx)}{dx} + \frac{d(Nzy)}{dx} = (m+n+1)Mz;$$

a że wykładnik n , jest nieoznaczony, więc jeżeli uczynimy $m+n+1=0$, wypada

$$\frac{d(Mzx)}{dx} + \frac{d(Nzy)}{dx} = 0,$$

złąd $Mzx + Nzy = c$, i $z = \frac{c}{Mx + Ny}$;

kładając zaś $c=1$, wypada $z = \frac{1}{Mx + Ny}$, i to jest mnożnik, przez który zrównanie różniczkowe $Mdx + Ndy = 0$ rozmnożone staje się różniczką zupełną (*).

O zrównaniach różniczkowych pierwszego rzędu, w których różniczki są podniesione do potęg.

294. Z tworzenia się zrównań różniczkowych, których przykłady daliśmy pod liczb. 53, postrzegamy, że mogą być takie, w których różniczki są podniesione do potęg. Wzór ogólny takowych zrównań jest

$$dy^n + Pdy^{n-1}dx + Qdy^{n-2}dx^2 + \dots + Tdydx^{n-1} + Udx^n = 0;$$

dzieląc to zrównanie przez dx^n , otrzymamy

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + P\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \dots + T\frac{dy}{dx} + U = 0;$$

a rozwiązując przez wzgląd na współczynnik $\frac{dy}{dx}$, i oznaczając jego pierwiastki przez $p, p', p'',$ i t. d. będziemy mieli wypadki

$$\frac{dy}{dx} - p = 0, \quad \frac{dy}{dx} - p' = 0, \quad \frac{dy}{dx} - p'' = 0 \text{ i t. d.,}$$

które potrafimy zcałkować według poprzedzających prawideł, bo różniczki w nich zawarte są pierwszego stopnia. Całka każdego z nich, będzie także całką danego zrównania, któremu się jeszcze zadość uczyni przez wartości wyciągnięte ze zrównania z mnogości tych wszystkich całek utworzonego.

Jakoż zrównanie podane, będąc to samo co

(*) Przypuściliśmy że mnożnik z jest funkcją jednorodną, lecz można to przypuszczenie usprawiedliwić, okazując że różniczka $\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny}$ jest zupełną, skoro M i N są funkcjami jednorodnymi. (Obacz *Traité du Calcul* in 4to Tom. II. str. 266).

$$\left(\frac{dy}{dx} - p\right) \left(\frac{dy}{dx} - p'\right) \left(\frac{dy}{dx} - p''\right) \dots = 0,$$

będzie sprawdzone przez wszystkie te równania, które zniszczą jeden z tych mnożników. Nadto, jeżeli uważymy, że równaniu pierwotnemu mającemu kształt

$$MNP \dots = 0,$$

staje się zadość przez zniszczenie następne każdego z jego mnożników, wniesiemy że różniczka bezśrednia pierwszej strony równania, to jest

$$dM.NP \dots + dN.MP \dots + \text{it. d.} = 0,$$

sprowadza się zawsze do jednego tylko wyrazu; bo gdy np. weźmiemy $M=0$, zostanie tylko $dM.NP \dots = 0$, czyli $dM=0$; więc równanie $MNP \dots = 0$ czyni zadość równaniu różniczkowemu, któremu zadość uczyniłoby równanie $M=0$,

Dwa następujące przykłady chociaż dosyć proste, objaśnia wszystkie mogące się nadarzyć w poprzedzającym wykładzie trudności.

295. 16d. Niech będzie $dy^2 - a^2 dx^2 = 0$; to równanie rozkłada się na dwa $dy + adx = 0$, $dy - adx = 0$, których całki są $y + ax = s$, $y - ax = s'$; jasna jest, że każdy z tych wypadków zadość czyni danemu równaniu. Równanie $(y + ax - s)(y - ax - s') = 0$, równie zadość też mu czyni, bo różniczkowane daje

$$(y + ax - s)(dy - adx) + (y - ax - s')(dy + adx) = 0;$$

$$\text{złąd} \quad dy = \frac{\{(y + ax - s) - (y - ax - s')\} adx}{2y - (s + s')};$$

kładąc kolejno za y , jego wartości $s - ax$, $s' + ax$, otrzymamy $dy = -adx$, $dy = +adx$.

Całka $(y + ax - s)(y - ax - s') = 0$, zawierając dwie ilości stałe dowolne i nieprzywiedlne (*irreductibiles*) zdaje się być ogulniejszą, niżli całki innych zróż-

wnań pierwszego rzędu, mające jedną tylko stałą dowolną; lecz uważać należy, że każdy z tych mnożników powinien być z osobna uważany, i że te same z nich linije wyciągamy, jakiebyśmy otrzymali z całki, jedną tylko stałą zawierającej, którą nasze zrównanie mieć także może. Tę ostatnią całkę otrzymamy czyniąc $dy=mdx$ w zrównaniu różniczkowym $dy^2 - a^2 dx^2 = 0$, które przez to zamienia się na $m^2 - a^2 = 0$, i oznaczoną ztąd wartość ilości m , wprowadzając w zrównanie $y = mx + s$, które jest całką różniczki $dy = mdx$. Ztąd się okazuje, że całka danej różniczki jest wypadkiem z wyrzucenia ilości m między zrównaniami

$$y = mx + s, \quad m^2 - a^2 = 0;$$

wykonawszy to wyrzucanie, otrzymamy

$$\left(\frac{y-s}{x}\right)^2 - a^2 = 0.$$

To pierwotne zrównanie będąc drugiego stopnia, daje, na każdą szczególną wartość ilości stałej, dwie linie proste, nachylone w odmienne strony względem osi uciników x ; toż samo też pokazuje druga całka $(y + ax - s)(y - ax - s') = 0$, wyjąwszy tylko, że każdy mnożnik osobno brany wyraża linije w tę samą stronę nachylone; lecz ponieważ ilości s i s' , nadając każdej z osobna wszystkie jakie tylko być mogą wartości, przejdą przez też same stopnie wielkości, zatem zbierając linije proste odpowiadające jednymże wartościom stałych c i c' , wpadniemy na rozwiązania zajęte w całce $\left(\frac{y-s}{x}\right)^2 - a^2 = 0$, jedną tylko stałą s mającej.

Uważać powinniśmy, że każde zrównanie zawierające w sobie tylko dy , dx , i ilości stałe, może być scałkowane czyniąc w niem, jak wyżej, $dy = mdx$.

2^{re}. Weźmy jeszcze zrównanie $dy^2 - ax dx^2 = 0$; wyciągniemy z niego $dy + dx\sqrt{ax} = 0$, $dy - dx\sqrt{ax} = 0$, a całkując otrzymamy

$$y + \frac{2}{5}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}} - s = 0, \quad y - \frac{2}{5}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}} - s' = 0,$$

Te zrównania i z nich mnogość mogą być z osobna uważane jakby całki danego zrównania; lecz niniejszy przypadek w tém się różni od poprzedzającego, że pierwiastki wchodzące do dwóch całek znalezionych, tworzą między sobą związek, który pozwala obie zająć w jedném zrównaniu z jedną tylko stałą. Jakoż zniosłszy pierwiastek w zrównaniu

$$y = \frac{2}{5}\sqrt{ax^3} - s = 0,$$

otrzymamy $(y-s)^2 = \frac{4}{5}ax^3$. Wypadek ten jest także całką danego zrównania, do którego przyjść możemy bezpośrednio przez wyrzucenie stałej s . Należy on do pewnego gatunku parabol, których każde zrównanie niewymierne jedną tylko odnogę wyraża; a mnogość z tych zrównań odpowiadałaby tylko zbiorowi odnóg należących do linii krzywych różnych od siebie, lecz które w pary zebrane na te same wartości ilości stałych, nieby więcej nie wyrażały, tylko to samo, co i całka wymierna.

296. Według tego co poprzedziło, całkowanie zrównań, w których różniczki są wyższego stopnia nad pierwszy, zawisło od rozwiązania zrównań algebraicznych, są jednak przypadki, w których całkowanie łatwiej się odbywa za pomocą pewnych sposobów stosownych do okoliczności, przez co, choć w części, można uniknąć trudności, jakim podlega rozwiązanie danego zrównania różniczkowego, przez wzgląd na $\frac{dy}{dx}$.

Gdy to zrównanie jedną tylko z dwóch zmiennych np. x zawiera, i jeżeli łatwiej jest rozwiązać to zrównanie przez wzgląd na x , niżli przez wzgląd na współczynnik $\frac{dy}{dx}$, który dla skrócenia wyrażmy przez p , wyprowadzamy zaraz $x=P$, gdzie P wyraża jakąkol-

wiek funkcją ilości p , a że równanie $\frac{dy}{dx} = p$ daje $dy = p dx$, zład $y = px - \int x dp + s$; kładąc za x jego wartość P otrzymamy $y = Pp - \int P dp + s$; zatem cała szukana będzie wypadkiem z wyrzucenia p między dwoma równaniami

$$x = P, \quad p = Pp - \int P dp + s.$$

Weźmy np. $x dx + a dy = b \sqrt{dx^2 + dy^2}$, albo $x + ap = b \sqrt{1 + p^2}$, kładąc $\frac{dy}{dx} = p$; to ostatnie równanie daje bezśrednie

$$x = -ap + b \sqrt{1 + p^2}, \quad P = -ap + b \sqrt{1 + p^2},$$

a zatem $y = bp \sqrt{1 + p^2} - \frac{1}{2} ap^2 - b \int dp \sqrt{1 + p^2} + s.$

297. Rozbierzmy jeszcze przypadek, gdy dwie zmienne razem wchodzą do danego równania; lecz jedna z nich np, y , jest tylko w pierwszym stopniu; w tym razie jeżeli wyrazimy y przez x i przez p , będziemy mieli $dy = R dx + S dp$, a następnie

$$p dx = R dx + S dp, \text{ czyli } (R - p) dx + S dp = 0.$$

Gdybyśmy potrafili scałkować to równanie, otrzymalibyśmy między p , x , i stałą dowolną związek, za pomocą którego wyrzucając p z danego równania, przyszlubiśmy do pierwotnego równania, które byłoby całką szukaną.

Takowe działanie staje się bardzo łatwem, gdy ilość zmienna x jest tylko w stopniu pierwszym; a że dane równanie może się wtedy wyrazić pod kształtem $y = px + P$, gdzie P jest funkcją samego współczynnika p , będzie $dy = p dx + \left(x + \frac{dP}{dp}\right) dp$; a że $dy = p dx$, zatem zostaje równanie $\left(x + \frac{dP}{dp}\right) dp = 0$, które się rozbiera

na dwa mnożniki $x + \frac{dP}{dp} = 0$, $dp = 0$. Wyrzucając p między $x + \frac{dP}{dp} = 0$, i zrównaniem podaném $y = px + P$, otrzymamy zrównanie pierwotne, które uczyni zadość danemu zrównaniu, ale nie zawierając ilości stałej dowolnej, będzie tylko szczególném. Drugi mnożnik zaczątkowany daje $p = s$, czyli $dy = sdx$, i $y = sx + s'$. Nie obie stałe ilości s , s' są dowolne, bo uczyniwszy w daném zrównaniu $p = s$, będzie $y = sx + S$, gdzie S wyraża ilość, na jaką się w takowym razie P zamienia, a ztąd wypada $s' = S$; zatem całką danego zrównania będzie $y = sx + S$, a otrzymuje się zamieniając p na s .

Niech będzie np zrównanie

$$ydx - xdy = n\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Wyrażmy je naprzód pod kształtem

$$y = px + n\sqrt{1 + p^2};$$

różniczkując otrzymujemy

$$dy = pdx + xdp + \frac{npdp}{\sqrt{1 + p^2}},$$

a że $dy = pdx$, zatem zostanie zrównanie

$$xdp + \frac{npdp}{\sqrt{1 + p^2}} = 0,$$

które rozkładając na dwa mnożniki otrzymamy

$$x + \frac{np}{\sqrt{1 + p^2}} = 0, \text{ i } dp = 0;$$

drugi mnożnik prowadzi do $p = s$, a ztąd całka szukana będzie

$$y = sx + n\sqrt{1 + s^2}.$$

Pierwszy mnożnik daje

$$p = \pm \frac{x}{\sqrt{n^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + p^2} = \pm \frac{np}{x} = \mp \frac{n}{\sqrt{n^2 - x^2}};$$

podstawując to w daném równaniu, otrzymamy zrównanie $y^2 + x^2 = n^2$, które nie ma ilości stałej dowolnej, i które nie jest zajęte w całość

$$y = cx + n\sqrt{1 + c^2},$$

a jednak jest takie, że z niego wyciągnięte wartości ilości y , i różniczki dy , zadość czynią danemu równaniu różniczkowemu; zatem $y^2 + x^2 = n^2$ jest rozwiązaniem szczególném (*solution particulière*) danej różniczki. Niżej zastanowimy się obszerniej nad rozwiązaniami tego gatunku.

Całkowanie równań różniczkowych drugiego i wyższych rzędów.

298. Im wyższego rzędu są równania różniczkowe, tém większej doświadczamy trudności w ich całkowaniu; małą tylko liczbę równań tego gatunku umiemy całkować, i te są bardzo szczególne; jednak każde równanie różniczkowe z dwiema zmiennymi, jakiegokolwiek jest rzędu, wyraża związek między niemi prawdziwy, skoro na współczynnik różniczkowy rzędu najwyższego daje wartość rzetelną. To podanie wzmienione już pod liczbą 289, łatwo się dowodzi za pomocą twierdzenia Taylora.

Jakoż rozwiązawszy jakiegokolwiek równanie różniczkowe rzędu n , co do współczynnika różniczkowego tego rzędu, otrzymamy jego wyrażenie przez współczynniki rzędów bezpośrednio niższych, i w ogólności będziemy mieli

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right),$$

zład przez następne różniczkowania wyciągniemy wyrażenia współczynników różniczkowych

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}, \frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}, \text{ i t. d.};$$

z każdego z tych współczynników różn. wyrzucimy współczynniki różn. rzędów wyższych nad rząd $n-1$, za pomocą wyrażeń współczynników różn. poprzedzających, i otrzymamy wszystkie współczynniki różn. zaczynając od rzędu n włącznie, wyrażone przez funkcyje ilości zmiennych i przez $n-1$ początkowych współczynników różniczkowych.

Jeżeli te funkcyje na wartość $x=0$, nie przestają być rzetelnymi i skończonymi, przeto dla zupełnego oznaczenia współczynników różniczkowych przez nie wyrażonych, będzie jeszcze potrzeba nadać wartości dowolne ilościom

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

których z danego zrównania oznaczyć nie możemy.

Wyrażając te wartości odpowiednie przez

$$A, A_1, A_2, \dots, A_{n-1},$$

mieć będziemy na jakąkolwiek wartość ilości x , wyrażenie

$$y = A + A_1 x + A_2 \frac{x^2}{1.2} + \dots + A_{n-1} \frac{x^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} + \\ + f(A, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}) \frac{x^n}{1.2.3 \dots n} + \text{it. d. (22)},$$

w którym współczynniki początkowych n wyrazów, są ilościami stałymi dowolnymi.

Jeżeli zaś wartość $x=0$ czyni wyrażenia współczynników różniczkowych rzędu n i wyższych, urojonemi albo nieskończone wielkiemi, wtedy kładąc $x=a$, gdzie a oznacza jakąś wartość ilości x nie dającą już takowych wypadków, będziemy mieli szereg

$$y = A + A_1(x-a) + A_2 \frac{(x-a)^2}{1.2} + \dots + A_{n-1} \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} +$$

$$+ f(a, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}) \frac{x^n}{1.2 \dots n} + \text{i t. d.}$$

w którym ilości dowolne $A, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$, są wartościami ilości y i jej spółczynników różniczkowych odpowiadającemi ilości $x=a$.

Postrzegamy ztąd, iż jeżeli funkcyja oznaczona przez f , nie jest stałe na wszystkie wartości ilości x , urojonej, zawsze wyciągniemy z danego zrównania różniczkowego nieograniczoną liczbę wartości następnych ilości y , wyrażonych przez szereg, który będzie tym więcej malejącym, im wartości ilości x , mniej różnić się będą od ilości a ; więc dane zrównanie nie będzie zgoła zupełnie niepodobnem do zcałkowania, chociaż na to nie mamy sposobów. Ta własność szczególnie służąca zrównaniom różniczkowym z dwiema tylko ilościami zmiennymi, okazuje się takż za pomocą uwag geometrycznych, jak to niżej obaczymy.

299. Z poprzedzającego rozumowania wynika takż, iż ogólne wyrażenie ilości y przez x , powinno zamykać n ilości stałych dowolnych.

Ilość a , którą wprowadzamy przez nadanie wartości ilości zmiennej niezależnej x , nie powinna być mieszczoną w liczbie ilości stałych dowolnych dodawanych do całkowania, jak o tém można się przekonać na zupełnych całkach zrównań pierwszego rzędu, uważanych w kształcie ich ogólnym $F(x, y, S)=0$. Nie można ilości stałej dowolnej S inaczej oznaczyć, tylko nadając razem wartość ilości x , i ilości y ; wyrażając te wartości przez a i b , tworzymy zrównanie $F(a, b, S)=0$, z którego wyprowadzamy wartość ilości stałej S , wyrażoną przez funkcyą ilości a i b ; lecz należy dobrze uważać, iż funkcyja ta, którą podstawujemy na miejscu ilości stałej dowolnej, może być równie wyrzuconą przez

różniczkowanie; bo jeżeli całkę założoną napiszemy pod kształtem

$$F'(x, y) = S,$$

z tą mieć będziemy $S = F'(a, b)$, a potem zrównanie

$$F'(x, y) = F'(a, b),$$

którego druga strona ginie przez różniczkowanie.

Podobnie oznaczmy dwie ilości stałe S i S' w równaniu pierwotnym mającym kształt $F(x, y, S, S') = 0$, gdy na daną wartość ilości x , naznaczymy wartości ilości y i $\frac{dy}{dx}$; bo ze zrównaniem poprzedzającym razem biorąc pierwszą jego różniczkę, którą wyrazimy przez

$$F'\left(x, y, \frac{dy}{dx}, S, S'\right) = 0,$$

i przypuszczając że na wartość $x = a$, odpowiadają wartości

$$y = b, \quad \frac{dy}{dx} = s,$$

utworzymy dwa równania

$$F(a, b, S, S') = 0, \quad F'(a, b, s, S, S') = 0,$$

za pomocą których oznaczmy ilości S i S' , przez funkcyje ilości a, b , i s ; funkcyje te w różniczkowaniu i w rugowaniu uważają się tak jak pojedyncze ilości S i S' .

300. Te uwagi prowadzą nas do tworzenia równań różniczkowych przez rugowanie ilości stałych, czego pod liczbą 54 widzieliśmy przykład wiodący aż do równania drugiego rzędu.

Jeżeli równanie

$$y^2 = m(a^2 - x^2) \quad (U),$$

zróżniczkujemy raz jeden, mamy wypadek

$$y dy = -m x dx \quad (V),$$

nie zamykający już ilości a ; jeżeli zaś zróżniczkujemy

drugi raz i wyrugujemy ilość m , otrzymamy zrównanie drugiego rzędu

$$y \frac{dy}{dx} - x \frac{dy^2}{dx^2} - xy \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad (Z),$$

które już nie zamyka obu ilości m i a .

Możemy otrzymać to samo zrównanie, naprzód rugując ilość a między pierwotnem zrównaniem a jego pierwszą różniczką, z czego otrzymamy

$$xydx + dy(a^2 - x^2) = 0 \quad (V'),$$

potém zrównanie to otrzymane różniczkując dla wyrugowania w końcu ilości stałej a .

Można też przyjść do tego samego wypadku, naprzód różniczkując zrównanie (U) dwa razy następnie, a potem między daném zrównaniem i dwiema jego różniczkami, rugując ilości stałe m i a .

Któregokolwiek z trzech wymienionych sposobów użyjemy, przyjdziemy zawsze do zrównania (Z); lecz należy uważać, że każde ze zrównań (V), i (V'), z przyczyny że po różniczkowaniu go i wyrugowaniu jednej ilości stałej przychodzimy do zrównania (Z), jest całką tego zrównania. Nazywamy je *całkami pierwszymi* (*intégrales premières*), dla odróżnienia ich od zrównania (U) które jest *całką drugą* czyli *całką pierwotną* (*intégrale seconde ou intégrale primitive*), z przyczyny że zrównanie (Z) jest drugiego rzędu.

Widzimy ztąd, iż zrównanie różniczkowe drugiego rzędu może mieć dwie pierwsze całki, i że rugując między niemi współczynnik różniczkowy pierwszego rzędu otrzymamy między x , y i dwiema ilościami stałymi, zrównanie pierwotne czyli całkę drugą; ztąd wypada, że dla znalezienia całki drugiej dosyć jest znać dwie całki pierwsze.

Uwagi poprzedzające rozciągają się do zrównań wszystkich rzędów. Względem zrównania różniczkowego *np.* trzeciego rzędu, zrównanie pierwotne, po-

winno zamykać trzy ilości stałe (299); przychodzimy do zrównania różniczkowego trzeciego rzędu, rugując ilości stałe między zrównaniami

$$u=0, \quad du=0, \quad d^2u=0, \quad d^3u=0;$$

lecz jeżeli wyrugujemy dwie tylko ilości stałe, będziemy mieli trzy zrównania różniczkowe drugiego rzędu, bo można kolejno zostawiać każdą z trzech ilości stałych. Zrównania tak otrzymane, są całkami pierwszemi zrównania różniczkowego trzeciego rzędu, które koniecznie wynika rugując ilość stałą w nich się znajdującą. Całkami drugimi są tu zrównania różniczkowe pierwszego rzędu, otrzymane przez rugowanie każdej z ilości stałych między zrównaniami $u=0$, i $du=0$, a zrównanie pierwotne $u=0$ jest całką trzecią. Nie posuwając dalej takowego rozważania, wniesć należy, że zrównanie różniczkowe rzędu n , ma liczbę n całek pierwszych; te całki będąc rzędu $n-1$, zamykają w sobie $n-1$ spółczynników różniczkowych

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}};$$

więc jeżeli będziemy mogli je wyrugować, otrzymamy całkę $n^tą$, czyli zrównanie pierwotne, odpowiadające danemu zrównaniu różniczkowemu.

301. Dla uogólnienia teoryi poprzedzającej, Lagranż, za pomocą wzoru Tajlora, wyprowadził z samego zrównania różniczkowego, to mnóstwo całek pierwszych, któreśmy okazali idąc od zrównania pierwotnego.

Zakładając jak pod liczbą 240, $h=-x$, i oznaczając przez A wartość ilości y , gdy czynimy $x=0$, znajdujemy zrównanie

$$A=y - \frac{dy}{dx} \frac{x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{x^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3} \frac{x^3}{1.2.3} + \text{i t. d.} \quad (a),$$

w którym można zniszczyć wszystkie spółczynniki różniczkowe rzędu wyższego od spółczynnika różniczkowego

wego w daném zrównaniu różniczkowém znajdującego się. Przypuśćmy np. że zrównanie różniczkowe jest drugiego rzędu, i jest ułożone pod kształtem

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) (Z);$$

wyprowadzimy z niego wartości współczynników różniczkowych wyższych rzędów; i tym sposobem zrównanie (a) zamieniając się na

$$A = y - \frac{dy}{dx} x + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \frac{x^2}{1.2} - f'\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \frac{x^3}{1.2.3} + \text{i t. d.} (1),$$

zostaje sprowadzone do zrównania pierwszego rzędu, i staje się całką pierwszą zrównania (Z), gdzie A wyraża ilość stałą dowolną.

W drugiej stronie zrównania (1) pisząc $\frac{dy}{dx}$ za y , otrzymamy wartość współczynnika $\frac{dy}{dx}$, odpowiadającą $x=0$; oznaczając ją przez A_1 , wypadnie

$$A_1 = \frac{dy}{dx} - \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{x}{1} + \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{x^2}{1.2} - \text{i t. d.},$$

a kładąc za $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$, i t. d., wartości ich wyprowadzone ze zrównania (Z), otrzymamy zrównanie

$$A_1 = \frac{dy}{dx} - f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \frac{x}{1} + f'\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \frac{x^2}{1.2} - \text{i t. d.} (2),$$

które będzie powtórnią pierwszą całką zrównania danego. Dalej posuwać takiego działania nie można, bo tylko pierwsze wartości ilości y i $\frac{dy}{dx}$ są dowolne.

Nie mając potrzeby wchodzić w nowe szczegóły, widzimy że jeźliby dane zrównanie było rzędu n , wyprowadzilibyśmy ze zrównania (a) wyrażenia ilości

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}},$$

odpowiadające wartości $x=0$, które wszystkie byłyby dowolne; i w nich za współczynniki różniczkowe rzędu n i rzędów wyższych, kładąc wartości ich wyprowadzone z danego zrównania, utworzyłibyśmy n zrównań rzędu $n-1$, które byłyby całkami pierwszemi.

302. Całkowanie zrównań wyższych rzędów zaczniemy od zrównań nie zamykających ilości zmiennych.

W drugim rzędzie, te zrównania zawierają tylko $\frac{dy}{dx}$, i $\frac{d^2y}{dx^2}$; a gdy uczynimy $\frac{dy}{dx}=p$, zkąd wypada $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$, przyjdziemy do $\frac{dp}{dx}=P$, gdzie P jest funkcją ilości p . Zkąd wyciągniemy $dx=\frac{dp}{P}$, a następnie $x=S+\int\frac{dp}{P}$; włożywszy za dx wartość jego w zrównanie $dy=pdx$, otrzymamy także $y=S'+\int\frac{pdp}{P}$; teraz idzie tylko o wyrugowanie p między dwoma zrównaniami $x=S+\int\frac{pdp}{P}$ i $y=S'+\int\frac{pdp}{P}$, ażeby otrzymać całkę wyrażoną przez funkcją ilości x, y . Ta całka będzie zupełna, bo zawiera dwie stałe dowolne (299). Ilość p nie pierwiej może być wyrzuconą, aź po wykonaniu całkowań wskazanych; lecz przez kwadratury można wykreslić linią szukaną.

Weźmy np. zrównanie $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{5}{2}}}{dx d^2y}=a$. Podstawiając pdx za dy , pdp za d^2y , zamienimy to zrównanie na $\frac{(1+p^2)^{\frac{5}{2}}}{dp}dx=a$, zkąd wyciągniemy

$$dx=\frac{adp}{(1+p^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad dy=pdx=\frac{apdp}{(1+p^2)^{\frac{5}{2}}},$$

całki ich będą

$$x=S+\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}, \quad y=S'-\frac{a}{\sqrt{1+p^2}};$$

wyrzuciwszy p , otrzymamy wypadek $(x-S)^2 + (y-S')^2 = a^2$, któryśmy łatwo mogli przewidywać, ponieważ dane równanie różniczkowe będąc wyrażeniem ogólnem promienia krzywości równem ilości stałej $-a$ (81), wyraża główną własność koła.

303. W ogólności pod prawidła na całkowanie funkcji o jednej zmiennej, podciągniemy jakiegokolwiek rzędu równania, w których współczynnik różniczkowy jest wyrażony przez współczynnik bezśrednie niższego rzędu.

Jakoż, gdybyśmy np mieli $\frac{d^5 y}{dx^5} = f\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)$, uczynilibyśmy

$\frac{d^2 y}{dx^2} = q$, a ztąd wypadłoby $\frac{d^5 y}{dx^5} = \frac{dq}{dx}$; a zatem

dane równanie przerobiłoby się na $\frac{dq}{dx} = Q$, gdzie

Q wyraża daną funkcją ilości q . Z tego ostatniego równania wyciągnęlibyśmy

$$dx = \frac{dq}{Q}, \quad x = \int \frac{dq}{Q} + S,$$

potem zaś ze równania $\frac{d^2 y}{dx^2} = q$, mielibyśmy następnie

$$\frac{dy}{dx} = \int q dx = \int q \frac{dq}{Q} + S',$$

$$y = \int dx \int q dx = \int \frac{dq}{Q} \left\{ \int \frac{q dq}{Q} + S' \right\} + S'';$$

zatem całka szukana byłaby wypadkiem po wyrugowaniu q między dwoma równaniami

$$x = \int \frac{dq}{Q} + S, \quad y = \int \frac{dq}{Q} \left\{ \int \frac{q dq}{Q} + S' \right\} + S'',$$

a w tym przypadku byłyby trzy ilości stałe dowolne. Takowy sposób łatwobyśmy rozciągnęli do równań różniczkowych jakiegokolwiek rzędu.

304. Równania, w których współczynnik różniczkowy jest wyrażony przez współczynnik niższego rzędu dwiema je-

dnościami, mogą także być przywiedzione do całkowania funkcyj o jednej zmiennej. Dajmy np. że $\frac{d^4 y}{dx^4} = f\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)$; uczyniwszy $\frac{d^2 y}{dx^2} = q$, otrzymamy $\frac{d^5 y}{dx^5} = \frac{dq}{dx}$, $\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d^2 q}{dx^2}$, a tak zrównanie dane przerobi się

$$\text{na} \quad \frac{d^2 q}{dx^2} = Q,$$

gdzie Q wyraża daną funkcją ilości q . Mnożąc wtedy obie strony zrównania przez dq , otrzymujemy

$$\frac{dq}{dx} \cdot \frac{d^2 q}{dx^2} = Q dq.$$

Ztąd wyciągniemy

$$\frac{1}{2} \frac{dq^2}{dx^2} = \int Q dq + S; \quad \frac{dq}{dx} = \sqrt{2 \int Q dq + S},$$

$$dx = \frac{dq}{\sqrt{2 \int Q dq + S}}, \quad x = \int \frac{dq}{\sqrt{2 \int Q dq + S}} + S'.$$

że zaś $\frac{d^2 y}{dx^2} = q$, ztąd następnie,

$$\frac{dy}{dx} = \int q dx = \int \frac{q dq}{\sqrt{2 \int Q dq + S}} + S'',$$

$$y = \int dx \int q dx = \int \frac{dq}{\sqrt{2 \int Q dq + S}} \left\{ \int \frac{q dq}{\sqrt{2 \int Q dq + S}} + S'' \right\} + S''',$$

A zatem całka będzie wypadkiem po wyrugowaniu ilości q między dwoma zrównaniami,

$$x = \int \frac{dq}{\sqrt{2 \int Q dq + S}} + S',$$

$$y = \int \frac{dq}{\sqrt{2 \int Q dq + S}} \left\{ \int \frac{q dq}{\sqrt{2 \int Q dq + S}} + S'' \right\} + S''',$$

zawierającym cztery stałe dowolne. Tymże samym sposobem postępowałibyśmy że zrównaniami podobnego składu wyższych rzędów.

305. Zrównanie $\frac{d^2y}{dx^2}=Y$, gdzie Y oznacza jakąkolwiek funkcją ilości y , jest najprostszém ze zrównań, które nas zatrudnia; mnożąc to zrównanie przez dy :

mamy
$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = Y dy;$$

ztaąd
$$\frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx^2} = \int Y dy + S,$$

czyli
$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{S + 2 \int Y dy}.$$

Przystosujmy ten sposób do zrównania

$$d^2y \sqrt{ay} = dx^2,$$

otrzymamy
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{ay}}, \quad \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{\sqrt{ay}},$$

które całkując będzie
$$\frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{2}{a} \sqrt{ay} + S.$$

Zamieniając zaś S na $\frac{2s}{\sqrt{a}}$, otrzymamy

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{4}{\sqrt{a}} (\sqrt{y} + s), \quad \frac{2dx}{\sqrt[4]{a}} = \frac{dy}{\sqrt{s + \sqrt{y}}},$$

wziąwszy potem $s + \sqrt{y} = z$, będzie

$$\frac{dx}{\sqrt[4]{a}} = \frac{(z-s)dz}{\sqrt{z}} = (z^{\frac{1}{2}} - sz^{-\frac{1}{2}})dz,$$

$$\frac{x}{\sqrt[4]{a}} = \frac{2}{5} z^{\frac{5}{2}} - 2sz^{\frac{1}{2}} + s' = \frac{2}{5} (\sqrt{y} - s) \sqrt{s + \sqrt{y}} + s':$$

306. Zrównania różniczkowe jedną tylko ilość zmienną pierwotną zamykające, mogą być zniżone jednym najmniej rzędem.

Widoczną zaraz to jest rzeczą w zrównaniach mających kształt.

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

gdzie x oznacza ilość samodzielną; bo gdy założymy $\frac{dy}{dx} = p$, wypada równanie

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \dots \frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}\right) = 0,$$

które względem ilości x i p jest rzędu $n-1$. Jeżeli będziemy mogli je scałkować, i wyrazić albo p przez x , albo x przez p , otrzymamy ilość y ze wzorów

$$y = \int p dx + S, \quad \text{albo} \quad y = px - \int x dp + S.$$

Niech będzie np. równanie różniczkowe

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{5}{2}}}{dx dy} = X,$$

gdzie X oznacza funkcją daną przez jedną tylko ilość x ; kładąc $dy = p dx$, równanie zamienia się na

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{5}{2}} dx}{dp} = X,$$

złąd

$$\frac{dx}{X} = \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{5}{2}}};$$

całkując wypada

$$\int \frac{dx}{X} + S = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

wyrażając $\int \frac{dx}{X} + S$ przez jedną literę V , będzie

$$p = \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}, \quad y = \int p dx + S' = \int \frac{V dx}{\sqrt{1-V^2}} + S',$$

307. Jeżeliby do zrównania danego zamiast ilości samozmiennej x , wchodziła jej funkcja y , sprowadzilibyśmy to zrównanie do przypadku poprzedzającego, biorąc różniczkę dy za stałą nie zaś dx (130).

Gdyby dane zrównanie było tylko drugiego rzędu, możnaby jeszcze wyrugować różniczkę dx za pomocą jej wartości $\frac{dy}{p}$, wyprowadzonej ze zrównania $dy = p dx$; i tym sposobem mielibyśmy

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{p dp}{dy};$$

wtedy zrównanie przerobione zamykałoby tylko p, dp , i dy . Gdybyśmy mogli całkować to zrównanie i wyrazić ilość p przez y , znaleźlibyśmy ilość x za pomocą wzoru $x = \int \frac{dy}{p}$; gdybyśmy zaś wyrazili y przez p

otrzymalibyśmy ilość x za pomocą wzoru $x = \frac{y}{p} + \int \frac{y dp}{p^2}$.

Zrównanie $\frac{d^2 y}{dx^2} = F$, już scałkowane pod lic. 305, zamienia się przez użycie sposobu teraz wyłożonego na

$$\frac{p dp}{dy} = F, \quad \text{zta} \quad p^2 = 2 \int F dy + S,$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{2 \int F dy + S}, \quad x = \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int F dy + S}} + S'$$

308. Między zrównaniami różniczkowemi zamykającemi razem obie ilości zmienne pierwotne, należy uważać te, które są jednorodne między funkcją y i współczynnikami jej różniczkowemi, uważanemi jako mnożniki algebraiczne; proste przekształcenie gubiąc funkcję pierwotną y , sprowadza te zrównania do przypadku poprzedzającego.

Dosyć jest założyć $y = e^u$, a zta

$$dy = e^u du, \quad d^2 y = e^u (d^2 u + du^2),$$

$$d^3 y = e^u (d^3 u + 3 du d^2 u + du^3), \quad \text{i t. d.};$$

wprowadzając te wartości w dane równanie, mnożnik e^u stanie się wtedy wspólnym dla wszystkich wyrazów, więc opuszczając go zostają tylko różniczki ilości u , ilość x , i jej różniczka dx .

Nayprostsze z takowych równań jest równanie, w którym ilość y i jej współczynniki różniczkowe nieprzechodzą pierwszego stopnia; ma ono wzór ogólny

$$d^n y + P d^{n-1} y dx + Q d^{n-2} y dx^2 + \dots + U y dx^n = 0.$$

Weźmy za przykład równanie trzeciego rzędu

$$d^3 y + P d^2 y dx + Q dy dx^2 + U y dx^3 = 0,$$

podstawione za ilość y i za jej różniczki wyrażenia wskazane wyżej, zamieniają to równanie na

$$\left. \begin{aligned} d^5 u + 3dud^2 u + du^5 + P(d^2 u + du^2)dx + \\ + Qdudx^2 + Udx^5 \end{aligned} \right\} = 0,$$

kładąc $du = t dx$, i dzieląc przez dx , wypada

$$d^2 t + (3t + P)dt dx + (t^3 + Pt^2 + Qt + U)dx^2 = 0.$$

Kształt tego równania prowadzi do ważnej uwagi, to jest, że, gdyby ilości P , Q , i U były stałe, możnaby wziąć ilość t za stałą, bo czyniąc $dt = 0$, $d^2 t = 0$, zostałoby do oznaczenia ilości t równanie

$$t^3 + Pt^2 + Qt + U = 0,$$

w którym współczynniki byłyby ilościami stałymi.

Więc oznaczając przez m_1 , m_2 , m_3 , trzy pierwiastki tego równania, możnaby następnie brać $t = m_1$, $t = m_2$, $t = m_3$;

a że $du = t dx$ daje $u = \int t dx + s$, $y = e^u = e^{\int t dx + s}$,

mielibyśmy na y , trzy wartości, które oznaczą przez

$$y_1 = e^{m_1 x + s_1}; \quad y_2 = e^{m_2 x + s_2}, \quad y_3 = e^{m_3 x + s_3},$$

a które, gdy ilości stałe dowolne wyrazimy przez

$$e^{s_1}, e^{s_2}, e^{s_3},$$

zamieniają się na

$$y_1 = S_1 e^{m_1 x}, \quad y_2 = S_2 e^{m_2 x}, \quad y_3 = S_3 e^{m_3 x}.$$

309. Są to wartości tylko szczególne funkcyi y , bo zamykają po jednej tylko stałej; lecz dodając je, tworzymy całkę pierwotną zupełną

$$y = S_1 e^{m_1 x} + S_2 e^{m_2 x} + S_3 e^{m_3 x}.$$

Nie tylko łatwą jest rzeczą przekonać się, że to wyrażenie ilości y czyni zadość danemu zrównaniu różniczkowemu; lecz można w tym względzie ustanowić ogólne podanie, jakiebykolwiek były współczynniki P , Q , i U , to jest, że jeżeli trzema wartościami ilości y są y_1 , y_2 , y_3 , z których każda w szczególności czyni zadość zrównaniu różniczkowemu, summa ich $y_1 + y_2 + y_3$, wzięta za wyrażenie ilości y , również zadość uczyni, i gdyby nawet funkcyje y_1 , y_2 , y_3 , nie zamykały ilości stałych dowolnych, można jednak założyć

$$y = S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3;$$

bo różniczkując to wyrażenie trzy razy następie, kładąc w daném zrównaniu za y , dy , $d^2 y$, $d^3 y$, ich wartości, i zbierając wszystkie wyrazy, do których wchodzi też sama ilość stała, otrzymujemy wypadek

$$\begin{aligned} & S_1 (d^5 y_1 + P d^2 y_1 dx + Q dy_1 dx^2 + U y_1 dx^5) + \\ & + S_2 (d^5 y_2 + P d^2 y_2 dx + Q dy_2 dx^2 + U y_2 dx^5) + \\ & + S_3 (d^5 y_3 + P d^2 y_3 dx + Q dy_3 dx^2 + U y_3 dx^5), \end{aligned}$$

w którym funkcyja mnożąca każdą ilość stałą sama przez się jest równa zeru, bo założyliśmy, że funkcyje y_1 , y_2 , y_3 , osobno brane czynią zadosyć zrównaniu

$$d^5 y + P d^2 y dx + Q dy dx^2 + U y dx^5 = 0.$$

Łatwo postrzegamy, że dowodzenie to może stosować się do zrównania jakiegokolwiek rzędu

$$d^n y + P d^{n-1} y dx + Q d^{n-2} y dx^2 + \dots + U y dx^n = 0,$$

a zatem, jeżeli znajdziemy n wartości szczególnych

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n,$$

zadających zrównaniu, można będzie założyć

$$y = S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3 + \dots + S_n y_n,$$

gdzie $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$, oznaczają ilości stałe dowolne.

Równie, widoczną jest rzeczą, że jeżeli współczynniki $P, Q, \dots, U$, są stałe, otrzymamy wartości ilości y , zakładając $y = e^{mx}$, gdzie m , znaczy ilość stałą, co daje $dy = e^{mx} m dx$, $d^2 y = e^{mx} m^2 dx^2$, $\dots$, $d^n y = e^{mx} m^n dx^n$, wprowadzając te wartości w dane zrównanie i dzieląc je przez $e^{mx} dx^n$, wypada zrównanie

$$m^n + P m^{n-1} + Q m^{n-2} + \dots + U = 0,$$

nazywając pierwiastki tego zrównania przez $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, będzie

$$y_1 = e^{m_1 x}, y_2 = e^{m_2 x}, \dots, y_n = e^{m_n x},$$

a zatem

$$y = S_1 e^{m_1 x} + S_2 e^{m_2 x} + \dots + S_n e^{m_n x}.$$

310. Gdy niektóre z wartości m będą urojone, wyrażenie poprzedzające, nie przestając pomimo tego sprawdzać dane zrównanie różniczkowe, powinno być przekształcone na wyrażenie inne, w którym byłyby ilości tylko rzeczywiste; wykonamy to za pomocą wzorów z lic. 187.

Naprzykład m_1 i m_2 jeżeli wyrażają parę pierwiastków urojonych, będą pod kształtem

$$m_1 = \alpha + \beta \sqrt{-1}, \quad m_2 = \alpha - \beta \sqrt{-1},$$

i w wyrażeniu ogólném wartości y dają wyrazy

$$S_1 e^{\alpha x + \beta x \sqrt{-1}} + S_2 e^{\alpha x - \beta x \sqrt{-1}} = e^{\alpha x} (S_1 e^{\beta x \sqrt{-1}} + S_2 e^{-\beta x \sqrt{-1}});$$

a że (187)

$$e^{\beta x \sqrt{-1}} = \text{dost } \beta x + \text{wst } \beta x \sqrt{-1},$$

$$e^{-\beta x \sqrt{-1}} = \text{dost } \beta x - \text{wst } \beta x \sqrt{-1};$$

przeto wyrażenie poprzedzające zamienia się na

$$e^{\alpha x} \{ S_1 (S_1 + S_2) \text{dost } \beta x + (S_1 - S_2) \sqrt{-1} \text{wst } \beta x \};$$

a że ilości stałe, nie nadając im nawet żadnej wartości szczególnej, giną w równaniu różniczkowém, przeto można przypuścić wartość ich taką, aby ilości

$S_1 + S_2$, i $(S_1 - S_2) \sqrt{-1}$, były rzetelne, zatem uczynić

$$S_1 + S_2 = E_1, \quad (S_1 - S_2) \sqrt{-1} = E_2;$$

z tego na wyrażenie szukane wypada wartość zupełnie rzetelna,

$$e^{\alpha x} (E_1 \text{dost } \beta x + E_2 \text{wst } \beta x).$$

Można kształt tego ostatniego wyrażenia odmienić, kładąc

$$E_1 = p \cdot \text{wst } q, \quad E_2 = p \cdot \text{dost } q$$

z czego wypadnie

$$e^{\alpha x} (p \text{wst } q \text{dost } \beta x + p \text{dost } q \text{wst } \beta x) = p e^{\alpha x} \text{wst } (q + \beta x);$$

gdzie p i q są ilościami dowolnemi.

Tym samym sposobem należy postępować z innemi parami wyrazów urojonych, które się w wyrażeniu ogólném ilości y znajdować mogą.

311. Jeżeli niektóre z pierwiastków m_1, m_2 , i t. d., stają się równemi, wyrażenie całki traci swoją ogólność; gdy np. $m_1 = m_2$, dwa pierwsze wyrazy $S_1 e^{m_1 x} + S_2 e^{m_2 x}$ zamieniając się na $S_1 e^{m_2 x} + S_2 e^{m_1 x}$ łączą się

w jeden $(S_1 + S_2)e^{m_1 x}$, którego współczynnik $S_1 + S_2$, liczy się za jedną tylko ilość stałą.

Ze wszystkich sposobów, które podano dla zarządzenia tej nieprzyzwoitości, sposób podany przez D'alamberta (*D' Alembert*) zdaje się być najdowcipniejszym i najprostszym; jest on następny.

Zamiast przypuszczenia, iż pierwiastki m_1 i m_2 są równe, kładniemy

$$m_2 = m_1 + h,$$

co daje

$$\begin{aligned} S_1 e^{m_1 x} + S_2 e^{m_2 x} &= e^{m_1 x} (S_1 + S_2 e^{hx}) = \\ &= e^{m_1 x} \left\{ S_1 + S_2 \left(1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2 x^2}{1 \cdot 2} + \text{i t. d.} \right) \right\}, \end{aligned}$$

gdy ilość wykładniczą e^{hx} rozwiniemy na szereg (27);

$$\text{zakładając} \quad S_1 + S_2 = E_1, \quad S_2 h = E_2,$$

$$\text{wypada} \quad e^{m_1 x} \left\{ E_1 + E_2 x + E_2 \frac{hx^2}{2} + \text{i t. d.} \right\};$$

ilości S_1 i S_2 są dowolne, przeto E_1 i E_2 , również będą dowolne, a ponieważ wyrażenie $S_1 e^{m_1 x} + S_2 e^{m_2 x}$ zadość czyni danemu równaniu różniczkowemu, niezależnie od żadnej wartości ilości S_1 i S_2 (309), również zadość uczyni i rozwinięcie poprzedzające niezależnie od ilości stałych E_1 i E_2 , przy jakiejkolwiek bądź wartości ilości h . Więc zakładając $h=0$, wyrażenie poprzedzające sprowadzi się do

$$e^{m_1 x} (E_1 + E_2 x),$$

a zamykając dwie ilości stałe dowolne nie mogące się sprowadzić do jednej, jeszcze zadość uczyni danemu równaniu; ten zaś przypadek odpowiada zupełnie warunkowi iż $m_1 = m_2$:

Ztąd łatwo przechodzimy do przypadku, gdy $m_1 = m_2 = m_3$; bo zakładając naprzód $m_1 = m_2$, będziemy mieli

$$y = e^{m_1 x} (E_1 + E_2 x) + S_3 e^{m_3 x} + \dots + S_n e^{m_n x},$$

czyliąc $m_3 = m_1 + h$, wypada

$e^{m_1 x} (E_1 + E_2 x) + S_3 e^{m_3 x} = e^{m_1 x} (E_1 + E_2 x + S_3 e^{hx})$,
rozwinienie zaś wyrazu e^{hx} na szereg, zamienia na

$$e^{m_1 x} (E_1 + S_3 + (E_2 + S_3 h)x + S_3 \frac{h^2 x^2}{2} + S_3 \frac{h^3 x^3}{2 \cdot 3} + \text{i t. d.}),$$

a kładąc

$$E_1 + S_3 = F_1, \quad E_2 + S_3 h = F_2, \quad \frac{1}{2} S_3 h^2 = F_3,$$

otrzymamy wyrażenie

$$e^{m_1 x} (F_1 + F_2 x + F_3 x^2 + F_3 \frac{hx^3}{3} + \text{i t. d.}),$$

jeszcze zadość czyniące danemu równaniu różniczkowemu, jakiegokolwiek byłyby ilości stałe F_1, F_2, F_3 , i jakiegokolwiek byłaby mała wartość ilości h ; więc kładąc $h=0$, wypada na przypadek gdy jest $m_1 = m_2 = m_3$, wyrażenie

$$e^{m_1 x} (F_1 + F_2 x + F_3 x^2),$$

które zupełnie zastąpi część

$$S_1 e^{m_1 x} + S_2 e^{m_2 x} + S_3 e^{m_3 x}.$$

Tym sposobem należy postępować dalej, jakakolwiek byłaby liczba równych między sobą wartości m .

312. Równanie różniczkowe rzadko się może scałkować, gdy współczynniki są zmienne. Jednym ze znamienskich równań jest następujące:

$$(a+bx)^n d^n y + P(a+bx)^{n-1} d^{n-1} y dx + \\ + Q(a+bx)^{n-2} d^{n-2} y dx^2 + \dots + U y dx^n = 0.$$

w którym litery $P, Q, \dots U$, oznaczają ilości stałe. To zrównanie, kładąc w niem $(a+bx)=t$, z kąd wypada $dx = \frac{dt}{b}$, zamienia się na

$$t^n d^n y + \frac{P}{b} t^{n-1} d^{n-1} y dt + \frac{Q}{b^2} t^{n-2} d^{n-2} y dt^2 \dots + \frac{U}{b^n} y dt^n = 0,$$

temu zrównaniu czyni zadość $y=t^m$, gdzie m jest wykładnikiem nieoznaczonym, bo różniczka dt jest stałą równie jak dx , przeto podstawienie za y i jego współczynniki różniczkowe wartości wyrażonej przez funkcją ilości t , czyni zrównanie poprzedzające rozdzielnym przez $t^m dt^m$, co wykonawszy otrzymamy zrównanie

$$\left. \begin{aligned} m(m-1) \dots (m-n+1) + \frac{P}{b} m(m-1) \dots (m-n+2) \\ + \frac{Q}{b^2} m(m-1) \dots (m-n+3) + \dots + \frac{U}{b^n} \end{aligned} \right\} = 0,$$

z którego oznaczmy ilość m przez ilości stałe $n, b, P, Q, \dots U$.

313. Z łatwością możemy poprzedzające uwagi zastosować do zrównania drugiego rzędu

$$d^2 y + P dy dx + U y dx^2 = 0,$$

i z niego wyprowadzić następne wypadki, które poznać jest rzeczą pożyteczną.

1^od. Jeżeli y_1 i y_2 są dwiema wartościami, które zadość czynią temu zrównaniu, jego całka zupełna będzie

$$y = S_1 y_1 + S_2 y_2 \quad (309).$$

2^oe. Gdy P i Q są ilościami stałymi, mamy wtedy

$$y = S_1 e^{m_1 x} + S_2 e^{m_2 x},$$

ilości zaś m_1 i m_2 są pierwiastkami zrównania

$$m^2 + Pm + Q = 0.$$

3^ocie. Jeżeli te pierwiastki są urojone, wypada

$$y = p e^{\alpha x} \text{wsl}(q + \beta x) \quad (310).$$

4te. Jeżeli są równe, będzie

$$y = e^{m_1 x} (E_1 + E_1 x) \quad (311).$$

5te. Nakoniec zrównanie

$$(a+bx)^2 d^2 y + (a+bx) P dy dx + U y dx^2 = 0;$$

kładąc $a+bx=t$, zamienia się na

$$t^2 d^2 y + \frac{P}{b} t dy dt + \frac{U}{b^2} dt^2 = 0,$$

i zależy od zrównania

$$m(m-1) + \frac{P}{b} m + \frac{U}{b^2} = 0 \quad (312),$$

czyli od

$$m^2 + \left(\frac{P}{b} - 1 \right) m + \frac{U}{b^2} = 0,$$

i jeżeli dwiema wartościami ilości m są m_1 i m_2 , będzie całką danego zrównania

$$y = S_1 t^{m_1} + S_2 t^{m_2} = S_1 (a+bx)^{m_1} + S_2 (a+bx)^{m_2}.$$

314. Zrównanie

$$d^n y + P d^{n-1} y dx + Q d^{n-2} y dx^2 + \dots + U y dx^n = 0 \quad (1),$$

jest tylko szczególnym przypadkiem zrównania różniczkowego rzędu *n*tego pierwszego stopnia; albowiem zrównanie, aby ogólném było, powinno zamykać wyraz niezależący od y , zatem powinno mieć kształt

$$d^n y + P d^{n-1} y dx + Q d^{n-2} y dx^2 + \dots + U y dx^n = V dx^n \quad (2);$$

lecz całkowanie tego drugiego zrównania, łatwo się sprowadza do całkowania zrównania pierwszego, widzieliśmy przykład względem zrównania rzędu pierwszego pod licz. 285, i w zrównaniach jakiegokolwiek rzędu, dla otrzymania całki zupełnej zrównania (2), dość jest poznać liczbę n , wartości szczególnych ilości y zadość czyniących zrównaniu (1).

Lagranż, który odkrył to ważne twierdzenie, dowiódł je stosując ogólne wyrażenie ilości y odpowiadające zrównaniu (1), do zrównania (2), za pomocą różniczkowania ilości $S_1, S_2, \dots, S_n$.

Dla utwierdzenia wyobrażeń weźmiemy zrównanie trzeciego tylko rzędu; będzie wyrażenie

$$y = S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3,$$

w którym trzeba oznaczyć S_1, S_2, S_3 , w taki sposób, ażeby czyniły zadosyć zrównaniu

$$d^3 y + P d^2 y dx + Q dy dx^2 + U y dx^2 = V dx^3.$$

Jeżeli utworzymy następnie wartości $dy, d^2 y, d^3 y$ biorąc S_1, S_2, S_3 , za zmienne, znajdziemy naprzód

$$dy = S_1 dy_1 + S_2 dy_2 + S_3 dy_3 + y_1 dS_1 + y_2 dS_2 + y_3 dS_3;$$

ale że mamy trzy ilości nieoznaczone, a pytanie dane jeden tylko zawiera warunek, więc można drugimi dwiema rozrządzić podług upodobania, a zatem uczynić

$$y_1 dS_1 + y_2 dS_2 + y_3 dS_3 = 0.$$

co daje

$$dy = S_1 dy_1 + S_2 dy_2 + S_3 dy_3,$$

jak gdyby ilości S_1, S_2, S_3 , nie były zmieniane. Różniczkując tę wartość będzie

$$d^2 y = S_1 d^2 y_1 + S_2 d^2 y_2 + S_3 d^2 y_3 + dy_1 dS_1 + dy_2 dS_2 + dy_3 dS_3;$$

założywszy potem $dy_1 dS_1 + dy_2 dS_2 + dy_3 dS_3 = 0$

zostanie $d^2 y = S_1 d^2 y_1 + S_2 d^2 y_2 + S_3 d^2 y_3$.

zład zaś wyciągniemy

$$d^3 y = S_1 d^3 y_1 + S_2 d^3 y_2 + S_3 d^3 y_3 + d^2 y_1 dS_1 + d^2 y_2 dS_2 + d^2 y_3 dS_3.$$

Podstawując wartości za $y, dy, d^2 y$ i $d^3 y$, dane zrównanie zamieni się na

$$\left. \begin{aligned} &S_1\{d^5y_1 + Pd^2y_1dx + Qdy_1dx^2 + Uy_1dx^5\} \\ &+ S_2\{d^5y_2 + Pd^2y_2dx + Qdy_2dx^2 + Uy_2dx^5\} \\ &+ S_3\{d^5y_3 + Pd^2y_3dx + Qdy_3dx^2 + Uy_3dx^5\} \\ &+ d^2y_1dS_1 + d^2y_2dS_2 + d^2y_3dS_3 \end{aligned} \right\} = Vdx^5.$$

to wyrażenie zostanie przywiedzioném do

$$d^2y_1dS_1 + d^2y_2dS_2 + d^2y_3dS_3 = Vdx^5,$$

bo funkcyje y_1, y_2, y_3 , czynią zadosyć zrównaniu

$$d^5y + Pd^2ydx + Qdydx^2 + Uydx^5 = 0,$$

a zatem między różniczkami dS_1, dS_2 i dS_3 będziemy mieli trzy równania

$$y_1dS_1 + y_2dS_2 + y_3dS_3 = 0,$$

$$dy_1dS_1 + dy_2dS_2 + dy_3dS_3 = 0,$$

$$d^2y_1dS_1 + d^2y_2dS_2 + d^2y_3dS_3 = Vdx^5,$$

z których wyciągniemy wartość każdej różniczki, wyrażonej przez x i dx , gdy wartości y_1, y_2, y_3 i t. d.: będą wiadome. Otrzymamy przez rugowanie wypadki pod następującą postacią

$$dS_1 = X_1dx_1, \quad dS_2 = X_2dx_1, \quad dS_3 = X_3dx_1,$$

z ką

$$S_1 = \int X_1dx + s_1, \quad S_2 = \int X_2dx + s_2, \quad S_3 = \int X_3dx + s_3.$$

a zatem

$$y = y_1\{\int X_1dx + s_1\} + y_2\{\int X_2dx + s_2\} + y_3\{\int X_3dx + s_3\};$$

będzie całką zupełną danego zrównania.

Gdybyśmy dwie tylko znali szczegulne wartości ilości y , tedy dane zrównanie mogłoby się tylko scałkować za pomocą zrównania drugiego rzędu. Jakoż uczyniwszy $y_1dS_1 + y_2dS_2 = 0$, otrzymalibyśmy

$$y = S_1y_1 + S_2y_2, \quad dy = S_1dy_1 + S_2dy_2,$$

ale że w tym razie mielibyśmy do naszego roz-

rządzenia jedną tylko ze dwu ilości S_1 , S_2 , dla tego wypadłoby wziąć zupełne rozwinięcie ilości d^2y , to jest

$$d^2y = S_1 d^2y_1 + S_2 d^2y_2 + dy_1 dS_1 + dy_2 dS_2,$$

a ztąd

$$d^3y = S_1 d^3y_1 + S_2 d^3y_2 + 2d^2y_1 dS_1 + 2d^2y_2 dS_2 + dy_1 d^2S_1 + dy_2 d^2S_2.$$

Podstawując je w daném zrównaniu i upraszczając podanym wyżej sposobem, otrzymalibyśmy zrównanie

$$\left. \begin{aligned} dy_1 dS_1^2 + dy_2 d^2S_2 + 2d^2y_1 dS_1 + 2d^2y_2 dS_2 \\ + Pdy_1 dS_1 dx + Pdy_2 dS_2 dx \end{aligned} \right\} = Vdx^3,$$

z którego wyrzucimy dS_2 i d^2S_2 , za pomocą ich wartości wyciągniętych ze zrównania $y_1 dS_1 + y_2 dS_2 = 0$, i z jego różniczki; tym sposobem otrzymane zrównanie zawierając, tylko d^2S_1 , dS_1 i funkcyę ilości x , da się przywieść do zrównania pierwszego rzędu (306).

Nakoniec gdybyśmy jedną tylko mieli wartość ilości y , wpadlibyśmy na zrównanie posłtkowe trzeciego rzędu, mogące się przywieść do rzędu drugiego; o czém łatwo się przekonamy, wkładając w dane zrównanie ilości

$$S_1 y_1, S_1 dy_1 + y_1 dS_1, S_1 d^2y_1 + 2dy_1 dS_1 + y_1 d^2S_1,$$

$$S_1 d^3y_1 + 3d^2y_1 dS_1 + 3dy_1 d^2S_1 + y_1 d^3S_1,$$

za y, dy, d^2y, d^3y :

zrównanie ztąd wynikające, będzie się mogło sprowadzić do

$$\left. \begin{aligned} y_1 d^3S_1 + 3dy_1 d^2S_1 + 3d^2y_1 dS_1 \\ + Py_1 d^2S_1 dx + 2Pdy_1 dS_1 dx \\ + Qy_1 dS_1 dx^2 \end{aligned} \right\} = Vdx^3.$$

Poprzedzając rachunki, kładąc w nich $V=0$, pokazują, jak za pomocą dwóch lub jednej tylko szczegó-

nej wartości funkcyi y , możemy przyjść do ogólnego jej wyrażenia w równaniu

$$d^5y + Pd^2ydx + Qdydx^2 + Uydx^5 = 0.$$

złąd wynika to ogólne twierdzenie na wszystkie zrównania różniczkowe pierwszego rzędu:

Jeżeli będziemy mieli liczbę n wartości szczególnych ilości y zrównania (1), wyciągniemy złąd bezśrednie wyrażenie ogólne téjże funkcyi na zrównania (1) i (2); i w przypadku, w którymbyśmy znali tylko $n-1$ wartości szczególnych, przyszlibyśmy do tegoż samego wyrażenia całkując zrównanie pierwszego stopnia i pierwszego rzędu.

315. Weźmy za przykład zrównanie drugiego rzędu

$$d^2y + Pdydx + Uydx^2 = Vdx^2,$$

oznaczając przez y_1, y_2 , wartości szczególne ilości y , które zadość czynią zrównaniu

$$d^2y + Pdydx + Uydx^2 = 0,$$

całką zupełną danego zrównania będzie

$$y = S_1y_1 + S_2y_2,$$

ilości zaś S_1 , i S_2 , zostaną oznaczone przez zrównania

$$y_1dS_1 + y_2dS_2 = 0,$$

$$dy_1dS_1 + dy_2dS_2 = Vdx^2 \quad (114).$$

Jeżeli założymy, że współczynniki P i U są stałe, a V jest funkcją jakąkolwiek ilości x , będziemy mieli

$$y_1 = e^{m_1x}, \quad y_2 = e^{m_2x} \quad (315);$$

a złatem

$$e^{m_1x}dS_1 + e^{m_2x}dS_2 = 0,$$

$$e^{m_1x}m_1dS_1 + e^{m_2x}m_2dS_2 = Vdx^2,$$

złąd wyprowadzimy

$$dS_1 = \frac{Ve^{-m_1x}dx}{m_1 - m_2}, \quad dS_2 = \frac{Ve^{-m_2x}dx}{m_2 - m_1};$$

potém

$$S_1 = E_1 + \frac{\int V e^{-m_1 x} dx}{m_1 - m_2}, \quad S_2 = E_2 + \frac{\int V e^{-m_2 x} dx}{m_2 - m_1},$$

nakoniec dając ilościom stałym dowolnym E_1 i E_2 ,
spólny dzielnik $m_1 - m_2$,

$$y = \frac{e^{m_1 x}(E_1 + \int V e^{-m_1 x} dx) - e^{m_2 x}(E_2 + \int V e^{-m_2 x} dx)}{m_1 - m_2},$$

czyli przypuszczając że każda całka zamyka włącznie
swoję ilość stałą dowolną

$$y = \frac{e^{m_1 x} \int V e^{-m_1 x} dx - e^{m_2 x} \int V e^{-m_2 x} dx}{m_1 - m_2}.$$

316. Ten wzór ulega okolicznościom rodzącym się
z natury wartości m_1 i m_2 (330, 311).

Można ograniczyć jego użycie do przypadku, w którym ilości m_1 i m_2 , są rzetelne nierówne, a utworzyć
bezsrednie wyrażenia ilości y na każdy przypadek
z dwóch innych, używając wartości ilości y_1 , i y_2 szczególnych temu przypadkowi. Naprzykład gdy m_1 i m_2 są
urojone, wyciągniemy z wartości zupełnej

$$y = e^x (E_1 \text{ dost } \beta x + E_2 \text{ wst } \beta x),$$

przytoczonej pod liczbą 310 wartości szczególne

$$y_1 = e^{ax} \text{ dost } \beta x, \quad y_2 = e^{ax} \text{ wst } \beta x,$$

za pomocą których łatwo byłoby otrzymać całkę zupełną zrównania danego; lecz jest prostszą rzeczą zrobić we wzorze znalezionym pod liczbą poprzedzającą
przerabianie, które zagubiłoby ilości urojone, to jest
zamienić w nim

$$m_1 \text{ na } \alpha + \beta \sqrt{-1}, \quad m_2 \text{ na } \alpha - \beta \sqrt{-1},$$

a potem za ilości z wykładnikami urojonymi położyć
wyrażenia zamykające wstawy i dostawy. Po czém
otrzymamy naprzód

$$y = \frac{1}{2\beta\sqrt{-1}} \left\{ e^{ax+\beta x\sqrt{-1}} \int V e^{-ax-\beta x\sqrt{-1}} dx - e^{ax-\beta x\sqrt{-1}} \int V e^{-ax+\beta x\sqrt{-1}} dx \right\} =$$

$$= \frac{e^{ax}}{2\beta\sqrt{-1}} \left\{ (\text{dost } \beta x + \sqrt{-1} \text{ wst } \beta x) \int V e^{-ax} (\text{dost } \beta x - \sqrt{-1} \text{ wst } \beta x) dx, \right.$$

$$\left. - (\text{dost } \beta x - \sqrt{-1} \text{ wst } \beta x) \int V e^{-ax} (\text{dost } \beta x + \sqrt{-1} \text{ wst } \beta x) dx \right\};$$

potém skuteczniejszając wskazane mnożenia i upraszczając, mnożnik $2\sqrt{-1}$ staje się spólnym licznikowi i mianownikowi ułamku, i przychodzimy do wyrażenia rzetelnego

$$y = \frac{e^{ax}}{\beta} \left\{ \text{wst } \beta x \int V e^{-ax} dx \text{ dost } \beta x - \text{dost } \beta x \int V e^{-ax} dx \text{ wst } \beta x \right\}$$

Gdyby było $V=0$, należałoby na miejscu każdej całki położyć ilość stałą dowolną, i mielibyśmy tylko

$$y = \frac{e^{ax}}{\beta} \left\{ E_1 \text{ wst } \beta x - E_2 \text{ dost } \beta x \right\},$$

co należy do wypadku pod liczbą 510.

W zastosowaniach analizy do fizyki niebieskiej, natrafiamy często na zrównanie

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 y = V,$$

dla którego służy

$$m = \pm a\sqrt{-1} \quad (513),$$

z kądem

$$a=0, \quad \beta=a,$$

zatem wartość ilości y po przywróceniu ilości stałych dowolnych będzie

$$y = p \text{ dost } ax + q \text{ wst } ax + \frac{\text{wst } ax \int V dx \text{ dost } ax - \text{dost } ax \int V dx \text{ wst } ax}{a},$$

funkcja V ma pospolicie kształt

$$A + B \text{ dost } \beta x + C \text{ dost } \gamma x + \text{ i t. d.},$$

gdzie A, B, C i t. d. są ilości stałe dowolne, β, γ , i t. d. oznaczają liczby całe; a całkowania wskazane uskuteczniają się sposobem podanym pod liczbą 218.

517. Jeżeli pierwiastki m_1 i m_2 , są równe, wyrażenie

$$y = \frac{e^{m_1 x} \int V e^{-m_1 x} dx - e^{-m_2 x} \int V e^{-m_2 x} dx}{m_1 - m_2},$$

sprowadza się do 0; dla znalezienia prawdziwej jego w tym razie wartości, należy zróżniczkować licznik i mianownik ułamku biorąc m_1 za ilość zmienną, a względem całek zachowując prawo pod liczbą 281 podane, co daje

$$y = e^{m_1 x} (x \int V e^{-m_1 x} dx - \int V e^{-m_1 x} x dx).$$

To wyrażenie zamyka w sobie wyrażenie z pod liczbą 511, albowiem gdy jest $V=0$, całki sprowadzają się do ich ilości stałych dowolnych, i wypada

$$y = e^{m_2 x} (E_1 x - E_2).$$

518. Gdy mamy liczbę m równań różniczkowych, zawierających w sobie liczbę $m+1$ ilości zmiennych, jedna z tych zmiennych będzie niezależną, inne zaś m będą jej funkcyami. Gdy te ostatnie i ich różniczki nie przechodzą pierwszego stopnia, w podanych równaniach, które będą wtenczas pierwszego stopnia, będzie można sposobem pod liczbą 153 wskazanym, przyjść do równania różniczkowego pierwszego stopnia między jedną z funkcyj oznaczyć się mających, i zmienną wziętą za niezależną; lecz można czasem uniknąć roboty rugowania, całkując razem dane równania.

Zrównania różniczkowe, gdy są pierwszego tylko rzędu i zamykają trzy ilości zmienne, mogą być wyrażone przez

$$Mdu + Ndx + (Pu + Qx)dt = Rdt,$$

$$M'du + N'dx + (P'u + Q'x)dt = R'dt;$$

lecz jeżeli wyrzucimy kolejno du i dx , i tę różniczkę,

która zostaje uwolniona od jej współczynnika, wypadające równania wezmą kształt

$$du + (Pu + Qx)dt = Tdt,$$

$$dx + (P'u + Q'x)dt = T'dt,$$

gdzie P, Q, T, P', Q', T' , wyrażają nowe funkcje ilości z pierwszych pochodzące. Pod tym ostatnim kształtem równania różniczkowe jednocześnie roztrząsał *d'Alembert* sposobem bardzo dowcipnym, który tu, jak go przedstawuje *Ampère*, wyłożymy.

Mnożąc drugie równanie przez mnożnik θ , i dodając mnogość do pierwszego, wypadają

$$du + \theta dx + \{(P + P'\theta)u + (Q + Q'\theta)x\}dt = (T + T'\theta)dt;$$

kładąc potem $u + \theta x = z$, będziemy mieli

$$du + \theta dx = dz - x d\theta, \quad u = z - \theta x,$$

za pomocą tych wartości, poprzedzające równanie przerobione zamieni się na

$$dz + (P + P'\theta)zdt - x[d\theta + \{(P + P'\theta)\theta - (Q + Q'\theta)\}dt] = (T + T'\theta)dt;$$

nakoniec równając mnożnik ilości x z zerem, podzielimy równanie poprzedzające na dwa następne

$$dz + (P + P'\theta)zdt = (T + T'\theta)dt \quad (a),$$

$$d\theta + \{(P + P'\theta)\theta - (Q + Q'\theta)\}dt = 0. \quad (b),$$

drugie z tych równań zamyka dwie tylko ilości zmienne θ i t . Jeżeli będziemy mogli znaleźć wartość ilości θ zadość czyniącą temu równaniu, wtedy wartość ilości θ wprowadzona w równanie pierwsze zamieni je na inne zamykające tylko ilości z i t , które będąc pierwszego stopnia zcałkuje się zupełnie podług sposobu pod liczbą 285 wyłożonego.

Gdy współczynniki P, P', Q i Q' są stałe, można położyć

$$d\theta = 0, \quad (P + P'\theta)\theta - (Q + Q'\theta) = 0,$$

w tym razie zrównanie służące do oznaczenia ilości θ jest stopnia drugiego, i daje dwie jej wartości, które wyrażmy przez θ_1 i θ_2 .

W témże przypuszczeniu, zrównanie (a), kładąc w niem dla skrócenia

$$P + P'\theta = m, \quad T + T'\theta = V,$$

ma za całość zrównanie

$$z = e^{-mt} (\int e^{mt} V dt + S),$$

z którego, kładąc w niem za θ , kolejno dwie wartości θ_1 i θ_2 , wyprowadzamy dwa zrównania następne:

$$u + \theta_1 x = e^{-m_1 t} (\int e^{m_1 t} V_1 dt + S_1),$$

$$u + \theta_2 x = e^{-m_2 t} (\int e^{m_2 t} V_2 dt + S_2),$$

więc zadanie jest zupełnie rozwiązane, bo między ilościami zmiennymi u , x , i t , mamy dwa zrównania pierwotne, z których każde zamyka jedną ilość stałą dowolną.

319. Przejdźmy do zrównań zamykających cztery ilości zmienne, którym zawsze dać można kształt następny

$$du + (Pu + Qx + Ry)dt = Tdt,$$

$$dx + (P'u + Q'x + R'y)dt = T'dt,$$

$$dy + (P''u + Q''x + R''y)dt = T''dt.$$

Jeżeli rozmnożymy drugie zrównanie przez θ , trzecie przez θ' , i tak rozmnożone dodamy do pierwszego i założymy

$$u + \theta x + \theta' y = z,$$

z kąd wypada

$$du + \theta dx + \theta' dy = dz - x d\theta - y d\theta',$$

$$u = z - \theta x - \theta' y$$

potém wartości te wprowadzimy w zrównanie z dodania wypadłe, i zbiory wyrazów mnożone osobno

przez x , a osobno przez y , założymy równe zeru, podzielimy rzeczone równanie na trzy następne

$$dz + (P + P'\theta + P''\theta')z dt = (T + T'\theta + T''\theta')dt \quad (a),$$

$$d\theta + \{(P + P'\theta + P''\theta')\theta - (Q + Q'\theta + Q''\theta')\}dt = 0 \quad (b),$$

$$d\theta' + \{(P + P'\theta + P''\theta')\theta' - (R + R'\theta + R''\theta')\}dt = 0 \quad (b');$$

a gdy będziemy mogli znaleźć wartości θ i θ' zadość czyniące równaniom (b) i (b') , za pomocą tych wartości zamienimy równanie (a) na równanie między ilościami zmiennymi z i t , które scałkuje się jak pod liczbą poprzedzającą.

Jeżeli współczynniki funkcyj u , x , i y są ilościami stałymi, można założyć $d\theta = 0$ $d\theta' = 0$, ztąd wypadnie

$$(P + P'\theta + P''\theta')\theta - (Q + Q'\theta + Q''\theta') = 0,$$

$$(P + P'\theta + P''\theta')\theta' - (R + R'\theta + R''\theta') = 0;$$

kładąc $P + P'\theta + P''\theta' = m$, równania poprzedzające zamieniają się na

$$(m - Q')\theta - Q''\theta' = Q,$$

$$(m - R')\theta' - R''\theta = R,$$

z których wyprowadzone wartości ilości θ i θ' , podstawione w wyrażenie ilości m , przywiodą do równania, w którym ilość m będzie w stopniu trzecim; każda z jej wartości da jedną wartość mnożników θ i θ' ; jeżeli oznaczymy te wartości przez skazówki dolne, i założymy $T + T'\theta + T''\theta' = V$, mieć będziemy trzy układy ilości

$$\theta_1, \theta'_1, m_1, V_1; \quad \theta_2, \theta'_2, m_2, V_2; \quad \theta_3, \theta'_3, m_3, V_3;$$

podstawivszy je w całkę równania (a) , która jest $z = e^{-mt} \int e^{mt} V dt + S$, otrzymamy trzy równania pierwotne

$$u + \theta_1 x + \theta'_1 y = e^{-m_1 t} \left(\int e^{m_1 t} V_1 dt + S_1 \right),$$

$$u + \theta_2 x + \theta'_2 y = e^{-m_2 t} \left(\int e^{m_2 t} V_2 dt + S_2 \right),$$

$$u + \theta_3 x + \theta'_3 y = e^{-m_3 t} \left(\int e^{m_3 t} V_3 dt + S_3 \right).$$

Można teraz rozciągnąć to postępowanie do takiej liczby zrównań, do jakiej zechcemy. Dla uzupełnienia jego wykładu, należałoby roztrząsać przypadki, w których wartości θ i θ' stają się urojonémi, albo równémi rzetelnémi, lecz te szczegóły, które zajęłyby tu wiele miejsca, mogą być wyprowadzone z uwag wyłożonych pod liczbami 310 i 311.

320. *D'Alembert* zastosowyywa swoje postępowanie do zrównań pierwszego stopnia, jakiegokolwiek rzędu, i dla tego sprowadza je do rzędu pierwszego sposobem następującym.

Mając np. dwa zrównania kształtu

$$d^2u + (Adu + Bdx)dt + (Cu + Dx)dt^2 = Tdt^2,$$

$$d^2x + (A'du + B'dx)dt + (C'u + D'x)dt^2 = T'dt^2,$$

czyni $du = pdt$, $dx = qdt$; a zatém ma między pięcią ilościami zmiennémi p , q , t , u , i x , cztery zrównania pierwszego rzędu

$$dp + (Ap + Bq + Cu + Dx)dt = Tdt,$$

$$dq + (A'p + B'q + C'u + D'x)dt = T'dt,$$

$$du - pdt = 0,$$

$$dx - qdt = 0,$$

z którými można postępować sposobem wyłożonym pod liczbą poprzedzającą.

Tego samego sposobu używał do zrównań zamykających dwie tylko ilości zmienne; lecz sposób postępowania pod licz. 314, jest prostszy i gładszy.

O rozwiązaniach czyli odpowiedziach szczególnych zrównań różniczkowych pierwszego rzędu.

321. Widzieliśmy pod licz. 297, że zrównanie różniczkowe dało nam rozwiązanie szczególne, czyli odpowiedź

szczególną, która nie pochodziła od całki zupełnej, i można niekiedy otrzymać zrównania pierwotne bez ilości stałych dowolnych, zadosć czyniące zrównaniu różniczkowemu, którego całka zupełna nie jest znajoma: te dwie okoliczności dają powód do następujących pytań. *Zkąd pochodzą odpowiedzi szczególne? i jak rozpoznać, czy zrównanie pierwotne czyniące zadosć danemu zrównaniu różniczkowemu, wynika lub nie z jego całki?* zastanówmy się teraz nad temi pytaniami.

Związek, który zachodzi między zrównaniem różniczkowem i jego pierwotnem, jest taki, że to ostatnie odpowiada nieograniczonej liczbie zrównań pierwotnych, którebyśmy otrzymali nadając ilości stałej dowolnej, wszystkie pomyśleć się mogące wartości, a z którychby każde uczyniło zadosć zrównaniu różniczkowemu (53). Te różne zrównania pierwotne, nazywają się *całkami szczególnymi* (*intégrales particulières*), ponieważ są szczególnymi przypadkami całki zupełnej. *Odpowiedzi zaś szczególne*, których liczba jest zawsze ograniczona, są to zrównania pierwotne istotnie się różniące od całek szczególnych. Odpowiedzi te są dwojakiego gatunku: jedne są to tylko mnożniki danego zrównania różniczkowego, do których nie wchodzi dx , i dy , a które uczynione równe zeru, dają nam zrównania pierwotne, i wprowadzają między x , i y , takie związki, które czynią zrównanie dane tosamém. Szukając mnożników wspólnych funkcyj M , i N , znajdziemy tego gatunku odpowiedzi, które znajdować się mogą w zrównaniu

$$Mdx + Ndy = 0.$$

Drugi gatunek odpowiedzi szczególnych, których przykład widzieliśmy na zrównaniu $ydx - xdy = n\sqrt{dx^2 + dy^2}$ (297), ściśle się wiąże ze zrównaniem różniczkowem, od którego pochodzi, chociaż nie daje się podciągnąć pod żaden przypadek całki zupełnej, jaką-

kolwiekbyśmy wartość nadali ilości stałej dowolnej, o czém się łatwo przekonać porównywając zrównania

$$y = sx + n\sqrt{1+s^2}, \text{ i } x^2 + y^2 = n^2.$$

Oto teorya, którą Lagranż w r. 1774 podał o szczególnych odpowiedziach mianych przed nim za sprzeczność w rachunku całkowym (*).

§22. Odpowiedzi szczegulne, chociaż nie są zawarte w całce zupełnej, mogą się jednak z niej wyciągnąć, biorąc ilość stałą za zmienną. Jakoż niech będzie $U=0$, zrównanie pierwotne zawierające w sobie zmienne x, y , i ilość stałą s ; zrównanie różniczkowe odpowiadające, które nazwijmy $V=0$, będzie wypadkiem po wyrugowaniu ilości stałej między zrównaniem $U=0$, i $\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy = 0$ (53); lecz przypuściwszy, że s jest funkcją ilości x , nadamy zrównaniu $U=0$ tak rozciągle znaczenie, że będzie mogło wyrażać jakiegokolwiek zrównanie z dwiema zmiennymi, a zatem wszystkie także odpowiedzi szczegulne zrównania $V=0$. To założywszy ponieważ wartość, którą zrównanie $V=0$ daje na ilość y , i jej różniczka, którą wyrażę przez $dy = p dx$, zadość czynią zrównaniu $V=0$, niezależnie od ilości s , możnaby brać ilość s za zmienną, byleby prawo jej zmienności było takie, ażeby zawsze było $dy = p dx$. Owoż, chociaż uważając s i x za zmien-

(*) Nazwał on je *całkami szczegulnemi* (*intégrales particulières*), imię zaś *odpowiedzi szczegulnych* nadał rozmaitym szczegulnym przypadkóm całki zupełnej. Laplace, który pierwiej jeszcze niż *Lagrange* trudnił się tymże samym przedmiotem z szczęśliwym skutkiem, używa tych nazwisk w przeciwném znaczeniu. I my za nim tu poszliśmy, gdyż zdaje się, że zrównania pierwotne, które czynią zadość zrównanióm różniczkowym, nie będąc zajęte w ich całce zupełnej, i nieotrzymując się za pomocą całkowania, nie powinny nosić nazwiska, któreby też działania przypominało.

ne, otrzymujemy w ogólności $dy = p dx + q ds$, gdzie p i q są funkcyami ilości x , i s , jednak będziemy mieli tylko $dy = p dx$, jeżeli $q = 0$; wyciągnawszy więc z tego zrównania wartość na s , i włożywszy ją w $U = 0$, otrzymamy wypadek czyniący także zadosyć zrównaniu różniczkowemu $V = 0$.

W tém co poprzedziło, uważaliśmy y jako funkcyą ilości x , i s ; biorąc z kolei x za funkcyą y , i s , będziemy mieli $dx = m dy$, a rozumując jak wyżej, znajdziemy, że gdy wartość dx , otrzymana przez względ na zmienność s , jest $dx = m dy + n ds$, zrównanie ztąd wynikające przez wyrugowanie ilości s między $n = 0$, i $U = 0$, uczyni także zadosyć zrównaniu różniczkowemu $V = 0$.

Można te dwa sposoby, zając w jednym, przez zagubienie mianowników w zrównaniu

$$\frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy + \frac{dU}{ds} ds = 0,$$

otrzymaném przez różniczkowanie $U = 0$, biorąc x , y , i s za zmienne. To zrównanie wyrazi się wtenczas pod postacią

$$M dx + N dy + P ds = 0,$$

$$\text{ztąd} \quad dy = -\frac{M}{N} dx - \frac{P}{N} ds, \quad dx = -\frac{N}{M} dy - \frac{P}{M} ds,$$

a jeżeli funkcyę całkowitą M , N , są algebraiczne, albo choćby były przestępne, jeżeli tylko nie stają się nieskończenie wielkiemi na żadną wartość ilości s , wyraz mnożony przez ds nie zginie, chyba że będzie $P = 0$; ten ostatni warunek da nam wszystko, co z działań wyżej wskazanych można wyprowadzić.

Zrównania, do których te postępowania przywodzą, nie są konieczniami odpowiedziami szczególniemi zrównania $V = 0$, lecz ażeby się w tém nie pomylić, należy roztrząsnąć różne okoliczności, które ze zrównania $P = 0$ mogą wyniknąć.

Widoczną naprzód jest rzeczą, iż to zrównanie, jeżeli na s da wartość stałą, przywiedzie nas tylko do całki szczególnej, lecz jeżeli ta wartość jest zmienną, nie możemy zaraz wnosić, że wypadek po wyrugowaniu ilości s między zrównaniami $P=0$, i $U=0$ otrzymany, będzie koniecznie rozwiązaniem szczególnym; bo może wydarzyć się, że zrównanie wypadkowe będzie tylko przypadkiem szczególnym zrównania $U=0$. Dla poznania tego zdarzenia, trzeba wyrugować jedną ilość zmienną między nowym zrównaniem i zrównaniem $U=0$. Jeżeli druga ilość zmienna może zginąć oznaczając s przez ilości stałe, w takowym razie otrzymujemy tylko całkę szczególną; gdybyśmy zaś otrzymali $s=0$, z tego byśmy wniesli, że zrównanie $P=0$, jest mnożnikiem zrównania $U=0$, niezależącym od s , a zatem obcym dla zrównania różniczek $V=0$.

Gdy ilość s w zrównaniu $U=0$, jest tylko w stopniu pierwszym, wtedy nie wchodzi zgoła do zrównania $P=0$, które zamyka tylko ilości zmienné x i y , i samo przez się czyni zadość zrównaniu $V=0$, ponieważ $U=0$ mając kształt $Q+sP=0$, zamienia zrównanie $V=0$ na $PdQ-QdP=0$, lecz łatwo jest postrzec, że zrównanie $P=0$, jest tylko całką szczególną odpowiadającą $s=\infty$.

323. Przystosujmy teorią tę do zrównania

$$ydx - xdy = n\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

którego całka zupełna jest

$$y - sx = n\sqrt{1 + s^2} \quad (297).$$

Biorąc x, y, s , za zmienne różniczkując i przywodząc wszystkie wyrazy do jednego mianownika, otrzymamy

$$sdx\sqrt{1+s^2} - dy\sqrt{1+s^2} + (x\sqrt{1+s^2} + ns)ds = 0;$$

równając z zerem spółczynnik różniczki ds mamy,

$x\sqrt{1+s^2}+ns=0$, z kąd $s=\frac{x}{\sqrt{n^2-x^2}}$. Ta wartość

zamienia zrównanie $y-sx=n\sqrt{1+s^2}$, na $x^2+y^2=n^2$, i daje odpowiedź szczególną wyżej otrzymaną (297).

Wszystkie równania mające postać $y=px+P$ (297), pod którą jest zajęte i poprzedzające, mają także podobną odpowiedź szczególną. Całka ich zupełna, wyrażona przez $y=sx+S$, gdzie S jest funkcją ilości s , jak P funkcją ilości p , daje

$$sdx - dy + \left(x + \frac{dS}{ds}\right)ds = 0;$$

założywszy $x + \frac{dS}{ds} = 0$, wyciągniemy ztąd wartość s , od której zależy odpowiedź szczególna. Mieliśmy już tę odpowiedź, gdyśmy całkowali zrównanie $y=px+P$; gdyż różniczkując je przyszliśmy do zrównania złożonego z dwóch mnożników,

$$x + \frac{dP}{dp} = 0, \text{ i } dp = 0,$$

a wypadek otrzymany przez wyrugowanie p między

$$y=px+P, \text{ i } x + \frac{dP}{dp} = 0,$$

będzie tenże sam co i z wyrugowania s między

$$y=sx+S, \text{ i } x + \frac{dS}{ds} = 0.$$

Zrównania $y=px+P$ postrzeżone były naprzód przez *Clairaut*, tak z przyczyny, że się łatwo dają całkować po nowém zróżniczkowaniu, jako też ze względu na odpowiedź szczególną, którą takowe różniczkowanie daje natychmiast.

Weźmy jeszcze zrównanie

$$xdx + ydy = dy\sqrt{x^2+y^2-a^2};$$

którego całka zupełna jest

$$\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = y + s, \text{ czyli } x^2 - 2sy - s^2 - a^2 = 0,$$

Różniczkując znajdujemy

$$x dx - s dy - (y + s) ds = 0,$$

z kąd wypada

$$y + s = 0, \text{ } s = -y,$$

przez co zrównanie pierwotne zamienia się na

$$\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = 0, \text{ czyli } x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

które nie może wynikać z całki ogólnej przez żadną wartość ilości stałej s , jest rozwiązaniem szczególnym.

Nakoniec niech będzie zrównanie pierwotne

$$(x^2 + y^2 - a^2)(y^2 - 2sy) + (x^2 - a^2)s^2 = 0,$$

postępując z niem jak z poprzedzającymi znajdujemy wartość

$$s = \frac{(x^2 + y^2 - a^2)y}{x^2 - a^2},$$

która chociaż jest zmienna, nie prowadzi do rozwiązania szczególnego, bo kładąc ją za s w zrównanie pierwotne otrzymamy zrównania

$$y = 0, \text{ albo } x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

które bezpośrednio wyprowadzimy ze zrównania założonego, kładąc w niem $s = 0$, zatem nie są odpowiedziami szczególnymi, lecz tylko całkami szczególnymi zrównania różniczkowego przez wyrugowanie ilości stałej dowolnej s powstałego.

324. Własność ogólna odpowiedzi szczególnych, która na drugim przykładzie łatwo się postrzec daje, jest ta, że zrównanie różniczkowe może być tak przygotowane, że odpowiedź szczególna staje się jego mnożnikiem. Jakoż założywszy

otrzymamy

$$\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = u,$$

$$xdx + ydy = udu,$$

a zrównanie dane zamieni się na

$$udu - udy = 0.$$

Gdybyśmy zaś wzięli $u = x^2 + y^2 - a^2$, znak pierwiastku zostałby w zrównaniu przerobioném które byłoby

$$du - 2dy\sqrt{u} = 0;$$

różniczkując je przyszlubiśmy do

$$d^2u - 2d^2y\sqrt{u} - \frac{dydu}{\sqrt{u}} = 0,$$

albo mnożąc wszystko przez $\sqrt{u}$, otrzymalibyśmy zrównanie

$$d^2u\sqrt{u} - 2ud^2y - dy \cdot du = 0,$$

które byłoby jeszcze sprawdzone czyniąc $u=0$. Ponieważ tak daleko możemy ciągnąć te przerabiania, ile sami zechcemy, z tego wypada że są sposoby, za pomocą których można przygotować wszystkie różniczki danego zrównania tak, ażeby odpowiedź szczególna czyniła im zadosyć, co by bez takowego przygotowania nie miało miejsca; bo jeżeli, biorąc s za zmienną, i

czyniąc $\frac{dy}{ds} = 0$, otrzymamy tak na przypadek odpowiedzi szczególnej jakoteż i całki zupełnej, $dy = p dx$, wtedy wartość d^2y w przypadku odpowiedzi szczególnej będzie

$$\frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{ds} \frac{ds}{dx} dx,$$

gdy tym czasem jest tylko $\frac{dp}{dx} dx$ w przypadku całki zupełnej; równie te dwie wartości nie uczynią

zadosyc w ogulności temuż samemu mnożnikowi: widzimy nawet że zrównanie

$$d^2u\sqrt{u} - 2ud^2y - dydu = 0,$$

byłoby sprawdzone przez odpowiedź szczególną, niezależnie od różniczek drugiego rzędu.

Obszerniejszy wykład i dowody namienionych teraz okoliczności dalekoby nas zaprowadziły; znajdzie to wszystko czytelnik w dziele *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 13^{me} cahier, gdzie P. Poisson szczęśliwie objaśnił wiele trudności, które zostawały jeszcze względem odpowiedzi szczególnych rozmaitego gatunku zrównań różniczkowych (*).

525. Żeby za pomocą wyłożonej teorii rozpoznać, czy zrównanie pierwotne, które nie zawiera w sobie ilości stałej dowolnej, a czyni zadosyc zrównaniu różniczkowemu danemu, jest całąką jego szczególną, lub tylko odpowiedzią szczególną, potrzeba mieć jego całąkę zupełną; ta okoliczność nie zawsze się przytrafiająca, prowadzi do następującego pytania.

Mając daną wartość $y=X$ czyniącą zadosyc zrównaniu różniczkowemu, wynaleść czy ona jest zajęta w całce zupełnej lub nie, i wyprowadzić z niej gdy można, całąkę zupełną.

Dajmy że z tej ostatniej wyciągamy $y=V$, i że w sobie zamyka $y=X$, funkcyja V będzie w taki sposób złożona ze zmiennej x i ze stałej S , że się koniecznie zamieni znowu na X , przez stosowne do tego oznaczenie ilości S . Jeżeli nazwiemy S' tę wartość ilości S , i jeżeli zważymy że $S=S'$ daje $V=X$ czyli co na jedno wychodzi że różnica $V-X$ niknie, gdy $S-S'=0$, ztąd wniesiemy, że przynajmniej za pomocą rozwinięcia, wyrażenie $V-X$ powinno mieć kształt

$$V-X = V'(S-S')^2 + V''(S-S')^3 + \text{it. d.}$$

(*) Obacz także *Traité du Calcul* in 4to Tom II, str. 388.

gdzie wykładniki μ, ν , i t. d. wszystkie są dodatne, a ilości V', V'' i t. d. nie zależą od $S-S'$. Można uczynić $(S-S')^\mu = h$; ilość h zostanie dowolna, równie jak ilość S ; zamieniwszy zaś $\frac{y}{\mu}$ na μ , co daje $\mu > 1$, otrzymamy

$$V-X = V'h + V''h^\mu + \text{i t. d.},$$

złąd

$$V = X + V'h + V''h^\mu + \text{i t. d.},$$

to wyrażenie będziemy mogli uważać za rozwinięcie wartości zupełnej y .

To założywszy jeżeli wyrazimy przez $dy = p dx$, dane zrównanie różniczkowe, rozwiązane przez wzgląd na dy , to nowe zrównanie, któremu z założenia czyni zadosyć zrównanie $y = X$, powinno być sprawdzone niezależnie od h , przez wartość zupełną ilości y . Wyraziwszy naprzód tę wartość przez $X+k$, i chcąc ją podstawić w zrównaniu $dy = p dx$, trzeba znaleźć czém się staje p , gdy się w niem podstawia $X+k$ za y . Dajmy że w tym razie p jest wyrażone przez szereg

$$P + P'k^m + P''k^n + \text{i t. d.},$$

gdzie wykładniki m, n , i t. d. uszykowane według porządku ich wielkości będą koniecznien dodatne, albowiem współczynnik p nie staje się nieskończenie wielkim gdy $k=0$, z przyczyny że zrównanie $y = X$, które nie daje $dy = \infty$, czyni zrównanie $dy = p dx$ tosamém, tak dalece że $dX = P dx$.

Uczyniwszy $y = X+k$, wypada

$$dX + dk = (P + P'k^m + P''k^n + \text{i t. d.}) dx;$$

to zrównanie z przyczyny $dX = P dx$, zamienia się na

$$dk = (P'k^m + P''k^n + \text{i t. d.}) dx,$$

a kładąc za k jego rozwinięcie

$$V'h + V''h^\mu + \text{i t. d.},$$

otrzymamy zrównanie

$$hdV' + h^{\mu}dV'' + \text{i t. d.} = \left\{ \begin{array}{l} P'h^m dx (V' + V''h^{\mu-1} + \text{i t. d.})^m \\ + P''h^n dx (V' + V''h^{\mu-1} + \text{i t. d.})^n \\ + \text{i t. d.} \end{array} \right\} (A),$$

za pomocą którego trzeba oznaczyć wartości V' , V'' , i t. d. niezależnie od h .

Biorąc tylko wyrazy, w których h ma najmniejszy wykładnik, utworzymy zrównanie

$$hdV' = P'V'^m h^m dx,$$

które tylko wtedy na wszelką wartość h , prawdzić się może gdy jest $m=1$; w tym razie h odpadnie, i będzie

$$dV' = P'V'dx, \quad V' = e^{\int P'dx}.$$

Gdy $m > 1$, nie można już wtenczas porównywać pierwszego wyrazu $P'V'^m h^m dx$ drugiej strony zrównania, z wyrazem hdV' pierwszej strony; lecz wyraz hdV' zginie uczyniwszy $dV' = 0$, z kąd wypada $V' = \text{stałej}$, czyli prościej wyrażając, $V' = 1$; potem założywszy $\mu = m$, będzie $dV'' = P'dx$, a z kąd $V'' = \int P'dx$; podobnym sposobem działając znajdziemy dalsze wyrazy szeregu.

Jeżeli $m < 1$, wtenczas nie podobna żadną miarą zadość uczynić zrównaniu (A), bo wyraz $P'V'^m h^m dx$ nie może być porównanym ani z wyrazem hdV' , ani z żadnym z tych, które po nim następują, a których wykładniki wszystkie są większe od jedności; zrównanie $y = X$, nie mogąc mieć wtenczas stałej dowolnej nie jest całką szczególną, lecz odpowiedzią szczególną.

326. To podaje nam sposób do bezpośredniego odkrycia odpowiedzi szczególnych w zrównaniach różniczkowych pierwszego rzędu, nie znając ich całki zupełnej. Jakoż rozwinięcie ilości p , kładąc w niej $y+k$ za y , byłoby w ogólności podług wzoru Tajlora

$$p + \frac{dp}{dy}k + \frac{d^2p}{dy^2} \frac{k^2}{1.2} + \text{i t. d.},$$

gdy zaś rozwinięcie ilości p ma kształt

$$P + P'k^m + \text{i t. d.},$$

i gdy $m < 1$, wtenczas współczynnik różniczkowy $\frac{dp}{dy}$ staje się $= \infty$ (80); z tego się wykazuje, że różniczkowanie, przez które się przechodzi od p do $\frac{dp}{dy}$, wprowadza dzielnik, który w tym razie staje się $= 0$. Zatem jeżeli wyrazimy $\frac{dp}{dy}$ przez $\frac{K}{L}$, każda odpowiedź szczególna uczyni $L=0$, a tem samem będzie mnożnikiem ilości L , i wzajemnie, każdy mnożnik ilości L , który nie będzie razem mnożnikiem ilości K , a który uczyniony $= 0$ sprawdzi podaną różniczkę, będzie jej odpowiedzią szczególną.

Unikniemy rozwiązania zrównania różniczkowego przez wzgląd na dy , uważając, że jeżeli $Z=0$ wyrazi to zrównanie, gdzie Z jest funkcją ilości $x, y, i p$, kładąc pdx za dy , otrzymamy

$$\frac{dZ}{dx}dx + \frac{dZ}{dy}dy + \frac{dZ}{dp}dp = 0,$$

ztaąd uważając na zmienne tylko y i p ,

$$\frac{dp}{dy} = - \frac{\frac{dZ}{dy}}{\frac{dZ}{dp}},$$

a jeżeli zrównanie $Z=0$ przygotowane jest w taki sposób, że nie zawiera ani ułamków, ani pierwiastków, dosyć będzie wtenczas mnożnik ilości $\frac{dZ}{dp}$ uczynić $= 0$, ażeby współczynnik $\frac{dp}{dy}$ stał się nieskończenie wielkim.

Tym sposobem mielibyśmy tylko odpowiedzi szczególne, do których wchodzi y , lecz przyszlibyśmy do odpowiedzi mających tylko samo x , a które są pod po-

stacją $x =$ stałej, uważając w podaném równaniu ilość x jako funkcją ilości y .

327. Szukajmy naprzód podług tego sposobu odpowiedzi szczególnych równania

$$xdx + ydy = dy\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} \quad (323),$$

to równanie, po zniesieniu pierwiastku, zamienia się na

$$x^2 dx^2 + 2xy dx dy + (a^2 - x^2) dy^2 = 0,$$

czyli na

$$x^2 + 2xyp + (a^2 - x^2)p^2 = 0 = Z,$$

a różniczkowanie daje

$$\frac{dZ}{dp} = 2xy + 2p(a^2 - x^2);$$

zatem odpowiedź szczególna szukana powinna być taka, ażeby z niej przez różniczkowanie otrzymana wartość na p , sprawdziła razem dwa równania

$$x^2 + 2xyp + (a^2 - x^2)p^2 = 0,$$

$$xy + (a^2 - x^2)p = 0,$$

Ztąd wypada, że odpowiedź szczególna, bez pomocy swojej różniczki sprawdzi równanie powstające z wyrugowania p między dwoma równaniami poprzedzającymi. To założywszy, równanie

$$xy + (a^2 - x^2)p = 0,$$

rozmnożone przez p , i odciągnięte od danego równania, prowadzi nas do

$$x^2 + xyp = 0, \quad \text{z kąd } p = -\frac{x}{y},$$

a wkładając tę wartość za p w pierwsze równanie otrzymamy

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0;$$

wiemy zaś z kąd inąd, że to jest odpowiedź szczególna danego zrównania.

Podobnym sposobem ze zrównaniem ogólniejszém $y = px + P$ postępując, przyjdziemy do $\frac{dZ}{dp} = x + \frac{dP}{dp}$; ztąd jasna, że $x + \frac{dP}{dp} = 0$, jest zrównaniem, któremu odpowiedzi szczególne zadosyć czynić powinny; te zaś odpowiedzi otrzymamy rugując p między $y = px + P$, i $x + \frac{dP}{dp} = 0$.

Nakoniec, żeby dać przykład odpowiedzi szczególnych, mających kształt $y = \text{stała}$; weźmy zrównanie

$$\frac{dy}{dx} = b(y-a)^m,$$

z którego bezśrednie wyciągniemy

$$\frac{dp}{dy} = mb(y-a)^{m-1};$$

To wyrażenie wtenczas tylko może się stać $= \infty$, gdy wykładnik $m-1$ jest odjemny, i gdy razem mamy wartość $y=a$, która czyni zadosyć danemu zrównaniu wtedy tylko, gdy m jest dodatne; zatem wykładnik m powinien być ułamkiem dodatnym. W tym razie $y=a$ jest odpowiedzią szczególną; całą zaś zupełną jest

$$\frac{(y-a)^{1-m}}{1-m} - bx = \text{stała}.$$

328. W ogulności, pomiędzy funkcyami algebraicznymi, same tylko niewymierne dostają mianownik przez różniczkowanie, a zatem z takich tylko mieć można $\frac{dp}{dy} = \frac{1}{0}$, wtenczas gdy p ma wartość skończoną; przeto w funkcyach niewymiernych szukać należy odpowiedzi szczególnych, czyniąc takowe funkcy $= 0$, i

zapewniając się, że ztąd wynikające zrównania czynią zadosyć zrównaniu podanemu. Tym sposobem zrównanie

$$x dx + y dy = dy \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$$

daje bezśrednie

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0;$$

Zrównanie zaś

$$y dx - x dy = n \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

z którego wyciągamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-xy}{n^2 - x^2} \pm \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - n^2}}{n^2 - x^2}$$

prorowadzi nas do $x^2 + y^2 - n^2 = 0$, cośmy już otrzymali wielu innémi sposobami.

Sposób rozwiązywania zrównań różniczkowych przez przybliżenie.

329. Wyczerpnąwszy znane sposoby na całkowanie zrównania różniczkowego, starać się powinniśmy rozwiązać je przez przybliżenie, to jest wyciągnąć z niego wartość y wyrażoną przez x , za pomocą szeregu. Widzieliśmy już pod liczbą 298, jak wzór Tajlora może być zastosowanym do tego użycia; można też za ilość y wziąć szereg ze współczynnikami nieoznaczonemi, uszykowany według potęg ilości x ; lecz najczęściej wypada użyć szeregowej sztuki na oznaczenie wykładników, jeżeli nie postępują według liczb całkowitych. Znając kształt takowego szeregu, potrafimy wynaleść jego współczynniki, podstawiając rzeczony szereg, oraz jego różniczki za y dy d^2y i t. d. w daném zrównaniu.

Gdy mamy np. zrównanie

$$dy + y dx = m x^n dx,$$

uczynimy

$$y = Ax^z + Bx^{z+1} + Cx^{z+2} + \text{i t. d.},$$

włożywszy tę wartości ilość y i jej różniczkę w dane równanie, i zebrawszy potem wyrazy w taki sposób, ażeby za pomocą ich można było uformować dostateczną liczbę równań potrzebnych na oznaczenie wykładników i współczynników, bez wpadania w sprzeczność, otrzymamy równanie

$$\left. \begin{aligned} & aAx^{\alpha-1} + (\alpha+1)Bx^{\alpha} + (\alpha+2)Cx^{\alpha+1} + (\alpha+3)Dx^{\alpha+2} + \text{i t. d.} \\ & - mx^n + Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+1} + Cx^{\alpha+2} + \text{i t. d.} \end{aligned} \right\} = 0,$$

które stanie się tosamém uczyniwszy

$$n = \alpha - 1, \text{ czyli } \alpha = n + 1, A = \frac{m}{\alpha}, B = \frac{-m}{\alpha(\alpha+1)},$$

$$C = \frac{m}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}, D = \frac{-m}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} \text{ i t. d.},$$

ztaąd wypadnie

$$y = m \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \text{i t. d.} \right]$$

Ta wartość nie jest zupełna, jako niezawierająca w sobie ilości stałej dowolnej, co się też stosuje do wszystkich przypadków, w których ilość stała w rozwinięciu całki nie może być oddzieloną od ilości zmiennej x ; lecz podług sposobu wyłożonego pod liczbą 299 przyjdziemy do wypadku tak ogólnego, jak jest całka zupełna, jeżeli będziemy mogli nadać jej kształt taki, iżby czyniąc $x=a$, wypadło $y=b$; co się uskuteczni, kładąc $x=a+t$, $y=b+u$, i biorąc dla wyrażenia ilości u , szereg, którego wszystkie wyrazy nikną, gdy $t=0$.

Przez takowe przekształcenie równanie $dy+ydx = mx^n dx$, zamienia się na $du+(b+u)dt=m(a+t)^n dt$, a kładąc

$$u = At^{\alpha} + Bt^{\alpha+1} + Ct^{\alpha+2} + \text{i t. d.}$$

znajdujemy

$$\left. \begin{aligned} & \alpha At^{\alpha-1} + (\alpha+1) Bt^{\alpha} + (\alpha+2) Ct^{\alpha+1} + \text{i t. d.} \\ & + b \quad + \quad At^{\alpha} + \quad Bt^{\alpha+1} + \text{i t. d.} \\ & - ma^n - m \frac{n}{1} a^{n-1} t - m \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} t^2 - \text{i t. d.} \end{aligned} \right\} = 0,$$

należy w tém zrównaniu przypuścić, $\alpha-1=0$, czyli $\alpha=1$,
a przeto będzie

$$\begin{aligned} A &= ma^n - b, \quad B = \frac{mna^{n-1} - ma^n + b}{2}, \\ C &= \frac{mn(n-1)a^{n-2} - mna^{n-1} + ma^n - b}{2.3}, \text{ i t. d.} \end{aligned}$$

330. Użycie szeregów ze spółczynnikami nieoznaczonemi w zrównaniach pierwszego stopnia a drugiego rzędu przedstawuje niekiedy okoliczności, które wypada poznać, i których przykład znakomity mamy w zrównaniu

$$d^2y + ax^ny dx^2 = 0,$$

Jeżeli założymy

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+\delta} + Cx^{\alpha+2\delta} + \text{i t. d.}$$

będziemy mieli

$$d^2y = \left\{ \alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2} + (\alpha+\delta)(\alpha+\delta-1)Bx^{\alpha+\delta-2} + \right. \\ \left. + (\alpha+2\delta)(\alpha+2\delta-1)Cx^{\alpha+2\delta-2} + \text{i t. d.} \right\} dx^2,$$

$$ax^ny dx^2 = \{ aAx^{\alpha+n} + aBx^{\alpha+\delta+n} + aCx^{\alpha+2\delta+n} + \text{i t. d.} \} dx^2;$$

Widzimy zaraz, iż wyrazy

$$\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}, \quad aAx^{\alpha+n};$$

króre są pierwszemi wyrażen poprzeczających, w szczególnym tylko przypadku mogą być z sobą zrównane, to jest wtedy gdy $n=-2$; lecz dość jest założyć

$$\alpha=0, \quad \text{albo} \quad \alpha=1,$$

dla zniszczenia pierwszego wyrazu wartości d^2y ; wtedy wyraz drugi, którego wykładnik jest $\alpha+\delta-2$, bę-

dzie można zrównać z wyrazem aAx^{n+2} : ztąd wypadnie

$$\delta - 2 = n, \quad \text{ztąd } \delta = n + 2.$$

Dalej idąc od tych wyrazów, oba szeregi będą sobie odpowiadały dokładnie, i dla oznaczenia współczynników otrzymamy równania

$$(a + \delta)(a + \delta - 1)B + aA = 0,$$

$$(a + 2\delta)(a + 2\delta - 1)C + aB = 0,$$

w których ilość A zostaje dowolną.

Jeżeli w nich następnie położymy obie wartości ilości a , z wartością ilości δ , otrzymamy za y dwa rozwinięcia

$$y' = A - \frac{aAx^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{a^2Ax^{2n+4}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)} - \frac{a^3Ax^{5n+6}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)(3n+5)(3n+6)} + \text{it. d.}$$

$$y'' = Ax - \frac{aAx^{n+3}}{(n+2)(n+3)} + \frac{a^2Ax^{2n+5}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)} - \frac{a^3Ax^{5n+7}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)(3n+6)(3n+7)} + \text{it. d.}$$

Te rozwinięcia są tylko szczególnymi, bo zamykają po jednej tylko ilości stałej A ; lecz w drugim rozwinięciu za A pisząc A_1 , i potem biorąc ich sumę, mieć będziemy, z powodu szczególnego kształtu przykładu założonego (309), wyrażenie ogólne ilości y .

331. Kończąc rozdział o przybliżonem całkowaniu zrównań różniczkowych, należy powiedzieć, iż podane sposoby nie są zgoła w użyciu, bo bardzo rzadko dają szeregi ubywające i tylko w bardzo ściśnionych wartościach ilości zmiennej niezależnej. W zadaniach fizyczno-matematycznych, do których stosują się przybliżania rachunku całkowego, idzie najczęściej tylko o oznaczenie małych poprawek, które trzeba uczynić

w pierwszej wartości zkadinał znajomej i uważanej za stan średni. Ponieważ prawdziwa wartość szukana różni się od stanu średniego funkcyami takimi, których potęgę drugą i potęgi wyższe zaraz można opuścić, przeto sprowadzamy zrównania różniczkowe, przez które te funkcy oznaczają się, do stopnia pierwszego, a potem zastosowują się do nich sposoby, które nie mogą być tu wyłożone, bo są bardzo rozmaite; dla tego wykładają się one po różnych szczególnych traktatach, w których się używają.

Rozwiązanie niektórych zagadnień geometrycznych, zależących od zrównań różniczkowych.

332. Ponieważ wyrażenie przez zrównanie zagadnień geometrycznych, zależących od zrównań różniczkowych, zasadza się na własnościach podstycznej, stycznej, normalnej, promienia krzywosci, i żadnej trudności nie podlega, tak jak i każde inne zagadnienia geometrycznego przez znaki algebraiczne wyrażenie; dla tego przestaniemy tu na kilku przykładach.

A naprzód wiedzieć należy, że całkowanie zrównań różniczkowych pierwszego rzędu, nazywano sposobem odwrótnym stycznych (*methode inverse des tangentes*), gdyż każde takowe zrównanie dając wartość na $\frac{dy}{dx}$ wyrażoną przez $f(x, y)$, daje razem poznać związek zachodzący między spółprzystawami i podstyczną, albo styczną, albo normalną i t. d., w linii krzywej przez to zrównanie wyrażonej. Jakoż jeżeli wyciągniemy z danego zrównania wartość $\frac{dy}{dx} = p$, wyrażenie podstycznej będzie $\frac{y}{p}$, stycznej $\frac{y\sqrt{1+p^2}}{p}$, i t. d. (66). Wy-
naleziono rachunek różniczkowy, gdy chciano prowa-
dzić styczne do linii krzywych, to jest gdy chciano roz-

wiązać zagadnienie proste stycznych, (*probleme directes des tangentes*); potem zatrudniono się rachunkiem całkowym, w celu powrócenia do zrównań pierwotnych tychże linii, za pomocą własności ich stycznych; lecz wielki wzrost i liczne przystosowania tego rachunku, kazały zaniechać nazwiska sposobu odwrotnego stycznych, bardzo ograniczonemu tegoż rachunku użyciu odpowiadającego.

W początkach starano się za pomocą powierzchni, lub też łuków znajomej jakiej linii krzywej, wyznaczyć przystawę linii krzywej szukanej; później zarzucono takowe wykreślenia, bo chociaż piękne wydawały się w teoryi, lecz zawsze były mniej dogodne, a nadewszystko mniej dokładne w praktyce, niżeli wzory przybliżające na ich miejsce wprowadzone.

Zrównanie różniczkowe nie może być w ogólności wyrażone przez wykreślenie, aż dopiero po odłączeniu ilości zmiennych, bo wtedy wyrażenie jednej z nich zależy tylko od kwadratury linii krzywej, której zrównanie pierwotne jest wiadome.

553. Dajmy *np.* że chcemy wykreślić linie krzywe, w których podstyczna jest równa danej funkcji *u* cinka *x*; zrównanie różniczkowe tej linii krzywej, będzie $y \frac{dx}{dy} = X$, gdzie *X* wyraża funkcją daną. W tém zrównaniu mającém dwa tylko wyrazy, zmienne odłączają się natychmiast; ztąd wypada $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{X}$. Mnożąc potém obie strony przez stałą ilość *m*, będzie $\frac{m dy}{y} = \frac{m dx}{X}$, a oznaczając przez *Ly* logarytm ilości *y*, wzięty w układzie, którego zamiennik jest *m*, otrzymamy całkę

$$Ly = \int \frac{m dx}{X} = \frac{1}{m} \int \frac{m^2 dx}{X}.$$

Jeżeli wykreślimy linią krzywą *DN*, *fig.* 48, taką, aże-

by ucinkowi AP , odpowiadała przystawa $PN = \frac{m^2}{X}$,
 powierzchnia $ADNP$ będzie wartością $\int \frac{m^2 dx}{X}$. Zamienia-
 my tę powierzchnię na prostokąt FQ , którego jednym bo-
 kiem będzie m , drugi bok AQ , wyrażać będzie $\frac{1}{m} \int \frac{m^2 dx}{X}$;
 nakręśliwszy potem na zamienniku m , logarytmikę
 ER , którejby przystawy były prostopadłe do osi AC ,
 i wystawiwszy z punktu Q prostopadłą RQ , będzie
 $L.RQ = AQ$ (112), czyli $L.RQ = \frac{1}{m} \int \frac{m^2 dx}{X}$; zatem linija
 RQ , będzie równa przystawie PM linii krzywej szukanej.

Uważać należy, że to wykreślenie nie wymaga, a-
 byśmy mieli wyrażenie analityczne funkeyi X ; można-
 by wziąć na jej miejscu przystawę jakiegokolwiek linii
 krzywej, odniesionej do osi AB , i wykonać na tej przy-
 stawie, i na linii m od upodobania przybranej, wykre-
 ślenia w poprzedzających zrównaniach wskazane. Widzi-
 my także, że linia m dla tego tylko była wprowadzoną,
 ażeby uczynić te wzory jednorodnemi, i może być wzię-
 ta za jedność.

334. Przytoczymy tu jeszcze rozwiązanie zagadnienia
 sławnego w pierwszych czasach, w których się zatru-
 dniano rachunkiem całkowym, to jest zagadnienia linii
 przecinających (*trajectoires*). Jego celem jest wynaleść
 liniję krzywą któraby przecinała wszystkie inne linije
 krzywe jednego gatunku pod kątem danym. Nazywam
 linijami jednego gatunku, rozmaite linije krzywe szcze-
 gulne, wyciągnięte z jednego zrównania pierwotnego, na-
 dając wszystkie pomyślic się mogące wartości jednej z ilo-
 ści stałych tegoż zrównania. Jeżeli np. będziemy nadawali
 różne wartości parametrowi paraboli, otrzymamy ztąd
 mnóstwo paraboli odniesionych do tejże samej osi, mają-
 cych jedenże wierzchołek, a których dwiema ostatecznó-
 mi granicami będą z jednej strony oś, z drugiej linija do
 niej prostopadła przez wierzchołek paraboli przecho-

dzająca: linija krzywa przecinająca wszystkie takowe parabole pod kątem danym, nazywa się jej liniją przecinającą lub krzyżownicą (*trajectoire*).

Dajmy że $D, N, DN, D'N'$, i t. d. (*fig.* 49), wyrażają linije krzywe przecięte, a zaś MZ liniją przecinającą szukaną; jeżeli przez punkt którykolwiek wspólnego ich przecięcia *np.* przez punkt M , poprowadzimy styczną Mt do linii przecinającej, styczną MT do linii przeciętej, kąt TMt powinien być równy kątowi przez zagadnienie danemu. Oznaczmy przez x', y' , spółprzystawy linii przeciętych, przez x, y , spółprzystawy linii przecinającej, przez a styczną trygonometryczną kąta stałego TMt , równego różnicy kątów MTP, MiP , którym styczne odpowiadające są $\frac{dy'}{dx'}, \frac{dy}{dx}$ (66).

Zrównanie $\text{sty}TMt = \text{sty}(MiP - MTP)$,

prorowadzi nas do
$$a = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx'}}{1 + \frac{dy}{dx} \frac{dy'}{dx'}} \quad (\text{Trig. 26}).$$

Dajmy, że znamy zrównanie pierwotne linii krzywych przeciętych; przez różniczkowanie wyciągniemy z niego $dy' = p dx'$, a wyższe zrównanie zamieni się na

$$a \left(1 + p \frac{dy}{dx} \right) + p - \frac{dy}{dx} = 0 \quad (A).$$

Trzeba wszędzie kłaść x, y , za x', y' , ponieważ i linija przecięta, i przecinająca mają w punkcie M , też same spółprzystawy. Potém gdy między zrównaniem (A), i zrównaniem całkowym linii krzywych przeciętych, wyrzucimy ilość stałą, której różne odmienne wartości, uszczególniają linije krzywe, przyjdziemy do wypadku obejmującego wszystkie następne ich przecięcia się z liniją przecinającą, a tém samém będzie jej zrównaniem.

Weźmy *np.* parabole, mające spólną oś i wierzechołek, a których równanie jest $y'^m = ax'^m$; będzie $p = \frac{ma'x^{m-1}}{ny'^{m-1}}$. Można zaraz z tego wyrażenia za pomocą danego równania wyrzucić parametr a , który parabole jednegoż stopnia rozróżnia jedne od drugich; włożywszy ten wypadek w równanie (A), po odmiennieniu x' , y' , na x , y , i podzieliwszy potem przez $x^{m-1}y^{n-1}$ otrzymamy

$$a(nxdx + mydy) + mydx - nxdy = 0.$$

To równanie będąc jednorodnem, może być scałkowane sposobem pod liczb. 283 podanym. Gdy $m=n=1$, wtenczas da się scałkować dzieląc je przez $x^2 + y^2$, bo

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = d.l \sqrt{x^2 + y^2},$$

nadto

$$\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = d.l \left(\text{stycz} = \frac{x}{y} \right) \quad (279);$$

zatem

$$al \sqrt{x^2 + y^2} + \text{łuk} \left(\text{stycz} = \frac{x}{y} \right) = \text{stała},$$

albo odmienniając ilość stałą będzie

$$al \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{s} = \text{łuk} \left(\text{stycz} = \frac{y}{x} \right).$$

Jeżli weźmiemy

$$\sqrt{x^2 + y^2} = u, \quad \text{łuk} \left(\text{stycz} = \frac{y}{x} \right) = t,$$

wpadniemy na równanie spiralnych logarytmicznych, które mają własność przecinania promienia wiodącego pod kątem stałym (128), jakoż w teraźniejszym przypadku linije krzywe przecięte są to linije proste wszystkie prowadzone przez początek spółprzystaw wyrażone przez równanie $y' = ax'$.

Chcąc, żeby kąt TMt był prosty, trzebaby przy-

puścić $a = \infty$, a zatem brać tylko te wyrazy które są mnożone przez a ; w tym razie wyższe zrównanie zamieni się na $nx dx + my dy = 0$, którego całka $nx^2 + my^2 = s$, pokazuje, że linią krzywą przecinającą wszystkie parabole pod kątem prostym, jest ellipsa mająca też samą oś co parabole, środek zaś w wierzchołku ich wspólnym. Linije przecinające, w których kąt przecięcia TMt jest prosty, nazywają się linijami przecinającemi, czyli krzyżownicami prostopadłemi; zrównanie ich ogólne jest $1 + p \frac{dy}{dx}$; które otrzymamy czyniąc $a = \infty$, w zrównaniu (4).

355. Uważania geometryczne, jakośmy to zapowiedzieli pod liczbą 298, stwierdzają także, że zrównania różniczkowe o dwóch zmiennych, mają zawsze całki im odpowiadające. Jakoż gdy rzecz mamy ze zrównaniem pierwszego rzędu, wyciągniemy z niego wartość współczynnika $\frac{dy}{dx}$, który wyraża styczną trygonometryczną kąta zawartego między linią ucinków, i styczną do linii krzywej odpowiadającej temu zrównaniu; wzięwszy więc punkt M (fig. 50), odpowiadający spółprzystawóm $AP = a$, $PM = b$, poprowadzimy linią MT , czyniącą z linią MQ równoległą do AB , kąt MMQ , równy kątowi, którego styczna byłaby równa wartości odpowiadającej $\frac{dy}{dx}$; ta linija prosta dotknie się krzywej szukanej w punkcie M . Uważając krzywą i jej styczną, jakby zmieszane razem w bliskości punktu dotknięcia, linija prosta TM wyznaczy w punkcie P' , bliskim punktu P , przystawę $P'M$, za pomocą której wyrachujemy, używając podanego zrównania różniczkowego, styczną kąta $M'MQ$ utworzonego w punkcie M , przez styczną $T'M$, tuż następującą po stycznej TM . Postępując dalej tym sposobem otrzymamy wielokąt który tym mniej będzie się różnił od linii krzywej, do której należy podane zrównanie.

wnanie, im większa w jednymże przeciągu będzie liczba boków. Z tego wykreślenia wypada że zrównanie różniczkowe pierwszego rzędu, wyraża nieograniczoną liczbę linii krzywych, ponieważ obranie pierwszego punktu M jest dowolne.

W zrównaniach drugiego rzędu, które dają tylko współczynnik $\frac{d^2y}{dx^2}$, biorą się parabole ścisł stycznne zamiast stycznych. Naznaczywszy dowolnie pierwszy punkt, którego uciniek jest $x=a$, przystawa $y=b$, utworzymy zrównanie

$$y-b=A(x-a)+B(x-a)^2,$$

które należy do paraboli przechodzącej przez ten punkt.

Różniczkując je dwa razy następnie, otrzymamy $\frac{dy}{dx}=A$,

$\frac{d^2y}{dx^2}=2B$; współczynnik A , zostaje dowolny, lecz B

mieć będzie wartość oznaczoną gdy do danego zrówna-

nia za x, y , i $\frac{dy}{dx}$, włożymy a, b , i A ; wykreślimy więc

naprzód parabolę MN (*fig. 51*), która przechodziłaby przez punkt M , a którejby styczna w tym punkcie, z linią ucinków czyniła kąt, którego by styczna trygonometryczna była dana. Dalej rachuje się wartość przystawy $P'M$ należącej do tej linii, oraz wartość

na $\frac{dy}{dx}$, odpowiadające punktowi P' , wziętemu tuż przy

punkcie P , na osi ucinków; włożywszy potem te wartości w zrównanie różniczkowe, wyciągniemy ztąd nową

wartość na $\frac{d^2y}{dx^2}$. Wyraziwszy tę wartość przez $2B_1$

i wzięwszy b_1 i A_1 za $P'M$, i $\frac{dy}{dx}$, utworzymy zrównanie

$$y-b_1=A_1(x-a_1)+B_1(x-a_1)^2,$$

drugiej paraboli ścisł stycznnej $M'N'$, za pomocą której utworzymy trzecią $M''N''$, i tak dalej.

Z małą odmianą można ten sposób zastosować do użycia koła ścisłestycznego na miejscu paraboli ścisłestycznej, lub rozciągnąć go do wszystkich rzędów.

336. Zagadnienie następujące pokaże nam, jak za pomocą uważań geometrycznych przychodzimy także do teoryi odpowiedzi szegulnych, wyłożonej pod liczbą 322. *Znaleść linią krzywą taką, aby wszystkie prostopadłe spuszczone z danego punktu do stycznych tej krzywej, były między sobą równe.* Żeby przejść do zrównania różniczkowego, przypomnieć sobie należy, że nazwawszy spółprzystawy tej krzywej przez x, y , spółprzystawy jej stycznej przez x', y' , zrównanie tej stycznej będzie $y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x)$ (68); wzięwszy za początek spółprzystaw punkt dany, z którego wzmienione prostopadłe mają być prowadzone, każda z nich mieć będzie zrównanie $y' = -\frac{dx}{dy}x'$ (Trig. 86), długość zaś jej wyrazi się przez $\sqrt{x'^2 + y'^2}$. Kładąc za x' i za y' spółprzystawy punktu, w którym ona spotyka styczną jej odpowiadającą, a których wartości znajdą się za pomocą dwóch wyższych zrównań (Trig. 87), otrzymamy; w skutek tych zrównań,

$$x' = \frac{(xdy - ydx)dy}{dx^2 + dy^2}, \quad y' = -\frac{(xdy - ydx)dx}{dx^2 + dy^2};$$

$$\text{nadto} \quad \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{xdy - ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = n;$$

zatem zrównanie różniczkowe linii krzywej szukanej będzie

$$xdy - ydx = n\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Jasna teraz rzecz jest, że koło, którego promień jest $= n$, a środek początkiem spółprzystaw; czyni zadosyć pytaniu. Koło to, którego zrównanie jest $y^2 + x^2 = n^2$; wyraża własnie odpowiedź szegulną pod licz. 237 znaną; aże każda linia prosta mająca względem po-

czątku spółprzystaw takie położenie, ażeby naykrót-sza jej od tego punktu odległość była $=n$, rozwiązuje podobnież dane zagadnienie, i gdy nieskończona jest liczba linii prostych mogących zadosyć uczynić temu warunkowi, zatém zrównanie obejmujące wszystkie razem takowe linije proste, jest całką zupełną zrównania różniczkowego wyżej znalezionej; ta całka jest

$$y - sx = n\sqrt{1 + s^2} \quad (297).$$

Zachodzi tu okoliczność godna uwagi, a którą natychmiast postrzegamy, że wszystkie linije proste o których się teraz mówiło, dotykać się koniecznie będą koła wyrażającego odpowiedź szcégulną, bo to koło mieć będzie za promień liniją prostopadłą do każdej z nich spuszczoną.

Tenże sam stosunek zachodzi między rozmaitemi linijami krzywemi, wyrażonemi przez całkę zupełną zrównania różniczkowego pierwszego rzędu, i między liniją otrzymaną z odpowiedzi szcégulnej tegoż zrównania; ostatnia dotyka się wszystkich innych. Jakoż zrównanie różniczkowe determinuje tylko kierunek styczney, a każda linija krzywa mająca, w jakimkolwiek punkcie, tę samą styczną co i jedna z linii krzywych wyciągnionych z całki zupełnej, koniecznie temu zrównaniu uczyni zadosyć, co też właśnie przytrafia się linii krzywej dotykającej się wszystkich stycznych.

Ztąd wypada, że odwiniona jakiejkolwiek linii krzywej, jest odpowiedzią szcégulną zrównania różniczkowego, które wyraża wszystkie normalne odwiniającej (80), i że linija odwijająca jest również rozwiązaniem szcégulnym zrównania różniczkowego wszystkim jej kołom ścisł stycznym spółnego, lecz z tą różnicą iż dotknięcia są drugiego rzędu.

Związek ustanowiony (322) między całkami zupełnemi i odpowiedziami szcégulnemi, wyprowadza się także z uwag geometrycznych; gdyż każdy punkt okręgu

koła, może być uważany jako przecięcie się dwóch stycznych po sobie następujących, to jest jako przecięcie się dwóch linii prostych odpowiadających dwóm następnym wartościom nadanym ilości stałej s , uciniek i przystawa tego przecięcia, zależą od wartości s , która zatem jest także z swojej strony funkcją tych ilości to jest ilości x i y . Jasna jest, że aby mieć linią tuż następującą po linii wyrażonej przez zrównanie

$$y - sx = n\sqrt{1 + s^2},$$

trzeba różniczkować to zrównanie biorąc s za zmienną; a że szukamy tylko przecięcia się tych dwóch linii, czyli punktu, w którym ich spółprzystawy są wspólne, dla tego należy brać x, y , za stałe; zatem przecięcie szukane zostanie wyrażone za pomocą dwóch zrównań

$$y - sx = n\sqrt{1 + s^2},$$

$$-x = \frac{ns}{\sqrt{1 + s^2}},$$

jeżeli ilości s nadana będzie wartość szczególna. Lecz jeżeli wyrzucimy s , wypadek otrzymany nie oznaczając żadnego przecięcia w szczególności, ogarnie wszystkie punkta wynikające z przecięcia się branych kolejną po parze linii prostych otrzymanych przez nadawanie wszystkich wartości ilości s , to jest ogarnie koło, które jest odpowiednią szczególną, i które wyprowadza się tu jeszcze ze zmienności nadawanej ilości stałej dowolnej w całości zupełnej. Też same postrzeżenia sprawdzają się na odwinionych, gdy te linie uważają się jako powstające z przecięcia się normalnych po sobie następujących linii odwijającej.

Całkowanie zrównań różniczkowych o trzech lub o większej liczbie zmiennych.

Zrównania różniczkowe zupełne.

337. Funkcye zależące od dwóch lub większej liczby zmiennych, tém się różnią od funkcyj o jednej zmiennej, że w każdym rzędzie mają po kilka współczynników różniczkowych. Jeżeli *np.* z jest funkcją dwóch zmiennych, w pierwszym rzędzie będą dwa współczynniki $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, jeden przez wzgląd na zmienność ilości x , drugi przez wzgląd na zmienność ilości y . W drugim rzędzie liczba współczynników dochodzi do trzech, i tak następnie przybywa postępując od rzędu do rzędu (44). Gdy chcemy wrócić się od współczynników różniczkowych funkcyi o jednej lub o więcej zmiennych, do samej funkcyi pierwotnej, może przytrafić się kilka przypadków: *1o* być może, iż wszystkie współczynniki różniczkowe jednego rzędu, będą wyrażone za pomocą zmiennych niezależnych, co daje wyrażnie różniczkę zupełną funkcyj szukanych, które z nich wyprowadzimy sposobami pod liczb. 278 i 280, wyrażonemi; *2o* sama funkcya może wchodzić razem ze zmiennymi, do wyrażen współczynników różniczkowych, i wtedy wynika zrównanie różniczkowe zupełne kształtu

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0;$$

3cie nakoniec, może być tylko dany związek między temi współczynnikami, funkcją, od której one pochodzą, i zmiennymi niezależnymi. Zastanowię się naprzód nad pierwszym przypadkiem, który scałkowałby się sposobem wyłożonym pod liczbą 280, gdyby pierwsza strona danego zrównania była zupełną różniczką o trzech ilościach zmiennych.

338. Tu równie jak pod liczbą 289 można zape-

wnić się, że równanie

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

jeżeli pochodzi ze równania całkowego $u=s$, a nie jest różniczką zupełną, może nią stać się za pomocą stosownego mnożnika. Jakoż dane równanie różniczkowe, powinno wtedy zgodzić się ze równaniem

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz = 0,$$

to jest iż wartości różniczek dz wyprowadzone z jednego i drugiego równania, powinny być tosame, nie zależnie od różniczek dx i dy (136); te zaś wartości są

$$dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy, \quad dz = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dz}}dx - \frac{\frac{du}{dy}}{\frac{du}{dz}}dy,$$

przeto wypada

$$\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dz}} = \frac{P}{R}, \quad \frac{\frac{du}{dy}}{\frac{du}{dz}} = \frac{Q}{R}, \quad \text{z\kern 0.08em} \text{t\kern 0.08em} \text{\aa} \quad \frac{du}{dx} = \frac{P}{R} \frac{du}{dz}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{Q}{R} \frac{du}{dz};$$

nazywając wskazane te ilorazy przez μ , i otrzymane z\kern 0.08em} \text{t\kern 0.08em} \text{ \aa} \text{ wyrażenia współczynników różniczkowych wprowadzając w równanie różniczkowe przypuszczone, otrzymujemy

$$du = \mu P dx + \mu Q dy + \mu R dz,$$

a\kern 0.08em} \text{ \aa} \text{by to równanie było zupełną różniczką, powinny się prawdzić warunki nast\kern 0.08em} \text{ \aa} \text{pne}

$$\frac{d.\mu P}{dy} = \frac{d.\mu Q}{dx}, \quad \frac{d.\mu R}{dx} = \frac{d.\mu P}{dz}, \quad \frac{d.\mu Q}{dz} = \frac{d.\mu R}{dy},$$

wykonywając wskazane różniczkowanie otrzymujemy równania

$$\left. \begin{aligned} \mu \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} \right) + P \frac{d\mu}{dy} - Q \frac{d\mu}{dx} &= 0, \\ \mu \left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} \right) + R \frac{d\mu}{dx} - P \frac{d\mu}{dz} &= 0, \\ \mu \left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) + Q \frac{d\mu}{dz} - R \frac{d\mu}{dy} &= 0, \end{aligned} \right\} (A):$$

Mnożąc pierwsze zrównanie przez R , drugie przez Q , trzecie przez P , i zbierając je w jedną sumę, wypadnie zrównanie, które rozdzielone przez μ będzie

$$R \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} \right) + Q \left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} \right) + P \left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) = 0 \quad (B),$$

to jedno zrównanie warunkowe zastępuje miejsce trzech poprzedzających, i jemu zadość uczynić powinno dane zrównanie różniczkowe, skoro może za pomocą mnożnika stać się zupełną różniczką, a zatem skoro pochodzi ze zrównania całkowego o trzech ilościach zmiennych, czyli co to samo jest, skoro może być sprawdzonem przez funkcją o dwóch ilościach zmiennych.

Ta ostatnia uwaga prowadzi także do zrównania (B), przez bezpośrednie zastosowanie twierdzenia pod liczb. 278; albo jeźlibyśmy mieli wyrażenie pierwotne ilości z , przez ilości x i y , i jeźlibyśmy je podstawili w wyrażenie różniczki dz , wyprowadzone ze zrównania $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, otrzymalibyśmy koniecznie różniczkę zupełną o dwóch ilościach zmiennych, kształtu

$$dz = p dx + q dy, \text{ gdzie jest } \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx},$$

lecz według założenia mamy $p = -\frac{P}{R}$, $q = -\frac{Q}{R}$, gdzie P , Q i R zamykają ilość z , należy ją także w różniczkowaniach wskazanych odmienić, a zatem na miejscu $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, podstawić p i q , z czego wypada zrównanie

$$\frac{dp}{dy} + q \frac{dp}{dz} = \frac{dq}{dx} + p \frac{dq}{dz},$$

czyli

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} + q \frac{dp}{dz} - p \frac{dq}{dz} = 0 \quad (C),$$

podstawivszy $-\frac{P}{R}$, $-\frac{Q}{R}$, na miejscu p i q , i uprościwszy, otrzymamy równanie

$$P \frac{dR}{dy} - R \frac{dP}{dy} + R \frac{dQ}{dx} - Q \frac{dR}{dx} + Q \frac{dP}{dz} - P \frac{dQ}{dz} = 0.$$

Przez długi czas, równania, które nie czyniły zadość równaniu (B), nazywano równaniami sprzecznyemi (*absurdes*) i uważano je za nieznaczące, lecz *Monge* (*Monge*) pokazał, że wszystkie równania różniczkowe o trzech ilościach zmiennych mają znaczenie rzeczywiste; te równania, których całka była wyrażona przez jedno tylko równanie między trzema ilościami zmiennymi, należały do powierzchni krzywych, każde zaś z innych równań przedstawiało nieograniczoną liczbę linii krzywych podwójnej krzywości, mających jedną własność spólną. Zatrudnijmy się naprzód pierwszymi.

339. Gdy równaniu (B) staje się zadosyć, dwa którekolwiek ze równań (A) są dostateczne do oznaczenia mnożnika μ ; lecz otrzymujemy go takż, skoro umiemy znaleźć mnożnik, który zupełną czyni różniczkę $Pdx + Qdy$, w której ilość z uważa się za stałą.

Niech będzie ten mnożnik μ , a

$$f(\mu Pdx + \mu Qdy) = U;$$

całką szukaną będzie

$$U + Z = 0,$$

gdzie Z jest funkcją jednej tylko ilości z . Jeżeli tę całkę zróżniczkujemy, zmieniając wszystkie ilości, i uważając że z wyższego równania jest

$$\frac{dU}{dx} = \mu P, \quad \frac{dU}{dy} = \mu Q,$$

otrzymamy zrównanie

$$\mu P dx + \mu Q dy + \left(\frac{dU}{dz} + \frac{dZ}{dz} \right) dz = 0,$$

które porównyując z założoném, wypada

$$\mu R = \frac{dU}{dz} + \frac{dZ}{dz}, \quad \text{czyli} \quad \frac{dZ}{dz} = \mu R - \frac{dU}{dz}.$$

Ażebym ilość Z mogła być oznaczoną według przypuszczenia założonego, druga strona ostatniego zrównania powinna być funkcją ilości z i Z , przynajmniej po wyrzuceniu ilości y , za pomocą jej wartości ze zrównania $U+Z=0$ wyprowadzonej; a wtedy będzie

$$\frac{d\left(\mu R - \frac{dU}{dz}\right)}{dx} = 0,$$

przypuszczając iż y jest funkcją ilości x i Z , oznaczoną przez zrównanie $U+Z=0$. Pod tym ostatnim względem mamy

$$\frac{d\left(\mu R - \frac{dU}{dz}\right)}{dx} + \frac{d\left(\mu R - \frac{dU}{dz}\right)}{dy} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (D),$$

albo rozwijając

$$\mu \frac{dR}{dx} + R \frac{d\mu}{dx} - \frac{d^2 U}{dx dz} + \left(\mu \frac{dR}{dy} + R \frac{d\mu}{dy} - \frac{d^2 U}{dz dy} \right) \frac{dy}{dx} = 0;$$

lecz dane zrównanie różniczkowe wyrażone pod kształtem

$$dy = -\frac{P}{Q} dx - \frac{R}{Q} dz,$$

gdy w niem tylko x, y , uważać będziemy za zmienne, daje

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q};$$

mamy takż

$$\frac{d^2 U}{dx dz} = \frac{d \mu P}{dz} = \mu \frac{dP}{dz} + P \frac{d\mu}{dz},$$

$$\frac{d^2 U}{dy dz} = \frac{d \mu Q}{dz} = \mu \frac{dQ}{dz} + Q \frac{d\mu}{dz};$$

nadto mnożnik μ czyniąc wyrażenie $\mu P dx + \mu Q dy$ zupełną różniczką, czyni zadość zrównaniu

$$P \frac{d\mu}{dy} - Q \frac{d\mu}{dx} + \mu \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} \right) = 0 \quad (290).$$

Jeżeli z tego zrównania wyprowadzoną wartość na $\frac{d\mu}{dx}$, jakoteż wartości na $\frac{d^2 U}{dx dz}$, $\frac{d^2 U}{dy dz}$, $\frac{dy}{dx}$ podstawimy w zrównanie warunkowe (C), po uproszczeniu otrzymamy zrównanie (B), co okazuje, że całkowanie zrównań różniczkowych o trzech ilościach zmiennych, zależy od całkowania zrównań różniczkowych o dwóch zmiennych.

340. Gdy różniczki dx , dy , dz , są podniesione do potęg w daném zrównaniu, wtenczas takowe zrównanie nie może być scałkowane sposobem wyżej podanym, chyba że czyni zadość nowemu jeszcze warunkowi, który się tu wyłoży. Niech będzie np. zrównanie

$$P dx^2 + Q dy^2 + R dz^2 + 2S dx dy + 2T dx dz + 2V dy dz = 0;$$

jeżeli to zrównanie istotnie wynika z różniczkowania zrównania całkowego o trzech zmiennych x, y, z , tedy powinno dać się przywieść do następującego kształtu $P'dx + Q'dy + R'dz = 0$. Jakoż jakakolwiek będzie całka, zawsze można z niej przez różniczkowanie otrzymać, $dz = p dx + q dy$, gdzie p i q wyrażają jakiekolwiek funkcje ilości x, y, z ; trzeba więc, ażeby rozwiązując zrównanie przez wzgląd na dz , różniczki dx, dy , obie wyszły z pod znaku pierwiastku; co nie zawsze się wydarza, mamy bowiem

$$dz = \frac{1}{R} \{ -Tdx - Vdy$$

$$\pm \sqrt{(T^2 - PR)dx^2 + 2(TV - RS)dxdy + (V^2 - QR)dy^2} \},$$

a jeżeli ilość znajdująca się pod znakiem pierwiastku nie jest zupełną potęgą drugą, albo jeżeli przynajmniej nie będziemy mieli

$$(TV - SR)^2 = (T^2 - PR)(V^2 - QR),$$

różniczki dx , dy , zostaną pod tym znakiem. W ogólności jakiegokolwiek stopnia będzie dane zrównanie, przez wzgląd na dz , dx , dy , trzeba, iżby będąc uszykowane według potęg różniczki dz , mogło się rozłożyć na mnożniki mające postać

$$dz - pdx - qdy = 0.$$

Zrównania różniczkowe zupełne, które nie czynią zadość warunkóm całkowalności.

341. Widzieliśmy pod licz. 338, że zrównaniu różniczkowemu pierwszego rzędu o trzech ilościach zmiennych, kształtu $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, wtedy tylko funkcyja o dwóch ilościach zmiennych uczynić zadość może, gdy zrównanie

$$P \frac{dR}{dy} - R \frac{dP}{dy} + R \frac{dQ}{dx} - Q \frac{dR}{dx} + Q \frac{dP}{dz} - P \frac{dQ}{dz} = 0,$$

sprawdza się samo przez się; lecz zakładając jakikolwiek związek między ilościami x , y , z , zamienimy dane zrównanie na inne, które zamykać będzie dwie tylko ilości zmienne, a zatem jedną z nich można będzie wyrazić przez drugą.

Gdybyśmy np. mieli zrównanie

$$\frac{dz}{z-c} = \frac{xdx + ydy}{x(x-a) + y(y-b)},$$

które wtedy tylko czyni zadość warunkowi wyżej podanemu, gdy $a=b=0$; lecz gdy nie jest $a=b=0$, wtedy czynimy $y=\phi(x)$, gdzie ϕ znaczy jakąkolwiek funkcją, i równanie dane zamieni się na

$$\frac{dz}{z-c} = \frac{\{x + \phi(x)\phi'(x)\}dx}{x(x-a) + \phi(x)\{\phi(x)-b\}}.$$

i da tyle różnych związków między x i z , ile się naznaczy szczególnych kształtów funkcji $\phi(x)$. Jeżeli weźmiemy np. $\phi(x)=x$, będziemy mieli

$$\frac{dz}{z-c} = \frac{2xdx}{x(x-a) + x(x-b)} = \frac{2dx}{2x-a-b},$$

złąd. wyciągniemy

$$z-c = S(2x-a-b),$$

gdzie S jest ilością stałą dowolną, i równaniu danemu zadość uczynią równania

$$y=x$$

$$z-c = S(2x-a-b).$$

Newton w swoim traktacie o funkcjach (*) wskazał już sposób rozwiązywania równań różniczkowych zamykających więcej nad dwie ilości zmienne; lecz ten sposób jest niedogodny, bo wymaga całkowania, na każdy wypadek, który chcemy otrzymać, *Monge* zaś roku 1784 okazał, iż wprowadzając funkcję dowolną, można otrzymać ogólny równań układ, który będzie dawał nieograniczoną liczbę układów szczególnych, czyniących zadość równaniu danemu.

342. Sposób, którego używać należy dla scałkowania równania

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

(*) Newtoni opuscula tom I. p. 83 edit 1744.

przez jedno tylko zrównanie pierwotne, gdy to być może (339), prowadzi także do rozwiązania najogulniejszego, które na toż zrównanie w przeciwnym przypadku otrzymać można. Jakoż, jeżeli naprzód je scałkujemy, uważając jedną z ilości zmiennych w niem zawartych za stałą, np. ilość z , i zrównanie całkowe odpowiadające zrównaniu $Pdx + Qdy = 0$, wyrazimy przez $U = S$, i je zróżniczkujemy zmieniając razem ilości x, y, z , i S ; porównawszy wypadek otrzymany z danem zrównaniem różniczkowem, przyjdziemy do zrównania

$$\frac{dS}{dz} = \frac{dU}{dz} - \mu R,$$

gdzie μ jest mnożnikiem czyniącym wyrażenie $Pdx + Qdy$ zupełną różniczką. Wprawdzie druga strona nie sprowadzi się już do funkcji jednej tylko ilości z , jak to wypada wtedy, gdy się warunek całkowalności spełnia, i nie będzie mogła dać ilości S , jak wymaga tenże warunek; lecz jasną jest rzeczą, że zakładając, iż S jest funkcją ilości z , dane zrównanie będzie sprawdzone przez zrównanie pierwotne $U = S$, jeżeli razem mamy

$$\frac{dS}{dz} = \frac{dU}{dz} - \mu R,$$

więc kładąc $S = \varphi(z)$, układ zrównań

$$U = \varphi(z),$$

$$\frac{dU}{dz} - \mu R = \varphi'(z),$$

uczyni zadość zrównaniu danemu, jakiegokolwiek postaci będzie funkcya $\varphi(z)$, i będzie mógł być uszczególnionym nieograniczoną liczbą sposobów, biorąc $\varphi(z)$ dowolnie.

Stosując to do zrównania

$$\frac{dz}{z-c} = \frac{xdx + ydy}{x(x-a) + y(y-b)},$$

któreśmy za przykład wzięli pod liczbą poprzedzającą, będziemy mieli

$$Pdx + Qdy = \frac{x dx + y dy}{x(x-a) + y(y-b)}, \quad R = -\frac{1}{z-c};$$

czyniąc

$$\mu = x(x-a) + y(y-b),$$

otrzymamy

$$U = x^2 + y^2;$$

zatem mieć będziemy dwa równania

$$x^2 + y^2 = \varphi(z),$$

$$\frac{x(x-a) + y(y-b)}{z-c} = \varphi'(z),$$

Całkowanie cząstkowych równań różniczkowych pierwszego rzędu.

343. Przystąpimy teraz do trzeciego przypadku wyznajdowania funkcji o dwóch lub o większej liczbie ilości zmiennych. W tym przypadku do oznaczenia funkcji nieznanej, mamy tylko niektóre współczynniki różniczkowe pewnego rzędu, albo jedno tylko równanie między niemi. Ten trzeci przypadek stanowi część rachunku zwaną *rachunkiem całkowym różnic cząstkowych*, a które podług uwagi pod licz. 43, należałoby nazwać *rachunkiem całkowym różniczek cząstkowych*, bo współczynniki różniczkowe osobno uważane, dają poznać tylko różniczki cząstkowe, nie zaś różnice, które są przedmiotem osobnego rachunku, przy końcu tego dzieła umieszczonego. Współczynnik $\frac{d^{m+n}}{dx^m dy^n}$, rozmnożony przez $dx^m dy^n$ zamienia się na $\frac{d^{m+n}}{dx^m dy^n} dx^m dy^n$, i wyraża wtedy różniczkę rzędu m przez wzgląd na x , otrzymaną z różniczki rzędu n funkcji z , przez wzgląd na y ; i wzajemnie.

344. Z pomiędzy zrównań różniczkowych cząstkowych najprostsze jest to, które zawiera jeden tylko współczynnik pierwszego rzędu, oraz zmienne niezależne. Niech będzie np. $\frac{dz}{dx}=R$, gdzie R nie zawiera w sobie z , mnożąc przez dx otrzymamy $\frac{dz}{dx} dx = Rdx$, czyli $dz = Rdx$, a całkując przez wzgląd tylko na x , będzie $z = \int Rdx + S$. W tym przypadku, S wyraża nie tylko ilość stałą dowolną, lecz funkcją zupełnie nieoznaczoną, zależącą od wszystkich zmiennych zawartych w funkcji z , oprócz zmiennej x . Gdyby np. z zależało razem od x i y , otrzymalibyśmy $z = \int Rdx + \phi(y)$ oznaczając przez ϕ funkcją dowolną złożoną jakimkolwiek sposobem ze zmiennej y i ilości stałych. Jeżeli z jest funkcją trzech zmiennych u, x, y , będzie wtenczas $z = \int Rdx + \phi(y, u)$, gdzie $\phi(y, u)$ wyraża funkcją dowolną do której zmienne u, y , wchodzi jakimkolwiek bądź sposobem, pomieszane z sobą tylko, lub też ilościami stałymi. W ogulności, na jakąkolwiek liczbę zmiennych niezależnych s, t, u, x, y , i t. d., całką zrównania $\frac{dz}{dx}=R$, będzie $z = \int Rdx + \phi(s, t, u, y, \text{i t. d.})$, jasna bowiem jest, że funkcya $\phi(s, t, u, y, \text{i t. d.})$, jakabykolwiek była, jeżeli będzie wzięta za stałą, gdy się x zmienia, zawsze otrzymamy $\frac{dz}{dx}=R$.

Założyliśmy byli że z nie wchodzi do R ; jeźliby zaś z do niego wchodziło, trzeba by całkować za pomocą któregośkolwiek z poprzedzających sposobów, zrównanie $\frac{dz}{dx}dx - Rdx = 0$, czyli $dz - Rdx = 0$, biorąc za zmienne same tylko x i z ; a nazwawszy jego całkę $V =$ stałą, otrzymalibyśmy

$$V = \phi(s, t, u, y, \text{i t. d.}),$$

na zrównanie pierwotne, od którego zależy funkcya z .

Jakoż, różniczkując to zrównanie, i biorąc same tylko x i z za zmienne, wypadek mieć będzie kształt

$$Pdz + Qdx = 0,$$

gdzie $-\frac{Q}{P} = R$, a ztąd $\frac{dz}{dx} = R$.

345. Jeżeli dla skrócenia założymy

$$Pdz = pdx + qdy \quad (1),$$

zrównanie

$$Pp + Qq = R \quad (2),$$

gdzie P, Q, R , zawierają w sobie razem x, y, z , jest najogulniejsze, jakie tylko mieć można między współczynnikami pierwszego rzędu p i q , gdy te nie przechodzą pierwszego stopnia. Wyciągnąwszy wartość p z tego zrównania, i podstawivszy w (1) otrzymamy

$$Pdz - Rdx = q(Pdy - Qdx) \quad (3),$$

spółczynnik q zostaje zawsze nieoznaczony. Tu się stawiają nam dwa przypadki: 1o d. ilości P, Q , i R , tak mogą być złożone, że funkcyja $Pdz - Rdx$ zawiera w sobie tylko zmienne z, x , a zaś funkcyja $Pdy - Qdx$ zmienne x, y . 2o. jedna którakolwiek z tych funkcyj, albo obie razem, mogą zawierać trzy zmienne x, y, z .

W pierwszym przypadku, znajduje się mnożnik μ , który czyni funkcyję $Pdy - Qdx$ różniczką zupełną, i mnożnik μ' , który toż samo działa z funkcyją $Pdz - Rdx$; wyraziwszy więc te różniczki przez M i N , otrzymamy $Pdy - Qdx = \frac{1}{\mu} dM$, $Pdz - Rdx = \frac{1}{\mu'} dN$, a zrównanie (3) zamieni się na $dN = \frac{q\mu'}{\mu} dM$. Nie może ono być zcałkowanem, jeżeli $\frac{q\mu'}{\mu}$ nie jest jakąkolwiek funkcyją ilości M ; dajmy więc że $\frac{q\mu'}{\mu} = \phi(M)$, będzie $dN = \phi'(M)dM$, a całkując otrzymamy $N = \phi(M)$, gdzie

ϕ zawsze wyraża funkcją dowolną, co się zgadza z tém, cośmy o tworzeniu się równań różniczkowych cząstkowych wyłożyli (140).

Dla dania przykładu na ten przypadek weźmy

$$px + qy = nz;$$

wyciągamy ztąd $P = x, Q = y, R = nz,$

$$Pdy - Qdx = xdy - ydx,$$

$$Pdz - Rdx = xdz - nzdx;$$

a całkując zrównania

$$xdy - ydx = 0, \quad xdz - nzdx = 0,$$

znajdziemy, że mnożniki μ , i μ' , są $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^{n+1}}$, i że

$$M = \frac{y}{x}, \quad N = \frac{z}{x^n}, \text{ ztąd wypada, że } \frac{z}{x^n} = \phi\left(\frac{y}{x}\right), \text{ czyli}$$

$z = x^n \phi\left(\frac{y}{x}\right)$, to jest, że z jest funkcją jednorodną ilości x, y , stopnia n . Jakoż równanie $px + qy = nz$, nie co innego jest, tylko wzór funkcji jednorodnych dany pod liczbą 292, a poprzedzające uwagi to samo nam dowiodły na przypadek dwóch zmiennych.

346. Gdy zmienne x, y, z , są razem pomieszane w funkcjach $Pdy - Qdx, Pdiz - Rdx$, w ten czas nie podobna jest uczynić każdą z nich całkowalną w szczególności, za pomocą mnożników, a to z przyczyny, że nie mamy sposobu całkowania z osobna równań

$$Pdy - Qdx = 0, \quad Pdiz - Rdx = 0;$$

gdyż jasna jest, że ilość z nie może być brana za stałą w pierwszym równaniu, ani x w drugim; lecz można je-szcze przemienić równanie (5), na inne, które byłoby zupełną różniczką kształtu $dN = \phi'(M)dM$, bylebyśmy uważali funkcje M i N , jako zamykające razem trzy ilości zmienne x, y, z .

W tym stanie rzeczy, zrównanie

$$dN = \phi'(M)dM,$$

rozwija się na zrównanie

$$\frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \frac{dN}{dz}dz = \phi'(M)\left\{\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz\right\},$$

które powinno zgodzić się ze zrównaniem (3). Z jednego zrównania i drugiego wyprowadzając wartość różniczeki dz , i równając z sobą odpowiednie współczynniki różniczeki dy i dx (338), otrzymujemy

$$-Q = \frac{\frac{dN}{dy} - \phi'(M)\frac{dM}{dy}}{\frac{dN}{dz} - \phi'(M)\frac{dM}{dz}}, \quad \frac{qQ - R}{P} = \frac{\frac{dN}{dx} - \phi'(M)\frac{dM}{dx}}{\frac{dN}{dz} - \phi'(M)\frac{dM}{dz}},$$

w pierwszym z tych zrównań funkcya $\phi'(\bar{M})$ zostaje dowolną, ponieważ q jest nieoznaczone; lecz za pomocą jego wartości, drugie zrównanie zamienia się na

$$-Q\left(\frac{dN}{dy} - \phi'(M)\frac{dM}{dy}\right) - R\left(\frac{dN}{dz} - \phi'(M)\frac{dM}{dz}\right) - P\left(\frac{dN}{dx} - \phi'(M)\frac{dM}{dx}\right);$$

a że funkcyje M i N są nieznanne, przeto można to zrównanie rozdzielić na dwa inne, równając osobno z zerem część mnożoną przez $\phi'(M)$. Tym sposobem będziemy mieli zrównania

$$P\frac{dM}{dx} + Q\frac{dM}{dy} + R\frac{dM}{dz} = 0,$$

$$P\frac{dN}{dx} + Q\frac{dN}{dy} + R\frac{dN}{dz} = 0;$$

które są zrównaniami warunkowemi mającemi służyć do oznaczenia funkcyj M i N ; porównywając pierwsze strony tych zrównań z zupełnemi funkcyj M i N różniczkami, które są:

$$\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz,$$

$$\frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \frac{dN}{dz}dz,$$

postrzegamy, że uczynimy je tosamými jedne z drugićmi, kładąc

$$\frac{Q}{P} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{R}{P} = \frac{dz}{dx},$$

zkaąd wypadają zrównania

$$Pdy - Qdx = 0, \quad Pd z - Rdx = 0 \quad (4);$$

za pomocą których różniczki zupełne dM , i dN , stają się równými zeru, a zatem zgadzają się ze zrównaniami

$$M = a, \quad N = b,$$

gdzie a i b , są ilości stałe dowolne.

Z tego rozumowania okazuje się, że oznaczenie funkcij M i N , zależy od scałkowania razem zrównań (4), i od nadania zrównanióm ich pierwotnym kształtu wyżej wskazanego, wtedy całką danego zrównania różniczkowego czątkowego będzie $N = \varphi(M)$. To twierdzenie roztrząsane naprzód przez Mążę (*Monge*), zostało potem rozszerzone i dowiedzione przez Lagranża, który sam je takż był odkrył.

Dla otrzymania całek zrównań (4), wyrzucimy naprzód sposobem wyłożonym pod liczbą 154, jedną którąkolwiek z ilości zmiennych x, y, z , i jej różniczki; zrównanie wypadkowe będzie stopnia drugiego, jeżli będziemy mogli scałkować je dwa razy, otrzymamy między dwiema ilościami stałými dowolnými a , i b , zrównanie pierwotne, którego pierwszą różniczkę złączymy ze zrównaniami (4), dla wyrzucenia z nich $\frac{dy}{dx}$, lub $\frac{dz}{dx}$, w celu otrzymania drugiego zrównania pierwotného: to zrównanie złączone ze zrównaniem pier-

wszém, da na ilości stałe a i b , wartości, które odpowiednie będą funkcyami M i N (*).

347. W wielu przypadkach ułatwiamy całkowanie zrównań różniczkowych czątkowych, pierwszego rzędu, o trzech zmiennych, rozdzielając je na dwa inne, przez wprowadzenie ilości nieoznaczonej; obaczmy to na przykładzie:

Niech będzie $f(p, x) = F(q, y)$, uczyniwszy $f(p, x) = \omega$, otrzymamy także $F(q, y) = \omega$; z tych dwóch zrównań wyciągniemy

$$p = f'(\omega, x), \quad q = F'(\omega, y),$$

gdzie f' i F' są funkcyami wyprowadzonymi z funkcji f i F . Zrównanie $dz = p dx + q dy$ zamieni się na

$$dz = dx f'(\omega, x) + dy F'(\omega, y);$$

(*) Ten sposób postępowania okazuje, iż, ogólnie mówiąc, dane zagadnienie może być rozwiązane, lecz w stosowaniu najczęściej okazuje się to być rzeczą niepodobną, z przyczyny trudności całkowania zrównań różniczkowych zwyczajnych; i dla tego należy starać się odbywać ze zrównaniami (4) takie przerabiania, któreby doprowadziły do różniczek zupełnych, tego często dowodzimy używając mnożników, ponieważ zawsze znaleźć je można stosowne do tego. Jakoż jeśli ze zrównania

$$P \frac{dM}{dx} + Q \frac{dM}{dy} + R \frac{dM}{dz} = 0,$$

które powinno być tosamém, gdy całkami zrównań (4), są $M=a$, $N=b$, weźmiemy wartość $\frac{dM}{dz}$, i podstawimy w zupełnej różniczce

$$\frac{dM}{dx} dx + \frac{dM}{dy} dy + \frac{dM}{dz} dz = 0,$$

otrzymamy wypadek

$$\frac{dM}{dy} (P dy - Q dx) + \frac{dM}{dz} (P dz - R dx) = 0,$$

utworzony ze zrównań (4), rozmnożonych względnie przez mnożniki $\frac{dM}{dy}$, $\frac{dM}{dz}$; podobny wypadek otrzymalibyśmy wyrażony przez ilość N .

lecz jeżeli (całki),

$$\int dx f'(\omega, x), \quad \int dy F'(\omega, y)$$

wzięte przez wzgląd tylko na x, y , wyrazimy przez P, Q , gdzie te ilości są także funkcyami ω , otrzymamy

$$dx f'(\omega, x) = \frac{dP}{dx} dx = dP - \frac{dP}{d\omega} d\omega,$$

$$dy F'(\omega, y) = \frac{dQ}{dy} dy = dQ - \frac{dQ}{d\omega} d\omega,$$

a zatem

$$dz = dP + dQ - \left(\frac{dP}{d\omega} + \frac{dQ}{d\omega} \right) d\omega.$$

Ta ostatnia różniczka nie inaczej może stać się różniczką zupełną, tylko przypuściwszy, że

$$\frac{dP}{d\omega} + \frac{dQ}{d\omega} = \varphi'(\omega),$$

złąd wypada że

$$\int \left(\frac{dP}{d\omega} + \frac{dQ}{d\omega} \right) d\omega = \varphi(\omega);$$

otrzymamy więc zrównania

$$z + \varphi(\omega) = P + Q, \quad \varphi'(\omega) = \frac{dP}{d\omega} + \frac{dQ}{d\omega},$$

między którymi trzeba będzie wyrzucić ω , po oznaczeniu funkcyj dowolnej $\varphi(\omega)$.

Częstokroć dosyć jest podstawić w zrównaniu

$$dz = p dx + q dy$$

wartość na p lub q , wyciągnioną bezśrednie z danego zrównania, a potem całkować wypadek przez części. Mając np. $p = f(q)$ (161), będzie

$$dz = dx f(q) + q dy;$$

złąd

$$z = xf(q) + qy - \int \{xf'(q) + y\} dq;$$

a że całkowanie wskazane nie może być wykonaném, tylko czyniąc $xf'(q) + y = \varphi'(q)$, złąd wypada

$$z + \varphi(q) = xf(q) + qy, \quad \varphi'(q) = xf'(q) + y \quad (*).$$

Całkowanie zrównań różniczkowych cząstkowych wyższych rzędów.

348. Funkcya o dwóch zmiennych, daje trzy spółczynniki różn. drugiego rzędu, a zrównanie różn. cząstkowe tegoż rzędu, w ogulności wyraża związek między zmiennymi niezależnemi, funkcją szukaną, i jej spółczynniki różnicz. drugiego i pierwszego rzędu;

(*) *Monge* przez uwagi bardzo dowcipne połączył całkowanie zrównań różniczkowych cząstkowych z tworzeniem się powierzchni (obacz jego *Géométrie analytique*). Odpowiedność wzajemna dwóch rzeczy okazuje się takżę przez kształt całek, na jaki w poprzedzających rozumowaniach natrafiliśmy. Zrównanie $N = \varphi(M)$ (346) stosuje się do sposobu tworzenia się powierzchni wskazanego pod liczbą 141; $M = a$, $N = \varphi(a) = b$, są zrównania linii, z których składają się powierzchnie odpowiadające danemu zrównaniu różniczkowemu cząstkowemu, a które po sobie następują według prawa wyrażonego przez kształt funkcji φ .

Drugi kształt całki otrzymanej pod liczbą poprzedzającą, odpowiada sposobowi podanemu pod liczbą 162 na tworzenie się powierzchni odwijalnych, do których stosuje się drugi przykład. $p = f(q)$. Całka będąc wtedy wyrażoną przez dwa zrównania kształtu $V = 0$, $\frac{dV}{d\omega} = 0$, wyraża następne przecięcia się ciągu powierzchni wyprowadzonych ze zrównania $V = 0$, przez zmianę ilości ω , a zatem należy do granicy tych wszystkich przecięć; więc ta granica jest utworzona z linii, których przyrodzenie jest dane przez dwa zrównania składające całość, skoro uszczególniono funkcją dowolną. *Monge* nazywa te linie *charakterystycznemi*, a powierzchnie wynikające z układu zrównań uważanego nazywa *powierzchniami obwijającemi* (*surfaces enveloppes*).

i ogólne równanie jakiegokolwiek rzędu, o jakiegokolwiek liczbie zmiennych, powinno w sobie zawierać zmienne niezależne, funkcją szukaną, i jej spółczynniki różnic. zaczawszy od pierwszego rzędu, aż do rzędu jakiego jest dane równanie.

Przytoczę tu niektóre równania, które mogą się przywieść do niższego od danego rzędu.

1^od. Każde równanie o trzech zmiennych mające kształt

$$\int \left\{ x, y, \frac{d^n z}{dy^n}, \frac{d^{n+1} z}{dx dy^n}, \frac{d^{n+2} z}{dx^2 dy^n}, \dots, \frac{d^{n+m} z}{dx^m dy^n} \right\} = 0,$$

od rzędu $m+n$, natychmiast zostanie przywiedzione do rzędu m , czyniąc $\frac{d^n z}{dy^n} = v$, gdyż tym sposobem zamieni się na

$$\int \left\{ x, y, v, \frac{dv}{dx}, \frac{d^2 v}{dx^2}, \dots, \frac{d^m v}{dx^m} \right\} = 0.$$

W tym razie należy brać ilość y za stałą, wszystkie bowiem spółczynniki różn. ilości v , do tej funkcyi wchodzące, odnoszą się do x ; zatem można będzie z tą funkcją postąpić, jak gdyby tylko była o dwóch zmiennych x, v ; lecz jasna jest, że chcąc uważać wyrażenie v pod najogulniejszym względem, trzeba będzie za m stałych dowolnych do tej funkcyi wchodzących, położyć tyleż funkcyj dowolnych ilości zmiennej branej wprzód za stałą. Wynalazłszy wartość v , dojdziemy wartości z za pomocą równania $\frac{d^n z}{dy^n} = v$, w którym na-

leży teraz brać x za stałą, a które tym sposobem stając się równaniem rzędu n , między dwiema tylko zmiennymi, podlegać będzie tymże prawidłóm co i inne tego rodzaju równania, pamiętając jednak odmienić na funkcyę dowolne ilości x , wszystkie n stałe dowolne wprowadzone przez to nowe całkowanie.

2re. Zrównania mające kształt

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots, \frac{d^n z}{dx^n}\right) = 0,$$

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dy^2}, \dots, \frac{d^n z}{dy^n}\right) = 0,$$

mogą być bezśrednie całkowane, jak gdyby do nich dwie tylko zmienne wchodziły, to jest x i z do pierwszego, y i z do drugiego; po scałkowaniu podstawić należy zamiast stałych dowolnych, w pierwszym funkcyje ilości y , w drugim funkcyje ilości x .

Zrównania drugiego rzędu

$$\frac{d^2z}{dx dy} + P \frac{dz}{dx} = Q, \quad \frac{d^2z}{dx dy} + P \frac{dz}{dy} = Q,$$

w których P i Q zawierają w sobie tylko x, y , należą do pierwszego kształtu. Uczyniwszy $\frac{dz}{dx} = v$, pierwsze zamienia się na $\frac{dv}{dy} + Pv = Q$, zrównanie pierwszego stopnia i rzędu co do zmiennych v, y , a którego całka jest

$$v = e^{-\int P dy} \left\{ \int e^{\int P dy} Q dy + S \right\} \quad (285).$$

Jeżeli podstawimy za v jego wartość $\frac{dz}{dx}$ i odmienimy S na $\varphi(x)$, otrzymamy

$$\frac{dz}{dx} = e^{-\int P dy} \left\{ \int e^{\int P dy} Q dy + \varphi(x) \right\};$$

scałkowawszy teraz przez wzgląd na same tylko z, x , znajdziemy

$$z = \int dx e^{-\int P dy} \left\{ \int e^{\int P dy} Q dy + \varphi(x) \right\} + \psi(y);$$

podobnym sposobem postępując z drugim zrównaniem, przyjdziemy

$$z = \int dy e^{-\int P dx} \left\{ \int e^{\int P dx} Q dx + \varphi(y) \right\} + \psi(x).$$

Jeżeli $P=0$, powyższe wypadki przywiodą się w pierwszym przypadku do

$$z = \int dx \int Q dy + \int dx \varphi(x) + \psi(y),$$

a w drugim do

$$z = \int dy \int Q dx + \int dy \varphi(y) + \psi(x),$$

a że funkcyja φ jest dowolna, wyrazimy po prostu

$$z = \int dx \int Q dy + \varphi(x) + \psi(y),$$

$$z = \int dy \int Q dx + \varphi(y) + \psi(x).$$

Tu widzimy, że te ostatnie przypadki zawisły od scałkowania funkcyj z jedną zmienną, czego przykłady mieliśmy pod liczbą 271.

Drugiego ogólnego kształtu mamy przykłady w następujących równaniach

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + P \frac{dz}{dx} = Q, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} + P \frac{dz}{dy} = Q,$$

przypuszczając że P i Q zawierają w sobie x, y, z . Z pierwszym postąpimy sobie jako ze równaniem drugiego rzędu między zmiennymi x, z ; ilości stałe dowolne wprowadzone przez całkowanie, będą funkcyami ilości y ; podobne działania wykonamy na drugim równaniu przez wzgląd na zmienne y, z , odmienając ilości stałe dowolne na funkcyje ilości x . Weźmy najprostszy przypadek, to jest dajmy że równania dane są;

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = Q, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = Q,$$

i że Q zawiera w sobie x i y tylko; ze wzorów pod liczb. 241 wyciągniemy bezśrednie

$$z = \int dx \int Q dx + Sx + S', \quad z = \int dy \int Q dy + Sy + S',$$

a ztąd

$$z = \int dx \int Q dx + x\varphi(y) + \psi(y), \quad z = \int dy \int Q dy + y\varphi(x) + \psi(x).$$

349. Postępując do zrównań drugiego rzędu o trzech zmiennych, zamykających w sobie wszystkie spółczynniki tegoż rzędu, ale w pierwszym tylko stopniu, dla uproszczenia rachunku, użyję następujących wyrażeń, już używanych pod liczb. 144.

$$dz = p dx + q dy, \quad dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy,$$

$$d^2 z = dp dx + dq dy = r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2.$$

Zrównanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu o trzech zmiennych, wzięte w ogólnym znaczeniu, może dać wyrażenie jednego tylko ze spółczynników różniczkowych r, s, t , wyrażonego przez funkcją dwóch drugich i ilości p, q, x, y, z , co nie jest jeszcze dostatecznym do oznaczenia różniczek dp i dq . Można także za pomocą tych różniczek wyrzucić z danego zrównania, dwa którekolwiek z trzech spółczynników r, s, t , a wypadek wyrażać będzie związek zachodzący w tém zrównaniu między dp i dq ; tego to sposobu *Monge* się trzymał.

Przystosujmy go do zrównania

$$Rr + Ss + Tt = V,$$

w którym ilości R, S, T, V , są z założenia jakimiśkolwiek funkcjami ilości x, y, z, p , i q . Podstawując w niem wartości za r , i t , wyciągnięte ze zrównań

$$dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy,$$

a które są

$$r = \frac{dp - s dy}{dx}, \quad t = \frac{dq - s dx}{dy},$$

otrzymamy zrównanie

$$R dp dy + T dq dx - V dx dy = s(R dy^2 - S dx dy + T dx^2),$$

którego, dwie strony trzebaby zdaje się całkować z osobna, z przyczyny spółczynnika różniczkowego nieoznaczonego s , który mnoży drugą stronę zrównania; lecz

tu równie jak pod licz. 314, dosyć jest otrzymać dwa zrównania całkowite $M=a$, $N=b$, któreby razem zadosyć czyniły zrównanióm

$$Rdpdy + Tdqdx - Vdxdy = 0,$$

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0,$$

całka danego zrównania będzie także $N=\varphi(M)$.

Na dowodzenie tego, przerobmy naprzód poprzedzające zrównania na insze, gdzieby różniczki były pierwszego tylko stopnia, i w tym celu uczynimy $dy=mdx$. Drugie z tych zrównań przez podstawienie wartości za dy , zamieniając się na

$$Rm^2 - Sm + T = 0 \quad (A),$$

oznaczy nam ilość m ; podstawując potem za dy wartość jego w zrównaniu $Rdpdy + Tdqdx - Vdxdy = 0$, otrzymamy na każdą z wartości, jakie ilość m mieć może, układ zrównań kształtu

$$\left. \begin{aligned} dy - mdx &= 0 \\ Rmdp + Tdq - Vmdx &= 0 \end{aligned} \right\} (1),$$

do którego przydać należy zrównanie

$$dz = pdx + qdy,$$

które wyraża związek zachodzący między funkcją z i współczynnikami p , i q .

To założywszy jeżeli zrównania $M=a$, $N=b$, czynią zadosyć zrównanióm (1), i jeżeli w różniczkach

$$\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz + \frac{dM}{dp}dp + \frac{dM}{dq}dq = 0,$$

$$\frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \frac{dN}{dz}dz + \frac{dN}{dp}dp + \frac{dN}{dq}dq = 0,$$

podstawimy za dz wartość jego wyciągnioną ze zrównania $dz = pdx + qdy$, a za dy , dq , wartości ich otrzymane ze zrównań (1), ztąd wypadające zrównania

$$\left\{ \frac{dM}{dx} + m \frac{dM}{dy} + (p+qm) \frac{dM}{dz} + \frac{Vm}{T} \frac{dM}{dq} \right\} dx$$

$$+ \left\{ \frac{dM}{dp} - \frac{Rm}{T} \frac{dM}{dq} \right\} dp = 0,$$

$$\left(\frac{dN}{dx} + m \frac{dN}{dy} + (p+qm) \frac{dN}{dz} + \frac{Vm}{T} \frac{dN}{dq} \right) dx$$

$$+ \left(\frac{dN}{dp} - \frac{Rm}{T} \frac{dN}{dq} \right) dp = 0,$$

powinny być to same, a zatem podzielić się na następujące:

$$\frac{dM}{dx} + m \frac{dM}{dy} + (p+qm) \frac{dM}{dz} + \frac{Vm}{T} \frac{dM}{dq} = 0,$$

$$\frac{dM}{dp} - \frac{Rm}{T} \frac{dM}{dq} = 0,$$

$$\frac{dN}{dx} + m \frac{dN}{dy} + (p+qm) \frac{dN}{dz} + \frac{Vm}{T} \frac{dN}{dq} = 0,$$

$$\frac{dN}{dp} - \frac{Rm}{T} \frac{dN}{dq} = 0.$$

Zrównanie $N = \varphi(M)$, będąc różniczkowane, daje

$$dN = \varphi'(M) dM,$$

czyli

$$\frac{dN}{dx} dx + \frac{dN}{dy} dy + \frac{dN}{dz} dz + \frac{dN}{dp} dp + \frac{dN}{dq} dq =$$

$$\varphi'(M) \left\{ \frac{dM}{dx} dx + \frac{dM}{dy} dy + \frac{dM}{dz} dz + \frac{dM}{dp} dp + \frac{dM}{dq} dq \right\};$$

jeżeli w tém zrównaniu podstawimy wartości za

$$\frac{dM}{dx}, \frac{dM}{dy}, \frac{dN}{dx}, \frac{dN}{dp},$$

wyciągnięte ze trzech poprzedzających, i jeżeli zamienimy dz na $pdx + qdy$, otrzymamy

$$\left(\frac{dN}{dy} + q \frac{dN}{dz}\right)(dy - m dx) + \frac{1}{T} \frac{dN}{dq} (R m dp + T dq - V m dx) = \\ \varphi'(M) \left\{ \left(\frac{dM}{dy} + q \frac{dM}{dz}\right)(dy - m dx) + \frac{1}{T} \frac{dM}{dq} (R m dp + T dq - V m dx) \right\},$$

co zamieni się na

$$R m dp + T dq - V m dx = \omega(dy - m dx),$$

czytniac

$$\omega = - \frac{\frac{dN}{dy} + q \frac{dN}{dz} - \varphi'(M) \left(\frac{dM}{dy} + q \frac{dM}{dz}\right)}{\frac{1}{T} \left(\frac{dN}{dq} - \varphi'(M) \frac{dM}{dq}\right)}.$$

Jeżeli odłożymy $r dx + s dy$, i $s dx + t dy$, za dp , i dq , i jeżeli mnożniki różniczek dx , dy , uczynimy $=0$, otrzymamy

$$R m r + T s - V m = -\omega m, \quad R m s + T t = \omega;$$

potém wyciągnawszy z tych równań wartości współczynników różniczkowych r i t , i podstawivszy je w podaném równaniu, to po wykonanych uproszczeniach zamienia się na

$$s(Rm^2 - Sm + T) = 0;$$

a na mocy równania ($\mathcal{A}$), zadosyc mu się uczyni, nie zależnie od ilości ω , i s .

Wyżej dowiedzione twierdzenie, wraz z innemi jemu podobnemi w wyższych rzędach, nie jest tak ogólne, jak twierdzenie pod licz. 346; gdyż należy uważać, że równania (1) mogą razem zawierać w sobie pięć zmiennych, x, y, z, p, q , i że przydając do nich równanie $dz = p dx + q dy$, przyszlibyśmy tylko do równania o trzech zmiennych, które pod pewnemi tylko warunkami może pochodzić od jednego równania całkowego (338). Mylilibyśmy się jednak, gdybyśmy ztąd wniesli, że gdy pomienione warunki nie są dopełnione, podane równanie różniczkowe cząstkowe, nie może już pochodzić od jednego równania całko-

wego; pochodzi ono od jednej całki; lecz dla otrzymania jej należy udawać się do innych sposobów, a najczęściej przychodzimy tylko do rozwinięcia przez szereg, jak to niżej obaczymy (351, 352).

350. Niech będzie *np* zrównanie

$$Ar + Bs + Ct = V,$$

w którym *A, B, C* są stałe, a *V* jest funkcją ilości *x, y*. W tym przypadku zrównanie (*A*) zamienia się na $Am^2 - Bm + C = 0$; pierwiastki jego *m'* i *m''* będąc stałe, dają nam dwa układy zrównań (1), z których przez całkowanie otrzymamy

$$\left. \begin{array}{l} y - m'x = a \\ Am'p + Cq - m' \int V dx = b \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y - m''x = a' \\ Am''p + Cq - m'' \int V dx = b' \end{array} \right\}$$

i gdzie $\int V dx$ od jednej tylko zmiennej zależy, ponieważ można wyrzucić ilość *y* z ilości *V*, za pomocą jej wartości wziętej w pierwszym zrównaniu każdego układu, otrzymamy więc razem dwie pierwsze całki danej różniczki,

$$Am'p + Cq - m' \int V dx = \phi(y - m'x)$$

$$Am''p + Cq - m'' \int V dx = \psi(y - m''x);$$

a scałkowawszy jedno z tych zrównań, przyjdziemy do całki powtórney.

Z pierwszego *np* otrzymamy

$$p = -\frac{C}{Am'}q + \frac{1}{A} \int V dx + \phi(y - m'x);$$

można dla uproszczenia kłaść *m''* za $\frac{C}{Am'}$, bo według zrównania (*A*), $m'm'' = \frac{C}{A}$; podstawując zaś *p* w zró-

wnaniu $dz = p dx + q dy$, otrzymamy

$$dz - \frac{dx}{A} \int V dx - dx \phi(y - m'x) = q(dy - m''dx);$$

zrównania zatem do scałkowania (346) będą

$$dy - m''dx = 0, \quad dz - \frac{dx}{A} \int V dx - dx \phi(y - m'x) = 0$$

Otrzymamy z pierwszego $y - m''x = a'$, co zamieni drugie na

$$dz - \frac{dx}{A} \int V dx - dx \phi\{a' + (m'' - m')x\} = 0,$$

którego całką będzie

$$z - \frac{1}{A} \int dx \int V dx - \frac{1}{m'' - m'} \phi\{a' + (m'' - m')x\} = b',$$

albo

$$z - \frac{1}{A} \int dx \int V dx - \phi(y - m'x) = b',$$

odstawując za a' jego wartość, i pamiętając że ϕ jest funkcją dowolną, której spółczynniki róż. są także dowolne, a w której jaką chcąc ilość stałą zająć można. Nadto uważać należy że dla otrzymania $\int dx \int V dx$, trzeba naprzód całkować przez wzgląd na x , wyrzucając ilość y za pomocą jej wartości wyciągniętej ze zrównania $y - m'x = a$, jako się wyżej powiedziało, potem w otrzymanym wypadku, znowu wrócić za a wartość jego $y - m'x$, i przed wykonaniem drugiego całkowania, zamienić y na $a' + m''x$, jak wymaga zrównanie $y - m''x = a'$, ostatecznie wynalezione. W ogólności, mając kilka takowych całkowań do wykonania, nigdy do ich uproszczenia innych zrównań używać nie można, tylko takie, któreby razem miały miejsce. Przy zachowaniu takowej ostrzeżności, całka powtórna danego zrównania, $Ar + Bs + Ct = V$, będzie

$$z - \frac{1}{A} \int dx \int V dx = \phi(y - m'x) + \psi(y - m''x).$$

Gdybyśmy mieli $A=1$, $B=0$, $C=-c^2$, $V=0$, przez toby się dane równanie odmieniło na

$$r-c^2t=0, \text{ czyli } \frac{d^2z}{dx^2}=c^2 \frac{d^2z}{dx^2} \quad (*)$$

a całka byłaby

$$z=\varphi(y-cx)+\psi(y+cx).$$

351. Sposób poprzedzający nie tylko nie obejmuje wszystkich przypadków równania pierwszego stopnia a drugiego rzędu

$$Ar+Bs+Ct+Dp+Eq+Fz=U,$$

choćbyśmy w niem założyli współczynniki pierwszej strony stałe, ale nawet jest niedostatecznym na równanie bardzo proste

$$r=q \text{ czyli } \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{dz}{dy}$$

którego scałkowanie podług tego sposobu zależy od scałkowania równań jednoczesnych

$$dy=0, \quad dp-qdx=0 \quad (349);$$

bo drugie z tych równań zamykając trzy ilości zmienne p , q i x , nie może stać się różniczką zupełną (338).

Nie należy jednak ztąd wnosić że dane różniczkowe równanie cząstkowe nie może być scałkowanym, a nawet sposobem ogólnym. Jeżeli założymy $z=Ae^{mx+ny}$ gdzie litery A , m , i n , wyrażają ilości stałe nieoznaczone, litera A i wykładniki zginą, i zostanie tylko równanie o dwóch ilościach nieznanach

$$m^2=n,$$

któremu będzie można zadość uczynić nieograniczoną liczbą sposobów. Jeżeli mamy daną ilość m , otrzymamy

(*) To równanie jest równaniem strón drżących.

wyrażenie

$$z = Ae^{mx+m^2y},$$

przez które, zrównanie założone będzie sprawdzone, jakiegokolwiek byłyby wartości ilości A i m ; więc za te ilości biorąc nieograniczony szereg wartości

$$A_1, m_1; A_2, m_2; A_3, m_3; \text{ i t. d.}$$

znajdziemy tyleż wyrażeń, których summa takż uczyni zadość danemu zrównaniu (309), a tak będziemy mieli wyrażenie,

$$z = Ae^{mx+m^2y} + A_1e^{m_1x+m_1^2y} + A_2e^{m_2x+m_2^2y} + \text{ i t. d.}$$

w którym można założyć tyle wyrazów, ile zechcemy.

Gdybyśmy wzięli m za nieznane, a n za znane, otrzymalibyśmy

$$m = \pm \sqrt{n}, \quad z = Ae^{\pm x\sqrt{n}+ny},$$

z czego moglibyśmy na z wyprowadzić dwa szeregi różne na pozór, to jest

$$z = Ae^{x\sqrt{n}+ny} + A_1e^{x\sqrt{n_1}+n_1y} + \text{ i t. d.},$$

$$z = Ae^{-x\sqrt{n}+ny} + A_1e^{-x\sqrt{n_1}+n_1y} + \text{ i t. d.},$$

lecz te wypadki nie są ogólniejsze od pierwszego, bo ilości m , możemy nadawać wartości odjemne równie jak dodatne.

352. *Laplace* mniemał z początku, że dane poprzeczające zrównanie nie mogło przypuszczać funkcij dowolnych w swojej całości; *Paoli* pierwszy okazał rzecz przeciwną, gdy ta całość została rozwinięta na szereg według potęg ilości y . Jakoż jeżeli założymy

$$z = P + Qy + Ry^2 + Sy^3 + \text{ i t. d.}$$

gdzie P, Q, R, S , i t. d. oznaczają funkcje ilości x , będzie-

my mieli

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 P}{dx^2} + \frac{d^2 Q}{dx^2} y + \frac{d^2 R}{dx^2} y^2 + \text{i t. d.},$$

$$\frac{dz}{dy} = Q + 2Ry + 3Sy^2 + \text{i t. d.},$$

z kąd wypada

$$Q = \frac{d^2 P}{dx^2}, \quad R = \frac{1}{2} \frac{d^2 Q}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d^4 P}{dx^4}, \quad \text{i t. d.},$$

a że nie wartości P nie oznacza, można ilość P założyć równą funkcyi dowolnej ilości x , więc będziemy mieli

$$z = \phi(x) + \phi''(x) \frac{y}{1} + \phi'''(x) \frac{y^2}{1.2} + \text{i t. d.},$$

gdzie $\phi''(x) = \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2}$, $\phi'''(x) = \frac{d^3 \phi(x)}{dx^3}$, i t. d.

Jeżeliśmy rozwinęli całkę według potęg ilości x , kładąc

$$z = P + Qx + Rx^2 + Sx^3 + \text{i t. d.},$$

gdzie litery P, Q, R, S , i t. d. oznaczałyby wtedy funkcyje ilości y , dwa pierwsze współczynniki P i Q , zostałyby nieoznaczone, a zatem do wyrażenia z , możnaby wprowadzić dwie funkcyje dowolne; lecz *Poisson* okazał, że ten drugi wypadek nie był ogólniejszym od pierwszego, i że ta sama okoliczność przedstawiała się w każdym zrównaniu, które nie zamykało razem dwóch współczynników różniczkowych, wziętych jednego co do ilości x , drugiego co do ilości y . (*)

353. Uwagi poprzedzające są dostateczne dla przekonania się, iż nie należy stanowić zupełnego podobieństwa między funkcyami dowolnemi wchodzącemi do całek zrównań różniczkowych częściowych, a ilościami stałemi całek zupełnych zrównań różniczkowych

(*) Obaćz *Traité du calcul* in 4to. T. II. str. 639.

zwyczajnych. (298). Liczba pierwszych nie zawsze jest równa wykładnikowi rzędu danego zrównania różniczkowego cząstkowego.

Tę uwagę można prosto robić względem wyrzucania funkcyj dowolnych między zrównaniami pierwotnemi a ich cząstkowemi różniczkami (140); niech będzie albowiem $u=0$, zrównanie zamykające z ilościami zmiennemi x, y, z , dwie funkcye dowolne $\varphi(s), \psi(t)$ ilości $s, i t$, danych przez x, y, z ; przechodząc do różniczek pierwszych i drugich według uwag podanych pod liczbą 137, otrzymamy pięć nowych zrównań, tojest

$$\frac{du}{dx}=0, \quad \frac{du}{dy}=0,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0, \quad \frac{d^2u}{dxdy}=0, \quad \frac{d^2u}{dy^2}=0,$$

i wprowadzimy cztery funkcye

$$\frac{d\varphi(s)}{ds}=\varphi'(s), \quad \frac{d\psi(t)}{dt}=\psi'(t),$$

$$\frac{d^2\varphi(s)}{ds^2}=\varphi''(s), \quad \frac{d^2\psi(t)}{dt^2}=\psi''(t);$$

więc będziemy mieli do wyrzucenia sześć funkcyj nieznanych, tojest tyle, ile mamy zrównań, co wtedy tylko będzie mogło być uskuteczniönem, gdy przez szczególny kształt zrównania $u=0$, dwie z tych funkcyj zginą razem.

354. Oznaczanie funkcyj dowolnych wchodzących do całek zrównań różniczkowych cząstkowych wykonywa się przypuszczając, iż funkcya z , przez naznaczenie związków między ilościami zmiennemi $x, i y$, nabywa szczególnego kształtu. Obaczmy takowego oznaczania dwa przykłady w przypadkach najprostszych.

10d. Gdybyśmy np. mieli $1=M\varphi(V)$, gdzie M i V są funkcjami danemi ilości x, y, z , i chcieli oznaczyć funkcya wyrażoną przez cechę φ , w taki sposób, aże-

by, gdy założymy $F(x, y, z) = 0$, było razem $f(x, y, z) = 0$, wyrażając przez F i f funkcyje znane, natenczas uczynilibyśmy $V = t$, i za pomocą trzech równań

$$V = t, \quad F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0,$$

wyrazilibyśmy ilości x, y, z , przez funkcyje ilości t ; podstawivszy te wyrażenia w ilość M , zamienilibyśmy ją na funkcyą ilości t , którą wyraziwszy przez T , otrzymamy

$$1 = T\phi(t), \quad \text{czyli } \phi(t) = \frac{1}{T},$$

a zatem funkcyja $\phi(t)$ zostanie oznaczoną, jeżeli w tém ostatniem równaniu za t i T , podstawimy znowu ich wartości wyrażone przez x, y, z .

2^{re}. Niech będzie $1 = M\phi(V) + N\psi(V)$; ponieważ tu są dwie funkcyje do oznaczenia, dwa też powinny być warunki; należy przypuścić że

$$F(x, y, z) = 0, \quad \text{daje } f(x, y, z) = 0,$$

$$\text{i że } F'(x, y, z) = 0, \quad \text{daje } f'(x, y, z) = 0.$$

Biorąc zawsze $V = t$, i wyciągając ze trzech równań

$$V = t, \quad F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0,$$

wartości x, y, z , wyrażone przez funkcyje ilości t , zamienimy ilości M i N na funkcyje ilości t . Niech takowe funkcyje będą T i ψ , otrzymamy

$$1 = T\phi(t) + \psi(t) \quad (1);$$

potém zapomocą równań

$$V = t, \quad F'(x, y, z) = 0, \quad f'(x, y, z) = 0,$$

wynalazłszy wartości na x, y, z , wyrażone przez funkcyje ilości t , i podstawivszy je w M i N , odmienimy te ilości na funkcyje ilości t , które nazwiemy T' , ψ' , i otrzymamy

$$1 = T'\phi(t) + \psi'\psi(t) \quad (2).$$

Za pomocą równań (1), i (2) oznaczymy funkcyje ϕ i ψ

wyrażone przez funkcyę ilości t , potem odłożymy za t wartość jego V . (*).

Rachunek zmienności.

Szukanie zmienności funkcyi jakiejkolwiek.

355. We wszelkich zastosowaniach rachunku różniczkowego wyżej przytaczanych, związek między ilościami zmiennymi, był uważany jako stały i niezmienny; lecz przytrafiają się rozmaite zagadnienia, w których związek takowy zmieniać się musi. Obaczmy na przykładzie, gdy V jest funkcyą ilości zmiennych x , y , i współczynników różniczkowych ilości y , całka $\int V dx$ wzięta w jednych tych samych granicach ilości x , może wyrażać nieograniczoną liczbę wartości zależących od związku zachodzącego między x i y ; tak dalece, że można się zapytać, jaki jest między wszystkiemi pomyślic się mogącemi związkami, któryby całce $\int V dx$ nadał w granicach danych, największą lub najmniejszą wartość? Całka $\int V dx$, dopóki nie wprowadzamy żadnego szczególnego związku między x , y , wyraża jakąś własność wszystkim linijom krzywym służącą; można więc wtenczas szukać, na jaką linią krzywą ta własność będzie *maximum* lub *minimum*. Jasna jest rzecz, że gdy CE (fig. 52) wyraża tę linią, wtedy na każdą inną linią całka $\int V dx$ powinna mieć wartość mniejszą w pierwszym razie, a większą w drugim. Chcąc zadosyć uczynić temu warunkowi, nasamprzód zważyć należy, jaka jest różnica całki $\int V dx$ wynikają-

(*) Oznaczenie funkcyj dowolnych wychodzi na to, ażeby przez dane linie poprowadzić powierzchnie, któreby wyrażały dane zrównania, te zaś linie mogą być ciągle lub przerywane, równie jak i same funkcy. Gdyby funkcy ϕ i ψ zależały od różnych ilości, nie możnaby postępować sposobem wyżej podanym. Obacz *Traité* in 4to T. III, str. 228.

ca z odmiany związku między x i y , czyli z odmiany linii krzywej takowy związek wyrażającej. Tę odmianę wyrazimy, zmieniając y niezależnie od x ; bo jeżeli weźmiemy dwie linie krzywe CE , i ce , jedenże ucinek odpowiadać będzie dwóm przystawóm PM , i Pm , a ich różnica Mm , wcale jest odmienna od różnic $M'R$ i $m's$, które wypadają między dwiema następniemi przystawami wziętými na tejże samej linii krzywej.

Lagranż, którego początkowym pracóm winniśmy rachunek zmienności, najważniejsze jego zastosowanie okazał też w mechanice; łatwo pojmiemy cel tego zastosowania zastanawiając się, że można uważać spółprzystawy jakiego ciała w ruchu będącego, bądź to dla porównania w jednejże chwili dwóch punktów tego ciała, bądź też dla porównania dwóch następnych położzeń jednego punktu. W pierwszym razie związek między spółprzystawami ten zachodzi tylko, który wynika z powierzchni kończących ciało; w drugim, spółprzystawy zmieniają się stosownie do warunków ustanowionego ruchu, gdzie wchodzi nowa ilość zmienna, która jest miarą czasu: tu więc postrzegamy jeszcze dwa sposoby zmieniania tychże samych ilości, do czego należy używać znaków odmiennych. Ten drugi sposób stanowi *Rachunek zmienności* (*Calcul des variations*), którego rozmaite użycie nie inaczej sobie wystawić możemy, tylko uważając, że jego celem jest, różniczkować pod nowym względem te same ilości, które już były różniczkowane pod innym: potem czyni się w drugim sposobie różniczkowania przypuszczenie stosowne do natury pytań danych do rozwiązania (*).

356 Lagranż oznacza nowe różniczkowanie cechą δ , co powszechnie już przyjęto. Żebym nie wyszedł z obrębów mojego przedmiotu, przestanę tylko na wyłożeniu zastosowań rachunku zmienności do pytań geometrycznych.

(*) (Obacz *Mécanique analytique* 2e. edit., T. I. str. 80.

W takowych pytaniach używać będziemy cechy d dla przejścia od jednego do drugiego punktu na tejże linii krzywej, a zaś cechy δ dla oznaczenia zmiany zaślej w linii krzywej; jeżeli $np.$ dy wyraża $M'R$, δy wyrażać będzie Mm ; idzie zatem że

$$P'M' = y + dy, \quad Pm = y + \delta y.$$

Przechodząc z punktu M' do m' , i biorąc $M'R$ za dy (60), potem prowadząc mr równoległą do MM' , $m'r$ będzie zmiennością różniczki dy od jednej linii krzywej do drugiej, a zatem będziemy mieli

$$P'm' = Pm + sr + m'r = y + \delta y + dy + \delta dy = y + dy + \delta(y + dy),$$

lecz że punkt m' następuje po punkcie m na linii krzywej ce , będzie także

$$P'm' = y + \delta y + d(y + \delta y) = y + \delta y + dy + d\delta y,$$

a porównywając z sobą te dwa wyrażenia jednejże linii, otrzymujemy zrównanie

$$\delta dy = d\delta y.$$

Toż samo dowieść można bez pomocy linii krzywych wyrażając przez $\varphi(x)$ stan pierwotny ilości y , a przez inną funkcją $\psi(x)$ jej stan wynikły ze zmienności (*). Wtenczas $\delta y = \psi(x) - \varphi(x)$ będzie pewną fun-

(*) Ażeby nadać jedenże początek funkcjom φ i ψ , Euler, który skwapliwie przyjął i objaśnił rachunek zmienności, uważał wartość pierwotną ilości y czyli $\varphi(x)$, jako otrzymaną z innej funkcji, zawierającej oprócz zmiennej x , inną zmienną t , i zamieniającą się na $\varphi(x)$ gdy $t=0$. (*Novi Comm. Acad. Petrop. T. XVI. str. 35*). Tym sposobem $y + \delta y$ zamienia się na $y + \frac{dy}{dt}t$, a $\frac{dy}{dt}$ wzięte w przypuszczeniu że $t=0$, wyraża (jeżeli szczególnego między y i t nie ustanawiamy związku) funkcją dowolną ilości x . Ogólna wartość ilości y może się wyrazić przez szereg

$$y + \frac{dy}{dt}t + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{t^2}{1.2} \text{ i t. d.},$$

keyą ilości x , a dla pierwiastkowego związku między zmiennymi x i y , będzie pewną funkcją ilości y , oznaczwszy zatem przez π tę ostatnią funkcją, otrzymamy

$$\delta y = \pi(y).$$

Uczyniwszy dla skrócenia $y + dy = y'$, będziemy także mieli według tegoż pravidła

$$\delta y' = \pi(y');$$

a ztąd

$$\delta y' - \delta y = \pi(y') - \pi(y) = d.\pi(y) = d.\delta y;$$

lecz że

$$dy = y' - y,$$

otrzymamy, biorąc zmienności,

$$\delta dy = \delta' y - \delta y = \pi(y') - \pi(y);$$

a ztąd nakoniec

$$\delta dy = d\delta y.$$

Idzie zatem że $\delta d^2 y = d\delta dy = d^2 \delta y$; i tak dalej postępując przyjdziemy do tego głównego twierdzenia

$$\delta d^n y = d^n \delta y,$$

podług którego, można kłaść cechę δ po cesze d .

Dla większej symetryi w rachunku, jako też dla ogarnienia wszystkich okoliczności względem granic całek, czego niżej obaczymy przykłady, biorą się x i y

gdzie zmienna x jest przypuszczona równa zeru w ilości y i w jej współczynnikach różniczkowych; a wynalazłszy współczynniki różniczkowe tego szeregu co do samej zmiennej x , tém samém będziemy mieli wszystkie ilości, które podstawić należy dla otrzymania zmiennego stanu całki $\int V dx$, uszykowanego według potęg dx . Pod taką to postacią Lagranż w nowiej edycyi dzieła *Leçons sur le Calcul des fonctions*, wystawia rachunek zmienności, względem którego podaje bardzo wiele interesujących szczegółów. (Obacz *Traité du Calcul* in 4to Tom II, str. 723).

za zmienne; ale wyżej podane twierdzenie i w tym razie służy, prawo bowiem zmienności jest stałe, choć dowolne, δx jest funkcją ilości x , z kąd się wyciąga $\delta x'$ zamieniając x na x' , a ztąd wypada $\delta dx = d\delta x$; podobnież $d\delta V = d\delta V$, na każdą funkcją V zależącą od x .

357. Podobne jest twierdzenie względem znaku f . Jakoż, jeżeli wyrazimy fU przez U_1 otrzymamy

$$dU_1 = U, \text{ potem } \delta dU_1 = \delta U;$$

kładąc cechę δ po cesze d , a potem przechodząc do całek, znajdziemy następnie

$$d\delta U_1 = \delta U, \quad \delta U_1 = f\delta U;$$

kładąc znowu za U_1 jego wartość, otrzymamy

$$\delta fU = f\delta U.$$

358. To założywszy widzimy, że dla otrzymania zmienionego stanu jakiejkolwiek funkcji U , zawierającej w sobie x, y , i ich różniczki jakiejkolwiek rzędu, trzeba przypuścić że x, y , zamieniają się na $x + \delta x, y + \delta y$, i uważać ilości $\delta x, \delta y$, jako funkcje dowolne jednej ilości x , drugą ilości y . Przestając na tych wyrazach, w których zmienności nie przechodzą pierwszego stopnia, działanie to będzie podobne do zwyczajnego różniczkowania funkcji U , biorąc nie tylko x, y , za zmienne, ale i ich różniczki uważając za zmienne udzielne, gdzie oznaczać potrzeba cechą δ ostatnie różniczkowanie. Jakoż jasna rzecz jest, że w tém przypuszczeniu różniczkując

$$x, y, dx, dy, \text{ i t. d.},$$

otrzymamy

$$\delta x, \delta y, \delta dx, \delta dy, \text{ i t. d.},$$

Więc jeżeli zwyczajna różniczka funkcji U jest

$$dU = Mdx + Nd^2x + Pd^3x + Qd^4x + \text{i t. d.},$$

$$+mdy + nd^2y + pd^3y + qd^4y + \text{i t. d.},$$

dosyć będzie w niej zamienić ostatnie d na δ , a wypadnie

$$\delta U = M\delta x + N\delta y + P\delta d^2 x + Q\delta d^2 y + \text{i t. d.} \\ + m\delta y + n\delta dy + p\delta d^2 y + q\delta d^2 x + \text{i t. d.}$$

Gdy funkcyja U jest pod postacią Vdx , a wtedy V zawiera w sobie tylko

$$x, y, \frac{dy}{dx} = p, \frac{dp}{dx} = q, \text{i t. d.},$$

będzie

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{i t. d.},$$

zmiennosć zaś będzie

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{i t. d.},$$

gdzie ilości $p, q, r, \text{i t. d.}$, powinny być uważane jako funkcyje dwóch ilości zmiennych niezależnych x, y , (356); przeto ich zmiennosci mogą być brane w dwóch przypuszczeniach, to jest, biorąc jedną tylko ilość za zmienną, lub też obie razem. Działając tu będziemy pod tym drugim względem, bo jest ogólniejszy, i nadto daje takie wypadki, które służą pierwszemu założeniu, gdy opuścimy wyrazy, które zawierają zmiennosci ilości wziętej za stałą. Różniczkując przez cechę δ , ułamki

$$\left. \begin{array}{l} p = \frac{dy}{dx} \\ q = \frac{dp}{dx} \\ r = \frac{dq}{dx} \end{array} \right\} \text{znajdziemy} \left\{ \begin{array}{l} \delta p = \frac{dx\delta dy - dy\delta dx}{dx^2} = \frac{\delta dy - p\delta x}{dx}, \\ \delta q = \frac{dx\delta dp - dp\delta dx}{dx^2} = \frac{\delta dp - q\delta x}{dx}, \\ \delta r = \frac{dx\delta dq - dq\delta dx}{dx^2} = \frac{\delta dq - r\delta x}{dx}, \\ \text{i t. d.} \end{array} \right.$$

za pomocą tych wzorów otrzymamy zmiennosć każdego wyrażenia zawierającego ilości x, y , i ich różniczki jakiegokolwiek rzędu.

359. Gdy będzie dany wzór całkowity fU , gdzie U , tak jak wyżej, jest funkcją ilości x, y , i ich różniczek, będzie $\delta fU = f\delta U$ (357), a według liczby poprzedzającej

$$f\delta U = f(M\delta x + N\delta y + P\delta^2 x + Q\delta^2 y + \text{i t. d.}), \\ + f(m\delta y + n\delta x + p\delta^2 y + q\delta^2 x + \text{i t. d.}).$$

To wyrażenie nie jest jeszcze pod najprostszą postacią, do której przywiedzioném być może; trzeba je tak przerobić, ażeby pod znakiem f żaden nie pozostał wyraz mający razem przy sobie dwie cechy $d, i \delta$, co wykonamy kładąc naprzód cechę δ po d , a potem całkując przez części sposobem następującym

$$fM\delta x = fM\delta x,$$

$$fN\delta y = fN\delta y = N\delta y - f d N \delta y,$$

$$fP\delta^2 x = fP\delta^2 x = P\delta^2 x - f d P \delta x = P\delta^2 x - d P \delta x + f d^2 P \delta x,$$

$$fQ\delta^2 y = fQ\delta^2 y = Q\delta^2 y - f d Q \delta y = Q\delta^2 y - d Q \delta y + f d^2 Q \delta y, \\ = Q\delta^2 y - d Q \delta y + d^2 Q \delta y - f d^3 Q \delta y,$$

i t. d.

i t. d.

Będzie podobnie

$$fm\delta y = fm\delta y,$$

$$fn\delta x = fn\delta x = n\delta x - f d n \delta x,$$

$$fp\delta^2 y = fp\delta^2 y = p\delta^2 y - d p \delta y + f d^2 p \delta y,$$

$$fq\delta^2 x = fq\delta^2 x = q\delta^2 x - d q \delta x + d^2 q \delta x - f d^3 q \delta x,$$

i t. d.

co podstawivszy otrzymamy

$$f\delta U = (N - dP + d^2 Q - \text{i t. d.})\delta x + (P - dQ + \text{i t. d.})d\delta x \\ + (Q - \text{i t. d.})d^2 \delta x + \text{i t. d.} \\ + (n - dp + d^2 q - \text{i t. d.})\delta y + (p - dq + \text{i t. d.})d\delta y \\ + (q - \text{i t. d.})d^2 \delta y + \text{i t. d.}$$

$$+ f(M - dN + d^2 P - d^3 Q + \text{i t. d.}) \delta x$$

$$+ f(m - dn + d^2 p - d^3 q + \text{i t. d.}) \delta y.$$

Wypadek ten składa się z dwóch części podobnych, jedna wynika ze zmienności ilości x , a druga ze zmienności ilości y ; łatwo daje się widzieć, że można to rozciągnąć do funkcyj o ilukolwiek zmiennych, przydając na każdą zmienną wyrazy podobne tym, jakieśmy otrzymali względem zmiennej x , lub y .

360. Gdy $\int U$ będzie wyrażone pod postacią $\int V dx$, to jest gdy do V wchodzi tylko x , y , i współczynniki różniczkowe ilości y , sposób otrzymania zmienności zdaje się być nieco zawilszy, ale prowadzi do wniosków bardzo ważnych. Naprzód uważać trzeba że

$$\delta \int V dx = \int \delta(V dx) = \int V \delta x + \int dx \delta V,$$

$$\int V \delta x = V \delta x - \int dV \delta x,$$

a ztąd

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int (dx \delta V - dV \delta x).$$

Otrzymamy ilość $dx \delta V - dV \delta x$ pisząc za δV i za dV , ich wartości podane po lic. 358, a tak będzie

$$dx \delta V - dV \delta x = N(dx \delta y - dy \delta x) + P(dx \delta p - dp \delta x)$$

$$+ Q(dx \delta q - dq \delta x) + \text{i t. d.},$$

potém kładąc $p dx$ za dy w części mnożonej przez N , a wartość δp (358) w części mnożonej przez P , otrzymamy

$$dx \delta y - dy \delta x = dx(\delta y - p \delta x),$$

$$dx \delta p - dp \delta x = d\delta y - p d\delta x - dp \delta x = d(\delta y - p \delta x),$$

a ztąd

$$dx \delta p - dp \delta x = d \left(\frac{dx \delta y - dy \delta x}{dx} \right).$$

Odmieniwszy y na p , p na q , otrzymamy podobnie

$$dx\delta q - dq\delta x = d\left(\frac{dx\delta p - dp\delta x}{dx}\right),$$

i tak dalej; więc uczyniwszy

$$\delta y - p\delta x = \omega,$$

wypadnie

$$dx\delta y - dy\delta x = \omega dx, \quad dx\delta p - dp\delta x = d\omega,$$

$$dx\delta q - dq\delta x = d\frac{d\omega}{dx}, \text{ i t. d.}$$

a zatem

$$\int (dx\delta V - dV\delta x) = \int N\omega dx + \int P d\omega + \int Q d\frac{d\omega}{dx} + \text{i t. d.}$$

Całkując przez części w drugiej stronie tego równania każdy z tych wyrazów, gdzie ilość ω jest różniczkowana, otrzymamy

$$\int P d\omega = P\omega - \int \frac{dP}{dx} \cdot \omega dx,$$

$$\int Q d\frac{d\omega}{dx} = Q\frac{d\omega}{dx} - \int \frac{dQ}{dx} d\omega = Q\frac{d\omega}{dx} - \frac{dQ}{dx} \omega + \int \frac{1}{dx} d\frac{dQ}{dx} \cdot \omega dx,$$

i t. d.

Za pomocą tych wyrażeń otrzymamy

$$\begin{aligned} \delta \int V dx &= V\delta x + \left\{ P - \frac{dQ}{dx} + \text{i t. d.} \right\} \omega + \left\{ Q - \text{i t. d.} \right\} \frac{d\omega}{dx}, \\ &+ \text{i t. d.} \\ &+ \int \left\{ N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} d\frac{dQ}{dx} - \text{i t. d.} \right\} \omega dx. \end{aligned}$$

Nie trudno byłoby przystosować ten wypadek i do większej liczby zmiennych zależących od x , przydając względem każdej, wyrazy podobne tym, jakie wypadły z ilości y ; lecz to szczególniejszej uwagi jest godne, że

jeżeli odłożymy za ω jego wartość $\delta y - p \delta x$, część zajęta znakiem f , może się tak napisać

$$\iint \left\{ N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dQ}{dx} - i. t. d. \right\} dx \delta y \\ - \int \left\{ N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dQ}{dx} - i. t. d. \right\} p dx \delta x,$$

gdzie widzimy, że współczynnik mnożący δy , i współczynnik mnożący δx , mają między sobą związek, któregośmy pod liczbą poprzedzającą nie postrzegali; gdybyśmy tedy jeden współczynnik przywiedli do zera, drugi także stałby się równym zeru.

261. Uwaga nie mniej godna zastanowienia jest ta, że gdybyśmy w rozwinięciu $\delta f U$ (359) mieli

$$M - dN + d^2 P - d^3 Q + i. t. d. = 0,$$

$$m - dn + d^2 p - d^3 q + i. t. d. = 0,$$

zmiennosc $f \delta U$ zostałaby zupełnie oswobodzona od znaku f ; lecz właśnie też same równania powinny mieć miejsce, ażeby funkcya U mogła być scałkowaną sama przez się; to podanie wymienione pod liczbą 280, może być dowiedzioném *a priori*, przez zastosowanie samegoż rachunku zmienności do odkrycia tych warunków.

Jakoż niech będzie U różniczką funkcyi U_1 , otrzymamy $U = dU_1$, a zatem

$$\delta U = \delta dU_1 = d\delta U_1,$$

ząd idzie, że jeżeli U jest różniczką zupełną, to i δU nią być powinna; przeto, gdy zostaną oswobodzone od znaku f w wyrażeniu $f \delta U$, wszystkie wyrazy, które się mogą scałkować, summa zostających wyrazów pod znakiem f , powinna być sama przez się równa zeru, nie potrzebując żadnego przypuszczać związku między x , y , δx , δy .

Rozwinięcie $\delta f V dx$ jeden tylko dając warunek

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dQ}{dx} - \text{it. d.} = 0,$$

pokazuje, że warunek tyczący się ilości zmiennej x , staje się cał niepotrzebnym, gdy U jest przywiedzione do postaci $V dx$, gdzie V zawiera tylko x, y , i współczynniki różniczkowe ilości y .

362. Te uwagi nie samemu tylko wyrażeniu $\int U$ służą, lecz rozciągają się także do wyrażeń $\iint U, \iiint U$, it. d., jakakolwiek byłyby liczba znaków całkowania; a dochodząc zmienności tych ostatnich wzorów, jak się czyniło z całką $\int U$, przyjdziemy do zrównań warunkowych, które się sprawdzać powinny, ażeby ilość U była różniczką zupełną funkcyj U_1 rzędu bezśrednie niższego, lub funkcyj U_2 rzędu niższego dwiema jednościami, i tak dalej. Niech będzie

$$\delta U = M \delta x + N d^1 x + P d^2 \delta x + Q d^3 \delta x + \text{it. d.}$$

$$+ m \delta y + n d^1 \delta y + p d^2 \delta y + q d^3 \delta y + \text{it. d.},$$

otrzymamy przez ten sposób

$$\begin{aligned} \delta f U = & (N - dP + d^2 Q - \text{it. d.}) \delta x + (P - dQ + \text{it. d.}) d \delta x \\ & + (Q - \text{it. d.}) d^2 \delta x + \text{it. d.} \\ & + (n - dp + d^2 q - \text{it. d.}) \delta y + (p - dq + \text{it. d.}) d \delta y \\ & + (q - \text{it. d.}) d^2 \delta y + \text{it. d.} \\ & + f(M - dN + d^2 P - d^3 Q + \text{it. d.}) \delta x \\ & + f(m - dn + d^2 p - d^3 q + \text{it. d.}) \delta y; \end{aligned}$$

lecz $\delta f U = \delta U_1$, a nadto $U_1 = d U_2$,

$$\text{zta} \delta U_2 = \delta f U_1 = f \delta U_1 = f \delta f U;$$

więc otrzymamy δU_2 całkując znowu $\delta f U$, i wydobywając z pod znaku pierwszego f , wszystko co można

będzie scałkować. Tym sposobem znajdziemy

$$\begin{aligned}\delta U_2 = & f(N - dP + d^2 Q - i t. d.) \delta x + f(P - dQ + i t. d.) d \delta x \\ & + f(Q - i t. d.) d^2 \delta x + i t. d. \\ & + f(n - dp + d^2 q - i t. d.) \delta y + f(p - dq + i t. d.) d \delta y \\ & + f(q - i t. d.) d^2 \delta y + i t. d. \\ & + f f(M - dN + d^2 P - d^3 Q + i t. d.) \delta x \\ & + f f(m - dn + d^2 p - d^3 q + i t. d.) \delta y;\end{aligned}$$

a całkując przez części te wyrazy, w których są różniczkowane ilości δx , δy otrzymamy

$$\begin{aligned}\delta U_2 = & (P - 2dQ + 3dR - i t. d.) \delta x + (Q - 2dR + i t. d.) d \delta x \\ & + (R - i t. d.) d^2 \delta x + i t. d. \\ & + (p - 2dq + 3dr - i t. d.) \delta y + (q - 2dr + i t. d.) d \delta y \\ & + (r - i t. d.) d^2 \delta y + i t. d. \\ & + f(N - 2dP + 3d^2 Q - 4d^3 R + i t. d.) \delta x \\ & + f(n - 2dp + 3d^2 q - 4d^3 r + i t. d.) \delta y \\ & + f f(M - dN + d^2 P - d^3 Q + d^4 R - i t. d.) \delta x \\ & + f f(m - dn + d^2 p - d^3 q + d^4 r - i t. d.) \delta y.\end{aligned}$$

Taka to jest zmienność szukana, która wtenczas tylko może być oswobodzoną od znaku podwójnego ff , kiedy zrównania

$$\begin{aligned}N - 2dP + 3d^2 Q - 4d^3 R + i t. d. & = 0, \\ n - 2dp + 3d^2 q - 4d^3 r + i t. d. & = 0, \\ M - dN + d^2 P - d^3 Q + d^4 R - i t. d. & = 0, \\ m - dn + d^2 p - d^3 q + d^4 r - i t. d. & = 0,\end{aligned}$$

będą to same; wtedy wyrażenie δU_2 będąc scałkowanym raz tylko ze względu na zmienność, da U_2 , czyli całkę drugą różniczki podanej.

Niech będzie np. $U = x d^2 y + 2 dx dy + y d^2 x$;
otrzymamy $\delta U = d^2 y \delta x + 2 dy d\delta x + y d^2 \delta x$

$$+ d^2 x \delta y + 2 dx d\delta y + x d^2 \delta y,$$

$$M = d^2 y, \quad N = 2 dy, \quad P = y,$$

$$m = d^2 x, \quad n = 2 dx, \quad p = x;$$

a wyższe zrównania warunkowe zamieniają się na

$$2 dy - 2 dy = 0,$$

$$2 dx - 2 dx = 0,$$

$$d^2 y - 2 d^2 y + d^2 y = 0,$$

$$d^2 x - 2 d^2 x + d^2 x = 0;$$

zatem funkcyja dana, może być bezśrednie scałkowana. Część $y \delta x + x \delta y$ oswobodzona od znaku $\int$, scałkowana co do zmienności, daje $U_2 = xy$.

Droga poprzedzających rachunków dowodzi, że pierwsze całkowanie funkcyi różniczkowej mającej m zmiennych, wymaga m warunków, gdy te zmienne są uważane jako niezależne, a na n całkowań następnych, trzeba by mieć $m n$ zrównań warunkowych. Byłoby ich $m - 1$ tylko na pierwsze całkowanie, a zaś $n(m - 1)$ na wszystkie, gdyby dana funkcyja miała kształt $\int^n V dx^n$, gdzie V zawiera same spółczynniki różniczkowe.

O największych i najmniejszych wartościach wzorów całkowych nieoznaczonych.

363. Możemy nazwać całkami nieoznaczonemi wyrażenia np. $\int y dx$, $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$, gdy nie nadajemy żadnego szczególnego kształtu funkcyi y . Lecz te całki, ażeby mogły być zdolne mieć *maximum* lub *minimum*, powinny być oznaczone (223), bo tylko w granicach danych mieć będą wartość pewną, gdy y zostanie oznaczone przez x .

Zasady wyłożone pod licz. 155 względem funkcyj, których kształt jest dany, mogą być także przystosowane za pomocą rachunku zmienności, do całek nieoznaczonych. Jakoż, według wzoru pod liczbą 45 podanego, stan zmieniony funkcyi u , po podstawieniu w niej $x+\delta x$, $y+\delta y$, $dx+\delta dx$, $dy+\delta dy$ i t. d. za x , y , dx , dy , i t. d. będzie się mógł uszykować według potęg zmienności δx , δy , δdx , δdy i t. d.; a δu zawierać w sobie będzie wszystkie rozwinięcia tego wyraży, w których zmienności są tylko pierwszego stopnia. Te wyrazy odmieniając znaki razem ze znakami zmienności, powinny według teoryi wyżej wspomnianej, stać się $=0$, gdy jest *maximum* lub *minimum*, jakiegokolwiek były wartości δx , δy ; idzie zatem że $\delta u=0$. Jeżeli $u=fU$, wtedy będzie $\delta u=f\delta U$ (357); zatem na *maximum* lub *minimum* funkcyi fU , będzie $f\delta U=0$, zważając zawsze na to, że $f\delta U$ powinno się stać $=0$, w granicach naznaczonych funkcyi fU .

Z tejsz teoryi wypada, że warunek $\delta u=0$, nie zawsze daje *maximum* lub *minimum*, trzeba bowiem nadto, ażeby wyrazy mające zmienności δx , δy , i t. d. w drugim stopniu, nie odmieniały znaku; roztrząsanie tych ostatnich warunków, bardzo jest zawikłane, dla tego je tu pominiemy.

364. Rozwinięcie funkcyj $f\delta U$ składa się z dwóch cał różnych części (359), jedna jest wolna od znaku f , druga pod nim zostaje; pierwszą można wyrazić przez

$$\alpha\delta x+\beta\delta y+\alpha'\delta dx+\beta'\delta dy+\text{i t. d.},$$

drugą zaś przez

$$f\{\chi\delta x+\psi\delta y\}.$$

Te części nie mogą być między sobą porównane, bo ostatnia nie może być całkowana, dopóki δx , δy , zachowują między sobą niezależność, której natura pytania wymaga; a w tym stanie nie inaczej można ją przy-

wieść do zera, tylko zakładając osobno zrównania

$$x=0, \quad y=0,$$

których w ogólności liczba równa się liczbie zmienności niezależnych; lecz gdy dwie są tylko zmienne, i gdy U może być wyrażone pod postacią $\int V dx$, rozwinięcie zmienionego stanu funkcji $\int V dx$ pod liczbą 360 pokazuje, że $x = -\psi$, że zatem $x dx + \psi dy = 0$, warunek zakładając łatwy do sprawdzenia na każdym szczególnym przykładzie. Idzie zatem, że zrównania $x=0$, $\psi=0$, jedno w drugim wzajemnie są zawarte, i że między ilościami x, y , jeden tylko zachodzi związek, którybyśmy równie otrzymali zakładając $dx=0$, to jest nie zmieniając ilości x ; ale to przypuszczenie bardzoby ścieśniało, jak wkrótce obaczymy, własności części oswo-
bionej od znaku $\int$ w zmienności.

Wypada z tego co poprzedziło, że zrównania z liczbą 361, jako wyrażające warunki, które czynią funkcje $\int U$, i $\int V dx$ zdawnymi do scałkowania, a które są wtenczas tosamemi; gdy przestaną być tosamemi, tém samem wyznaczają związek między x, y , przez który dane całki staną się *maximum* lub *minimum*. Łatwo się widzieć daje, że te zrównania mogą dojść aż do rzędu, którego wykładnik jest dwa razy większy od wykładnika najwyższej różniczki zawartej w funkcji U , lub w funkcji V .

365. Przez zniknięcie części będącej pod znakiem $\int$, wypada.

$$\int \delta U = \alpha \delta x + \beta \delta y + \alpha' d\delta x + \beta' d\delta y + \text{it. d.},$$

a uczyniwszy, dla skrócenia, $\int \delta U = \phi$, wartość zupełna tej całki wynajdzie się biorąc różnicę między całkami odpowiadającemi dwóm granicom (229); więc jeżeli ϕ' wyraża wartość przy pierwszej granicy, a ϕ'' przy drugiej, będzie $\int \delta U = \phi'' - \phi'$, ztąd otrzymamy jeszcze na *maximum* lub *minimum* całki, warunek

$$\phi'' - \phi' = 0;$$

lecz tu mamy uważać, że to zrównanie zawiera same tylko ilości należące do granic całki $\int U$, i że wtenczas zmienności δx , δy , δdx , δdy , i t. d. mogą być zero, lub tylko z sobą połączone przez związki dane, stosownie do tego, jak te granice będą stałe lub zmienne. Przystosowanie geometryczne tych różnych okoliczności, dostacznie je objaśni.

Pierwsza okoliczność ma miejsce, gdy linija krzywa czyniąca całkę daną *maximum* lub *minimum*, ma być wzięta między wszystkiemi linijami przechodzącemi przez dwa punkta, których spółprzystawy, i to wszystko co się do nich ściąga, jest oznaczonem, i gdy całka ma się zaczynać od jednego z tych punktów, a kończyć się na drugim. Oznaczmy przez x', y' , spółprzystawy pierwszego punktu, przez x'', y'' , spółprzystawy drugiego, te ilości jako należące do wszystkich linij krzywych, któreby można w tém pytaniu uważać, nie doświadczą żadnej zmiany; więc gdy zamienimy x, y , na x', y' , potem na x'', y'' , trzeba będzie uczynić

$$\delta x' = 0, \delta y' = 0, \delta x'' = 0, \delta y'' = 0.$$

Wtenczas wyrazy oznaczone znakami zmienności, znikną same przez się w zrównaniu, które się tém samém sprawdzi, jeżeli tylko prócz tych nie będzie miało innych wyrazów; a linija krzywa wyprowadzona ze zrównania $\chi = 0$, rozwiąże zupełnie pytanie, byleby tylko przechodziła przez dwa punkta dane; co się wykona w ogulności przez wyznaczenie ilości stałych dowolnych, zajętych w całce pomienionego zrównania, które wtedy będzie drugiego rzędu.

Gdyby zrównanie $\varphi'' - \varphi' = 0$, zawierało także wyrazy $\delta dx', \delta dy', \delta dx'', \delta dy''$, i gdyby oprócz poprzedzającego warunku, był i ten, że styczne do linii krzywej, w granicach całki, powinny mieć nachylenie do osi ucinków dane, wtenczasby te wyrazy znikły same przez się, gdyż różniczki dx, dy , nie doznałyby żadnej zmiany w granicach, a tém samém zmienności $\delta dx', \delta dy', \delta dx'', \delta dy''$

byłyby $=0$, i przywiodłyby także do zera te mnogości, do których one wchodzą; lecz ażeby linija krzywa szukana uczyniła zadosyć warunkowi co do stycznych w jej punktach ostatecznych, zrównanie jej powinno zamykać dwie ilości stałe dowolne więcej niżli było w przypadku wyżej roztrząsanym, a zatem zrównanie różniczkowe $\chi=0$ powinno być czwartego rzędu. Z tego już dostatecznie widzimy, jak się powinno sprawdzać zrównanie $\varphi''-\varphi'=0$, gdy spółprzystawy granic i ich spółczynniki różniczkowe mają wartości stałe: postąpmy teraz do przypadków, w których granice mają być uważane jako zmienne.

566. Można żądać, ażeby linija krzywa, mogąca mieć *maximum* lub *minimum* własności danej, była wziętą nie już między wszystkiemi linijami krzywemi przechodzącemi przez dwa punkta dane, lecz między temi wszystkiemi linijami, które byłyby prowadzone między dwiema linijami krzywemi danemi AA' i BB' (fig. 53), nie wyznaczając tych punktów, w których te ostatecznie są przecięte od linii szukanej. Jasna jest, że przechodząc wtenczas od linii krzywej AB , do innej $A'B'$, ostateczne punkta A i B posuwają się; ucinki odpowiadające początkowi i końcowi całki, gdy ta już została zmienioną, nie są te same, które odpowiadały początkowemu jej stanowi, a przystawy w tymże razie odmieniły się, według prawa ustanowionego przez linije AA' BB' . W tym przypadku zmienności przystaw i ucinków im odpowiednich, powinny między sobą mieć też same stosunki, jakie mają różniczki tyczące się linij krzywych AA' , BB' , stosunki wyrażone przez zrównania tych linij krzywych, które są dane; trzeba więc je wprowadzić do zrównania $\varphi''-\varphi'=0$; a chcąc je potem sprawdzić, trzeba z osobna przywieść do zera spółczynniki zmienności, które zostaną niezależnemi.

Ponieważ stosownie do tego, jak funkcyja fU zawierać w sobie będzie różniczki co raz wyższego rzędu, liczba wyrazów w zrównaniu $\varphi''-\varphi'=0$, także będzie

się powiększała, można będzie przydać nowe warunki w granicach; założyć np, że linija krzywa AB powinna być wzięta między temi wszystkiemi, które się razem dotykają dwóch linii krzywych AA' , i BB' . Przez ten ostatni warunek, nie tylko spółprzystawy x, y , powinny w granicach całki, mieć związki wyrażone przez zrównania tych linii krzywych, lecz toż samo dziać się powinno z ich różniczkami; więc zmienności $\delta x', \delta y', \delta x'', \delta y''$, nie są już niezależnemi, lecz powinny zgadzać się z różniczkami powtórznemi należącemi do linii krzywych danych. Można będzie za pomocą tych związków wyrzucić niektóre zmienności $\delta x', \delta y', \delta x'', \delta y''$ ze zrównania $\phi' - \phi' = 0$; a potem sprawdzimy je przywołując do zera z osobna spółczynniki zmienności pozostałych, które będą zupełnie dowolne.

Ponieważ zrównania tym sposobem otrzymane, wprowadzają związki między spółprzystawami punktów ostatecznych danej linii krzywej, tém samém będą zrównaniami na ilości stałe wprowadzone przez całkowanie zrównania $\mathcal{L} = 0$, i posłużą do ich oznaczenia.

367. Przykłady objaśnia to co poprzedziło; lecz tu uważać już należy, że gdy zachodzą okoliczności, w których trzeba mieć wzgląd na zmienności granic całek, jeźliby tedy x', y', x'', y'' , spółprzystawy tych granic wchodziły w wyrażenie ilości U , należałoby one brać za zmienne równie jak x, y , a zatem powiększyć δU wyrazami

$$\begin{aligned} & A'\delta x' + B'\delta y' + A''\delta x'' + B''\delta y'' \\ & + A'_1\delta x'_1 + B'_1\delta y'_1 + A''_1\delta x''_1 + B''_1\delta y''_1 + \text{it. d.}, \end{aligned}$$

zmienności $\delta x', \delta y', \delta x'', \delta y''$, jako nie zależące od spółprzystaw nieoznaczonych x, y , wyjdą wszystkie z pod znaku $\int$, a zaś funkcyje $A', A'', \text{it. d.}, A'_1, A''_1, \text{it. d.}$ zostaną pod tymże znakiem; więc wypadłoby wprowadzić do pierwszej części zmienności δU , wyrazy

$$\begin{aligned} & \delta x' \int A' + \delta y' \int B' + \delta x'' \int A'' + \delta y'' \int B'' \\ & + \delta x'_1 \int A'_1 + \delta y'_1 \int B'_1 + \delta x''_1 \int A''_1 + \delta y''_1 \int B''_1 + \text{it. d.}; \end{aligned}$$

biorąc te całki w tychże samych granicach, w jakich brana jest funkcyja dana.

Nie widzimy zrazu, co by się stało z wyrazami poprzedzającymi, gdyby jedna z granic była razem początkiem spółprzystaw. Unikniemy atoli tej trudności, czyniąc naprzód

$$x = X - x', \quad y = F - y',$$

i wyobrażając sobie potem, że początek spółprzystaw X, F , jest stały, lecz że ilości x', y' są zmienne, będzie wtenczas

$$\delta x = \delta X - \delta x', \quad \delta y = \delta F - \delta y'.$$

Różniczki zaś dx, dy , zgoła nie zależąc od ilości x', y' , żadnej nie podlegają zmienności; zatem wyrażenie δU , będzie tylko

$$M(\delta X - \delta x') + N\delta dX + \text{it d.} \\ + m(\delta F - \delta y') + n\delta dF + \text{it d.}$$

Wolno jest potem uczynić x', y' , równemi zeru, byleby tylko zostały zmienności $\delta x', \delta y'$, które mogą być uważane za pierwszy stopień wielkości tych ilości; wtedy X, F znowu się zamieniają na x, y , a zmienność wyrażenia $\int \delta U$, zostanie przywiedzioną do samych tylko wyrazów $-\delta x' \int M - \delta y' \int m$, których całki powinny być brane w pierwszych swoich granicach.

368. Założmy *np.* wyznaczyć y przez x , tak, ażeby całka $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$, wzięta między dwiema granicami danymi, była najmniejszością, co wychodzi na to, *aby znaleźć najkrótszą linią poprowadzić się mogącą między dwoma punktami na płaszczyźnie.* Mamy

$$\delta U = \delta \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dx \delta dx + dy \delta dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

$$\text{a} \quad \int \delta U = \int \frac{dx}{ds} \delta dx + \int \frac{dy}{ds} \delta dy,$$

czyniąc $\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$, i pisząc δ po d . Całkując

potém przez części, otrzymamy

$$\int \delta U = \frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y - \int \left\{ d \frac{dx}{ds} \delta x + d \frac{dy}{ds} \delta y \right\},$$

a wyrazy będące pod znakiem $\int$ dadzą (364)

$$d \frac{dx}{ds} = 0, d \frac{dy}{ds} = 0, \text{ ztąd } \frac{dx}{ds} = C, \frac{dy}{ds} = c, \frac{dy}{dx} = C', y = C'x + C''.$$

Ten wypadek oznacza, co można było przewidzieć, liniją prostą, a ilości stałe w nim zawarte, posłużą do dopełnienia warunków względem punktów, między którymi ma być ona prowadzoną.

Część wolna od znaku $\int$, czyli ϕ (365), zawierająca same tylko zmienności punktów ostatecznych, niknie, gdy te punkta są dane, a ilości stałe C' , i C'' , wyznaczają się wtenczas przez ten warunek, że linija prosta przechodzić musi przez te punkta. Jeżeli te punkta nie są dane, ale tylko jest powiedzianém, że mają się znajdować na danych linijach krzywych, w tym razie ilości x' , y' , x'' , y'' , które są nieznane, wraz ze swojemi zmiennościami, powinny zadość czynić zrównaniu $\phi'' - \phi' = 0$, które przez to zamieni się na

$$\frac{dx''}{ds''} \delta x'' + \frac{dy''}{ds''} \delta y'' - \frac{dx'}{ds'} \delta x' - \frac{dy'}{ds'} \delta y' = 0,$$

tudzież zrównanióm danych linij krzywych, których różniczki oznaczmy przez

$$dy = m dx, \quad dy = n dx;$$

będziemy więc mieli (366),

$$\delta y' = m' \delta x', \quad \delta y'' = n' \delta x'',$$

$$\left(\frac{dx''}{ds''} + n' \frac{dy''}{ds''} \right) \delta x'' - \left(\frac{dx'}{ds'} + m' \frac{dy'}{ds'} \right) \delta x' = 0.$$

Aże zmienności $\delta x''$, $\delta x'$, jedna od drugiej nie zależą,

to zrównanie rozdziela się na dwa następujące:

$$dx'' + n''dy = 0, \text{ czyli } \frac{dy''}{dx''} = -\frac{1}{n''},$$

$$dx' + m'dy' = 0, \text{ czyli } \frac{dy'}{dx'} = -\frac{1}{m'},$$

które wyrażają, że szukana linija prosta powinna spotkać pod kątem prostym, każdą z danych linij krzywych.

Ze zrównania $y = C'x + C''$, mamy $dy = C'dx$, na wszystkich punkta linii prostej, poprzedzające zatém zrównania zamienia się na następane

$$1 + C'n'' = 0, \quad 1 + C'm' = 0;$$

lecz ilość stała C' zależy od spółprzystaw punktów skrajnych, gdyż zrównanie linii prostej prowadzonej przez te punkta jest

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'), \text{ i daje } C' = \frac{y' - y''}{x' - x''};$$

podstawivszy tę wartość za C' , otrzymamy zrównania

$$x' - x'' + n''(y' - y'') = 0, \quad x' - x'' + m'(y' - y'') = 0,$$

które łącząc ze zrównaniami danych linij krzywych, wyznaczymy punkta, przez które przechodzi linija mierząca najkrótszą odległość między danemi linijami krzywemi, i tak się uzupełni rozwiązanie danego pytania.

Przyslibyśmy do tych samych zrównań, przypuszczając z początku, że punkta skrajne są stałe, w takiej okoliczności mamy między x i y , zrównanie

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

Jakoż, na mocy tego zrównania, całka $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ stanie się, między ucinkami x' , x'' ,

$$(x' - x'') \sqrt{1 + \left(\frac{y' - y''}{x' - x''} \right)^2} = \sqrt{(x' - x'')^2 (y' - y'')^2};$$

a samo przystosowanie rachunku różniczkowego, jest dostatecznym do wyznaczenia *minimum* tego wyrażenia, mając wzgląd na zależność czyli związek, jaki stanowią równania danych linii krzywych między ilościami x' , i y' , x'' , i y'' .

Tak więc bez pomocy równania $\phi'' - \phi' = 0$, możemy rozwiązać zagadnienia teraźniejszemu podobne w każdym razie, gdy umiemy znaleźć całkę podaną, czego sposobami Bernullego i Eulera otrzymać nie można; lecz zważając, że ta całka musi być także funkcją ilości należących do granic, P. *Poisson* różniczkując pod znakiem $\int$ (281), szukał bezśrednie względem tych ilości, warunków na *maximum* bezwzględne (*absolu*) podanej całki, i przyszedł do równania $\phi'' - \phi' = 0$, jakie wypada także z rachunku zmienności.

569. Zagadnienie liczby poprzedzającej uważane w przestrzeni, prowadzi nas do wyznaczenia z i y przez funkcję ilości x , w wyrażeniu $\int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Położywszy $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = ds$, otrzymamy

$$\begin{aligned} \int ds \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} &= \int \frac{dx}{ds} ds + \int \frac{dy}{ds} ds + \int \frac{dz}{ds} ds = \\ &= \frac{dx}{ds} s + \frac{dy}{ds} s + \frac{dz}{ds} s = \int \left\{ d \frac{dx}{ds} s + d \frac{dy}{ds} s + d \frac{dz}{ds} s \right\}. \end{aligned}$$

Część będąca pod znakiem $\int$, daje trzy równania

$$d \frac{dx}{ds} = 0, \quad d \frac{dy}{ds} = 0, \quad d \frac{dz}{ds} = 0,$$

których wszystkie połączenia, biorąc po dwa na raz, dają zgodnie

$$\frac{dz}{dx} = \text{stałej}, \quad \frac{dz}{dy} = \text{stałej}.$$

i pokazują że linia szukana jest linią prostą.

Jeżeli ta linija ma być prowadzoną od punktu danego do powierzchni krzywej, której zrównanie różniczkowe jest

$$dz = p dx + q dy,$$

trzeba ażeby przy ostatniej granicy było $\delta z'' = p'' \delta x'' + q'' \delta y''$. Pierwsza granica jako stała, uczyni $\phi' = 0$, a wartość $\delta z''$ podstawiona w $\phi'' = 0$, da

$$(dx'' + p'' dz'') \delta x'' + (dy'' + q'' dz'') \delta y'' = 0;$$

przywiodłszy do zera współczynniki zmienności niezależnych, otrzymamy

$$dx'' + p'' dz'' = 0, \quad dy'' + q'' dz'' = 0,$$

z czego wypada (150), że linija prosta szukana jest prostopadłą do powierzchni danej.

Jeżeli najkrótsza linija szukana ma się cała znajdować na danej powierzchni krzywej, wtenczas zmienności δx , δy , δz , pod znakiem $\int$, powinny zadość uczynić zrównaniu różniczkowemu tej powierzchni krzywej, które wyrażmy przez $dz = p dx + q dy$; uczynimy więc

$$\delta z = p \delta x + q \delta y,$$

w ilości $\int \delta U$, która przez to podstawienie, zamieni się na

$$\left(\frac{dx}{ds} + p \frac{dz}{ds} \right) \delta x + \left(\frac{dy}{ds} + q \frac{dz}{ds} \right) \delta y, \\ - \int \left\{ \left(d \frac{dx}{ds} + p d \frac{dz}{ds} \right) \delta x + \left(d \frac{dy}{ds} + q d \frac{dz}{ds} \right) \delta y \right\}.$$

Wyrazy pod znakiem $\int$, dają następujące zrównania

$$d \frac{dx}{ds} + p d \frac{dz}{ds} = 0, \quad d \frac{dy}{ds} + q d \frac{dz}{ds} = 0,$$

z których jedno tylko jest dostatecznym (360), wraz ze zrównaniem powierzchni danej, do wyznaczenia natury linii najkrótszej, jakąby można poprowadzić na tej powierzchni między dwoma jej punktami.

Dajmy że ta linija ma być prowadzoną między punktem stałym i liniją krzywą wziętą na tejże powierzchni, będzie naprzód $\varphi'=0$; a oznaczywszy przez $dy=ndx$, zrównanie różniczkowe rzutu danej linii krzywej na płaszczyznę x, y , otrzymamy $\delta y''=n''\delta x''$; potem zrównanie $\varphi''=0$, które się zamieni na

$$dx''+p''dz''+(dy''+q''dz'')n''=0,$$

wyrażać będzie, że dwie linije krzywe, o których tu mówimy, przecinają się pod kątem prostym.

370. Obaczymy jeszcze, jaki związek zachodzić powinien między x i y , który byłby zdolnym dać wartość

najmniejszą wyrażenia $\int \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2(y-F)}}$, gdzie uważać

będziemy F jako funkcją spółprzystaw x' i y' , x'' i y'' , należących do granic (*).

Żeby to pytanie rozwiązać w sposób najogulniejszy, trzeba brać ilość F za zmienną równie jak y (367). Położwszy

$$\sqrt{2(y-F)}=u, \quad \sqrt{dx^2+dy^2}=ds,$$

otrzymamy

$$\delta u = \frac{\delta y - \delta F}{u}, \quad \delta s = \frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y,$$

a zaś

$$\int \delta \frac{ds}{u} = - \int \frac{ds}{u^3} (\delta y - \delta F) + \int \frac{dx}{uds} \delta x + \int \frac{dy}{uds} \delta y =$$

$$= \delta F \int \frac{ds}{u^3} + \frac{dx}{uds} \delta x + \frac{dy}{uds} \delta y - \int \left\{ d \frac{dx}{uds} \delta x + \left(\frac{ds}{u^3} + d \frac{dy}{uds} \right) \delta y \right\};$$

Z wyrazów będących pod znakiem $\int$, wyciągniemy zrównania

$$d \frac{dx}{uds} = 0, \quad \frac{ds}{u^3} + d \frac{dy}{uds} = 0;$$

(*) To zagadnienie należy do *Brachystochrony* czyli do linii krzywej, po której ciało spada w najkrótszym czasie, od jednego do drugiego punktu.

pierwsze, które jest oraz najprostsze, daje

$$\frac{dx}{uds} = C, \text{ ztąd } \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = C\sqrt{2(y-F)},$$

Ten wypadek należy do cykloidy (114); bo uczyniwszy $y-F=z$, otrzymamy

$$dx = \frac{dz\sqrt{2C^2}\sqrt{z}}{\sqrt{1-2C^2z}} = \frac{zdz}{\sqrt{\frac{1}{2C^2}z-z^2}}.$$

Gdy $\delta F=0$, ilość ϕ daje w granicach, zrównania

$$dx''\delta x'' + dy''\delta y'' = 0, \quad dx'\delta x' + dy'\delta y' = 0,$$

z których poznać można, jak pod licz. 368, że jeżeli krzywa szukana jest prowadzoną między dwiema innemi krzywemi, tedy powinna je spotkać pod kątem prostym.

Gdy δF nie jest zero, należy wyrachować wartość $\int \frac{ds}{u^5}$, między granicami całki danej; zrównanie zaś

$$\frac{ds}{u^5} + d\frac{dy}{uds} = 0,$$

otrzymane ze współczynnika ilości δy pod znakiem $\int$, daje

$$\int \frac{ds}{u^5} = -\frac{dy}{uds} + \text{stała},$$

ażé zmienność δF , jako nie zależąca bynajmniej od zmiennych x, y , nie powinna też odmieniać się od jednej granicy do drugiej, przeto zrównanie $\phi'' - \phi' = 0$, zamieni się na

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{dy''}{u''ds''}\delta F + \frac{dx''}{u''ds''}\delta x'' + \frac{dy''}{u''ds''}\delta y'' \\ & + \frac{dy'}{u'ds'}\delta F - \frac{dx'}{u'ds'}\delta x' - \frac{dy'}{u'ds'}\delta y' \end{aligned} \right\} = 0.$$

Jeżeli weźmiemy tylko $F=y'$, ztąd $\delta F=\delta y'$, otrzyma-

my, upraszczając i oddzielając zmienneści tyczące się każdej granicy,

$$\frac{dx''}{u''ds''}\delta x'' + \frac{dy''}{u''ds''}\delta y'' = 0, \quad \frac{dx'}{u'ds'}\delta x' + \frac{dy'}{u'ds'}\delta y' = 0;$$

położywszy potem, jak pod liczbą 368

$$\delta y'' = n''\delta x'', \quad \delta y' = m'\delta x',$$

i pamiętając że $\frac{dx}{uds} = S$, wyższe równania wezmą kształt

$$S + \frac{dy''}{u''ds''}n'' = 0, \quad S + \frac{dy'}{u'ds'}m' = 0$$

ząd $n'' = m'$. Co dowodzi, że w punktach, gdzie linia krzywa szukana spotyka linie krzywe dane, styczne do tych krzywych powinny być równoległe do siebie. Nadto, równanie tyczące się ostatniej granicy.

$$dx''\delta x'' + dy''\delta y'' = 0,$$

pokazuje, że linia krzywa szukana, powinna przecinać drugą linią krzywą daną pod kątem prostym.

371. Poprzedzające zagadnienia stosują się do największych lub najmniejszych wartości bezwzględnych (*maxima et minima absolutus*); lecz następujące zagadnienie: między wszystkiemi związkami, jakie zachodzić mogą między zmiennemi x, y , a które dają tę samą wartość całki nieoznaczonej $\int U_1$ wziętej od $x = x'$, od $x = x''$, znaleźć związek taki, któryby nadał wzorowi $\int U$, wartość największą lub najmniejszą, w tychże samych okolicznościach, należy do największych i najmniejszych wartości względnych (*maxima i minima relatifs*). Rozwiążemy je przywodząc do zera zmienność funkcji $\int U + a \int U_1$, gdzie a jest spółczynnikiem stałym nieoznaczonym. Nie tu jest miejsce dowodzić we wszystkich szczegółach to prawidło; zkąd inąd łatwo pojmujemy, że jeżeli powyższa funkcya jest *maximum* lub *minimum*, a jeżeli uczynimy $\int U_1 = A$, całka $\int U$

mieć będzie zawsze wartość największą lub najmniejszą z tych wartości, jakieby w takowém przypuszczeniu mieć mogło. Spółczynnik nieoznaczony a służy do dopełnienia warunku $\int U_1 = A$.

Gdyby np. żądano mieć *liniję krzywą, któraby w danym obwodzie zawierała plac największy lub najmniejszy*, mielibyśmy

$$\int U + a \int U_1 = \int \{ y dx + a \sqrt{dx^2 + dy^2} \};$$

kładąc $\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$, część zmienności pod znakiem $\int$ znajdującą się, byłaby

$$- \int \left\{ \left(dy + a d \frac{dx}{ds} \right) dx - \left(dx - a d \frac{dy}{ds} \right) dy \right\},$$

ztałd, do wyznaczenia żądanej linii krzywej, otrzymali-

byśmy zrównanie $dx - a d \frac{dy}{ds} = 0$,

którego całka

$$x - a \frac{dy}{ds} = S, \quad \text{czyli} \quad dy = \frac{(x - S) dx}{\sqrt{a^2 - (x - S)^2}},$$

widocznie pokazuje koło, którego promień jest a .

Promień ten wyznacza się stosownie do wartości naczynionej obwodowi $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$; ilość stała S , i ta którą wprowadziłoby całkowanie wskazane, posłużyć do poprowadzenia koła przez granice stałe i dane. To koło daje największość powierzchni, gdy wklętością jest obrócone do osi ucinków, w przeciwnym razie daje najmniejszość. Taki jest najprostszy przypadek zagadnienia figur równo-obwodowych (*isopérimètres*), tak zwanego z przyczyny, że zrazu uważano tylko figury krzywokreślne równy obwód mające.

D O D A T E K

DO POCZĄTKOWEGO TRAKTATU RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO.

O Różnicach i o szeregach.

Rachunek prosty różnic.

372. W rachunku różniczkowym zmienialiśmy funkcje dla poznania tylko kształtu wyrazów ich rozwinięcia, a ztąd dla wyprowadzenia granic stosunków przyrostków funkcji do przyrostku ilości zmiennej, nie dając żadnego względu na wartość tych przyrostków. To badanie ściągało się tylko do nowych funkcji pochodzących z funkcji pierwszej, nie zaś do wartości liczebnych jej przyrostków, lecz roztrząsanie tych wartości pokazało, że one w wielkiej liczbie przypadków idą według prostszego prawa, niżli wartość samej funkcji, lub, przynajmniej często, składają szeregi ubywające, których wartość przez przybliżenie można łatwo otrzymać, i do których przeto użyteczną jest rzeczą sprowadzać ilości pierwotne. I pod tym to naprzód względem zatrudniano się *rachunkiem różnic* właściwie nazywanym.

Nazwano ten rachunek *rachunkiem różnic skończonych* (*calcul aux différences finies*) dla odróżnienia go od rachunku *różnic nieskończenie małych* (*calcul aux différences infiniment petites*), lecz że nazwisko *rachunku różniczkowego* nadane wyłącznie rachunkowi różnic nieskończenie małych (5), zapobiega wszelkiej wątpliwości, przeto nie masz potrzeby dodawać wyrazu *skończonych* do nazwiska *rachunku różnic*, które nie może być nigdy zmieszane z nazwiskiem *rachunek różniczkowy*.

Rachunek prosty różnic ma za cel, oznaczenie przyrostków, wyprowadzając je nie tylko z wyrażenia analitycznego funkcyi, ale też z wartości ich uszczególnionych czyli liczebnych, gdy wyrażenie analityczne albo nie jest dane, albo jest bardzo zwickłane.

373. Roztrząsając bieg szeregów utworzonych z drugich i trzecich potęg liczb naturalnych, wpadamy już na własności różnic znakomite i użyteczne, jak to okaże tłumaczenie tablic następnych.

Potęgi drugie	Różnice 1 ^e .	Różnice 2 ^e .
1	3	
4	5	2
9	7	2
16	9	2
25	11	2
36	13	2
49		i t. d.
i t. d.	i t. d.	

Potęgi 3cie	Różnice 1 ^e .	Różnice 2 ^e .	Różnice 3 ^e .
1	1	12	
8	19	18	6
27	37	24	6
64	61	30	6
125	91	36	6
216	127		
343		i t. d.	i t. d.
i t. d.	i t. d.		

Nie pisałem w tych tablicach szeregu liczb naturalnych 1, 2, 3, 4, i t. d., bo różnica między jedną z nich a drugą jest zawsze równa jedności; lecz obok drugich

potęg umieściłem w kolumnie drugiej różnicę między każdą drugą potęgą i poprzedzającą; potem w kolumnie trzeciej różnicę między każdą liczbą i poprzedzającą kolumny drugiej. Takowe liczby kolumny trzeciej będąc różnicami między *różnicami pierwszymi*, nazywają się *różnicami drugimi*.

Różnice pierwsze składając postęp różnicowy, idą według prawa prostszego, niżli potęgi drugie, różnice zaś drugie będąc stałemi, przedstawują jeszcze nowe uproszczenie. Ze wzajemnego połączenia różnic i potęg, ważny ten wynika wniosek, że za pomocą liczb tylko 1, 3, 2, umieszczonych na początku każdej odpowiedniej z trzech kolumn pierwszej tablicy, można ułożyć za pomocą prostego dodawania kolumnę potęg drugich; bo dodając 2 do 3, mieć będziemy 5, potem 2 do 5, otrzymamy 7, i tym sposobem dalej postępując ułożymy drugą kolumnę; podobnie dodając 3 do 1, wypada 4, dodając 5 do 4, wypada 9 i tak dalej czyniąc znajdziemy inne potęgi drugie.

W drugiej tablicy, pierwsza kolumna zamyka potęgi trzecie, druga kolumna różnice pierwsze, trzecia różnice drugie, które składają już postęp tylko różnicowy; na koniec w kolumnie trzeciej są różnice różnic drugich, czyli *różnice trzecie*, które już są stałe.

Za pomocą czterech liczb 1, 7, 12 i 6, umieszczonych na początku każdej odpowiedniej ze czterech kolumn, można utworzyć wszystkie te kolumny, zaczynając od kolumny z prawej strony leżącej; i dodając każdą z liczb jednej tejże samej kolumny, do liczby na linii następnie wyżej położonej w kolumnie z lewej strony względem tamtej leżącej.

To prawidło, które zostało wyprowadzonem prostym wywodem i z dwóch tylko szeregów liczb, będzie wkrótce dowiedzionem i rozciągnionem do nieograniczonej liczby funkcyj, na które otrzymamy przeto dowodzenia ściśle.

Biorąc w tablicy logarytmów różnice między wy-

razami następującemi po sobie znajdziemy liczby, które bardzo nieregularnie będą postępowały, jeżeli je bierzemy w początku tablicy, gdzie funkcyja bardzo się zmienia; lecz biorąc różnice drugie, trzecie, przyjdziemy do liczb bardzo małych, które w pewnym przeciągu mniej więcej znacznym będą też same. Więc w tym przeciągu logarytmy będą postępowały według prawa podobnego do prawa, jakieśmy wyżej odkryli względem potęg trzecich, i którego możemy używać dla uproszczenia układania tablicy logarytmów.

374. Gdyśmy odkryli korzyść, jaką można wyciągnąć z uważania różnic następnie branych aż do rzędu w którym są stałe, bądź to zupełnie, bądź przez przybliżenie, wypada szukać wyrażenia ogólnego ich związków. Na ten koniec niech będzie

$$u, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_n,$$

szereg wartości następnych, jakich nabywa ilość, z przyczyny zmian, których doznaje, albo sama przez się, albo z przyczyny zmian funkcyi innej, od której zależy; liczby w dole napisane są skazówkami pokazującemi miejsce, jakie każda wartość w szeregu zajmuje, oznaczając liczbę wartości ją poprzedzających, przeto wartość pierwsza uważa się jako odpowiadająca skazówce 0. Uczynimy potem

$$\left. \begin{aligned} u_1 - u &= \Delta u, \\ u_2 - u_1 &= \Delta u_1, \\ u_3 - u_2 &= \Delta u_2, \\ \\ u_n - u_{n-1} &= \Delta u_{n-1}, \end{aligned} \right\} (1),$$

używając cechy Δ , na oznaczenie różnicy między dwóma następnemi stanami tejże samej ilości.

Gdy ta ilość w swoich zmianach przechodzi przez stopnie równe, różnice Δu , Δu_1 , Δu_2 , i t. d. wszystkie są równe; lecz jeżeli ta okoliczność nie ma miejsca, wtedy podobnie uczynimy

także

$$\begin{aligned} u_3 &= u_2 + \Delta u_2 \\ &= u + 2\Delta u + \Delta^2 u + \Delta(u + 2\Delta u + \Delta^2 u) \\ &= u + 3\Delta u + 3\Delta^2 u + \Delta^3 u, \end{aligned}$$

kształt tych wyrażeń, których współczynniki liczebne są też same, jakie są współczynniki potęgi drugiej i trzeciej dwuwyrazu, prowadzi przez podobieństwo do wzoru

$$u_n = u + \frac{n}{1} \Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^3 u + \text{i t. d.},$$

co łatwo sprawdzić można za pomocą zrównania

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n,$$

którego rozwinięcie pokazuje, że podane prawo zachowując się w rzędzie n , będzie także zachowane w rzędzie $n+1$.

377. Można też wyrazić bezśrednie różnicę jakiegokolwiek rzędu przez wyrazy szeregu całkowego, z których powstaje ta różnica.

Mając naprzód

$$\Delta u = u_1 - u, \quad \text{i} \quad \Delta^2 u = \Delta u_1 - \Delta u,$$

uważamy, iż Δu_1 powinno się składać z liter u_1 i u_2 , tym samym sposobem, jakim sposobem Δu składa się z liter u i u_1 , to jest że dość jest powiększyć jednością cechy, dla przejścia do $\Delta u_1 = u_2 - u_1$, przeto otrzymamy

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= u_2 - u_1 - (u_1 - u) \\ &= u_2 - 2u_1 + u; \end{aligned}$$

powiększając potem w tym ostatnim wypadku cechy dla otrzymania $\Delta u_1 = u_2 - u_1$, znajdujemy

$$\begin{aligned} \Delta^3 u &= \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u = u_3 - 2u_2 + u_1 - (u_2 - 2u_1 + u) \\ &= u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u, \end{aligned}$$

a przez podobieństwo

$$\Delta^n u = u_n - \frac{n}{1} u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} u_{n-3} + \text{it. d.},$$

takowe prawo możnaby sprawdzić rozwijając równanie $\Delta^{n+1} u = \Delta^n u_1 - \Delta^n u$.

Ten wypadek i poprzedzający mogą być wyrażone pod postacią

$$u_n = (1 + \Delta u)^n, \quad \Delta^n u = (u-1)^n,$$

byłobyśmy w rozwinięciu pierwszego równania, odmienili wykładniki potęg ilości Δu , na wykładniki cechy Δ , a w rozwinięciu drugiego, wykładniki ilości u , na jej skazówki; możemy też od razu wypadek pierwszy wyrazić przez równanie

$$u_n = (1 + \Delta)^n u,$$

w rozwinięciu którego, nie trzeba nie odmieniać.

378. Gdy funkcyja jest dana, nie masz łatwiejszego, jak znaleźć różnice następne: wezmę dla przykładu funkcyję x^m . Przypuszczając że jest $u = x^m$, i że x powiększą się ilością h , będzie $u_1 = (x+h)^m$, a zatem

$$\begin{aligned} \Delta u &= (x+h)^m - x^m = mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2}h^2 \\ &\quad + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^{m-3}h^3 + \text{it. d.} \end{aligned}$$

Dla znalezienia dalszych różnic $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, i t. d., trzeba powiększyć x znowu jakąś ilością; z czego wypadają dwa przypadki, jeden zależy na przypuszczeniu że ilość x nabywa przyrostków zawsze równych, drugi zaś uważać każe te przyrostki jako zmieniające się; zatrudniać się tu będziemy pierwszym tylko przypadkiem. Podstawując $x+h$ za x w Δu , otrzymamy

$$\Delta u_1 = mh(x+h)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} h^2 (x+h)^{m-2} + \text{it. d.}$$

Jasną jest rzeczą, że rozwinąwszy wyrażenie Δu_1 i odjąwszy wyrażenie Δu , wypadek uszykowany według potęg przyrostku h , mieć będzie kształt

$$\Delta^2 u = m(m-1)x^{m-2}h^2 + M_3x^{m-3}h^3 + M_4x^{m-4}h^4 + \text{i t. d.},$$

gdzie M_3 , M_4 , i t. d. wyrażają współczynniki zależące od wykładnika m .

Kładąc znowu $(x+h)$ za x w tém ostatniem równaniu, znaleźlibyśmy $\Delta^2 u_1$, a zważając że $\Delta^3 u = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u$, otrzymalibyśmy

$$\Delta^3 u = m(m-1)(m-2)x^{m-3}h^3 + M'_4x^{m-4}h^4 + \text{i t. d.}$$

Prawo pierwszych wyrazów w obu rozwinięciach jest widoczne, i przewidujemy, że wyrażenie ilości $\Delta^n u$, powinno się zaczynać od

$$m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)x^{m-n}h^n.$$

Widzimy także, że gdy wykładnik m jest cały i dodatny, liczba wyrazów w rozwinięciu $\Delta^n u$ uszykowaném według potęg x , zmniejsza się o jedność, gdy n powiększa się tąż ilością, a gdy $m=n$, będzie wtenczas

$$\Delta^m u = m(m-1)(m-2) \dots 1 \cdot h^m.$$

Ta różnica jest stała, a zatem różnice wyższych rzędów są zero.

Łatwo przyjdziemy do wyrazu ogólnego różnicy $\Delta^n u$, wyrażając wartość tej różnicy za pomocą wartości u , u_1 , u_2 , u_3 , i t. d. nie używając wartości Δu , $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, i t. d. (377). Jasną jest, że w niniejszém przypuszczeniu, wartości

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \dots, u_n,$$

odpowiadają wartościom

$$x+h, \quad x+2h, \quad x+3h, \dots, x+nh,$$

a zatem

$$u_1 = (x+h)^m, \quad u_2 = (x+2h)^m, \dots, u_n = (x+nh)^m;$$

z kąd wyciągniemy

$$\Delta^n u = [x + nh]^m - \frac{n}{1} [x + (n-1)h]^m + \frac{n(n-1)}{1.2} [x + (n-2)h]^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} [x + (n-3)h]^m + \text{i t. d.}$$

Jeżeli oznaczymy przez i wykładnik ilości h w ogólnym wyrazie wyższego rozwinięcia, skład tego wyrazu będzie

$$\frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-i+1)}{1.2.3 \dots i} x^{m-i} h^i \times$$

$$\left\{ n^i - \frac{n}{1}(n-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^i - \text{i t. d.} \right\};$$

lecz ponieważ widzieliśmy teraz, że rozwinięcie ilości $\Delta^n u$ nie może mieć potęg ilości h mniejszych od n , idzie zatem, że funkcyja

$$n^i - \frac{n}{1}(n-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^i - \text{i t. d.}$$

mająca n wyrazów, jest zero dopóki $i < n$. Z innej strony, ponieważ współczynnik

$$\frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-i+1)}{1.2.3 \dots i},$$

niknie, gdy $i = m+1$, przeto wypada, że najwyższa potęga ilości h w rozwinięciu $\Delta^n u$ nie inna być może tylko h^m .

379. Z własności jednowyrazu x^m wypada, że każda funkcyja ilości x wymierna i cała, zawsze ma różnice stałe, to jest te, których rząd jest oznaczony wykładnikiem najwyższej potęgi ilości x , jaka być może w funkcyi danej. Jakoż gdy ta funkcyja ma kształt $Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \text{i t. d.}$, będzie

$$\Delta^n(Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \text{i t. d.}) =$$

$$A\Delta^n.x^\alpha + B\Delta^n.x^\beta + C\Delta^n.x^\gamma + \text{i t. d.} (*) (375);$$

a jeżeli α jest najwyższym wykładnikiem ilości x , wypadnie na wartość $n=\alpha$,

$$\Delta^n.x^\alpha = 1.2 \dots \alpha h^\alpha; \quad \Delta^\alpha.x^\beta = 0, \quad \Delta^\alpha.x^\gamma = 0, \quad \text{i t. d.,}$$

przeto

$$\Delta^\alpha(Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \text{i t. d.}) = 1.2 \dots \alpha Ah^\alpha.$$

Łatwą będzie rzeczą albo tym sposobem, albo uważając wartości następne, utworzyć różnice każdej wymiernej i całej funkcyi ilości x , dla wyrachowania potem wartości jej liczebnych, według prawidła wyłożonego w liczbie 373.

380. Używanie różnic największą czyni nam przysługę w funkcyach przestępnych, których przybliżony rachunek jest pracowity, jak to okaże następny przykład wzięty z logarytmów.

Niech będzie $u = tx$, będziemy mieli podług wzoru z liczby 29

$$\Delta u = M \left\{ \frac{h}{x} - \frac{1h^2}{2x^2} + \frac{1h^3}{3x^3} - \text{i t. d.} \right\},$$

$$\Delta^2 u = -M \left\{ \frac{h^2}{x^2} - \frac{2h^3}{x^3} + \text{i t. d.} \right\},$$

$$\Delta^3 u = M \left\{ \frac{2h^3}{x^3} - \text{i t. d.} \right\},$$

i t. d.

Ciągnąć będziemy te szeregi, podług wielkości liczby x , dopóty, aż ostatnia różnica będzie tak mała, iż można ją zaniedbać bez znacznego błędu.

(*) Nie należy brać za jedno $\Delta^n.x^\alpha$ i $\Delta^n x^\alpha$, gdyż wyrażenie pierwsze oznacza różnicę rzędu n funkcyi x^α , drugie zaś jest $\Delta^n x^\alpha = (\Delta^n x)^\alpha$.

Gdybyśmy *np.* mieli $x=10000$, $h=1$, znaleźlibyśmy w logarytmach zwyczajnych

$$\Delta u = 0,00004\ 34272\ 76863,$$

$$\Delta^2 u = -0,00000\ 00043\ 42076,$$

$$\Delta^3 u = 0,00000\ 00000\ 00868;$$

jasną zaś jest, że gdybyśmy chcieli mieć ostateczne wypadki z dziesięciu tylko liczbowych znaków złożone, moglibyśmy bez znacznego błędu zaniedbywać przez czas długi różnice czwartego rzędu; albowiem musiałyby być powtórzone wielką liczbę razy, aby wpłynęły na różnicę trzecią; więc następnie uformujemy według prawidła liczby 373, szeregi różnic trzecich, drugich, pierwszych, a nakoniec logarytmy liczb 10001, 10002, 10003, i t. d., idąc od logarytmu liczby 10000, który jest 4,00000 00000 00000. Należałoby odbyć rachunek z 15 znakami dziesiętnymi, iżby poznać, kiedy zbiór ilości zaniedbanych mógłby zacząć wpływać na ostatnią liczbę dziesiętną, na której mają się kończyć logarytmy, o czym przekonać się możemy za pomocą niektórych logarytmów ściśle rachowanych, w odległościach znacznie oddalonych; bo gdy przez ciąg dodawań następnych przychodzimy do tych logarytmów, zatem sposób za pomocą różnic, musi je dawać takie, jakie były *a priori* wyprowadzone, przynajmniej w pierwszych dziesięciu znakach, jeżeli na tej liczbie przestać chcemy. Gdy ostatni znak liczebny nie jest już dokładny, coby się jeszcze nie przydarzyło na liczbę 1050, rachowalibyśmy na nowo *a priori* różnice Δu , $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, i użylibyśmy nowych wartości jak poprzedzających, dla otrzymania logarytmów liczb całych następujących po tej liczbie, na której musieliśmy się zatrzymać.

Zastosowanie rachunku różnic do interpolacji szeregów.

381. Najglówniejszém przystosowaniem rachunku róż-

żnie jest interpolacya szeregów (*interpolation des suites*), która zależy na tém, aby między wyrazami jakiego szeregu, umieścić nowe wyrazy podlegające temuż samemu prawu co i pierwsze. Tym końcem uważać należy różne wyrazy tego szeregu, jako wartości szczególne, jakich nabywa funkcyja, wyrażająca wyraz ogólny, gdy w niej naznaczymy wartości szczególne ilości zmiennej, od której zależy ten wyraz, wielkość zaś samejże ilości zmiennej zależy od miejsca, jakie ten wyraz zajmuje w szeregu danym. Gdy ten wyraz ogólny jest dany, wyciągniemy z niego tyle wartości ile zechcemy; lecz inaczej się rzecz ma gdy znamy tylko pewną liczbą początkowych wyrazów szeregu, co jest właśnie zwyczajnym przypadkiem, do którego używamy interpolacyi.

Należy wtedy z pewnej funkcyi wyprowadzić wyrażenie analityczne liczby wyrazów, których wartość liczbową jest dana, czego atoli dokazać nie można, gdy kształt funkcyi nie jest znany; uważać bowiem należy, że to zagadnienie zupełnie jest podobne temu, ażeby ułożyć równanie linii krzywej przechodzącej przez punkta, którychby ucinki wyrażone były przez wartości zmiennej niezależnej, a przystawy odpowiadały wartościom funkcyi; i choćby bardzo wielka liczba dana była rzeczonych punktów, nie potrafilibyśmy w szczególności wyznaczyć tej linii krzywej, jeżeli jej gatunek nie jest dany (*Trig. 168*). Lecz ponieważ interpolacyi używamy w bardzo małej tylko rozciągłości, zatem można wystawić sobie, że wyraz ogólny jest rozwinionym według potęg rosnących ilości jego zmiennej, i że godzi się przestać na małej liczbie największych potęg tejże zmiennej; tym sposobem zostanie oznaczony kształt funkcyi, która jest wtenczas rzetelną.

Wiedząc zatem że wartościom

$$x, x_1, x_2, x_3, \text{ i t. d.}$$

ilości zmiennej, odpowiadają wartości

$$u, u_1, u_2, u_3, \text{ i t. d.}$$

funkcyi tej zmiennej, przypuszczamy że na każdą inną wartość x' , będzie

$$u' = \alpha + \beta x' + \gamma x'^2 + \delta x'^3 + \text{i t. d.},$$

oznaczymy zaś współczynniki α, β, γ , i t. d. za pomocą tego warunku, że u' zamienia się kolejno na u, u_1, u_2 , i t. d. gdy x' zamienia się na x, x', x^2 , i t. d.

W takowém oznaczaniu współczynników α, β , i t. d. dwa zachodzą przypadki; pierwszy, gdy wartości x, x_1, x_2 , i t. d. idą w postępie różnicowym, rozwiązuje się bezpośrednio za pomocą wyrażenia u_n (376).

Jakoż gdy w szeregu

$$u' = \alpha + \beta x' + \gamma x'^2 + \text{i t. d.},$$

zatrzymamy się na jakimkolwiek wyrazie, który oznaczę przez $\mu x'^m$, i gdy weźmiemy wartości x' w postępie $x, x+h, x+2h$, i t. d., funkcyja u będzie miała w rzędzie m tem różnice stałe (376), a zatem na wartość $x+nh$ ilości zmiennej x' , odpowiada

$$u_n = u + \frac{n}{1} \Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 u + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1.2 \dots m} \Delta^m u.$$

W tym wzorze, ilości

$$u, \Delta u, \Delta^2 u, \text{ i t. d. (363)}$$

są liczbami; jeżeli w nim uczynimy $x+nh=x'$, z kądem wypada $n = \frac{x'-x}{h}$, przerobimy go na funkcyję wymierną i całą ilości x' tegoż samego stopnia, jakiego jest wyrażenie ilości u' , a że u^n zamienia się na u, u_1, u_2 , i t. d. gdy w nim podstawimy 0, 1, 2, i t. d. za n , idzie zatem, że ten wzór też same wartości przybierać będzie, gdy x' zamieni się na $x, x+h, x+2h$, i t. d.; a zatem będzie funkcyją szukaną.

Można to wyrażenie uprościć czyniąc $x = x+h'$, z kądem

wypada $n = \frac{h'}{h}$, a zaś

$$u_n = u' = u + \frac{h'}{h} \Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h \cdot 2h} \Delta^2 u + \frac{h'(h-h)(h'-2h)}{h \cdot 2h \cdot 3h} \Delta^3 u + \text{i t. d.}$$

Nakoniec wyraziwszy $u' - u = \Delta' u$, otrzymamy

$$\Delta' u = \frac{h'}{h} \Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h \cdot 2h} \Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h \cdot 2h \cdot 3h} \Delta^3 u + \text{i t. d.}$$

382. Weźmy naprzód szereg

$$3, \quad 7, \quad 19, \quad 39, \quad 67, \quad \text{i t. d.}$$

odpowiadający skazówkom

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \text{i t. d.}$$

będziemy mieli w tym przypadku

$$u = 3, \quad \Delta u = 4, \quad \Delta^2 u = 8, \quad \Delta^3 u = 0, \quad h = 1;$$

wyrażenie ilości $\Delta' u$ sprowadza się do dwóch pierwszych swoich wyrazów, zatem będzie

$$\Delta' u = 4h' + 4h'(h'-1) = 4h'^2;$$

więc na skazówkę h' , wypadnie $u' = 3 + 4h'^2$. Położwszy np. $h' = \frac{5}{2}$, znaleźlibyśmy, że wyraz tej skazówce odpowiadający jest 28.

Niech będzie jeszcze szereg

$$1, \quad 4, \quad 2, \quad 5, \quad 9, \quad 16, \quad \text{i t. d.},$$

wziąwszy skazówki zwyczajne, to jest

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \text{i t. d.},$$

i uformowawszy różnice, otrzymamy

$$u = 1, \quad \Delta u = 3, \quad \Delta^2 u = -5, \quad \Delta^3 u = 8, \quad \Delta^4 u = -6, \quad \Delta^5 u = 0, \quad h = 1,$$

z kądy wyciągniemy

$$u' = 1 + 3 \frac{h'}{1} - 5 \frac{h'(h'-1)}{1 \cdot 2} + 8 \frac{h'(h'-1)(h'-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 6 \frac{h'(h'-1)(h'-2)(h'-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4};$$

co uprościwszy, i uszykowawszy według potęg ilości h' , otrzymamy

$$u' = \frac{12 + 116h' - 111h'^2 + 34h'^3 - 3h'^4}{12}.$$

Jest rzeczą godną uwagi, że wyrażenie u' , w tym i w poprzedzającym przykładzie, będąc zupełnie ściśle i służąc wszystkim wartościom ilości h' , tém samém daje wyraz ogólny danego szeregu, bo daje wszystkie jego wyrazy szczegulne, kładąc w nim z kolei $h'=0$, $h'=1$, $h'=2$, i t. d. a lubo są podane tu pierwsze tylko wyrazy szeregu, można go atoli dalej, ile sami zechcemy, ciągnąć, według prawa tym wyrazóm służącego. To samo zawsze będzie wypadło, gdy szereg podany będzie miał niektóre różnice stałe, bo taki szereg musi koniecznie wynikać z wartości kolejną po sobie następujących, funkcyi algebraicznej wymiernej i całej.

383. Najprostsze przypadki, do których najczęściej bywa używany wzór

$$\Delta'u = \frac{h'}{h} \Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h-2h} \Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h \cdot 2h \cdot 3h} \Delta^3 u + \text{i t. d.},$$

są te, w których różnice Δu , $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$ i t. d., zmniejszają się, bo wtedy wzór ten jest malejącym. Obaczmy to na przykładzie wziętym z tablic logarytmowych. Dajmy, że trzeba wynaleść logarytm odpowiadający liczbie 3,1415926536, za pomocą tablicy zawierającej logarytmy od 1, do 1000, z dziesięciu dziesiętnemi; uważać wtenczas powinniśmy logarytmy w tablicy zawarte, jako wartości szczegulne funkcyi u , liczby zaś jako skazówki, którym te wartości odpowiadają; zatem uformujemy tablicę następującą:

$$\begin{array}{l} u = 0,4969296481 \\ u_1 = 0,4983105538 \\ u_2 = 0,4996870826 \\ u_3 = 0,5010592622 \\ u_4 = 0,5024271200 \end{array} \left| \begin{array}{l} 13809057 \\ 13765288 \\ 13721796 \\ 13678578 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} -43769 \\ -43492 \\ -43218 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} +277 \\ +274 \end{array} \right| -3,$$

której pierwszy słup zawiera logarytmy liczb

$$3,14, \quad 3,15, \quad 3,16, \quad 3,17, \quad 3,18,$$

drugi różnice ich pierwsze, trzeci różnice ich drugie, czwarty różnice ich trzecie, a piąty różnice ich czwarte, którymi są trzy jedności ostatniego rzędu. Tym sposobem będziemy mieli

$$\Delta u = +0,0013809057, \quad \Delta^2 u = -0,0000043769,$$

$$\Delta^3 u = +0,0000000277, \quad \Delta^4 u = -0,0000000003,$$

$$\text{a że} \quad h = 0,01, \quad h' = 0,0015926536,$$

zatem otrzymamy

$$\frac{h'}{h} = 0,15926536, \quad \frac{h'-h}{2h} = \frac{h'}{2h} - \frac{1}{2} = -0,42036732,$$

$$\frac{h'-2h}{3h} = \frac{h'}{3h} - \frac{2}{3} = -0,61357821, \quad \frac{h'-3h}{4h} = \frac{h'}{4h} - \frac{3}{4} = -0,71018366;$$

za pomocą tych wartości bardzo łatwo wyrazimy w liczbach wzór

$$u' = u + \frac{h'}{h} \Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h.2h} \Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h} \Delta^3 u + \\ + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)(h'-3h)}{h.2h.3h.4h} \Delta^4 u,$$

z którego wypada $u' = 0,4971498726$.

Są łatwiejsze sposoby wynalezienia logarytmów liczb, wyrażonych przez wiele znaków; lecz poprzedzający bardzo stosownie może służyć za przykład sposobu interpolacji. Tu postrzegać już powinniśmy, że ten sposób rozciąga się do wielu innych przypadków; mianowicie wielkiego jest użycia w rachunkach astronomicznych.

384. Gdy wartości x, x_1, x_2, x_3 , i t. d. nie są równoróżniące się, czyli gdy nie tworzą postępu różnicowego, wtenczas bezśrednie używamy wzoru

$$u' = a + \beta x' + \gamma x'^2 + \delta x'^3 + \text{i t. d.},$$

w którym podstawione szczególne wartości, x , x_1 , x_2 , x_3 , i t. d. dają zrównania

$$u = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{i t. d.},$$

$$u_1 = \alpha + \beta x_1 + \gamma x_1^2 + \delta x_1^3 + \text{i t. d.},$$

$$u_2 = \alpha + \beta x_2 + \gamma x_2^2 + \delta x_2^3 + \text{i t. d.},$$

$$u_3 = \alpha + \beta x_3 + \gamma x_3^2 + \delta x_3^3 + \text{i t. d.},$$

i t. d.

których powinno być tyle, ile jest współczynników nieoznaczonych α , β , γ , δ , i t. d.; obaczmy, jak się wynajduje wyrażenie tych współczynników.

Odejmując z kolei pierwsze zrównanie od drugiego, drugie od trzeciego, i t. d. przyjdziemy do wypadków dających się podzielić odpowiednie przez $x_1 - x$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, i t. d., a ztąd wyciągniemy

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \beta + \gamma(x_1 + x) + \delta(x_1^2 + x_1x + x^2) + \text{i t. d.},$$

$$\frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} = \beta + \gamma(x_2 + x_1) + \delta(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) + \text{i t. d.},$$

$$\frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2} = \beta + \gamma(x_3 + x_2) + \delta(x_3^2 + x_3x_2 + x_2^2) + \text{i t. d.},$$

i t. d.

Położymy dla skrótienia

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = U, \quad \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} = U_1, \quad \frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2} = U_2, \text{ i t. d.},$$

otrzymamy zrównanie

$$U = \beta + \gamma(x_1 + x) + \delta(x_1^2 + x_1x + x^2) + \text{i t. d.},$$

$$U_1 = \beta + \gamma(x_2 + x_1) + \delta(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) + \text{i t. d.},$$

$$U_2 = \beta + \gamma(x_3 + x_2) + \delta(x_3^2 + x_3x_2 + x_2^2) + \text{i t. d.},$$

i t. d.

odjąwszy także U od U_1 , U_1 od U_2 i t. d. i oznaczywszy przez U , U_1 , i t. d. ilości

$$\frac{U_1 - U}{x_2 - x}, \quad \frac{U_2 - U_1}{x_3 - x_1}, \quad \text{i t. d.},$$

będziemy mieli

$$U' = \gamma + \delta(x_2 + x_1 + x) + \text{i t. d.},$$

$$U'_1 = \gamma + \delta(x_3 + x_2 + x_1) + \text{i t. d.},$$

a ztąd

$$U'_1 - U = \delta(x_3 - x) + \text{i t. d.}$$

Teraz jeżeli uczynimy

$$\frac{U'_1 - U}{x_3 - x} = U'',$$

będzie $U'' = \delta + \text{i t. d.}$, i jeżeli dla łatwiejszego pojęcia przypuścimy cztery tylko wyrazy w wyrażeniu u' , działanie skończy się na wyższém zrównaniu; z którego wyciągnąwszy wartość δ , a potem wracając do wartości γ , β , α , za pomocą wyrażeń U' , U , u , otrzymamy

$$\delta = U'',$$

$$\gamma = U' - U''(x_2 + x_1 + x),$$

$$\beta = U - U'(x_1 + x) + U''(x_2 x_1 + x_2 x + x_1 x),$$

$$\alpha = u - Ux + U'x_1x - U''x_2x_1x.$$

Podstawiwszy te wartości w wyrażeniu u' , będziemy mieli

$$u' = u + U(x' - x) + U'[x'^2 - (x_1 + x)x' + x_1x] \\ + U''[x'^3 - (x_2 + x_1 + x)x'^2 + (x_2x_1 + x_2x + x_1x)x' - x_2x_1x].$$

Łatwo daje się widzieć że współczynniki ilości U , U' , U'' , mogą się rozłożyć na mnożniki proste, i że można pisać u' pod tą postacią

$$u' = u + U(x' - x) + U'(x' - x)(x' - x_1) + U''(x' - x)(x' - x_1)(x' - x_2).$$

Tym sposobem dalej postępując otrzymalibyśmy wzór podobny poprzedzającemu; i jakabykolwiek była

liczba wartości x, x_1, x_2 , ilości x' , mielibyśmy w ogólności

$$u' = u + U(x' - x) + U'(x' - x)(x' - x_1) + U''(x' - x)(x' - x_1)(x' - x_2) \\ + U'''(x' - x)(x' - x_1)(x' - x_2)(x' - x_3) + \text{it. d.},$$

położywszy

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = U, \quad \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} = U_1, \quad \frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2} = U_2, \quad \frac{u_4 - u_3}{x_4 - x_3} = U_3, \text{ it. d.},$$

$$\frac{U_1 - U}{x_2 - x} = U', \quad \frac{U_2 - U_1}{x_3 - x_1} = U'_1, \quad \frac{U_3 - U_2}{x_4 - x_2} = U''_1, \text{ it. d.},$$

$$\frac{U'_1 - U'}{x_3 - x} = U'', \quad \frac{U''_1 - U'_1}{x_4 - x_1} = U''_1, \text{ it. d.},$$

$$\frac{U''_1 - U''}{x_4 - x} = U''', \text{ it. d.},$$

i t. d.

Gdy wartości x, x_1, x_2, x_3 , są równoróżniące się czyli w postępie różnicowym, mamy

$$x_1 - x = x_2 - x_1 = x_3 - x_2, \text{ it. d.},$$

zkuąd wypada oczywiście

$$x_1 = x + h, \quad x_2 = x + 2h, \quad x_3 = x + 3h, \text{ it. d.},$$

$$U = \frac{\Delta u}{h}, \quad U_1 = \frac{\Delta u_1}{h}, \quad U_2 = \frac{\Delta u_2}{h}, \quad U_3 = \frac{\Delta u_3}{h}, \text{ it. d.},$$

$$U' = \frac{\Delta^2 u}{1.2.h^2}, \quad U'_1 = \frac{\Delta^2 u_1}{1.2.h^2}, \quad U'_2 = \frac{\Delta^2 u_2}{1.2.h^2}, \text{ it. d.},$$

$$U'' = \frac{\Delta^3 u}{1.2.3.h^3}, \quad U''_1 = \frac{\Delta^3 u_1}{1.2.3.h^3}, \text{ it. d.},$$

$$U''' = \frac{\Delta^4 u}{1.2.3.4.h^4}, \text{ it. d.},$$

i t. d.

uczyniwszy $x' = x + h'$, będzie

$$x' - x = h', \quad x' - x_1 = h' - h, \quad x' - x_2 = h' - 2h,$$

$$x' - x_3 = h' - 3h, \text{ it. d.}$$

z czego się pokazuje, że poprzedzające wyrażenie ilości u' , które zamienia się wtenczas na

$$u' = u + \frac{h'}{h} \Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h \cdot 2h} \Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h \cdot 2h \cdot 3h} \Delta^3 u + \text{i t. d.},$$

zgadza się z wyrażeniem otrzymaném pod licz. 381, drogą całę odmienną.

385. Lagranż podał wyrażenie ilości u' pod nowym kształtem; zważając bowiem, że ponieważ zrównania

$$u = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^5 + \text{i t. d.},$$

$$u_1 = \alpha + \beta x_1 + \gamma x_1^2 + \delta x_1^5 + \text{i t. d.},$$

$$u_2 = \alpha + \beta x_2 + \gamma x_2^2 + \delta x_2^5 + \text{i t. d.},$$

$$\text{i t. d.}$$

są tylko pierwszego stopnia względem każdej ilości $\alpha, \beta, \gamma, \text{i t. d.}, u, u_1, u_2, \text{i t. d.}$, i ponieważ u' powinno być wyrażoném przez x' w taki sposób, ażeby czyniąc z kolei $x'=x, x'=x_1, x'=x_2, \text{i t. d.}$ wypadało $u'=u, u'=u_1, u'=u_2, \text{i t. d.}$, można pisać

$$u' = Xu + X_1 u_1 + X_2 u_2 + \text{i t. d.},$$

byleby tylko $X, X_1, X_2, \text{i t. d.}$ były takimi funkcyami, ażeby założywszy

$$\left. \begin{array}{l} x'=x, \\ x'=x_1, \\ x'=x_2, \end{array} \right\} \text{było} \left\{ \begin{array}{l} X=1, \quad X_1=0, \quad X_2=0, \text{ i t. d.}, \\ X=0, \quad X_1=1, \quad X_2=0, \text{ i t. d.}, \\ X=0, \quad X_1=0, \quad X_2=1, \text{ i t. d.}, \end{array} \right.$$

i tak dalej; tym warunkóm zadość się stanie jeżeli weźmiemy

$$X = \frac{(x'-x_1)(x'-x_2)(x'-x_5) \dots}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_5) \dots}$$

$$X_1 = \frac{(x'-x)(x'-x_2)(x'-x_5) \dots}{(x_1-x)(x_1-x_2)(x_1-x_5) \dots}$$

$$X_2 = \frac{(x'-x)(x'-x_1)(x'-x_5) \dots}{(x_2-x)(x_2-x_1)(x_2-x_5) \dots}$$

Prawo, które w układaniu tych ilości zachować należy, jest najprostsze; każdej z nich licznik i mianownik mają tyle mnożników, ile jest ilości x, x_1, x_2 , i t. d. mniej jedną; a uczyniwszy w nich przypuszczenia wyżej wskazane, nie tylko przekonamy się, że one czynią zadość danemu pytaniu, ale nadto obaczymy, jak można było przewidzieć, że mu zadość uczynią; mamy więc ten nowy wzór interpolacji

$$u' = \frac{(x' - x_1)(x' - x_2)(x' - x_3) \dots}{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots} u + \frac{(x' - x)(x' - x_2)(x' - x_3) \dots}{(x_1 - x)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots} u_1 + \frac{(x' - x)(x' - x_1)(x' - x_3) \dots}{(x_2 - x)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots} u_2 + \text{i t. d.}$$

bardzo wygodny w praktyce, ponieważ można rachować każdy wyraz, za pomocą logarytmów. Łatwo moglibyśmy sprowadzić ten wzór do postaci wzoru danego pod liczbą 385, lub pod liczbą 381; dla tego też nad tém zastanawiać się nie będziemy.

386. Jasno tu widzieć możemy, iż zadanie interpolacji jest nieoznaczone, gdy nie jest oznaczony kształt funkcji mającej wyrażać ogólny wyraz liczb danych.

Jakoż same jedne warunki, którym ulegają ilości nieznane X, X_1, X_2 , i t. d. mogą być zaspokojone przez funkcye zupełnie odmienne od funkcyj, które Lagranż obrał.

Znajdujemy zaraz wyrażenie bardzo proste

$$\text{wst } m(x' - x_1) \text{wst } n(x' - x_2) \text{wst } p(x' - x_3) \text{ i t. d.,}$$

które ginie, gdy

$$x' = x_1, \quad x' = x_2, \quad x' = x_3, \quad \text{i t. d.,}$$

jakiemkolwiek byłyby liczby m, n, p , i t. d.; więc można założyć zrównanie

$$\bar{X} = \frac{\text{wst } m(x - x_1) \text{wst } n(x - x_2) \text{wst } p(x - x_3)}{\text{wst } m(x - x_1) \text{wst } n(x - x_2) \text{wst } p(x - x_3)} \text{ i t. d.,}$$

którego druga strona sprowadza się do jedności, gdy $x' = x$; podług tego wzoru utworzymy łatwo wartości ilości X_1, X_2 , i t. d., w każdej z nich będziemy mogli wziąć za współczynniki m, n, p , i t. d., takie liczby, jakie zechcemy.

Jeżeli takowe wyrażenia zgadzają się z wyrażeniami liczby poprzedzającej co do wartości ilości x' zawartych w szeregu x, x_1, x_2 , i t. d., różnią się znacznie w przestrzeniach między temi wartościami, skoro łuki nie są dość małe, iżby widocznie były do swoich wstaw proporcjonalnemi; zamiast wstaw można podstawić styczne, a warunki poprzedzające będą jeszcze spełnione.

387. Wzory interpolacyi bardzo pożytecznie stosują się do oznaczania przez przybliżenie całki $\int X dx$ czyli kwadratury linii krzywych. Najpierwszém wyobrażeniem, które się nastreściło w tym celu, było podstawienie za linią krzywą daną, linii krzywej parabolicznej, któraby przez pewną liczbę punktów linii pierwszej przechodziła, widoczną jest rzeczą, iż tém większa będzie dokładność, im te punkta będą liczniejsze i bliżej siebie położone.

Biorąc wzór

$$u' = a + \beta x' + \gamma x'^2 + \text{i t. d.},$$

dla wyrażenia przystawy linii parabolicznej, powierzchnia tej linii krzywej będzie wyrażona przez

$$\int u' dx' = \frac{ax'}{1} + \frac{\beta x'^2}{2} + \frac{\gamma x'^3}{3} + \text{i t. d.} + \text{stała};$$

współczynniki α, β, γ , i t. d., wyprowadzą się bez trudności z rozwinięcia wyrażenia u , którego zechcemy użyć.

Jeżeli użyjemy wyrażenia z liczby 381, i w niem uczynimy $\frac{h'}{h} = x'$; zamieni się ono na

$$u = u + \frac{x' \Delta u}{1} + \frac{x'(x'-1) \Delta^2 u}{1.2} + \frac{x'(x'-1)(x'-2) \Delta^3 u}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

należy z tego wyrażenia wziąć tyle wyrazów, ile jest w poprzedzającym, to jest tyle, ile jest punktów, przez które linija krzywa paraboliczna ma być oznaczona.

Przypuścimy że takowych punktów jest trzy, więc ze wzoru poprzedzającego weźmiemy trzy tylko początkowe wyrazy, i porządkując je według potęg ilości x' , będą ilości

$$\alpha = u, \quad \beta = \Delta u - \frac{1}{2} \Delta^2 u, \quad \gamma = \frac{1}{2} \Delta^2 u,$$

które zależą będą od trzech tylko przystaw następnych u, u_1, u_2 , odpowiadających wartościom

$$h' = 0, \quad h' = h, \quad h' = 2h, \quad \text{czyli } x' = 0, \quad x' = 1, \quad x' = 2,$$

a jeżeli pierwszą i ostatnią wartość weźmiemy za granicę wyrażenia $\int u' dx'$, wartość tego wyrażenia będzie

$$2u + 2(\Delta u - \frac{1}{2} \Delta^2 u) + \frac{4}{3} \Delta^2 u = 2(u + \Delta u + \frac{1}{6} \Delta^2 u).$$

W tym przypadku, u' byłoby przystawą paraboli QR (fig. 54) przechodzącej przez trzy punkta linii krzywej założonej DE , a $\int u' dx'$ powierzchnią odcinka tej paraboli zawartego między pierwszą przystawą PM a trzecią $P_2 M_2$.

W ogólności ta parabola QR na przemiany będzie padała wewnątrz i zewnątrz danej linii krzywej, i wzajemnie; tak iż powierzchnia jej odcinka w jednej części będzie większą w drugiej mniejsza od powierzchni odpowiedniego odcinka w linii krzywej danej DE ; a wtedy w wypadku całkowitym będzie się mogło uczynić nagrodzenie mniej więcej przybliżone między temi różnicami.

Wzór poprzedzający staje się symetryczniejszym, gdy na miejscu różnic $\Delta u, \Delta^2 u$, podstawimy ich wartości

$$u_1 - u, \quad \text{ i } \quad u_2 - 2u_1 + u \quad (377);$$

po uproszczeniu otrzymamy

$$\frac{1}{6}(u + 4u_1 + u_2),$$

Jeżeli także wyobrazimy, że nowa parabola przechodzi przez punkta M_2, M_3, M_4 , i tak dalej, i że dodajemy powierzchnie każdego z jej odcinków, będzie można zająć część linii krzywej tak wielką, jak zechcemy, a ostatnią przystawę wyrażając przez u_m , gdzie m jest liczbą parzystą, będziemy mieli

$$\frac{1}{5}(u+4u_1+u_2)+\frac{1}{5}(u_2+4u_3+u_4)\dots+\frac{1}{5}(u_{m-2}+4u_{m-1}+u_m) \\ =\frac{1}{5}(u+u_m)+\frac{2}{5}(u_2+u_4\dots+u_{m-2})+\frac{4}{5}(u_1+u_3\dots+u_{m-1}).$$

Ten wypadek kształtu dość składowy, zajmując tylko linie, które na figurze mogą być mierzone, może służyć do ocenienia powierzchni zawartych linijami krzywymi, których nie mamy zrównania, jestto korzyść, której nie daje sposób pod liczbą 233 wyłożony. W reszcie w jednym i drugim sposobie, należy osobno rachować części zawarte między dwoma punktami szczególnymi, i pomnożyć liczbę przystaw w tych częściach, w których zmiana krzywości jest znaczniejsza.

O podobieństwie różnic z potęgami.

388. Rachunek różniczkowy i rachunek różnic, lubo od siebie bardzo się różnią, jak się niżej okaże, mają atoli wielki między sobą związek i mogą być jeden do drugiego zastosowany. Rachunek różniczkowy uważany pod tym względem, pod jakim wystawił go nam Leibniz, lub też przez teorią granic, staje się przypadkiem szczególnym drugiego; można to było postrzec na początku tego dzieła; na potwierdzenie tego, wyprowadźmy wzór Tajlora ze zrównania

$$u_n = u + \frac{n}{1} \Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^3 u + \text{i t. d.},$$

wyrażając to zrównanie pod postacią

$$u_n = u + \frac{n \Delta u}{1} + \frac{n(n-1) \Delta^2 u}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2) \Delta^3 u}{1.2.3} + \dots$$

i przypuszczając, że α jest przyrostkiem, którym się powiększa x , gdy funkcyja u zamienia się na $u + \Delta u$, wartość u_n będzie tą wartością, jaką przybiera u , gdy x zamienia się na $x + n\alpha$. Uczyniwszy potem $n\alpha = h$, otrzymamy $\alpha = \frac{h}{n}$, z czego się pokazuje, że α maleje, gdy n wzrasta; a zważając że,

$$n(n-1)\alpha^2 = n^2\alpha^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

$$n(n-1)(n-2)\alpha^3 = n^3\alpha^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right),$$

i t. d.

obaczymy, że te wyrażenia, w przypadku powiększania się n , mają granice, $n^2\alpha^2$, $n^3\alpha^3$, i t. d., stosunki zaś

$$\frac{\Delta u}{\alpha}, \quad \frac{\Delta^2 u}{\alpha^2}, \quad \frac{\Delta^3 u}{\alpha^3}, \quad \text{i t. d.},$$

w tej samej okoliczności, w której α maleje, mają granice

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^3u}{dx^3}, \quad \text{i t. d.};$$

przeto rozwinieniem funkcyi u , gdy x zamienia się na $x + h$ będzie

$$u + \frac{du}{dx}h + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}$$

Tym prawie sposobem Tajlor przyszedł do poprzedzającego wzoru, znanego pod jego nazwiskiem.

Po przyjsciu raz do wzoru Tajlora, teoria analityczna rachunku różniczkowego, żadnej już nam nie wystawia trudności; to więc co poprzedziło, dostatecznie pokazuje, jak on wynika z rachunku różnic.

389. Za pomocą wzoru Tajlora otrzymamy bez trudności rozwinięcie różnic jakiegokolwiek rzędu i jakiegokolwiek funkcyi; mamy naprzód

$$\Delta u = \frac{du}{dx}h + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} \quad \text{i t. d.};$$

aże Δu_1 jest wartością, na którą się zamienia Δu , gdy x zamienia się na $x+h$, idzie zatem, że

$$\Delta u_1 = \Delta u + \frac{d\Delta u}{dx} h + \frac{d^2\Delta u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{i t. d.}$$

a ztąd

$$\Delta^2 u = \frac{d\Delta u}{dx} h + \frac{d^2\Delta u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3\Delta u}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}$$

podobnie znajdziemy

$$\Delta^3 u = \frac{d\Delta^2 u}{dx} h + \frac{d^2\Delta^2 u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{i t. d.}$$

$$\Delta^4 u = \frac{d\Delta^3 u}{dx} h + \text{i t. d.}$$

i t. d.

Wykonawszy rozwinięcia wyżej wskazane, otrzymamy

$$\begin{aligned} \Delta^2 u = & \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{h^2}{1} + \frac{d^3 u}{dx^3} \frac{h^3}{2} + \frac{d^4 u}{dx^4} \frac{h^4}{2.3} + \text{i t. d.} \\ & + \frac{d^5 u}{dx^5} \frac{h^5}{2} + \frac{d^4 u}{dx^4} \frac{h^4}{2.2} + \text{i t. d.} \\ & + \frac{d^4 u}{dx^4} \frac{h^4}{2.3} + \text{i t. d.} \end{aligned}$$

Łatwobyśmy odkryli prawo, według którego postępują wyrazy tego szeregu, lecz do tego przyjdziemy sposobem ogulniejszym za pomocą podobieństwa zachodzącego między różnicowaniem ilości, i podnoszeniem ich do potęg, którego to podobieństwa pierwsze rysy zostały podane pod liczbą 377.

390. Widzieliśmy (27), że

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}$$

będzie więc podług tego wzoru

$$e^{\frac{du}{dx} h} = + \frac{du}{dx} h + \frac{du^2}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{du^3}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}$$

$$e^{\frac{du}{dx}h} - 1 = \frac{du}{dx} \frac{h}{1} + \frac{du^2}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{du^3}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}$$

Jeżeli teraz przeniesiemy wykładniki potęg różniczek du , do cechy d , druga strona poprzedzającego równania stanie się

$$\frac{du}{dx} \frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

i będzie to samo co Δu ; więc wypadnie

$$\Delta u = e^{\frac{du}{dx}h} - 1,$$

pamiętając tylko, w rozwinięciu drugiej strony równania, przenieść do cechy d wykładniki potęg różniczek du .

Najpierwszy Lagranż, zastanawiając się nad poprzedzającym wypadkiem postrzegł, że będzie w ogólności

$$\Delta^n u = \left(e^{\frac{du}{dx}h} - 1 \right)^n,$$

dając zawsze cesze d wykładniki potęg różniczek du . Później uproszczono ten sposób wyrażania, kładąc

$$\Delta u = \left(e^{\frac{d}{dx}h} - 1 \right) u, \quad \Delta^n u = \left(e^{\frac{d}{dx}h} - 1 \right)^n u;$$

bo tym sposobem nie już w rozwinięciu odmieniać nie wypada, lecz należy pamiętać, że równania teraz wyrażone stają się znaczącemi przez rozwinięcie tylko drugiej ich strony, ponieważ litera d wyraża cechę a nie ilość. Oto sposób jakim Laplas dowiodł tego podania.

Jasną jest rzeczą z liczby poprzedzającej, że jakiegolwiek będzie wyrażenie $\Delta^n u$, zawsze mieć powinniśmy

$$\Delta^n u = \frac{d^n u}{dx^n} h^n + A' \frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} h^{n+1} + A'' \frac{d^{n+2} u}{dx^{n+2}} h^{n+2} + \text{i t. d.},$$

gdzie A' , A'' , i t. d. oznaczają współczynniki zależące od samej tylko ilości n . To zrównanie, ponieważ miejsce powinno mieć na każdy kształt funkcji u , a zatem i w tym przypadku, gdy jest $u=e^x$, powinno zachodzić, mamy zaś wtenczas

$$\frac{du}{dx} = \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^3 u}{dx^3} = \text{i t. d.} = e^x,$$

$$\Delta u = e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1), \quad \Delta^2 u = (e^h - 1)(e^{x+h} - e^x) = e^x(e^h - 1)^2,$$

$$\Delta^3 u = e^x(e^h - 1)^3, \quad \dots \quad \Delta^n u = e^x(e^h - 1)^n.$$

Podstawiawszy $e^x(e^h - 1)^n$ za $\Delta^n u$ w pierwszej stronie wyżej napisanego zrównania, a zaś e^x za $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2 u}{dx^2}$, i t. d. w drugiej stronie, otrzymamy

$$(e^h - 1)^n = h^n + A' h^{n+1} + A'' h^{n+2} + \text{i t. d.}$$

z kąd wypada że współczynniki A' , A'' i t. d. powinny być te same co i współczynniki w rozwinięciu ilości $(e^h - 1)^n$, bo przyrostek h powinien zostawać nieoznaczony. Nadto, żadnej nie masz trudności względem współczynników różniczkowych ilości u , bo te wszystkie wyprowadzimy z potęg różniczki du przenosząc jej wykładniki do cechy d .

Ten sam związek zachodzi między potęgami i różnicami w funkcjach o jakiegokolwiek liczbie zmiennych, i podobnymże dowodzi się sposobem.

391. Z $\Delta u = e^{\frac{du}{dx} h} - 1$, wyciągamy $e^{\frac{du}{dx} h} = 1 + \Delta u$; a wzięwszy z obu stron logarytmy, będziemy mieli

$$\frac{du}{dx} h = l(1 + \Delta u).$$

Lagranż przeświadczył się, że to zrównanie byłoby prawdziwem, jeżeliby w rozwinięciu ilości $l(1 + \Delta u)$, prze-

niesione zostały do cechy Δ , wykładniki potęg różnicy Δu ; tym sposobem mielibyśmy

$$\frac{du}{dx}h = \Delta u - \frac{1}{2}\Delta^2 u + \frac{1}{6}\Delta^3 u - \frac{1}{24}\Delta^4 u + \text{i t. d.} \quad (29).$$

Nie zatrzymując się nad dowodzeniem tego szczególnego przypadku, pokażę iż w ogólności będzie

$$\frac{d^n u}{dx^n} h^n = \{1(1 + \Delta u)\}^n,$$

zamieniając Δu^2 , Δu^3 , i t. d., na $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, i t. d.,

$$\text{albo} \quad \frac{d^n u}{dx^n} h^n = \{1(1 + \Delta)\}^n u$$

nie zgoda w rozwinięciu nie odmieniając. Jasną jest, że w tém pytaniu idzie o wyznaczenie współczynników $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2 u}{dx^2}$ i t. d. przez funkcją różnic następných ilości u , i że do tego celu mamy zrównania kształtu

$$\Delta^n u = \frac{d^n u}{dx^n} h^n + A' \frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} h^{n+1} + A'' \frac{d^{n+2} u}{dx^{n+2}} h^{n+2} + \text{i t. d.},$$

$$\Delta^{n+1} u = \frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} h^{n+1} + A' \frac{d^{n+2} u}{dx^{n+2}} h^{n+2} + \text{i t. d.},$$

$$\Delta^{n+2} u = \frac{d^{n+2} u}{dx^{n+2}} h^{n+2} + \text{i t. d.},$$

gdzie współczynniki różniczkowe nie postępują wyżej jak do pierwszego stopnia, więc można uczynić

$$\frac{d^n u}{dx^n} h^n = \Delta^n u + B' \Delta^{n+1} u + B'' \Delta^{n+2} u + B''' \Delta^{n+3} u + \text{i t. d.}$$

Łatwobyśmy wynaleźli wartości współczynników nieznaných B' , B'' , B''' , i t. d. przez następne rugowanie ilości

$$\frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} h^{n+1}, \quad \frac{d^{n+2} u}{dx^{n+2}} h^{n+2}, \quad \text{i t. d.};$$

lecz że zrównanie przypuszczone powinno służyć zaw-

sze, jakiebykolwiek było u , więc i wtenczas gdy jest $u=e^x$, co daje.

$$\frac{d^i u}{dx^i} = e^x, \quad \Delta^i u = e^x (e^h - 1)^i,$$

jakabykolwiek była wielkość liczby całej i ; zatem otrzymamy

$$h^n = (e^h - 1)^n + B'(e^h - 1)^{n+1} + B''(e^h - 1)^{n+2} + \text{i t. d.}$$

Zeby widocznie okazać tożsamość dwóch stron tego zrównania, dosyć jest uważać, że

$$h^n = \{1(1 + e^h - 1)\}^n,$$

bo rozwinięcie $1(1 + e^h - 1)$, uszykowane według potęg ilości $e^h - 1$, które jest

$$e^h - 1 = \frac{1}{2}(e^h - 1)^2 + \frac{1}{3}(e^h - 1)^3 - \frac{1}{4}(e^h - 1)^4 + \text{i t. d.},$$

podniesione do potęgi n , będzie mogło być porównane z szeregiem

$$(e^h - 1)^n + B'(e^h - 1)^{n+1} + B''(e^h - 1)^{n+2} + \text{i t. d.},$$

którego współczynniki liczbowe będą tym sposobem wyznaczone. Jeżeli napiszemy Δu za $e^h - 1$, a zaś $\frac{d^n u}{dx^n} h^n$ za h^n otrzymamy zrównanie wyżej założone

$$\frac{d^n u}{dx^n} h^n = \{1(1 + \Delta)\}^n u$$

Dla skrócenia uczyniwszy $e^h - 1 = \alpha$, i wyrażenie $(\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{4}\alpha^4 - \text{i t. d.})^n$, rozwiniawszy według potęg ilości α sposobem pod liczbą 54 podanym, otrzymamy wartości ilości B' B'' i t. d.

392. Wzór z liczby 381, może także być wyprowadzonym ze wzoru Tajlora, który staje się wzorem interpolacyi, gdy w nim na miejscu współczynników różniczkowych położymy ich wyrażenia przez funkcją różnic, wyprowadzone z liczby poprzedzającej.

Jakoż zrównanie

$$\frac{d^i u}{dx^i} h^i = \Delta^i u + A' \Delta^{i+1} u + A'' \Delta^{i+2} u + A''' \Delta^{i+3} u + \text{i t. d.}$$

daje

$$\frac{d^i u}{dx^i} = \frac{1}{h^i} (\Delta^i u + A' \Delta^{i+1} u + A'' \Delta^{i+2} u + \text{i t. d.})$$

Jeżelibyśmy z tego zrównania kolejną wyciągali wartości $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2 u}{dx^2}$, $\frac{d^3 u}{dx^3}$, i t. d. i podstawiali je w szeregu

$$u + \frac{du}{dx} \frac{h'}{1} + \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{h'^2}{1.2} + \frac{d^3 u}{dx^3} \frac{h'^3}{1.2.3} + \text{i t. d.}$$

który jest rozwinięciem funkcji u , gdy w niej ilość x zamienia się na $x+h$, otrzymalibyśmy wypadek pod kształtem

$$u + \frac{h'}{h} \Delta u + \left(B' \frac{h'}{h} + B'' \frac{h'^2}{h^2} \right) \Delta^2 u + \left(B'_1 \frac{h'}{h} + B''_1 \frac{h'^2}{h^2} + B'''_1 \frac{h'^3}{h^3} \right) \Delta^3 u + \text{i t. d.},$$

gdzie B' , B'' , B'_1 , B''_1 , B'''_1 , i t. d. równie jak A' , A'' , i t. d. wyrażają współczynniki liczbowe niezależące od h ; a oznaczywszy przez $\Delta' u$ przyrostek funkcji u w przejściu jej od x do $x+h'$, wypadnie

$$u + \Delta' u = u + \frac{h'}{h} \Delta u + \left(B' \frac{h'}{h} + B'' \frac{h'^2}{h^2} \right) \Delta^2 u + \text{i t. d.}$$

A że to zrównanie powinno służyć na jakąkolwiek wartość ilości u , a tém samém i w tym przypadku, gdy jest $u=e^x$, i wtenczas zamienia się na

$$e^{h'} = 1 + \frac{h'}{h} (e^h - 1) + \left(B' \frac{h'}{h} + B'' \frac{h'^2}{h^2} \right) (e^h - 1)^2 + \text{i t. d.},$$

pierwszą stronę tego zrównania przez rozwinięcie przywiedziemy do tego samego kształtu, jaki ma druga, uwa-

zając że $e^{h'} = [1 + (e^h - 1)]^{\frac{h'}{h}}$; a że w wyższém rozwinięciu kładąc Δu , $\Delta^2 u$, i t. d. za $e^h - 1$, $(e^h - 1)^2$, i t. d., wypadamy znowu na rozwinięcie ilości $u + \Delta' u$, idzie zatem, że

$$u + \Delta' u = (1 + \Delta u)^{\frac{h'}{h}} u.$$

Wypadek ten równie prosty jak piękny, podany był przez Lagranża jako wniosek wynikający z podobieństwa zachodzącego między różnicami i potęgami.

Jakoż wypada ze zrównania $e^{\frac{du}{dx} h} = 1 + \Delta u$ (391), że $e^{\frac{du}{dx} h'} = (1 + \Delta u)^{\frac{h'}{h}}$, z kąd się otrzymuje natychmiast $1 + \Delta' u = (1 + \Delta u)^{\frac{h'}{h}}$, gdyż $e^{\frac{du}{dx} h'} = 1 + \Delta' u$.

Rozwijając drugą stronę zrównania, sposobem wyżej wskazanym, i wykładniki potęg różnicy Δu przenosząc do cechy Δ znajdziemy, jak wyżej,

$$\Delta' u = \frac{h'}{h} \Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h \cdot 2h} \Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h \cdot 2h \cdot 3h} \Delta^3 u + \text{i t. d. } (*)$$

O odwrótnym rachunku różnic {co do wyrażnych funkcyj o jednej tylko ilości zmiennej.

395. Rachunek odwrótny różnic jest tém względem rachunku prostego, czém rachunek całkowy względem rachunku różniczkowego: jego celem jest wrócić się od

(*) Te ciekawe podobieństwa potęg z różnicami i różniczkami są obszernie wyłożone w trzecim tomie *Traité du Calcul* in 4to. Umieszczone tam są rozprawy w tej materji znajdujące się w *Transactions philosophiques*, i niektóre uwagi Herszela (*Herschel*) znajdujące się w dodatku do tłumaczenia tego początkowego traktatu, drugiego wydania, które spólnie z PP. *Babbage* i *Peacock* wypracował.

różnic do funkcji pierwotnych. Zastanawiać się na-
przód będziemy nad tym przypadkiem, gdy różnice
są dane przez zmienną niezależną, to jest, gdy do wy-
znaczenia funkcji u_x mamy równanie tego kształtu
 $\Delta' u_x = f(x)$, gdzie przyrostek ilości x jest stały i dany;
wyrażać go będę przez h .

Niech będzie $r=1$, z ką $\Delta u_x = f(x)$; dla oznaczenia
działania, przez które powraca się od Δu_x do u_x , uży-
wamy cechy Σ , a przeto piszemy

$$\Sigma \Delta u_x = u_x = \Sigma f(x),$$

gdzie cechy Δ i Σ wskazują działania przeciwne ni-
szące się wzajemnie, gdy je uskuteczniamy jedno po
drugim na tej samej funkcji.

Działanie wskazane przez znak Σ nazywa się całko-
waniem; albowiem $\Sigma f(x)$ oznacza prawdziwą sumę.
Jakoż, jeżeli zbierzemy w jedną sumę równania (1)
z pod liczby 374, wypadnie

$$u_n = u + \Delta u + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \dots + \Delta u_{n-1};$$

a jeżeli wartość ilości u_x odpowiadającą ilości $x=a$,
wyrazimy przez u , będziemy mieli na wartość jaką-
kolwiek np. $x=a+nh$,

$$\Sigma f(x) = u + f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+(n-1)h)$$

To wyrażenie, któreby się powiększyło funkcją
 $f(a+nh)$, czyli $f(x)$, jeżelibyśmy do ostatniej wartości
nadawanej ilości x , dodali h , a które zatem ma za ró-
żnicę $f(x)$, składa się przeto z summy wszystkich war-
tości, które funkcja $f(x)$ bierze od $x=a$, włącznie aż
do $x=a+(n-1)h$, i nadto z pierwszej wartości ilości
 u , która wartość jest nieoznaczona, i która tu zastępu-
je miejsce ilości stałej dowolnej, którą przejście od u_x
do Δu_x mogło zagubić.

Widoczną jest rzeczą, iż dla powrócenia od $\Delta' u_x = f(x)$
do u_x , należy odbyć tyle całkowań, ile było różnicowań,

co wyrazilibyśmy w ten sposób

$$\Sigma^r \Delta^r u_x = u_x = \Sigma^r f(x).$$

Do każdego z tych działań należałoby dodać jedną ilość stałą, co można także postrzec uważając, że zrównanie $\Delta^r u_x = f(x)$, ponieważ daje różnice funkcji zaczynając tylko rząd r , zostawuje r ilości nieoznaczonych

$$u, \Delta u, \Delta^2 u, \dots \dots \Delta^{r-1} u,$$

a zatem r wyrazów pierwszych wyrażenia

$$u_n = u + \frac{n}{1} \Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 u + \text{i t. d.} \quad (376),$$

za pomocą którego od wartości u odpowiadającej ilości $x=a$, przechodzimy do wartości stosującej się do ilości $x=a+nh$.

394. Więc widzimy że tu, równie jak w różniczkach, całkowaniem wprowadza liczbę stałych dowolnych równą wykładnikowi rzędu; lecz z tą różnicą, że ilości, które przez różniczkowanie nikną, są zupełnie stałe, gdy w rachunku różnic, ilości któreby zginęły, dość jest, ażeby też same zostawały gdy przechodzimy od x do $x+h$, i takie się znajdują; bo widoczną jest rzeczą, iż wyrażenie

$$\varphi\left(\text{wst } \frac{2\pi x}{h}, \text{ dost } \frac{2\pi x}{h}\right),$$

które wtedy staje się

$$\varphi\left\{\text{wst } \left(\frac{2\pi x}{h} + 2\pi\right), \text{ dost } \left(\frac{2\pi x}{h} + 2\pi\right)\right\}$$

jest tej własności, jakkolwiek byłby kształt funkcji φ .

Wprowadzamy razem wstawę i dostawę w funkcję, iżby ona stała się tąż samą w przejściu tylko od x do $x+h$, coby nie miało miejsca w funkcji zamykającej jedną tylko wstawę lub dostawę, ponieważ

$$\text{wst} \frac{2\pi x}{h} = \text{wst} \frac{2\pi(\frac{1}{2}h - x)}{h} = \text{wst} \left(\pi - \frac{2\pi x}{h} \right),$$

$$\text{dost} \frac{2\pi x}{h} = \text{dost} \frac{2\pi(h - x)}{h} = \text{dost} \left(2\pi - \frac{2\pi x}{h} \right);$$

w dalszym ciągu podamy wykreślenie geometryczne tych funkcji.

395. Stosowną jest rzeczą uważać, że biorąc całkę każdej strony równania

$$\Delta u + \Delta v - \Delta w = \Delta(u + v - w) \quad (375),$$

wypada

$$\Sigma(\Delta u + \Delta v - \Delta w) = u + v - w = \Sigma \Delta u + \Sigma \Delta v - \Sigma \Delta w,$$

co sprowadza całkowanie różnic wielowyrazowych do całkowania różnic jednowyrazowych.

Również równanie

$$a\Delta u = \Delta au \quad \text{daje} \quad \Sigma a\Delta u = au = a\Sigma \Delta u,$$

z czego postrzegamy że ilości stałe, można, jak chcemy, położyć przed znakiem Σ , lub po tym znaku.

396. Gdy funkcyja $f(x)$ jest wymierna i cała, wyrażenie ilości u_n będąc skończone, daje tej funkcyi całkę zupełną. Jakoż jeżeli m oznacza rząd, w którym różnice tej funkcyi są stałe (379), ponieważ z funkcyi $\Delta^r u_x = f(x)$, wypada $\Delta^m f(x) = \Delta^{r+m} u_x$, i ta ostatnia różnica jest stała, mamy natychmiast

$$u_n = u + n\Delta u + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 u + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-r-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r+m)} \Delta^{r+m} u,$$

gdzie u , Δu , $\Delta^2 u$, i t. d. odpowiadają ilości $x=a$; a jeżeli uczynimy $a + nh = x$, ilość u_n stanie się u_x .

Kładąc dla skrócenia $f(x) = v_x$, wypadnie

$$\Delta^r u = v; \quad \Delta^{r+1} u = \Delta v; \quad \dots \quad \Delta^{r+m} u = \Delta^m v;$$

ilość u i jej różnice aż do rzędu $r-1$ włącznie zostają dowolne, jakośmy to już widzieli.

Niech będzie $np.$

$$\Delta u_x = x^3 - 5x^2 + 6x - 1,$$

a przyrostek ilości x jest 1; będziemy mieli $r=1$, $m=3$, $h=1$, a założywszy $a=0$, znajdziemy

$$v=-1, \Delta v=2, \Delta^2 v=-4, \Delta^3 v=6, \Delta^4 v=0 \quad (379),$$

$$\begin{aligned} \Sigma(x^3 - 5x^2 + 6x - 1) &= u_x = u - 1 \cdot \frac{x}{1} + 2 \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} - \\ &- 4 \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 6 \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \\ &= \frac{3x^4 - 26x^3 + 69x^2 - 58x}{12} + \text{stała.} \end{aligned}$$

Ogólny wzór tego artykułu obejmuje także przypadek, w którym wartość dana na Δu_x byłaby stałą; mielibyśmy wtedy $\Delta^2 u$ albo $\Delta v=0$.

Widzimy także bezśrednie, że

$$a = \frac{ax + ah - ax}{h} = \frac{\Delta ax}{h},$$

po scałkowaniu obu stron daje

$$\Sigma a = \frac{ax}{h} + \text{stała},$$

co wychodzi na

$$\Sigma a = a \Sigma 1 = x^0.$$

397. Chociaż wzór poprzedzający wystarcza na wszystkie funkcyje wymierne i całe, jednak stosowną jest rzeczą dać poznać niektóre inne wyrażenia, które mają korzyści sobie właściwe, i dla zaczęcia od najprostszych, zatrudnimy się zaraz mnogościami złożonemi z mnożników równoróżnicowych.

Niech będzie

$$u = x(x+h)(x+2h) \dots (x+(m-1)h);$$

wziąwszy różnicę, otrzymamy

$$\begin{aligned} \Delta u &= (x+h)(x+2h)(x+3h) \dots (x+mh) - \\ &\quad - x(x+h)(x+2h) \dots [x+(m-1)h] \\ &= (x+h)(x+2h) \dots [x+(m-1)h]mh; \end{aligned}$$

aże $\frac{\Delta u}{mh} = \frac{\Sigma \Delta u}{mh} = \frac{u}{mh}$, zatem

$$\begin{aligned} &\Sigma (x+h)(x+2h) \dots [x+(m-1)h] \\ &= \frac{x(x+h)(x+2h) \dots [x+(m-1)h]}{mh} + \text{stała.} \end{aligned}$$

Położywszy teraz $x-h$, za x , $m+1$ za m , będziemy mieli

$$\begin{aligned} &\Sigma x(x+h)(x+2h) \dots (x+(m-1)h) \\ &= \frac{(x-h)x(x+h)(x+2h) \dots [x+(m-1)h]}{(m+1)h}. \end{aligned}$$

To nam pokazuje że w całe liczba mnożników jest większa jedną jednością od liczby mnożników w różnicy, i że dzielnikiem jest $m+1$, w czém wielka podobność zachodzi ze wzorem $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ (167).

Możemy także zcałkować ułamek

$$u = \frac{1}{x(x+h)(x+2h) \dots [x+(m-1)h]},$$

gdyż różnicując go, otrzymamy

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{(x+h)(x+2h) \dots (x+mh)} - \frac{1}{x(x+h)(x+2h) \dots [x+(m-1)h]} \\ &= \frac{-mh}{x(x+h)(x+2h) \dots (x+mh)}; \end{aligned}$$

wracając znowu do całek i kładąc za u jego wartość, otrzymamy

$$\sum \frac{-1}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+mh)} = \frac{u}{mh} = \frac{1}{mhx(x+h)(x+2h)\dots[x+(m-1)h]}$$

a położywszy $m-1$ za m , liczba mnożników w mianowniku ilości zajętej znakiem Σ będzie przywiedzioną do m , tak więc będziemy mieli

$$\sum \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+(m-1)h)} = \frac{-1}{(m-1)hx(x+h)(x+2h)\dots[x+(m-1)h]}$$

398. Poprzedzające wzory mogą służyć także do całkowania funkcyi kształtu

$$Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \text{ i t. d.,}$$

bo takie funkcyje dają się przerobić na mnogości, których mnożniki mają różnice stateczne. Na pokazanie tego, weźmy przykład bardzo prosty: x^5 , i uczynimy

$$x^5 = (x+h)(x+2h)(x+3h) + A(x+h)(x+2h) + B(x+h) + C,$$

gdzie h wyraża przyrostek ilości x . Rozwinawszy drugą stronę i uszykowawszy według potęg ilości x , otrzymamy

$$\begin{aligned} x^5 &= x^5 + 6hx^2 + 11h^2x + 6h^3 \\ &\quad + Ax^2 + 3Ahx + 2Ah^2 \\ &\quad + Bx + Bh \\ &\quad + C; \end{aligned}$$

a porównyując między sobą wyrazy przy tejże samej potędze ilości x , utworzymy zrównania

$$6h + A = 0$$

$$11h^2 + 3Ah + B = 0$$

$$6h^3 + 2Ah^2 + Bh + C = 0,$$

złąd

$$A = -6h, \quad B = 7h^2, \quad C = -h^3,$$

a zatem

$x^5 = (x+h)(x+2h)(x+3h) - 6h(x+h)(x+2h) + 7h^2(x+h) - h^5$,
co daje, na mocy liczby poprzedzającej

$$\Sigma x^5 = \frac{1}{4h} x(x+h)(x+2h)(x+3h) - 2x(x+h)(x+2h) + \frac{7}{2}hx(x+h) - h^2x + \text{stała},$$

ponieważ $\Sigma(-h^5) = -h^5 \Sigma 1 = -h^2x$ (596)

399. Gdy $u = x^{m+1}$, a m jest liczbą całą, mamy wtenczas

$$\Delta u = \frac{m+1}{1} x^m h + \frac{(m+1)m}{1.2} x^{m-1} h^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} x^{m-2} h^3 + \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4} x^{m-3} h^4 + h^{m+1} x^0.$$

Całkując każdy z osobna wyraz obu stron równania, podstawując w pierwszej stronie x^{m+1} za u , a kładąc przed znakiem Σ współczynniki stałe, otrzymamy

$$x^{m+1} = \frac{m+1}{1} h \Sigma x^m + \frac{(m+1)m}{1.2} h^2 \Sigma x^{m-1} + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} h^3 \Sigma x^{m-2} \dots + h^{m+1} \Sigma x^0.$$

To równanie dałoby nam poznać całkę Σx^m , gdyby wiadome były Σx^{m-1} , Σx^{m-2} , ..., Σx^0 , wyciągnęlibyśmy bowiem z niego

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \left\{ \frac{m}{1.2} h \Sigma x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2.3} h^2 \Sigma x^{m-2} \dots + \frac{1}{m+1} h^m \Sigma x^0 \right\}.$$

Jeżeli w tém ostatniém równaniu położymy z kolei $m-1$, $m-2$, $m-3$, i t. d. za m , utworzymy wyrażenia ilości Σx^{m-1} , Σx^{m-2} , Σx^{m-3} , i t. d., które zależeć będą

od całek w których x będzie w potęgde niższej względem pierwszych. Można też otrzymać te wartości, zaczynając od najniższej potęgi i wracając wstecz do wartości szukanej; położywszy $m=0$, będzie $\Sigma x^0 = \frac{x}{h}$, jak pod liczb. 396, bo wzór ogólny powinien zawierać tylko liczbę m wyrazów zajętych znakiem Σ .

Położywszy potem $m=1$, $m=2$, $m=3$, i t. d., i podstawivszy z kolei za Σx^0 , Σx^1 , Σx^2 , i t. d. wartości ich wynalezione, utworzymy następującą tablicę:

$$\Sigma x^0 = \frac{x}{h},$$

$$\Sigma x = \frac{1}{2} \frac{x^2}{h} - \frac{1}{2} x,$$

$$\Sigma x^2 = \frac{1}{3} \frac{x^3}{h} - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2.3} xh,$$

$$\Sigma x^3 = \frac{1}{4} \frac{x^4}{h} - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2.2} x^2 h^2,$$

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5} \frac{x^5}{h} - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3} x^3 h - \frac{1}{5.6} x^2 h^2,$$

$$\Sigma x^5 = \frac{1}{6} \frac{x^6}{h} - \frac{1}{2} x^5 + \frac{5}{2.6} x^4 h - \frac{1}{2.6} x^3 h^2,$$

i t. d.

gdzie dla skrócenia opuściliśmy ilość stałą dowolną, która w każdym wypadku znajdować się powinna.

Nie szukając dalszych całek można założyć w ogólności

$$\Sigma x^m = Ax^{m+1} + Bx^m + Cx^{m-1} + Dx^{m-2} + \text{i t. d.},$$

a wzięwszy różnicę pierwszą każdej strony zrównania, otrzymamy

$$x^m = A \frac{(x+1)}{1} x^m h$$

$$\begin{aligned}
 &+ A \frac{(m+1)m}{1.2} x^{m-1} h^2 + A \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} x^{m-2} h^3 + \text{it.d.} \\
 &+ B \frac{m}{1} x^{m-1} h + B \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} h^2 + \text{it.d.} \\
 &+ C \frac{(m-1)}{1} x^{m-2} h + \text{it.d.} \\
 &+ \text{it.d.}
 \end{aligned}$$

porównyując z sobą wyrazy, które są mnożone przez tęż samą potęgę ilości x , otrzymamy między współczynnikami A , B , C , D , it. d. następujące zrównania

$$A = \frac{1}{(m+1)h},$$

$$B = -A \frac{(m+1)h}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$C = -A \frac{(m+1)mh^2}{2.3} - B \frac{mh}{2} = \frac{mh}{5.4},$$

$$D = -A \frac{(m+1)m(m-1)h^3}{2.3.4} - B \frac{m(m-1)h^2}{2.3} - C \frac{(m-1)h}{2} = 0,$$

it. d.

za pomocą których łatwo wyprowadzimy jedno z drugich współczynników w wyrażeniu Σx^m , jakibykolwiek był wykładnik m . Wynajdując wprost dwanaście pierwszych wyrazów, otrzymamy wzór

$$\begin{aligned}
 \Sigma x^m &= \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \frac{1}{2} x^m + \frac{1}{2.3} \frac{mh}{2} x^{m-1} \\
 &- \frac{1}{6.5} \frac{m(m-1)(m-2)h^3}{2.3.4} x^{m-3} \\
 &+ \frac{1}{6.7} \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)h^5}{2.3.4.5.6} x^{m-5} \\
 &- \frac{1}{10.9} \frac{m(m-1) \dots (m-6)h^7}{2.3 \dots 7.8} x^{m-7} \\
 &+ \frac{1}{6.11} \frac{m(m-1) \dots (m-8)h^9}{2.3 \dots 10} x^{m-9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{691}{210.13} \frac{m(m-1) \dots (m-10) h^{11}}{2.3 \dots 12} x^{m-11} \\
& + \frac{35}{2.15} \frac{m(m-1) \dots (m-12) h^{15}}{2.3 \dots 14} x^{m-15} \\
& - \frac{3617}{50.17} \frac{m(m-1) \dots (m-14) h^{15}}{2.3 \dots 16} x^{m-15} \\
& + \frac{43867}{42.19} \frac{m(m-1) \dots (m-16) h^{17}}{2.3 \dots 18} x^{m-17} \\
& - \frac{1222277}{110.21} \frac{m(m-1) \dots (m-18) h^{19}}{2.3 \dots 20} x^{m-19} \\
& \text{i t. d.} \qquad \qquad \qquad + \text{stała,}
\end{aligned}$$

w tym wzorze godne są uwagi współczynniki wyrażone przez liczby, bo często się przydarzają w teorii szeregów.

Przed zakończeniem tego artykułu nie od rzeczy będzie uważać, że jeżeli rozmnożymy Σx^m przez h , i napiszemy ten przyrostek pod znakiem Σ , otrzymamy równanie

$$\Sigma x^m h = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2} x^m h + \frac{1}{2} \frac{m h^2}{2.3} x^{m-1} - \text{i t. d.} + \text{stała,}$$

którego druga strona ma za granicę $\frac{x^{m+1}}{m+1} + \text{stała}$, bo gdy h niknie, wtenczas $\Sigma x^m h$ zamienia się na $\int x^m dx$, podług tego cośmy widzieli pod liczb. 236.

400. To co poprzedziło podaje nam sposób całkowania wszystkich funkcij algebraicznych, wymiernych i całkowitych wtenczas, gdy ilość zmienna niezależna powiększa się przyrostkiem stałym. Weźmy np. funkcją.

$$Ax^5 + Bx^2 + Cx + D;$$

ponieważ

$$\Sigma (Ax^5 + Bx^2 + Cx + D) = A\Sigma x^5 + B\Sigma x^2 + C\Sigma x + D\Sigma x^0,$$

zatem kładąc za Σx^5 , Σx^2 , Σx , Σx^0 , ich wartości, otrzymamy

$$\Sigma(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = \frac{A}{4h} x^4 - \frac{3Ah - 2B}{6h} x^3 + \frac{Ah^2 - 2Bh + 2C}{4h} x^2 + \frac{Bh^2 - 3Ch + 6D}{6h} x + \text{stała}.$$

401. Co się tycze całkowania funkcyj przestępnych, przestanę tu na funkcjach wykładniczych i kołowych. Co do pierwszych mamy

złąd wypada

$$\Delta a^x = a^x(a^h - 1),$$

$$a^x = \Sigma a^x(a^h - 1),$$

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^h - 1}.$$

402. Względem funkcyj kołowych, mamy
1^od Zrównanie

$$\text{dost } A - \text{dost } B = -2 \text{wst } \frac{1}{2}h(A - B) \text{wst } \frac{1}{2}h(A + B),$$

co daje

$$\Delta \text{dost } x = \text{dost } (x + h) - \text{dost } x = -2 \text{wst } \frac{1}{2}h \text{wst } (x + \frac{1}{2}h),$$

złąd wyciągniemy, pisząc $x - \frac{1}{2}h$ za x ,

$$\text{wst}(x + \frac{1}{2}h) = -\frac{\Delta \text{dost } x}{2 \text{wst } \frac{1}{2}h}, \quad \text{wst } x = -\frac{\Delta \text{dost } (x - \frac{1}{2}h)}{2 \text{wst } \frac{1}{2}h}.$$

biorąc potem całkę z każdej strony ostatniego zrównania, otrzymamy

$$\Sigma \text{wst } x = -\frac{\text{dost}(x - \frac{1}{2}h)}{2 \text{wst } \frac{1}{2}h} + \text{stała}.$$

2^oe Zrównanie

$$\text{wst } A - \text{wst } B = 2 \text{wst } \frac{1}{2}h(A - B) \text{dost } \frac{1}{2}h(A + B),$$

daje

$$\Delta \text{wst } x = \text{wst}(x + h) - \text{wst } x = 2 \text{wst } \frac{1}{2}h \text{dost}(x + \frac{1}{2}h)$$

złąd wypada

$$\text{dost}(x + \frac{1}{2}h) = \frac{\Delta \text{wst } x}{2 \text{wst } \frac{1}{2}h}, \quad \text{dost } x = \frac{\Delta \text{wst}(x - \frac{1}{2}h)}{2 \text{wst } \frac{1}{2}h},$$

$$\Sigma \text{dost } x = \frac{\text{wst}(x - \frac{1}{2}h)}{2 \text{wst } \frac{1}{2}h} + \text{stała}.$$

3cie. Zamienienie potęg wstaw i dostaw, oraz ich mnożności, na funkcyę wstaw i dostaw łuków wielokrotnych, przywiedzie do dwóch poprzedzających wzorów, scałkowanie funkcyi ogólnej $wst^m x \text{ dost}^n x$, gdy wykładniki m i n są całe i dodatnie.

Jakoż ta funkcyja zamieni się na szereg wyrazów kształtu $A wst qx$, lub $A \text{dost} qx$, których całki wyprowadzą się z wyrażeń $A wst x$ i $A \text{dost} x$ pisząc qx i qh za x i h ; łatwo zaś można widzieć, że będzie w ogólności

$$\Sigma wst(p+qx) = - \frac{\text{dost}(p+qx - \frac{1}{2}qx)}{2 wst \frac{1}{2}qh} + \text{stała},$$

$$\Sigma \text{dost}(p+qx) = \frac{wst(p+qx - \frac{1}{2}qh)}{2 wst \frac{1}{2}qh} + \text{stała}.$$

403. Przydatność wyrażenia Σu w summowaniu szeregów, była powodem Analistóm do pilnego nad niém zastanawiania się, co przywiodło ich do nadania mu wielku kształtów bardzo prostych i składnych. Euler wyraził wartości całki Σu przez współczynniki różniczkowe i całkę $\int u dx$. Otrzymamy ten wypadek za pomocą wzoru

$$\Delta z = \frac{dz}{dx} \frac{h}{1} + \frac{d^2 z}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3 z}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

który daje

$$z = \frac{h}{1} \Sigma \frac{dz}{dx} + \frac{h^2}{1.2} \Sigma \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3} \Sigma \frac{d^3 z}{dx^3} + \text{i t. d.}$$

Położwszy $\frac{dz}{dx} = u$, wypadnie $z = \int u dx$, a zaś

$$\int u dx = h \Sigma u + \alpha h^2 \Sigma \frac{du}{dx} + \beta h^3 \Sigma \frac{d^2 u}{dx^2} + \text{i t. d.},$$

gdzie α , β , γ , i t. d. wyrażają współczynniki liczbowe: zkład otrzymamy

$$\Sigma u = \frac{1}{h} \int u dx - \alpha h \Sigma \frac{du}{dx} - \beta h^2 \Sigma \frac{d^2 u}{dx^2} - \text{i t. d.}$$

Jeżeli teraz weźmiemy współczynniki różniczkowe po

obu stronach równania, pamiętając że $\frac{d \Sigma u}{dx} = \Sigma \frac{du}{dx}$, a co łatwo jest sprawdzić (*), otrzymamy szereg równań:

$$\Sigma \frac{du}{dx} = \frac{1}{h} u - \alpha h \Sigma \frac{d^2 u}{dx^2} - \beta h^2 \Sigma \frac{d^5 u}{dx^5} \text{ i t. d.,}$$

$$\Sigma \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{h} \frac{du}{dx} - \alpha h \Sigma \frac{d^5 u}{dx^5} - \beta h^2 \Sigma \frac{d^4 u}{dx^4} \text{ i t. d.,}$$

$$\Sigma \frac{d^5 u}{dx^5} = \frac{1}{h} \frac{d^2 u}{dx^2} - \alpha h \Sigma \frac{d^4 u}{dx^4} - \beta h^2 \Sigma \frac{d^5 u}{dx^5} \text{ i t. d.,}$$

i t. d.

te równania posłużą nam do wyrzucenia z wyrażenia Σu , funkcij kolejno

$$\Sigma \frac{du}{dx}, \quad \Sigma \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad \Sigma \frac{d^5 u}{dx^5}, \quad \text{i t. d.},$$

łatwo zaś daje się widzieć, że wypadek mieć będzie kształt

$$\Sigma u = \frac{1}{h} \int u dx + Au + Bh \frac{du}{dx} + Ch^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \text{i t. d.}$$

Spółczynniki A, B, C , i t. d. wyznaczmy sposobem pod licz. 3go podanym, biorąc funkcją szczególną e^x , na którą znajdziemy

$$\Sigma e^x = \frac{e^x}{e^h - 1}, \quad \int e^x dx = e^x, \quad \frac{d^m e^x}{dx^m} = e^x,$$

z kąd wypada

$$\frac{1}{e^h - 1} = \frac{1}{h} + A + Bh + Ch^2 + \text{i t. d.},$$

(*) Mamy zaraz $d \Delta u = \Delta du$, ponieważ

$$d \Delta u = d[f(x+h) - f(x)] = [f'(x+h) - f'(x)] dx,$$

$$\Delta du = \Delta f'(x) dx = [f'(x+h) - f'(x)] dx$$

a potem, jeżeli położymy $\Sigma u = U$, co daje $u = \Delta U$, wypada

$$du = d \Delta U = \Delta dU$$

z kąd

$$\Sigma du = \Sigma \Delta dU = dU = d \Sigma u.$$

co dowodzi, że współczynniki A, B, C , i t. d. nieróżnią się bynajmniej od tych, które są mnożnikami potęg ilości h , w rozwinięciu funkcji $\frac{1}{e^h - 1}$ zamienionej na szereg powstający co do tejże litery.

404. Tym samym sposobem i z równą łatwością otrzymamy całki $\Sigma \Sigma u$, czyli $\Sigma^2 u$, $\Sigma \Sigma^2 u$ czyli $\Sigma^3 u$, w ogólności $\Sigma^m u$; albowiem wzór

$$\Delta^m z = \frac{d^m z}{dx^m} h^m + \alpha \frac{d^{m+1} z}{dx^{m+1}} h^{m+1} + \beta \frac{d^{m+2} z}{dx^{m+2}} h^{m+2} + \text{i t. d.},$$

prowadzi do

$$z = h^m \Sigma^m \frac{d^m z}{dx^m} + \alpha h^{m+1} \Sigma^m \frac{d^{m+1} z}{dx^{m+1}} + \beta h^{m+2} \Sigma^m \frac{d^{m+2} z}{dx^{m+2}} + \text{i t. d.},$$

uczyniwszy potem $\frac{d^m z}{dx^m} = u$, otrzymamy $z = f^m u dx^m$, a zatem

$$\Sigma^m u = \frac{1}{h^m} f^m u dx^m - \alpha h \Sigma^m \frac{du}{dx} - \beta h^2 \Sigma^m \frac{d^2 u}{dx^2} - \text{i t. d.},$$

biorąc współczynniki różniczkowe po obu stronach zrównania utworzymy zrównania następujące:

$$\Sigma^m \frac{du}{dx} = \frac{1}{h^m} f^{m-1} u dx^{m-1} - \alpha h \Sigma^m \frac{d^2 u}{dx^2} - \beta h^2 \Sigma^m \frac{d^3 u}{dx^3} - \text{i t. d.},$$

$$\Sigma^m \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{h^m} f^{m-2} u dx^{m-2} - \alpha h \Sigma^m \frac{d^3 u}{dx^3} - \beta h^2 \Sigma^m \frac{d^4 u}{dx^4} - \text{i t. d.},$$

i t. d.

za pomocą których wyrugujemy $\Sigma^m \frac{du}{dx}$, $\Sigma^m \frac{d^2 u}{dx^2}$ i t. d.,

z wyrażenia $\Sigma^m u$. Ostateczne zrównanie będzie się mogło wyrazić pod kształtem

$$\begin{aligned} \Sigma^m u &= \frac{1}{h^m} f^m u dx^m + \frac{A}{h^{m-1}} f^{m-1} u dx^{m-1} \\ &+ \frac{B}{h^{m-2}} f^{m-2} u dx^{m-2} \dots \frac{M}{h} f u dx \\ &+ Nu + P h \frac{du}{dx} + Q h^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \text{i t. d.}, \end{aligned}$$

a gdy uczynimy w niém $u=e^x$, zamieni się na

$$\frac{1}{(e^h-1)^m} = \frac{1}{h^m} + \frac{A}{h^{m-1}} + \frac{B}{h^{m-2}} \dots + \frac{M}{h} + N + Ph + Qh^2 + \text{i t. d.},$$

i tu współczynniki $A, B, \dots, M, N$, i t. d., są te same co w rozwinięciu funkcji $\frac{1}{e^h-1}$, przy tychże samych potęgach ilości h ; ztąd wypada między całkami i potęgami odjemnemi odpowiedność, która jest tylko dal- szym ciągiem tej, jaka zachodzi między różnicami i po- tęgami dodatnemi. Idzie zatém, że całki powinny się uważać jako różnice rzędu którego wykładnik jest od- jemny. Jakoż jasną jest, że podług tego co się powie- działo, można pisać

$$\Sigma^m u = \frac{1}{\left(e^{\frac{du}{dx}h} - 1\right)^m} = \left(e^{\frac{du}{dx}h} - 1\right)^{-m},$$

byleby tylko po wykonaniu rozwinięcia zamienić po- tęgi $\frac{du^p}{dx^p}$ na $\frac{d^p u}{dx^p}$, uważając że w wyrażeniu $\frac{d^{-p}u}{dx^{-p}}$ $= d^{-p}u dx^p$, d^{-p} znaczy to samo co $\int^p$, albo też jeszcze napisać

$$\Sigma^m u = \left(e^{\frac{d}{dx}h} - 1\right)^{-m} u,$$

te wyrażenia wyprowadzają się z wyrażen $\Delta^m u$ (390), kładąc znak — przed wykładnikiem m .

405. Całkowanie przez części może być równie przy- stosowanem do różnic jak i do różniczek. Niech będą P i Q dwie jakiekolwiek funkcyje ilości x ; położyw- szy

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P + z,$$

gdzie z jest funkcyą nieznaną ilości x , i wzięwszy ró- żnice po obu stronach zrównania, otrzymamy

$$PQ = (Q + \Delta Q)\Sigma(P + \Delta P) - Q\Sigma P + \Delta z,$$

po rozwinięciu i uproszczeniu, uważając że $Q\Sigma P = PQ$ znajdziemy

$$0 = \Delta Q\Sigma(P + \Delta P) + \Delta z, \text{ czyli } \Delta z = -\Delta Q\Sigma(P + \Delta P),$$

a zatem

$$z = -\Sigma \Delta Q\Sigma(P + \Delta P),$$

potém

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Sigma \Delta Q\Sigma(P + \Delta P) \quad (A),$$

wzór ten, gdy położymy P_1 za $P + \Delta P$, zamienia się na

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Sigma \Delta Q\Sigma P_1, \quad (1)$$

Jeżeli we wzorze (A) zamienimy Q na ΔQ , P na ΣP_1 , i jeżeli uważymy że

$$\Sigma P_1 + \Delta \Sigma P_1 = \Sigma(P_1 + \Delta P_1) = \Sigma P_2,$$

ztąd wypadnie

$$\Sigma \Delta Q\Sigma P_1 = \Delta Q\Sigma^2 P_1 - \Sigma \Delta^2 Q\Sigma^2 P_2$$

a wzór (1) zamieni się na

$$\Sigma PQ = P\Sigma Q - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Sigma \Delta^2 Q\Sigma^2 P_2 \quad (2).$$

Odmieniając potém w zrównaniu (A), Q na $\Delta^2 Q$, P_1 na $\Sigma^2 P_2$, i uważając że

$$\Sigma^2 P_2 + \Delta \Sigma^2 P_2 = \Sigma^2 P_3$$

otrzymamy

$$\Sigma \Delta^2 Q\Sigma^2 P_2 = \Delta^2 Q\Sigma^3 P_2 - \Sigma \Delta^3 Q\Sigma^3 P_3,$$

a wzór (2) zamienia się na

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q\Sigma^3 P_2 - \Sigma \Delta^3 Q\Sigma^3 P_3,$$

gdzie widzimy prawo tego prostego wyrażenia, danego pierwszy raz przez Tajlora w dziele *Transactions philosophicales*

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q\Sigma^3 P_2$$

$$- \Delta^3 Q\Sigma^4 P_3 + \Delta^4 Q\Sigma^5 P_4 - \text{i t. d.}$$

Jeżeli napiszemy za P_1, P_2, P_3 , i t. d., ich wartości wyrażone przez P , i uskutecznimy całkowania, które się dadzą wykonać, to wyrażenie zamieni się na następujące

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q(\Sigma^2 P + \Sigma P) + \Delta^2 Q(\Sigma^3 P + 2\Sigma^2 P + \Sigma P) \\ - \Delta^3 Q(\Sigma^4 P + 3\Sigma^3 P + 3\Sigma^2 P + \Sigma P) + \text{i t. d.}$$

Pod tym to kształtem podał je *Condorcet* w dziele *Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions*, str. 163.

Szereg ten kończy się, ile razy funkcya Q prowadzi do różnic stałych jakiegokolwiek rzędu; a jeżeli funkcya P da się scałkować następnie tyle razy ile potrzeba, otrzymuje się całka dokładna funkcyi PQ .

Przystosowanie rachunku różnic do sumowania szeregów.

406. W jakimkolwiek szeregu

$$u, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n,$$

wyraz ogulny u_n może być uważany jako różnica funkcyi wyrażającej summe wyrazów, które go poprzedzają; zatem jeżeli położymy

$$u + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = S_{n-1},$$

otrzymamy

$$\Delta S_{n-1} = u_n, \quad S_{n-1} = \Sigma u_n \quad (395).$$

Idzie zatem, że cała summa, zajmując w niej wyraz ogulny, będzie

$$S_n = \Sigma u_n + u_n.$$

Widzimy także, że, ponieważ S_n wynika z S_{n-1} zamieniając n na $n+1$, wyrażenie S_n może się wyprowadzić tymże samym sposobem z wyrażenia Σu_n .

Więc, jeżeli $f(x)$ oznacza wyraz ogulny jakiego szeregu, w którym różnica ilości samozmiennej jest h ,

summa tego szeregu, który wyrazimy przez $Sf(x)$, będzie

$$Sf(x) = \Sigma f(x) + f(x),$$

którą można otrzymać także kładąc $x+h$ za x , w wyrażeniu $\Sigma f(x)$, do wypadku należy zawsze dodawać ilość stałą dowolną.

Gdy żądamy summy szeregu na wartości tylko całkowite skazówki, ilość stała dowolna będąc wtedy prawdziwą stałą (394), oznacza się jak ilość stała w całkach otrzymywanych z różniczek. Jeżeli zaczniemy szereg od wyrazu odpowiadającego skazówce $x=a$, i gdy mamy w ogólności

$$Sf(x) = F(x) + \text{stała},$$

powinno być

$$F(a) + \text{stała} = f(a), \quad \text{z kąd stała} = f(a) - F(a),$$

$$Sf(x) = F(x) - F(a) + f(a).$$

Jeżeli zakończymy szereg na wyrazie odpowiadającym skazówce $x=a+nh$ wypadnie

$$\begin{aligned} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+nh) \\ = F(a+nh) - F(a) + f(a), \end{aligned}$$

co się sprowadza do

$$f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+nh) = F(a+nh) - F(a),$$

i pokazuje, jak należało spodziewać się, że wyraz $f(a)$ nie wchodzi do summy $Sf(x)$, wziętej między granicami $x=a$, i $x=a+nh$, lecz jeżeli chcemy i ten wyraz zagarnąć, należy wziąć summę od $x=a-h$, aż do $x=a+nh$.

407. Idźmy teraz do zastosowania. Ze wzorów pod lic. 397 wyprowadzimy wzory

$$\begin{aligned} Sx(x+h)(x+2h) \dots [x+(m-1)h] \\ = \frac{x(x+h)(x+2h) \dots (x+mh)}{(m+1)h} + \text{stała}, \end{aligned}$$

$$S \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots[x+(m-1)h]} =$$

$$= \frac{1}{(m-1)h(x+h)(x+2h)\dots[x+(m-1)h]} + \text{stała},$$

za pomocą tych wzorów otrzymamy summy szeregów prostych i odwrotnych liczb figurowych (*).

Na pierwsze, których wyrazy ogólne są

$$\frac{x}{1}, \quad \frac{x(x+1)}{1.2}, \quad \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}, \quad \text{i t. d.}$$

należy uczynić $h=1$, a kolejną $m=1, m=2$, i t. d., z czego wypada

$$Sx = \frac{x(x+1)}{1.2} + \text{stała},$$

$$S \frac{x(x+1)}{1.2} = \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3} + \text{stała},$$

$$S \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3} = \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3.4} + \text{stała},$$

i t. d.

w tych wyrażeniach ilość stałą można opuścić, bo całe wyrażenia stają się $=0$, gdy uczynimy $x=0$.

Przechodząc do szeregów odwrotnych, których wyrazy ogólne są

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{1.2}{x(x+1)}, \quad \frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)}, \quad \text{i t. d.},$$

znajdujemy, że drugi wzór jest niedostatecznym na szereg pierwszy, z przyczyny dzielnika $1-1$, lecz na inne szeregi mamy

(*) Nie od rzeczy jest uważać, że te wzory są tożsame ze współczynnikami potęg ilości z , w rozwinięciu wyrażenia $(1+z)^{-x}$

$$1.2S \frac{1}{x(x+1)} = -\frac{2}{x+1} + \text{stała},$$

$$1.2.3S \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = -\frac{3}{(x+1)(x+2)} + \text{stała},$$

i t. d.

Oznaczając ilości stałe pod tym warunkiem, aby summy zaczynały się od wyrazu pierwszego, którym jest jedność w każdym szeregu, otrzymujemy wyrażenia

$$\frac{2}{1} - \frac{2}{x+1}, \quad \frac{3}{2} - \frac{3}{(x+1)(x+2)}, \quad \text{i t. d.},$$

które sprowadzając się do $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, i t. d., gdy ilość x jest nieskończenie wielką, dają granice szeregów

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1.2}{x(x+1)} + \text{i t. d.},$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)} + \text{i t. d.},$$

408. Kładąc $x+h$ za x , w wyrażeniu Σx^m (399), otrzymamy także Sx^m , to jest sumę szeregów

$$1, \quad 2^m, \quad 3^m, \quad \dots \quad x^m.$$

Jeżeli w szczególności rozwinieśmy Sx^2 i uczynimy $h=1$, po uproszczeniu wypadnie

$$Sx^2 = \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6} + \text{stała},$$

na sumę szeregu liczb kwadratowych $1, 4, 9, \dots x^2$.

409. Z liczb 401, 402, wniesiemy że

$$Sa^x = \frac{a^{x+h}}{a^h - 1} + \text{stała},$$

$$Swstx = -\frac{\text{dost}(x + \frac{1}{2}h)}{2wst \frac{1}{2}h} + \text{stała},$$

$$Sdostx = \frac{wst(x + \frac{1}{2}h)}{2wst \frac{1}{2}h} + \text{stała}.$$

Dla otrzymania *np.* summy szeregu

$$\text{wst } a, \text{ wst}(a+h), \dots, \text{wst}(a+nh),$$

należy wziąć $S_{\text{wst}x}$, od $x=a-h$, aż do $x=a+nh$ (406), po czém wypadnie

$$\frac{\text{dost}(a-\frac{1}{2}h) - \text{dost}(a+nh+\frac{1}{2}h)}{2\text{wst}\frac{1}{2}h} = \frac{\text{wst}(a+\frac{1}{2}nh)\text{wst}\frac{1}{2}(n+1)h}{\text{wst}\frac{1}{2}h}.$$

Wyrażenie ogólne całki Σu , z liczby 403, daje takż na Su , wzór ogólny, którego znakomite zastosowanie niżej znajdziemy.

Całkowanie zrównań różnicowych o dwu zmiennych.

410. Uważaliśmy dotąd różnicę funkcyi szukanej jako wyrażnie daną przez zmienną niezależną; teraz zastanowimy się nad temi przypadkami, w których dane jest tylko zrównanie, zawierające funkcyą szukaną, jej różnicę, zmienną niezależną, i jej przyrostek. Jeżeli funkcyą szukaną y zależy od zmiennej x , której przyrostek uważany jako stały, zwyczajnie oznacza się przez h , wtenczas zrównanie dane będzie zawarte w ogólnym wzorze

$$F\{x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \text{ i t. d.}\} = 0.$$

Nie od rzeczy będzie tu wspomnieć, że różnice Δy , $\Delta^2 y$, i t. d., mogą być wyrzucone, kładąc za nie wartości następne ilości y , mamy bowiem

$$\Delta y = y_1 - y, \quad \Delta^2 y = y_2 - 2y_1 + y, \quad \text{i t. d. (376);}$$

co wprowadzając do zrównania danego, wyrazimy je ogólnie przez

$$F(x, y, y_1, y_2, \text{ i t. d.}) = 0,$$

z którego widzimy, że każde różnicowe zrównanie daje nam poznać wartość funkcyi szukanej, za pomocą pewnej liczby wartości poprzedzających.

Gdyby *np.* zrównanie było pierwszego rzędu, otrzymalibyśmy y_1 , wyrażone przez y ; gdyby zaś było drugiego rzędu, mielibyśmy y_2 wyrażone przez y_1 i przez y ; i tak dalej.

Łatwo postrzec możemy, że każde zrównanie różnicowe jest równe szeregowi, w którym każdy wyraz otrzymuje się za pomocą związku, jakie on ma z wyrazami poprzedzającymi i ze skazówką oznaczającą miejsce przezeń zajęte. Jakoż, mając *np.* $y_2 = f(x, y, y_1)$, wyciągniemy ztąd

$$y_3 = f(x+h, y_1, y_2), \quad y_4 = f(x+2h, y_2, y_3), \text{ i t. d.},$$

a tak utworzymy szereg

$$y, y_1, y_2, y_3, y_4, \text{ i t. d.},$$

za pomocą dwóch jego pierwszych wyrazów.

Ten przypadek szczególny dostatecznie pokazuje, że w szeregu otrzymanym z jakiegokolwiek zrównania różnicowego, zawsze będzie tyle wyrazów dowolnych, ile jedności ma wykładnik rzędu tego zrównania.

411. Można każde zrównanie różnicowe zamienić na zrównanie różniczkowe rzędu nieograniczonego, kładąc za Δy , $\Delta^2 y$, i t. d., ich rozwinięcia (390); równie jest rzeczą jasną, że każde zrównanie różniczkowe, mogliśmy zamienić na zrównanie różnicowe nieograniczonego rzędu, podstawując za spółczynniki różniczkowe, rozwinięcia ich wzięte ze wzoru podanego w liczbie 391.

Takowe przekształcania, które dają tę niedogodność, że wprowadzają nieskończoną liczbę wyrazów, nie mogą być w ogólności, bardzo pożytecznymi w całkowaniu równań; lecz są bardzo właściwe do pokazania, jak wielka zachodzi różnica między rachunkiem różniczkowym, i rachunkiem różnicowym. Dowodzą one, że z natury tego ostatniego wynika, iż różnice zmiennej niezależnej powinny koniecznie mieć wartość oznaczoną: bo gdybyśmy mieli zrównanie między

$$x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \text{ i t. d.},$$

w którémby Δx , było stałe, i gdybyśmy je rozwinęli według potęg Δx , Δy , $\Delta^2 y$, i t. d., co by mu dało kształt

$$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta^2 y + \text{i t. d.},$$

możnaby w niem podstawić za Δy , $\Delta^2 y$ i t. d., ich rozwinięcia, aże przyrostek Δx zostałby jeszcze nieoznaczonym, więc, współczynniki rozmaitych potęg tego przyrostku, musiałyby same przez się niszczyć się. Tak więc otrzymalibyśmy, między zmiennymi x , y , i ich różniczkami nieograniczoną liczbę równań, które między sobą zgadzać się powinny, ażeby dane równanie cokolwiek znaczyło: a w tym razie byłoby ono równe pierwszemu tylko z tych równań, którego inne stałyby się różniczkami następniemi.

Dajmy, że równanie różnicowe jest pierwszego tylko rzędu, którego zatem kształt będzie

$$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + \text{i t. d.} = 0,$$

a wzięwszy

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{i t. d.},$$

otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} & B \frac{dy}{dx} \left\{ \Delta x + E \frac{dy^2}{dx^2} \right\} \Delta x^2 + \text{i t. d.} \\ & + A \left\{ \begin{aligned} & + D \frac{dy}{dx} \\ & + C \\ & + \frac{B}{1.2} \frac{d^2 y}{dx^2} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} = 0,$$

złąd wyciągniemy

$$B \frac{dy}{dx} + A = 0, \quad E \frac{dy^2}{dx^2} + D \frac{dy}{dx} + C + \frac{B}{1.2} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \text{ i t. d.},$$

a jeżeli te równania nie mogą mieć razem miejsca, zró-

wnanie dane, nie inaczej może być sprawdzone, tylko nadając wartość szczególną przyrostkowi Δx .

412. Po wyłożeniu przygotowawczych prawd, przystąpimy do samej rzeczy zaczynając od całkowania ogólnego zrównania pierwszego stopnia i pierwszego rzędu. Założywszy, że różnica zmiennej x , czyli Δx równa jest $=1$, dajmy, że mamy zrównania $\Delta y + Py = Q$ podobne zrównaniu różniczkowemu z pod liczby 285; podobnym i tu sposobem postępując przyjdziemy do całki danego zrównania.

Jeżeli uczynimy $y = uz$ otrzymamy

$$\Delta y = u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z,$$

co odmieni dane zrównanie na

$$u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z + Pu z = Q,$$

a uczyniwszy osobno

$$z\Delta u + Pu z = 0, \text{ czyli } \Delta u + Pu = 0,$$

zostanie $u\Delta z + \Delta u\Delta z = Q$, ztąd

$$\Delta z = \frac{Q}{u + \Delta u}, \quad z = \sum \frac{Q}{u + \Delta u};$$

więc zealkowanie danego zrównania zależy od zealkowania zrównania $\Delta u + Pu = 0$, w którym łatwo rozłączymy ilości zmienne wyrażając $\Delta u + Pu = 0$ pod postacią $\frac{\Delta u}{u} = -P$ bo P z założenia zawiera tylko ilość x :

Niech będzie $u = e^t$, ztąd wypadnie

$$\Delta u = e^t(e^{\Delta t} - 1), \quad \frac{\Delta u}{u} = e^{\Delta t} - 1 = -P,$$

z czego wyciągniemy

$$e^{\Delta t} = 1 - P, \quad \Delta t = l(1 - P), \quad t = \sum l(1 - P).$$

Lecz że summa logarytmów funkcji $1 - P$ odpowiada ciąglemu iloczynowi wartości po sobie następują-

cych, jakie przybiera funkcyja $1-P$ w granicach całki, to jest iloczynowi

$$(1-P_{x-1})(1-P_{x-2})(1-P_{x-3}) \dots (1-P_0) \quad (406);$$

więc jeżeli oznaczymy ten iloczyn przez $[1-P_{x-1}]^x$, gdzie wykładnik x wyraża liczbę mnożników, otrzymamy

$$t = [1-P_{x-1}]^x,$$

złąd

$$u = e^t = [1-P_{x-1}]^x,$$

a jeżeli uważymy, że $u + \Delta u = u_1$, będzie zatem

$$u + \Delta u = [1-P_x]^{x+1}, \quad z = \sum \frac{Q}{[1-P_x]^{x+1}},$$

złąd nakoniec wypadnie

$$y = [1-P_{x-1}]^x \sum \frac{Q}{[1-P_x]^{x+1}},$$

ilość stała dowolna zajęta jest w całości wskazanej.

Takim to prawie sposobem Lagranż, który najpierwszy okazał podobieństwo zachodzące między zrównaniami różnicowymi pierwszego stopnia i zrównaniami różniczkowymi tegoż stopnia, zcałkował, w roku 1761, wyżej podane zrównanie; przystosował potem wypadek swój do zrównania $y_1 = Ry + Q$, czyli do $y + \Delta y = Ry + Q$. Porównywając to ostatnie zrównanie ze zrównaniem $\Delta y + Py = Q$, wypada $P = 1 - R$, $1 - P = R$, a zatem

$$y = [R_{x-1}]^x \sum \frac{Q}{[R_x]^{x+1}}.$$

Lubo zdaje się, że rozwinięcie iloczynu $[1-P_{x-1}]^x$ każe rozumieć, że różnica Δx jest $= 1$, można jednak zachować wyrażenie poprzedzające i wtenczas, gdy $\Delta x = h$, wyobrażając sobie że to wyrażenie odpowiada iloczynowi

$$(1-P_{x-h})(1-P_{x-2h})(1-P_{x-3h}) \text{ i t. d.}$$

albo dane zrównanie przecrobieć na inne, czyniąc $x = hx'$, co dałoby $\Delta x = h\Delta x'$, oraz $\Delta x' = 1$.

Gdy współczynnik R jest stały, będzie

$$y = R^x \Sigma \frac{Q}{R^{x+1}};$$

a jeżeli ilość Q także jest stałą, całkowanie wskazane łatwo się uskutecznia; w tym przypadku będziemy mieli

$$\Sigma \frac{Q}{R^{x+1}} = Q \Sigma R^{-x-1} = \frac{QR^{-x-1}}{R^{-1}-1} = \frac{Q}{R^x(1-R)} \quad (401),$$

$$y = R^x \left\{ \frac{Q}{R^x(1-R)} + \text{stała} \right\}.$$

W ogólności otrzymamy wartość y oswobodzoną od znaku Σ , ile razy Q będzie funkcją wymierną, i całkowitą ilości x .

413. W badaniach pod liczbą poprzedzającą wspomnianych, Lagranż stosuje do zrównań różnicowych pierwszego stopnia jakiegokolwiek rzędu, sposób od Dalamberta podany na zrównania różniczkowe pierwszego stopnia, którego sposobu użycie jest wskazane pod licz. 320; lecz wrócił się znowu do tego przedmiotu roku 1775, sposobem już wyłożonym podług niego, względem zrównań różniczkowych pierwszego stopnia.

Naprzód wartość zupełna funkcji y_x , zadość czyniąca zrównaniu

$$y_{x+n} + P_x y_{x+n-1} + Q_x y_{x+n-2} \dots + U_x y_x = 0 \quad (A),$$

jakiegokolwiek rzędu a stopnia pierwszego ze względu na funkcję y_x , otrzymuje się jak wartość ilości y w zrównaniu pod liczbą 309, gdy znamy wartości jej szczególnych liczbę n ; jasną bowiem jest rzeczą, że jeżeli

$$y'_x, y''_x, y'''_x, \dots$$

są funkcjami ilości x , zadość czyniącemi zrównaniu (A); wyrażenie

$$y_x = C y'_x + C'' y''_x + C''' y'''_x + \text{i t. d.},$$

również jemu zadość uczyni, bez oznaczenia ilości stałych C' , C'' , C''' , i t. d.; i to wyrażenie, gdy zamyka wyrazów nieprzywiedlnych liczbę x , będzie całką zupełną tego zrównania.

Powtóre, zrównanie

$$y_{x+n} + P_x y_{x+n-1} + Q_x y_{x+n-2} + \dots + U_x y_x = V_x \quad (B),$$

które ma więcej niż poprzedzające, drugą stronę zależącą od x tylko, sprowadza się do poprzedzającego podobnie jak pod liczbą 514, uważając ilości stałe C' , C'' , C''' , i t. d., jako funkcyje ilości x . W tém przypuszczeniu wyrażenie

$$y_x = C_x y'_x + C''_x y''_x + C'''_x y'''_x + \text{i t. d.},$$

prowadzi zaraz do wyrażenia

$$y_{x+1} = C'_{x+1} y'_{x+1} + C''_{x+1} y''_{x+1} + C'''_{x+1} y'''_{x+1} + \text{i t. d.},$$

które da się przerobić na

$$y_{x+1} = C'_x y'_{x+1} + C''_x y''_{x+1} + C'''_x y'''_{x+1} + \text{i t. d.} \\ + y_{x+1} \Delta C'_x + y''_{x+1} \Delta C''_x + y'''_{x+1} \Delta C'''_x + \text{i t. d.},$$

kładąc za C'_{x+1} , C''_{x+1} , i t. d., ich wartości

$$C'_x + \Delta C'_x, \quad C''_x + \Delta C''_x, \quad \text{i t. d.};$$

i przywiedzione zostanie do

$$y_{x+1} = C'_x y'_{x+1} + C''_x y''_{x+1} + C'''_x y'''_{x+1} + \text{i t. d.},$$

gdy się uczyni

$$y'_{x+1} \Delta C'_x + y''_{x+1} \Delta C''_x + y'''_{x+1} \Delta C'''_x + \text{i t. d.} = 0, \quad (1)$$

jak gdyby ilości C' , C'' , C''' , i t. d. były stałe. Zmieniając znowu ilość x , otrzymamy

$$y_{x+2} = C'_{x+1} y'_{x+2} + C''_{x+1} y''_{x+2} + C'''_{x+1} y'''_{x+2} + \text{i t. d.} \\ = C'_x y'_{x+2} + C''_x y''_{x+2} + C'''_x y'''_{x+2} + \text{i t. d.} \\ + y'_{x+2} \Delta C'_x + y''_{x+2} \Delta C''_x + y'''_{x+2} \Delta C'''_x + \text{i t. d.};$$

wypadek ten sprowadzi się do

$$y_{x+2} = C'_x y'_{x+2} + C''_x y''_{x+2} + C'''_x y'''_{x+2} + \text{i t. d.},$$

przez przypuszczenie, że

$$y'_{x+2} \Delta C'_x + y''_{x+2} \Delta C''_x + y'''_{x+2} \Delta C'''_x + \text{i t. d.} = 0 \quad (2).$$

Zmieniając ilość x raz trzeci, przyjdziemy do

$$y'_{x+5} = C'_x y'_{x+5} + C''_x y''_{x+5} + C'''_x y'''_{x+5} + \text{i t. d.}$$

kładąc

$$y_{x+5} \Delta C'_x + y''_{x+5} \Delta C''_x + y'''_{x+5} \Delta C'''_x + \text{i t. d.} = 0, \quad (3)$$

tak dalej postępując przyjdziemy do zrównań

$$y_{x+n-1} = C'_x y'_{x+n-1} + C''_x y''_{x+n-1} + C'''_x y'''_{x+n-1} + \text{i t. d.},$$

$$y'_{x+n-1} \Delta C'_x + y''_{x+n-1} \Delta C''_x + y'''_{x+n-1} \Delta C'''_x + \text{i t. d.} = 0^{(n-1)},$$

Teraz jeżeli w wartości y_{x+n-1} zamienimy x na $x+1$, otrzymamy

$$y_{x+n} = C'_x y'_{x+n} + C''_x y''_{x+n} + C'''_x y'''_{x+n} + \text{i t. d.}$$

$$+ y'_{x+n} \Delta C'_x + y''_{x+n} \Delta C''_x + y'''_{x+n} \Delta C'''_x + \text{i t. d.},$$

a kładąc w zrównaniu (B) za

$$y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \dots, y_{x+n-1}, y_{x+n},$$

ich wartości, i uważając że z założenia i podług zrównania (A), jest

$$y'_{x+n} + P_x y'_{x+n-1} + Q_x y'_{x+n-2} + \dots + U_x y'_x = 0,$$

$$y''_{x+n} + P_x y''_{x+n-1} + Q_x y''_{x+n-2} + \dots + U_x y''_x = 0,$$

$$y'''_{x+n} + P_x y'''_{x+n-1} + Q_x y'''_{x+n-2} + \dots + U_x y'''_x = 0,$$

i t. d.,

zostanie więc tylko

$$y'_{x+n} \Delta C'_x + y''_{x+n} \Delta C''_x + y'''_{x+n} \Delta C'''_x + \text{i t. d.} = V_x(n).$$

Łatwo pojmujemy, że za pomocą zrównań (1), (2), ...

$(n-1)$, (n) , wyrazimy przez funkcyę ilości x , różnice ΔC_x , $\Delta C''_x$, $\Delta C'''_x$, i t. d., przez co dochodzenie ilości C , C' , C'' , i t. d., przywiedzie się do całkowania funkcyj o jednej zmiennej.

414. Nie mamy ogólnego sposobu zcałkowania zrównania (A); lecz gdy współczynniki nie są funkcyami ilości x , ale ilościami stałymi, i mamy tylko

$$y_{x+n} + Py_{x+n-1} + Qy_{x+n-2} + Ry_{x+n-3} \dots + Uy_x = 0, \quad (A)$$

wtenczas zadość mu się uczyni kładąc $y_x = m^x$, zkaż

$$y_{x+1} = m^{x+1}, y_{x+2} = m^{x+2}, \dots, y_{x+n} = m^{x+n},$$

bo tym sposobem zrównanie (A) zamienia się na

$$m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2} + Rm^{n-3} + \dots + U = 0, \quad (A'')$$

i sprawdzi się biorąc za ilość m , pierwiastki tego ostatniego zrównania. Więc jeżeli oznaczymy przez m' , m'' , m''' i t. d., te różne pierwiastki, otrzymamy (licz. poprzedz.)

$$y_x = C'm'^x + C''m''^x + C'''m'''^x + \dots$$

Wyrażenie to wystawia nam co do ilości m' , m'' , m''' , i t. d., te same okoliczności, co całka zrównania różniczkowego

$$d^n y + P dx d^{n-1} y + Q dx^2 d^{n-2} y \dots U y dx^n = 0.$$

Może się zdarzyć, że niektóre pierwiastki zrównania (A'') będą urojone, albo równe między sobą. W pierwszym razie, przychodzimy do ilości rzetelnych, używając przekształceń, jakich używaliśmy pod licz. 310; w drugim przypadku, dla uczynienia całki zupełną, którą być przestała, należy udać się do sposobu wyłożonego pod licz. 311.

415. Zrównanie (A), które można uważać jako wyrażające naturę szeregu, w którym jakikolwiek wyraz oznaczony przez y_{x+n} zależy od n wyrazów poprzedzających, należy do szeregów zwrótnych, któ-

rych wyraz ogólny jest y_x , a stopień stosunku jest

$$-P, -Q, \dots -U:$$

więc całkowanie tego równania odpowiada szukaniu ogólnego wyrazu szeregu założonego; lecz uważając praw-
wo tylko jego tworzenia się, postrzeżemy, że pierwsze n
wyrazy są koniecznien dowolne; a jeżeli byłyby dane,
wówczas oznaczywszy je przez

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots y_{n-1},$$

możnaby ułożyć równania

$$y_0 = C' + C'' + C''' + \text{i t. d.},$$

$$y_1 = C'm' + C''m'' + C'''m''' + \text{i t. d.},$$

$$y_2 = C'm'^2 + C''m''^2 + C'''m'''^2 + \text{i t. d.},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_{n-1} = C'm'^{n-1} + C''m''^{n-1} + C'''m'''^{n-1} + \text{i t. d.},$$

za pomocą których wyznaczylibyśmy ilości stałe $C', C'', C''', \dots$ których liczba jest także n . Rozwiązanie tych
równań, które są pierwszego tylko stopnia, może się
uproszczyć, przez niektóre sposoby analityczne, lecz te nie
mogą być wyłożone w dziele elementárném: przestane
tu na uwadze że to badanie łączy się z wysledzeniem
praw fenomenów podług obserwacyj.

416. Iłości stałe dowolne do całek otrzymywanych
z różnic dodawane, będąc funkcyami dowolnemi (394),
nie mogą być oznaczone przez założenie, iż powinny
zależyć czynić liczbie ograniczonej danych wartości; ja-
sną bowiem jest rzeczą, że każda funkcyja dowolna
zamyka niewidocznie liczbę nieograniczoną wartości do-
wolnych. Niech będzie np. równanie

$$y_x = X\varphi(\text{wsł}2\pi x. \text{dost}2\pi x),$$

z którego mamy wyciągnąć pewną liczbę wartości

$$y_0 = a, \quad y_1 = a', \quad y_2 = a'', \quad \text{it. d.}$$

Jeżeli te wartości odpowiadają wartościom

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2, \quad \text{it. d.}$$

w tym razie pierwszemu tylko z założonych warunków można będzie zadość uczynić; bo skoro na $\varphi(\text{wst}2\pi x, \text{dost}2\pi x)$, naznaczymy pierwszą wartość oznaczoną, z której wynika $y_0 = a$, ponieważ ta wartość powinna się otrzymać na skazowki $x = 1, x = 2$, i t. d., przeto wartości ilości y_x , odpowiednie tym skazówkom, są także oznaczone; więc dane ilości a', a'' , i t. d. muszą odpowiadać skazówkom pośrednim.

Jeżeli, zamiast naznaczania ograniczonej liczby wartości odosobnionych, niezależących jednych od drugich, przypuścimy, że w przestrzeni zawartej między $x = 0$, i $x = 1$, wyrażenie y_x ma dostarczyć tychże samych wartości, jakich dostarcza dane zrównanie $y_x = f(x)$, wtedy pytanie będzie oznaczone. Jakoż, jeźliby rzecz była o wynalezienie wartości na y , odpowiadającej skazówce równej jakiejkolwiek liczbie całej m , powiększonej ułamkiem n , bądź wymiernej, bądź niewymiernej, wyrachowalibyśmy wartość na y , podług zrównania $y_x = f(x)$; porównyując wypadek ztąd otrzymany z wypadkiem wyprowadzonym w tym razie ze zrównania

$$y_x = X_n \varphi(\text{wst}2\pi n, \text{dost}2\pi n),$$

znaleźlibyśmy, na ten przypadek, wartość wyrażenia

$$\varphi(\text{wst}2\pi n, \text{dost}2\pi n),$$

która powinna być też sama, jaka jest wyrażenia

$$\varphi[\text{wst}2\pi(m+n), \text{dost}2\pi(m+n)],$$

gdzie m jest liczbą jakąkolwiek; a zrównanie

$$y_x = X \varphi(\text{wst}2\pi x, \text{dost}2\pi x)$$

zamieniając się przez to na

$$y_{m+n} = X_{m+n} \phi(\text{wst} 2\pi n, \text{dost} 2\pi n),$$

byłoby zupełnie oznaczoném.

Jeden tylko warunek, któremu ulega zrównanie $y_x = f(x)$, jest, że wyciągamy z niego na y_0 i na y_1 te same wartości, jakie ze zrównania

$$y_x = X \phi(\text{wst} 2\pi x, \text{dost} 2\pi x).$$

417. Geometryczne uwagi objaśnia poprzedzające rozumowania. Oto naprzód jakim sposobem przez bieg linii można wyrazić proste zrównanie $\Delta y = 0$. Jeżeli na linii prostej AR (fig. 55), poprowadzonej w jakiejkolwiek odległości od osi ucinków OX , równoległe do tejże osi i podzielonej na części równe różnicy Δx , wykreślimy linije krzywe takie, jakiemi są

$$ABA'B'A'S, \quad ACA'C'A'T, \quad ADA'D'A''U, \text{ i t. d.},$$

przechodzące przez punkta A, A', A'' i t. d., i złożone między temi punktami z części równych i podobnych, te linije zadość uczynią zrównaniu $\Delta y = 0$. Jest to widoczném na punkta A, A', A'' , i t. d. a potem widzimy, że gdy weźmiemy $AP = x, AP' = x + \Delta x$, łuki

$$AL \text{ i } A'L', \quad AM \text{ i } A'M', \quad AN \text{ i } A'N', \text{ i t. d.},$$

będą równe i podobne, i przystawy

$$LP \text{ i } L'P', \quad MP \text{ i } M'P', \quad NP \text{ i } N'P', \text{ i t. d.},$$

będą także odpowiednie równe; a zatem na każdą linię krzywą mieć będziemy $\Delta y = 0$.

Ponieważ warunek $\Delta y = 0$, nie wymaga zgoła ciągłości w wypadkach, przeto linije krzywe AS, AT, AU , i t. d. nie są zgoła temu prawu uległe. Wielokąt $EFFE'F'E'V$, złożony z części podobnych $EFE', E'F'E'',$ i t. d., w odległościach oznaczonych przez Δx ,

również daje $\Delta y = 0$; to samo byłoby z ciągiem łuków równych i podobnych jakiejkolwiek linii krzywej, zgromadzonych sposobem nieciągłym, jakimi są łuki GH , $G'H$, i t. d.

Jest widoczném, że zrównanie $y = \varphi\left(\text{wst} \frac{2\pi x}{\Delta x}, \text{dost} \frac{2\pi x}{\Delta x}\right)$ daje także linie zadość czyniące warunkóm poprzedzającym.

418. Przejdźmy teraz do zrównania ogólnego pierwszego rzędu $\Delta y = F(x, y)$. Obrawszy dowolnie, albo oznaczywszy podług warunków pytania, pierwszy punkt B (fig. 56), szukanej linii krzywej, ponieważ zrównanie założone nic nie stanowi względem punktów odpowiadających części ucinków $AA' = \Delta x$, i daje tylko przystawę $A'B' = y$, można będzie przez punkta B i B' , poprowadzić część linii krzywej jakiejkolwiek. To uczyniwszy, dla otrzymania części odpowiadającej ucin-kowi $A'A''$, weźmiemy przed którymkolwiek punktem P' tego ucinka, części $PP' = AA' = \Delta x$, i wyprowadzając przystawę PM , poprowadzimy linię MD' równoległą do PP' , wyciągniętą potem ze zrównania $\Delta y = F(x, y)$, wartość różnicy Δy odpowiadająca ucin-kowi AP , da linię prostą $D'M'$, która dodana do $P'D' = PM$, da poznać punkt M' . Znajdziemy także wszystkie punkta łuku $B'B''$; ten łuk użyty kolejno jak łuk BB' , da punkta łuku trzeciego $B''B'''$, i tak dalej.

Widoczną jest rzeczą; że tymże sposobem można byłoby ciągnąć linię krzywą przed punktem A , i że we wszystkich przypadkach zadość uczyni zrównaniu założonemu, bo różnice $\Delta y = D'M'$ będą miały wartości oznaczone z tego zrównania: zostawuje się czytelnikom zastosowanie tego sposobu do zrównań drugiego i wyższych rzędów.

419. Uważaliśmy tu zrównania różnicowe w przypuszczeniu tylko że $\Delta x = \text{stałe}$; lecz gdy przypuścimy tę ostatnią różnicę zmienną, rzecz staje się daleko roz-

ciągłęjszą, jak się o tém będzie można przekonać z pytania następującego.

Niech będzie $\varphi(x)$ funkcją nieznaną ilości x taką; ażeby, jeżeli zamienimy x na $f(x)$, potem na $F(x)$, gdzie f i F oznaczają funkcyę dane, wyrażenia odpowiadające $\varphi[f(x)]$, $\varphi[F(x)]$, miały między sobą stosunek dany.

Laplas sposobem bardzo prostym sprowadził ten rodzaj zagadnień do zrównań różnicowych w których ilość zmienna niezależna nabywa przyrostków stałych. W tym celu założmy $f(x)=u_z$, $F(x)=u_{z+1}$, gdzie u_z wyraża funkcją nieznaną ilości zmiennej z ; a jeżeli będzie można pierwsze z tych zrównań rozwiązać przez wzgląd na x , wyciągniemy z niego wartość $x=f(u_z)$, która zamieni funkcją $F(x)=u_{z+1}$ na zrównanie różnicowe $u_{z+1}=F[f(u_z)]$, w którym ilość zmienna z powiększa się jednością. Jeżeli będziemy mogli scałkować to zrównanie, będziemy mieli wyrażenie ilości u_z przez funkcją ilości z , otrzymamy także ilość x przez funkcją ilości z , funkcyę $\varphi[F(x)]$ i $\varphi[f(x)]$ staną się odpowiednio $\varphi(u_{z+1})$, $\varphi(u_z)$, i będzie można wyrazić je przez y_{z+1} , y_z , przez co związek dany między dwoma stanami, przez który funkcya φ przechodzić powinna, zamieni się na zrównanie różnicowe kształtu

$$f(y_z, y_{z+1}, z)=0,$$

Weźmy za przykład zrównanie

$$\varphi(x)^2=\varphi(2x)+2,$$

dla którego $x=u_z$, $2x=u_{z+1}$. Ztąd łatwo wyciągamy zrównanie $u_{z+1}=2u_z$, którego całką jest $u_z=C.2^z$ (412).

Kładąc potem $\varphi(x)=y_z$, $\varphi(2x)=y_{z+1}$, dane zrównanie zamienia się na

$$y_{z+1}=y_z^2-2,$$

i całkuje się czyniąc w niem

$$z=1, y_1=a+\frac{1}{a},$$

co prowadzi do

$$y_2 = a^2 + \frac{1}{a^2},$$

$$y_3 = a^4 + \frac{1}{a^4},$$

$$y_4 = a^8 + \frac{1}{a^8},$$

.....

$$y_z = a^{2^{z-1}} + \frac{1}{a^{2^{z-1}}}.$$

Ostatnia z tych wartości jest całką zupełną, bo żamyka ilość stałą a ; aże zrównanie $C \cdot 2^z + x$, daje $2^{z-1} = \frac{x}{2C}$, będziemy mieli wypadek

$$y_z = \phi(x) = a^{\frac{x}{2C}} + a^{-\frac{x}{2C}},$$

który wychodzi na

$$\phi(x) = b^x + b^{-x},$$

jeżeli położymy $b = a^{\frac{1}{2C}}$.

Trzeba uważać, że ilości stałe a i C , są funkcyami, które się nie odmienniają, gdy z staje się $z+1$ (394), a zatem gdy x staje się $2x$.

420. Łącząc zawsze każdy nowy punkt widzenia, pod którym wielkości mogą być uważane; z poprzedzającymi, Analisci uważają jeszcze związki między różnicami i współczynnikami różniczkowymi funkcyj niezna-nych; i ztąd powstaje *rachunek różnic mieszanych*.

Zrównania

$$\frac{dy}{dx} + a\Delta y + by = 0;$$

$$\frac{d\Delta y}{dx} + a \frac{dy}{dx} + b\Delta y + cy = 0;$$

w których a, b, c , oznaczają ilości stałe, i w których $\Delta x = 1$, są zrównaniami najprostszymi tego rodzaju. Czynimy zadość obu zrównanióm, kładąc $y = Ce^{mx}$; pierwsze zamienia się na

$$m + a(e^m - 1) + b = 0,$$

a drugie na

$$m(e^m - 1) + am + b(e^m - 1) + c = 0.$$

Roztrząsanie tych zrównań przerobionych i roztrząsanie przyrodzenia i rozciągłości całek z nich wypadających, przechodzą granice tu zakresłone; wskazaliśmy tylko miejsce tych nowych badań (*).

Zastosowanie rachunku całkowego do teorii szeregów.

421. Z tego, że całkowanie różniczek o jednej zmiennej przyprowadziło do szeregów, wniesiono, że można wyrazić szereg przez całkę; aże mamy sposoby do wyrachowania, chociaż przez przybliżenie, wartości jakiegokolwiek całki, między danými granicami (233), przeto starano się powrócić od szeregu do całki, której on jest rozwinięciem. Przez takowe uważania Euler wyprowadził na summowanie szeregów i na szukanie ogólnego ich wyrazu, sposoby bardzo dowcipne, których oto niektóre przykłady.

Niech będzie szereg założony

$$\frac{\alpha + \beta}{a + b} x + \frac{2\alpha + \beta}{2a + b} x^2 + \dots + \frac{n\alpha + \beta}{na + b} x^n + \text{i t. d.},$$

(*) Znaleść więcej szczegółów można w *Traité du calcul* in 4to T. III, rozdz. 8, Rachunek różnic mieszanych wskazany na-przód przez *Condorcet*, wykładany potem przez *Laplace*, *Paoli*, *Poisson*, odpowiada pytańóm geometrycznym, rozwiązany dawniej przez Eulera. Niedawno *Babbage* zajmował się temi pytaniami, jakoteż pytaniami w wykładzie liczby poprzedzające zawartými, które uważa jako powinno stanowić nową gałąź analizy zwaną *Rachunkiem funkcij* (Obacz *Transact. phil.* rok 1815—16—17).

mnożąc przez px^r , obie strony równania

$$s = \frac{a+\beta}{a+b}x + \frac{2a+\beta}{2a+b}x^2 + \dots + \frac{na+\beta}{na+b}x^n,$$

a potem różniczkując otrzymamy

$$pd(sx^r) = \frac{p(1+r)(a+\beta)x^r dx}{a+b} + \dots + \frac{p(n+r)(na+\beta)x^{n+r-1} dx}{na+b}.$$

Mnożnik $na+b$ zginie z mianownika wyrazu ogólnego, a zatem ze wszystkich wyrazów, jeżeli przy jakiegokolwiek wartości ilości n , będzie $p(n+r)=na+b$; więc uczynimy $np=na$, $rp=b$, z kądem

$$p=a, \quad r=\frac{b}{a},$$

co zamienia równanie poprzedzające na równanie

$$\frac{ad(sx^{\frac{b}{a}})}{dx} = (a+\beta)x^{\frac{b}{a}} + (2a+\beta)x^{1+\frac{b}{a}} + \dots + (na+\beta)x^{n-1+\frac{b}{a}},$$

którego druga strona nie zamyka już mianownika. Nowe działania podobne do poprzedzającego zagubiłyby mnożniki dalsze, jeżeliby mianownik je zamykał.

Mnożąc to samo równanie przez $px^r dx$, a potem biorąc całkę wyrazu każdego, otrzymamy

$$pafx^r d(sx^{\frac{b}{a}}) = \frac{pa(a+\beta)}{a+b+ra}x^{1+\frac{b}{a}+r} + \dots + \frac{pa(na+\beta)}{na+b+ra}x^{n+\frac{b}{a}+r};$$

mnożnik $na+\beta$ licznika zginie, jeżeli uczynimy

$$npa=na, \quad \beta pa=b+ra,$$

z kądem wypada

$$p=\frac{1}{a}, \quad r=\frac{\beta}{a}-\frac{b}{a},$$

$$\frac{a}{a} \int x^{\frac{\beta}{a}-\frac{b}{a}} d(sx^{\frac{b}{a}}) = x^{\frac{\beta}{a}+1} + x^{\frac{\beta}{a}+2} + \dots + x^{\frac{\beta}{a}+n}$$

$$= x^{\frac{\beta}{a}+1} (1+x+x^2+\dots+x^{n-1}),$$

a zatem

$$\frac{a}{\alpha} \int x^{\frac{\beta}{\alpha} - \frac{b}{\alpha}} d(sx^{\frac{b}{\alpha}}) = x^{\frac{\beta}{\alpha} + 1} \left(\frac{1-x^n}{1-x} \right).$$

złąd wyciągamy

$$s = \frac{\int x^{\frac{\beta}{\alpha} - \frac{b}{\alpha}} d \left[x^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}} \left(\frac{1-x^n}{1-x} \right) \right]}{ax^{\frac{b}{\alpha}}}.$$

422. W szeregu teraz uważanym liczba mnożników tak licznika jak mianownika była też sama w każdym wyrazie; lecz jest klasa szeregów, które Euler oznacza pod nazwiskiem *hypergéométriques*, w której liczba mnożników powiększa się od jednego wyrazu idąc do drugiego: szereg

$$s = \frac{\alpha+\beta}{a+b} x + \frac{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)}{(a+b)(2a+b)} x^2 + \dots + \frac{(\alpha+\beta) \dots (n\alpha+\beta)}{(a+b) \dots (na+b)} x^n,$$

należy do tej klasy. Postrzeżemy że ich summowanie sprowadza się do całkowania zrównania różniczkowego.

Mnożąc obie strony tego zrównania przez px^r , i biorąc ich różniczki, otrzymamy

$$pd(sx^r) = \frac{p(1+r)(\alpha+\beta)}{a+b} x^r + \dots + \frac{p(n+r)(\alpha+\beta) \dots (n\alpha+\beta)}{(a+b) \dots (na+b)} x^{n+r-1}$$

Zagubimy w mianowniku mnożnik $na+b$, zakładając

$$\text{zakład} \quad np+rp=na+b,$$

$$np=na, \quad rp=b,$$

$$p=a, \quad r=\frac{b}{p},$$

$$\begin{aligned} \frac{ad(sx^{\frac{b}{a}})}{dx} &= (\alpha+\beta)x^{\frac{b}{a}} + \frac{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)}{a+b} x^{1+\frac{b}{a}} \\ &+ \frac{(\alpha+\beta) \dots (n\alpha+\beta)}{(a+b) \dots [(n-1)a+b]} x^{n-1+\frac{b}{a}}. \end{aligned}$$

Każdą stronę tego równania mnożąc przez $px^r dx$, i całkując, otrzymamy równanie

$$pafx^r d(sx^{\frac{b}{a}}) = \frac{pa(\alpha + \beta)}{a + b + ra} x^{1 + \frac{b}{a} + r} + \dots + \frac{pa(\alpha + \beta) \dots (n\alpha + \beta)}{(na + b + ra)(a + b) \dots [(n-1)a + b]} x^{n + \frac{b}{a} + r},$$

a skoro będzie

$$npa\alpha + pa\beta = na + b + ra,$$

czyli

$$p = \frac{1}{a}, \quad r = \frac{\beta}{a} - \frac{b}{a},$$

mnożnik $n\alpha + \beta$ zginie z licznika. Wyłączając potem z drugiej strony równania spólny mnożnik $x^{\frac{\beta}{a} + 1}$, otrzymamy

$$\frac{a}{\alpha} f x^{\frac{\beta}{a} - \frac{b}{a}} d(sx^{\frac{b}{a}}) = x^{\frac{\beta}{a} + 1} \left\{ 1 + \frac{(\alpha + \beta)x}{a + b} + \dots + \frac{(\alpha + \beta) \dots [(n-1)\alpha + \beta] x^{n-1}}{(a + b) \dots [(n-1)a + b]} \right\}.$$

Szereg w drugiej stronie równania między nawiasami zawarty jest to szereg założony, powiększony jednością a zmniejszony ostatnim wyrazem, przeto wносimy, że

$$\frac{a}{\alpha} f x^{\frac{\beta}{a} - \frac{b}{a}} d(sx^{\frac{b}{a}}) = x^{\frac{\beta}{a} + 1} \left\{ 1 + s - \frac{(\alpha + \beta) \dots (n\alpha + \beta) x^n}{(a + b) \dots (na + b)} \right\}.$$

Różniczkując to równanie, uwolnimy je od znaku całkowania w pierwszej jego stronie znajdującego się, i otrzymamy równanie, od którego zależy szukana summa.

Z tego przykładu poznajemy, jak należy działać względem szeregów tegoż gatunku bardziej zawikłanych, uważając, że każde całkowanie podaje sposób zagubienia mno-

żnika w liczniku, a każde różniczkowanie mnożnika w mianowniku.

425. Jeżelibyśmy nie uważali wyrazu ostatniego, mielibyśmy, zamiast summy szczegółnej, granicę szeregu uważanego aż do nieskończoności, czyli funkcją rodzącą (*fonction génératrice*) tego szeregu; bo widoczną jest rzeczą, że sposoby poprzedzające są odwrotne względem sposobów, przez które oznaczają się szeregi zadość czyniące danym zrównaniom różniczkowym.

Gdyby wypadało *np.* znaleźć granicę szeregu

$$s = 1x - 1.2x^2 + 1.2.3x^3 - \text{i t. d.},$$

można byłoby użyć pierwszego przerabiania z liczbą poprzedzającej, czyniąc

$$\alpha = 1, \beta = 0, a = 0, b = 1;$$

lecz prosto do niej przyjdziemy mnożąc przez x , obie strony zrównania założonego, a potem je różniczkując. Tym sposobem otrzymamy

$$sx = 1x^2 - 1.2x^3 + 1.2.3x^4 - \text{i t. d.},$$

$$\frac{d(sx)}{dx} = 1.2x - 1.2.3x^2 + 1.2.3.4x^3 - \text{i t. d.},$$

mnożąc ostatnie zrównanie przez x , wypadnie zrównanie

$$x \frac{d(sx)}{dx} = 1.2x^2 - 1.2.3x^3 + 1.2.3.4x^4 - \text{i t. d.},$$

którego druga strona jest widocznie równa ilości $x-s$; a tak będziemy mieli

$$x-s = \frac{x d(sx)}{dx},$$

czyli

$$ds + \frac{s(x+1)}{x^2} dx = \frac{dx}{x}.$$

Całką tego ostatniego zrównania jest

$$s = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \int e^{-\frac{1}{x}} dx. \quad (324)$$

Ażeby wyrażenie poprzedzające odpowiadało szeregowi założonemu, powinna całka niknąć, gdy $x=0$; a jeżeli ją weźmiemy aż do $x=1$, będziemy mieli ilość odpowiadającą szeregowi rosnącemu

$$1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 - \text{it. d.}$$

424. Całki ograniczone dostarczają także sposobu wyrażania części szeregu

$$u + \frac{du}{dx} \frac{h}{1} + \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{it. d.},$$

zaczynając od jakiegokolwiek wyrazu. Oto sposób, którym *D'Alembert* przychodzi do tego, i razem dowodzi wzoru *Tajlora* (*Recherches sur differens points importants du système du monde*. Tom I, str. 50).

Niech u' wyraża funkcją u , gdy w niej zamienimy x na $x+h$; kładąc

$$u' = u + P,$$

i różniczkując przez wzgląd na ilość h , która nie wchodzi do u , otrzymujemy

$$\frac{du'}{dh} = \frac{dP}{dh}, \quad \text{z kąd } P = \int \frac{du'}{dh} dh,$$

$$u' = u + \int \frac{du'}{dh} dh.$$

Niech będzie

$$\frac{du'}{dh} = \frac{du}{dx} + Q,$$

różniczkując znowu ze względu na ilość h , mamy

$$\frac{d^2 u'}{dh^2} = \frac{dQ}{dh}, \quad \text{z kąd } Q = \int \frac{d^2 u'}{dh^2} dh,$$

$$\frac{du'}{dh} = \frac{du}{dx} + \int \frac{d^2 u'}{dh^2} dh, \quad \int \frac{du'}{dh} dh = \frac{du}{dx} \frac{h}{1} + \int \int \frac{d^2 u'}{dh^2} dh^2,$$

$$u' = u + \frac{du}{dx} \frac{h}{1} + \int \int \frac{d^2 u'}{dh^2} dh^2,$$

kładąc jeszcze

$$\frac{d^2 u'}{dh^2} = \frac{d^2 u}{dx^2} + R,$$

znajdujemy

$$\frac{d^5 u'}{dh^5} = \frac{dR}{dh}, \quad \text{z kąd } R = \int \frac{d^5 u'}{dh^5} dh,$$

$$\frac{d^2 u'}{dh^2} = \frac{d^2 u}{dx^2} + \int \frac{d^5 u'}{dh^5} dh,$$

$$u' = u + \frac{du}{dx} \frac{h}{1} + \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \int \int \int \frac{d^5 u'}{dh^5} dh^5.$$

Postępując tym sposobem dalej, przyszlibyśmy do

$$u' = u + \frac{du}{dx} \frac{h}{1} + \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \dots + \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} \frac{h^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} + \int \frac{d^n u'}{dh^n} dh^n,$$

gdzie całki tak są wzięte, że giną gdy $h=0$.

425. Założmy dla skrócenia $\frac{d^n u}{dh^n} = \text{stałej}$, będziemy mieli (242),

$$\begin{aligned} \int^n H dh^n = & \frac{1}{1.2 \dots (n-1)} \left\{ h^{n-1} \int H dh - \frac{(n-1)h^{n-1}}{1} \int H h dh \right. \\ & \left. + \frac{(n-1)(n-2)h^{n-3}}{1.2} \int H h^2 dh - \text{i t.d.} \right\}; \end{aligned}$$

i łatwą jest rzeczą widzieć, że za szereg poprzedzający będzie można podstawić wyrażenie

$$\frac{1}{1.2 \dots (n-1)} \int H (t-h)^{n-1} dh,$$

wzięte od $h=0$, bylebyśmy po scałkowaniu zamienili t na h ; bo rozwinięszy to wyrażenie, z pod znaku $\int$ wyprowadziwszy potęgi ilości t , przez które są mnożone rozmaite wyrazy, a potem uczyniwszy $t=h$, wpadniemy na szereg założony.

Ztąd wypada, że

$$u' = u + \frac{du}{dx} \frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \dots + \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} \frac{h^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} \\ + \frac{1}{1.2 \dots (n-1)} \int \frac{d^n u'}{dh^n} (t-h)^{n-1} dh,$$

bylebyśmy tak wzięli całkę, ażeby ona ginęła, gdy $h=0$, a potem zamienili t na h .

Można, w tym wzorze, zamienić $\frac{d^n u'}{dh^n}$ na $\frac{d^n u'}{dx^n}$ (89); a jeżeli pod znakiem całkowania, uczynimy $t-h=zt$, czyli $h=t(1-z)$, będziemy mieli

$$dh = -tdz, \quad \int \frac{d^n u'}{dx^n} (t-h)^{n-1} dh = - \int \frac{d^n u'}{dx^n} t^n z^{n-1} dz.$$

Granicami całki będą wtedy $z=1$, $z=0$; uczynimy ją dodatnią, przewracając porządek tych granic, to jest biorąc ją od $z=0$, aż do $z=1$; na koniec gdy wyprowadzimy t^n z pod znaku $\int$, i napiszemy h na miejscu t , ostatni wyraz poprzedzającego wzoru stanie się

$$\frac{h^n}{1.2 \dots (n-1)} \int \frac{d^n u'}{dx^n} z^{n-1} dz.$$

Lagranż podał to ostatnie twierdzenie, lecz innym sposobem, w dziele *Théorie des fonctions analytiques*, 2^{re} wyd. nr 35 i następ.

Używa go dla dowiedzenia, że można zawsze uczynić sumę wszystkich wyrazów szeregu Taylora, zaczynając od któregokolwiek wyrazu, mniejszą od wyrazu poprzedzającego. Jeżeli M i m oznaczają największą i najmniejszą wartość, której nabywa wyraz $\frac{d^n u'}{dx^n}$ w przestrzeni od x do $x+h$, łatwo się zapewnimy, że

$$\int \frac{d^n u'}{dx^n} z^{n-1} dz < \int M z^{n-1} dz > \int m z^{n-1} dz,$$

skoro w tej przestrzeni współczynnik różniczkowy $\frac{d^n u'}{dx^n}$ nie zmienia znaku, lub nie staje się nieskończenie wielkim (234). W danych granicach te dwie całki, są $\frac{M}{n}$ i $\frac{m}{n}$; a biorąc ilość h małości przyzwoitej, uczynimy

ilość $\frac{h^n}{1.2 \dots n} M$, w porównaniu do ilości

$\frac{h^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}}$, tak małą, ile zechcemy.

426. Tym to sposobem całki ograniczone służą do oszacowania ilości, którebyśmy przez inne sposoby z trudnością otrzymali; często nabywają one wartości znakomitych.

Za prostém spójrzeniem na przypadki szczególne całki $\int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$, przytoczone pod liczbą 197, postrzegamy, że te wyrażenia sprowadzają się do jednego tylko wyrazu, gdy bierzemy je między granicami $x=0$, i $x=1$, a że w tym razie łuk A staje się równym ćwiartce okręgu koła, mamy dwa szeregi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{1},$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1,$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1. \pi}{2.2},$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3},$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3 \pi}{2.4.2},$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4}{3.5},$$

$$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5 \pi}{2.4.6.2},$$

$$\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6}{3.5.7},$$

$$\int \frac{x^8 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5.7 \pi}{2.4.6.8.2},$$

$$\int \frac{x^9 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9},$$

i t. d.

z których wnosimy, w ogólności

$$\int \frac{x^{2r} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5 \dots (2r-1)\pi}{2.4.6 \dots 2r.2},$$

$$\int \frac{x^{2r+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6 \dots 2r}{3.5.7 \dots (2r+1)}.$$

Mnogość tych wypadków daje

$$\int \frac{x^{2r} dx}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{x^{2r+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2r+1} \cdot \frac{\pi}{2},$$

Dzieląc zaś pierwszy wypadek przez drugi znajdujemy

$$\frac{\int \frac{x^{2r+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\int \frac{x^{2r} dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{2.2.2.4.4 \dots 2r.2r}{\pi 1.3.3.5.5 \dots (2r-1)(2r-1)(2r+1)}.$$

Dla poznania, czém się staje pierwsza strona tego zrównania, gdy posuwamy liczbę mnożników strony drugiej aż do nieskończoności, to jest gdy robimy $r = \infty$, biorąc $x^{2r} = z$; granice ilości z , są te same, jakie są ilości x ; lecz mamy

$$x = z^{\frac{1}{2r}}, \quad dx = \frac{1}{2r} z^{\frac{1}{2r}-1} dz,$$

$$\int \frac{x^{2r+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2r} \int \frac{z^{\frac{1}{2r}} dz}{\sqrt{1-z^{\frac{1}{r}}}},$$

$$\int \frac{x^{2r} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2r} \int \frac{z^{\frac{1}{2r}} dz}{\sqrt{1-z^{\frac{1}{r}}}.$$

Stosunek różniczek będąc $z^{\frac{1}{2r}}$, zbliża się do z^0 , to jest do 1, w miarę powiększania się ilości r ; a biorąc w granicy można uważać ten stosunek, jako równy je-

dności; to samo się dzieje ze stosunkiem całek, bo one poczynają się i kończą razem z różniczkami: więc ztąd wniesiemy

$$1 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot i \cdot t \cdot d.}{\pi \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot i \cdot t \cdot d.},$$

a zatem

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot i \cdot t \cdot d.}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdot i \cdot t \cdot d.}.$$

To znakomite wyrażenie cwiartki okręgu koła należy się geometrze *Wallis*.

427. Przekształcenie zrównania

$$\int \frac{x^{2r} dx}{\sqrt{1-x^2}} \int \frac{x^{2r+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2r+1} \frac{\pi}{2},$$

proceedzi do wartości całki $\int e^{-t^2} dt$, wziętej między granicami $t=0$, $t=\infty$, która się przedstawia w wielu badaniach bardzo ciekawych.

Jeżeli uczynimy $x=e^{-qt^2}$, zrównanie poprzedzające zamienia się na

$$4q^3 \left(\int \frac{tdte^{-qt^2} \cdot e^{-2qt^2}}{\sqrt{1-e^{-2qt^2}}} \right) \left(\int \frac{tdte^{-qt^2} \cdot e^{-q(2r+1)t^2}}{\sqrt{1-e^{-2qt^2}}} \right) = \frac{1}{2r+1} \frac{\pi}{2};$$

czyniąc $q(2r+1)=1$, i wartość za $2r+1$ kładąc w drugiej stronie zrównania, potem dzieląc wszystkie wyrazy przez q , a pod znakami pierwiastkowými przez $2q$, otrzymujemy

$$2 \left(\int \frac{tdte^{-t^2}}{\sqrt{1-e^{-2qt^2}}} \right) \left(\int \frac{tdte^{-t^2(1+q)}}{\sqrt{1-e^{-2qt^2}}} \right) = \frac{\pi}{2};$$

to zrównanie, gdy w niem uczynimy $q=0$, sprowadza się do

$$2(\int e^{-t^2} dt)^2 = \frac{\pi}{2}, \text{ czyli do } \int e^{-t^2} dt = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

bo w przypuszczeniu $q=0$, granicą wyrażenia $\frac{1-e^{-qt^2}}{2q}$, jest t^2 .

Lecz jest $t = \infty$, gdy jest $x = 0$, jest zaś $t = 0$, gdy $x = 1$; więc granicami ostatniej całki są ∞ , i 0 ; aże funkcyja e^{-t^2} jest zawsze dodatnią, przeto znak górny odpowiada granicom 0 i $+\infty$, podwaja się zaś całka, gdy ją bierzemy od $t = -\infty$, aż do $t = +\infty$, więc jej wartość w tym razie jest $\sqrt{\pi}$.

428. Laplas wyrażeniu $\int e^{-t^{m+1}} t^n dt$, daje kształt $\int t^{n-m} e^{-t^{m+1}} t^m dt$; całkując to ostatnie przez części otrzymamy

$$\int e^{-t^{m+1}} t^n dt = -\frac{1}{m+1} \left\{ t^{n-m} e^{-t^{m+1}} - (n-m) \int e^{-t^{m+1}} t^{n-m-1} dt \right\}.$$

Gdy wykładnik $n-m$ jest dodatni, część wolna od znaku $\int$ ginie między granicami $t=0$, i $t=\infty$, i zostaje

$$\int e^{-t^{m+1}} t^n dt = \frac{n-m}{m+1} \int e^{-t^{m+1}} t^{n-m-1} dt,$$

gdzie druga całka bierze się między temiż granicami, co i pierwsza.

Jeżeli uczynimy $m=1$, wypadnie

$$\int e^{-t^2} t^n dt = \frac{n-1}{2} \int e^{-t^2} t^{n-2} dt,$$

a powtarzając to uproszczanie będziemy mieli wypadek

$$\int e^{-t^2} t^n dt = \frac{(n-1)(n-3) \dots (n-2r+1)}{2^r} \int e^{-t^2} t^{n-2r} dt,$$

który ginie gdy $n=2r-1$, gdy zaś $n=2r$, daje

$$\int e^{-t^2} t^{2r} dt = \frac{(2r-1)(2r-3) \dots 1}{2^r} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Stosowną jest także rzeczą uważać, że gdy uczynimy $e^{-t^{m+1}} = x$, otrzymamy

$$\int e^{-t^{m+1}} t^n dt = -\frac{1}{m+1} \int dx \left(l \frac{1}{x} \right)^{\frac{n-m}{m+1}};$$

granicami w tym razie są 1 , i 0 , a jeżeli odmienimy porządek, trzeba będzie znak — opuścić.

Jeżeli założymy $m=1$, $n=0$, znajdziemy

$$\int e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int dx \left(l \frac{1}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

429. Przytoczymy tu jeszcze oszacowanie całki $\int e^{-a^2 x^2} dx$ dost rx , między granicami $x=0$ i $x=\infty$, należące się Laplasowi, i znakomite przez sposób użyty do jego otrzymania

Czyniąc $\int e^{-a^2 x^2} dx$ dost $rx=y$,

i różniczkując ze względu na ilość r (281), wyciągamy

$$\frac{dy}{dr} = -\int e^{-a^2 x^2} x dx \text{ wst } rx;$$

potém całkując przez części ze względu na mnożnik $e^{-a^2 x^2} x dx$, znajdziemy

$$\frac{dy}{dr} = \frac{e^{-a^2 x^2}}{2a^2} \text{ wst } rx - \frac{r}{2a^2} \int e^{-a^2 x^2} dx \text{ dost } rx,$$

co wychodzi na

$$\frac{dy}{dr} = -\frac{r}{2a^2} y, \text{ czyli } \frac{dy}{dr} + \frac{r}{2a^2} y = 0,$$

gdy w części wolnej od znaku $\int$, założymy $x=\infty$.

Zrównanie poprzedzające między zmiennymi y i r , ma za całkę

$$y = C e^{-\frac{r^2}{4a^2}} \quad (285),$$

gdzie C jest ilością stałą dowolną oznaczoną za pomocą wartości, której nabywa ilość y , gdy kładniemy $r=0$, tojest

$$\int e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}. \quad (427).$$

Tym sposobem znajdziemy

$$\int e^{-a^2 x^2} dx \text{ dost } rx = \frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2}} \sqrt{\pi}}{2a}.$$

Tu się okazuje nowa sztuka analityczna zależąca na utworzeniu między całkami i niektórymi ilościami stałymi do całek wchodzącymi, zrównań różniczkowych, które się mogą całkować. Za pomocą takowego postępowania i przerabiania bardzo rozmaitych i bardzo dowcipnych PP. Laplas, Leżandr, Poasson (*Poisson*), Jerzy Bidone, i Koszy (*Cauchy*) swojemi pracami pomnożyli oznaczania całek ograniczonych, których piękne i liczne przykłady okazane już były przez Eulera; lecz żądać jeszcze należy sposobu jednostajnego, któryby w jedno ciało połączył te wszystkie badania, do których postępu zdaje się być przywiązany teraz postęp wielu gałęzi ważnych fizyki matematycznej.

430. Ciągłość zachodząca między różnemi wartościami, które nabywa całka, odpowiednie do wartości nadawanych ilościami, od których ta całka zależy, dała powód zastosowania całek ograniczonych do interpolacji szeregow (387).

Gdy w rozwinięciu całki $\int x^m dx (lx)^n$ (208), uczynimy $m=0$, i weźmiemy ją między granicami $x=0$, i $x=1$, część wolna od znaku f , złożona z wyrazów kształtu $x(lx)^r$ ginie, bo ilość r , równie jak m jest dodatną (95), a zostaje tylko wyraz ostatni, i wtedy mamy

$$\int dx (lx)^n = \pm 1.2.3 \dots n,$$

gdzie znak $+$ bierze się gdy ilość n jest parzystą, a znak $-$, gdy n jest nieparzystą. Unikniemy tego rozróżnienia dając wyrazowi lx znak $-$, przez co poprzedzające zrównanie zamienia się na zrównanie

$$\int dx (-lx)^n = \int dx \left(1 \frac{1}{x}\right)^n = 1.2.3 \dots n,$$

które prosto otrzymujemy, uważając że

$$\int dx \left(1 \frac{1}{x}\right)^n = x \left(1 \frac{1}{x}\right)^n + n \int dx \left(1 \frac{1}{x}\right)^{n-1},$$

i że między granicami $x=0$, $x=1$, mamy tylko

$$\int dx \left(\frac{1}{x} \right)^n = n \int dx \left(\frac{1}{x} \right)^{n-1}.$$

więc będzie można uważać całkę $\int dx \left(\frac{1}{x} \right)^n$ jako wyrażającą ogólny wyraz szeregu powstałego z iloczynów

1, 1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3. n, i t. d.,

odpowiadających skazówkom

0, 1, 2, 3, : n, i t. d.;

jakoż ma ona wszystkie jego własności znajome co do całych wartości ilości n . Więc dając temu wykładnikowi wartości ułamkowe albo niewymierne, wprowadzilibyśmy do szeregu wyrazy pośrednie temu samemu prawu podległe co inne.

Przypadek, gdy $n=\frac{1}{2}$ jest jednym z najznakomitszych; albowiem

$$\int dx \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int dx \left(\frac{1}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \sqrt{x} \quad (428).$$

Vandermonde i *Kramp* oddawna już byli proponowali wprowadzić w analizę funkcją, któraby przedstawiała ogólny wyraz szeregu poprzedzającego, jako wyrażającą nowy rodzaj ilości przestępnych obdarzonych znakomitými własnościami przez ich podobieństwo z własnościami potęg; a potem *Ležandr* przywiązując się do ich wyrażenia w całkach ograniczonych, wyprowadził między niemi wiele związków bardzo użytecznych, i wyrachował ich tablice liczebne bardzo rozciągle (*).

431. Wyrażenie ilości $\frac{\pi}{2}$ znalezione pod liczbą 426, wchodzi do wzoru danego przez *Styrlinga* (*Stirling*), dla ra-

(*) Obacz *Traité du Calcul* in 4to tom III, stro. 411, 481.

chowania summy szeregu logarytmów należących do liczb idących w postępie różnicowym, a do której przyjść można sposobem następującym.

Z liczby 406, mamy

$$S_1x = S_1x + 1x;$$

kładąc w tém zrównaniu za S_1x , wartość, którą otrzymamy gdy w wyrażeniu ilości S_n pod liczbą 403, uczynimy $u=1x$, $h=1$, i uważając że $\int dx 1x = x 1x - x$ (208), znajdziemy

$$S_1x = x 1x - x + (1+A)1x + \frac{B}{x} - \frac{C}{x^2} + \frac{2D}{x^5} - \text{i t. d.} + \text{stała},$$

potém rachując rozwinięcie funkcji $\frac{1}{e^h - 1}$, otrzymane według potęg ilości h , mieć będziemy

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{12}, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{720}, \quad \text{i t. d.}$$

Nie można oznaczyć ilości stałej, czyniąc $x=1$, bo szereg spółczynników A, B , i t. d., w dalszym ciągu staje się rosnącym; udajemy się w tym razie do wyrażenia ilości x z liczby 426. Przechodząc do logarytmów, i zatrzymując się na liczbie parzystej $2x$ w liczniku, otrzymujemy

$$1x - 12 = \begin{cases} 212 + 214 + 216 + 218 + 110 + \dots + 21(2x-2) + 12x \\ -11 - 215 - 215 - 217 - 219 - \dots - 21(2x-5) - 21(2x-1); \end{cases}$$

a biorąc granice w przypuszczeniu że jest $x=\infty$, znajdziemy za pomocą wyrażenia poprzedzającego ilości S_1x ,

$$11 + 12 + 13 + 14 + \dots + 1x = \text{stała} + (x + \frac{1}{2})1x - x,$$

$$11 + 12 + 13 + 14 + \dots + 12x = \text{stała} + (2x + \frac{1}{2})12x - 2x,$$

$$12 + 14 + 16 + \dots + 12x = S_1x + x 12 = \text{stała} + (x + \frac{1}{2})1x + x 12 - x.$$

Gdy odciągniemy trzeci szereg od drugiego, wypada

$$11 + 13 + 15 + 17 + \dots + 1(2x-1) = x 1x + (x + \frac{1}{2})12 - x,$$

zkąd wnosimy

$$\left. \begin{aligned} &2l2+2l4+2l6+\dots+2l(2x-2)+l2x \\ &-2l1-2l3-2l5-\dots-2l(2x-3)-2l(2x-1) \end{aligned} \right\}$$

$$= \begin{cases} 2 \text{ stała} + 2(x+\frac{1}{2})lx + 2xl2 - 2x - l2x \\ -2x1x - 2(x+\frac{1}{2})l2 + 2x; \end{cases}$$

a że pierwsza strona tego zrównania jest równa wyrażeniu $l\pi - l2$, przeto, po uproszczeniu drugiej strony, otrzymamy wypadek bardzo znakomity

$$l\pi - l2 = 2 \text{ stała} - 2l2,$$

z stała = $\frac{1}{2}(\pi + l2) = \frac{1}{2}l2\pi = l\sqrt{2\pi}$, |

podług którego mamy

$$Slx = \frac{1}{2}l2\pi + x1x - x + \frac{1}{2}lx + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + i \text{ t. d.}$$

Uczynimy to zrównanie właściwem jakimukolwiek układowi logarytmów, mnożąc przez zamiennik wyrazy niezamykające logarytmów (*).

432. Euler zajmując się wzorem poprzedzającym, u-

(*) To zrównanie, gdy przejdziemy od logarytmów do liczb, daje

$$1.2.3 \dots x = x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \sqrt{\frac{1}{2\pi \cdot e}} \left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + i \text{ t. d.} \right);$$

$$\begin{aligned} \text{lecz } e^{\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + i \text{ t. d.}} &= 1 + \left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + i \text{ t. d.} \right) \\ &+ \frac{1}{1.2} \left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + i \text{ t. d.} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{1.2.3} \left(\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + i \text{ t. d.} \right)^3 \\ &+ i \text{ t. d.} \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + \frac{149}{51840x^3} + i \text{ t. d.,}$$

trzy pierwsze wyrazy tego wypadku zgadzają się ze wzorem podanym przez Laplasa w dziele *Théorie analytique des probabilités* stro. 129.

żył go do znalezienia summy logarytmów tablicowych
tysiąca liczb pierwszych, to jest wartości szeregu

$$1 + 12 + 13 + \dots + 11000.$$

Cecha 1 oznacza logarytmy zwyczajne, zamiennik
będzie dla skrócenia wyrażony przez M ; a że $x=1000$,
przeto otrzymamy

$$\begin{aligned} x \lg x &= 3000,00000000000000 \\ + \frac{1}{2} \lg x &= 1,50000000000000 \\ + \frac{1}{2} \lg 2\pi &= 0,3990893341790 \\ - Mx &= - 344,2944819032518 \\ + \frac{M}{12x} &= + 0,0000361912068 \\ - \frac{M}{360x^3} &= - 0,0000000000012 \end{aligned}$$

wypadek

$$2567,6046442221328;$$

lecz według znakowania pod liczbą 412 wskazanego

jest $1 + 12 + 13 + \dots + 11000 = 1.2.3 \dots 1000 = 1[1000];$

więc będziemy mieli

$$1[1000] = 2567,6046442221328.$$

Poznajemy ztąd, że liczba $1[1000]$, której rachunek
jest prawie niepodobny do wykonania, powinna mieć
2568 znaków liczebnych, siedmią zaś początkowymi zna-
kami z lewej strony będą 4023872, przeto liczba szu-
kana będzie zawartą między liczbami 4023872, i 4023873,
mającymi na końcu zer 2561. Ta wiadomość jest do-
stateczną w wielu badaniach, w których szukamy tyl-
ko stosunków mnogości z liczb wielkich; a w takowym
razie wartość przybliżona tych stosunków staje się rze-
czą szacowną, z powodu niepodobieństwa wykonania ra-
chunków potrzebnych dla otrzymania wartości dokła-
dnej. Długość tych rachunków przedstawia zawadę

tak niepokonaną, jak trudność wyrażenia ściśle funkcji przestępnej. Laplas znacznie rozszerzył to badanie, którego zastosowania w rachunku prawdopodobieństwa są bardzo częste.

433. Całki ograniczone, ponieważ dają, jakośmy widzieli, summy szeregów, były przez PP. *Laplace*, *Parseval*, *Fourier*, *Poisson* i *Cauchy* korzystnie użyte do wyrażania całek zrównań różniczkowych cząstkowych takich, jakie są pod liczbą 351, które scałkować się w wyrazach skończonych nie mogą.

Laplas odkrył, że szereg

$$z = \varphi(x) + \varphi''(x) \frac{y}{1} + \varphi'''(x) \frac{y^2}{1.2} + \text{i t. d.},$$

otrzymany pod liczbą 352, był tylko rozwinięciem całki

$$\int e^{-t^2} dt \varphi(x + 2t\sqrt{y}),$$

wziętej co do ilości t między granicami $t = -\infty$, i $t = +\infty$, gdzie funkcja φ jest dowolną. O czém można się łatwo przekonać sposobem następującym.

Mamy naprzód za pomocą wzoru Tajlora

$$\begin{aligned} \int e^{-t^2} dt \varphi(x + 2t\sqrt{y}) &= \varphi(x) \int e^{-t^2} dt + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{1} \varphi'(x) \int e^{-t^2} 2t dt \\ &+ \frac{y^{\frac{2}{2}}}{1.2} \varphi''(x) \int e^{-t^2} 4t^2 dt + \frac{y^{\frac{3}{2}}}{1.2.3} \varphi'''(x) \int e^{-t^2} 8t^3 dt \\ &+ \frac{y^{\frac{4}{2}}}{1.2.3.4} \varphi^{(4)}(x) \int e^{-t^2} 16t^4 dt + \text{i t. d.} \end{aligned}$$

Powtóre, całki zostające w tém rozwinięciu giną na wszystkie wykładniki nieparzyste, a w przeciwnym razie są równe wyrażeniu

$$\frac{1.2.3 \dots (2r-1)}{2^r} \sqrt{\pi} \quad (428),$$

z przyczyny że są wzięte między granicami $-\infty$ i $+\infty$. Podstawując te wartości i w funkcji dowolnej $\varphi(x)$ za-

mykając stały mnożnik $\sqrt{y}$, mamy zupełnie szereg założony; a tak zrównanie

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{dz}{dy},$$

ma za całość zrównanie

$$z = \int e^{-t^2} dt \phi(x + 2t\sqrt{y}).$$

Ta całość łatwo się sprawdza. Różniczkując pod znakiem całkowania znajdujemy (281)

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \int e^{-t^2} dt \phi''(x + 2t\sqrt{y}),$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}} \int e^{-t^2} t dt \phi'(x + 2t\sqrt{y})$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-t^2} \phi'(x + 2t\sqrt{y}) + \int e^{-t^2} dt \phi''(x + 2t\sqrt{y}),$$

całkując przez części względem mnożnika $e^{-t^2} t dt$; a jeżeli przypuścimy, że funkcyja $\phi'(x + 2t\sqrt{y})$ jest taką, że mnożąc jej przez e^{-t^2} staje się równą zeru, gdy $t = \infty$, współczynnik róż. $\frac{dz}{dy}$ nabędzie tej samej wartości, jakiej nabywa $\frac{d^2 z}{dx^2}$.

K O N I E C .



2021182

PRZYPISKI.

Przypisek A wskazany pod liczbą 59.

I. Rachunek różniczkowy, uważany w sposobach, które go stanowią, jest prostszym, niżli wyższe części Algebry. Jego trudność zależy tylko od trudności pojęcia z początku, jaki jest cel jego, i zrozumienia niektórych wyrazów nowych, które trzeba było do niego wprowadzić.

Jedno zagadnienie z Geometrii, to jest zagadnienie Pappusa, rozwiązane przez starożytnych w niektórych tylko szczególnych przypadkach, doprowadziło Dekarta do wynalezienia zastosowania Algebry do linii krzywych; tak też jedno zagadnienie, którem jest zagadnienie stycznych, przywiodło do odkrycia rachunku różniczkowego.

Od czasów Euklidesa można było uważać, że styczne miały własności siecznych tak umiarkowane, jak wymaga złączenie się dwóch punktów przecinania się w punkt jeden, który wtedy staje się punktem stykania się. Na tej też zasadzie opierają się wyraźnie, lub niewyraźnie wszystkie podane w rachunku sposoby prowadzenia stycznych do linii krzywych. Z pomiędzy tych sposobów wybraliśmy sposób Barrowa (*Barrow*), który nie jest jeszcze rachunkiem różniczkowym, lecz do niego zbliża się najwięcej.

Niech będzie *np.* parabola zwyczajna dana przez zrównanie $y^2 = px$; weźmy na tej linii krzywej dwa punkta *M* i *M'*, (*fig. 1*), i przez nie poprowadźmy linią prostą, kładąc

$$AP = x, \quad PP' = h, \quad AP' = x + h,$$

$$PM = y, \quad M'Q = k, \quad P'M' = y + k,$$

i porównywając trójkąty podobne *M'QM* i *MPS*,

będziemy mieli

$$M'Q:MQ = PM:PS, \text{ ztąd } PS = y \frac{h}{k};$$

a że punkt M' należy do linii krzywej, mamy też

$$(y+k)^2 = p(x+h);$$

rozwijając to równanie, i od niego odcinając zrównanie $y^2 = px$, otrzymamy

$$2yk + k^2 = ph, \text{ ztąd } \frac{2y+k}{p} = \frac{h}{k};$$

więc $PS = y \frac{2y+k}{p}$. Lecz jeżeli punkt M' zejdzie się z punktem M , h i k zginą, PS zamieni się na PT , a wartość linii PS , sprowadzi się do $\frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$.

Pierwsza uwaga tu się przedstawująca jest ta, że pomimo zniknięcia ilości h i k , ułamek wyrażający ich stosunek nie niknie, to jest ma wartość mogącą się oszacować, bo się sprowadza do wartości $\frac{2y}{p}$, do której wartość wyrażenia $\frac{2y+k}{p}$ zbliża się w miarę zmniejszania się ilości k , i od której może różnić się tak mało, ile zechcemy biorąc ilość k dość małą.

Więc ułamek $\frac{2y}{p}$ jest granicą ułamku $\frac{2y+k}{p}$, czyli ułamku $\frac{MQ}{M'Q}$, jak ułamek $\frac{PT}{PM}$ jest granicą ułamku $\frac{PS}{PM}$. Dla przekonania się że wartość ułamku

$\frac{PS}{PM}$ może zbliżyć się do wartości ułamku $\frac{PT}{PM}$ tyle, ile zechcemy, dość jest uważać, że gdyby punkt M' przeszedł za punkt M , punkt S padłby z drugiej strony punktu T .

II. Do tego przykładu wziętego z Geometrii, dodajmy jeszcze przykład z Mechaniki.

Ciała spadają ku powierzchni ziemi dla siły stale działającej, i z jej powodu ruchy ich przyśpieszają się, to jest ciała przebiegają coraz większe drogi w czasach równych, gdy bierzemy te czasy coraz dalsze od momentu początku ruchu.

I tak wyrażając drogę, którą przebiegają w pierwszej sekundzie przez 1, będziemy mieli drogę w drugiej sekundzie przebieżoną 3, w trzeciej 5, i t. d.; są to ilości dane z doświadczenia, które przywiodły Galileusza do odkrycia, że siła tu wymieniona czyli ciężkość, jest siłą stałą, to jest że w jednym tym samym czasie sprawuje tę samą prędkość. *Przez prędkość należy rozumieć drogę, którąby ciało przebiegło w jednostce czasu, gdyby siła przestała na nie działać w początku tej jednostki.* To założywszy obaczmy teraz jak można rachować skutki podobnej siły.

Zamiast przypuszczenia, że działa stale, wyobraźmy że jej działania, zawsze równe, są momentalne, jak działanie uderzenia (*impulsion*), i że się powtarzają w czasach wyrażonych przez ułamek $\frac{1}{m}$, to jest przez część m ą sekundy, wziętej za jednostkę czasu. Ciało więc nabędzie przez jednostkę czasu liczbę m tych działań, których skutki dodając się jedne do drugich, nadadzą mu w końcu tego czasu prędkość całkowitą, którą wyrażmy przez p . Więc prędkość, którąby wynikła z jednego tylko działania, zawsze w jednostce czasu, byłaby $\frac{p}{m}$. A tak przez czas $\frac{1}{m}$, ciało przebiegłoby tylko drogę $\frac{p}{m^2}$. Uważając czasy po sobie następujące

$$0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \dots, \frac{n-1}{m}, \frac{n}{m},$$

będziemy mieli:

10d, prędkości wynikające z działań wywieranych

przez siłę na początku każdego z tych czasów

$$\frac{p}{m}, \frac{2p}{m}, \frac{3p}{m}, \frac{4p}{m}, \dots, \frac{np}{m};$$

2^{re} drogi przebieżone na końcu tych czasów

$$\frac{p}{m^2}, \frac{2p}{m^2}, \frac{3p}{m^2}, \frac{4p}{m^2}, \dots, \frac{np}{m^2};$$

summa tych dróg, których liczba jest n , będzie za pomocą wzoru służącego na postępy różnicowe

$$\left(\frac{p}{m^2} + \frac{np}{m^2}\right) \frac{n}{2} = \frac{p}{2} \left(\frac{n}{m^2} + \frac{n^2}{m^2}\right).$$

Jeżeli uważamy, że jakakolwiek liczba sekund oznaczona przez t , zamyka liczbę mt części, z których każda jest równa części $\frac{1}{m}$, i jeżeli uczynimy $n=mt$, wyrażenie poprzedzające zamieni się na

$$\frac{p}{2} \left(\frac{mt}{m^2} + \frac{m^2 t^2}{m^2}\right) = \frac{pt}{2} \left(\frac{1}{m} + t\right).$$

Widzimy zaś, że im bardziej liczba m powiększa się, tym więcej działania siły zbliżają się do siebie, i tym mniej ilość $\left(\frac{1}{m} + t\right)$ różni się od t , i że zostaje wtedy

nawet, gdy ułamek $\frac{1}{m}$ ginie, to jest gdy ginie przerwa założona między następnymi działaniami siły. Ten stan rzeczy jest granicą, do której dąży bezustannie szereg ruchów wyżej uważanych, a zatem w ciągłym działaniu siły, droga przebieżona jest równa $\frac{1}{2}pt^2$.

Kładąc wartość ilości n w wyrażenie prędkości $\frac{np}{m}$ nabytej po n pierwszych działaniach, wypadnie ilość $\frac{mtp}{m} = pt$, niezależąca od m , a zatem też sama, jakkolwiek małą byłaby przerwa $\frac{1}{m}$.

Teraz jeżeli następnie uczynimy $t=0$, $t=1$, $t=2$, i t. d., mieć będziemy drogi

$$0, \left(\frac{1}{2}p\right), 4\left(\frac{1}{2}p\right), 9\left(\frac{1}{2}p\right), \text{ i t. d.,}$$

których różnicami są

$$\left(\frac{1}{2}p\right), 3\left(\frac{1}{2}p\right), 5\left(\frac{1}{2}p\right), \text{ i t. d.,}$$

to jest jeden raz, trzy razy, pięć razy, i t. d. droga przebieżona w pierwszej sekundzie.

W przykładzie wziętym z Geometrii przypuszczaliśmy naprzód punkta oddzielne, przecięcie się zamiast stykania się; lecz przechodząc do granic, przypuściliśmy schodzenie się punktów, i przecięcie się zamieniło na stykanie.

W przykładzie z Mechaniki, zamiast ruchu przyspieszonego w każdym momencie niepodzielnym, uważaliśmy szereg ruchów jednostajnych, czyli równych przez pewny przeciąg czasu, które wzrastały tylko w przejściu od jednego ruchu do drugiego; lecz biorąc granicę nie uważaliśmy na przerwy przypuszczane między działaniami siły, i zamieniliśmy szereg działań odosobnionych na działanie ciągłe, a zbiór ruchów jednostajnych przypuszczanych, stał się ruchem jednostajnie przyspieszonym takim, jaki jest rzeczywiście w naturze.

Te dwa przykłady wystarczają dla okazania, jak jest ważną rzeczą uważać stany następne, przez które przechodzą ilości zmienne, jakoto: przystawy, linii krzywych, drogi przebiegane dla działania sił zmieniających się, i szukać nie zmian samych, ale granic, ku którym stosunki ich dążą.

III. To uważanie, które jest dzisiaj najlepszą zasadą, jaką dać można rachunkowi różniczkowemu, znajduje się włącznie w Geometrii początkowej, każdego razu, gdy wypada porównywać linie krzywe do prostych powierzchni kołowej, do powierzchni wielokątnych, ciała okrągłe do wielościanów; albowiem mierzymy bezśrednie tylko linie proste, wielokątne i wielościenne.

Jakoż, jeżeli oznaczymy przez ω , kąt AOH , (fig. 57), który jest połową kąta w środku wielokąta jakiegokolwiek ABC opisanego na kole, którego promień jest $OH=r$, i weźmiemy jedność za promień tablic trygonometrycznych, będziemy mieli

$$1:\text{sty}\omega=r:AH, \text{ ztąd } AH=r.\text{sty}\omega, \text{ ztąd } AB=2r.\text{sty}\omega.$$

Lecz bok AB zawiera się tyle razy w obwodzie wielokąta regularnego, ile razy kąt AOB , czyli raczej łuk jego mierzący, mieści się w okręgu swojego koła. Więc niech 2π wyraża okrąg koła nakreślonego promieniem tablicowym, do którego okręgu odnosi się łuk ω ; liczba boków wielokąta będzie $\frac{2\pi}{\omega}$, a przeto jego obwód wyrazi się przez

$$\frac{2\pi}{\omega} 2r.\text{sty}\omega, \text{ czyli przez } 2\pi r \cdot \frac{\text{sty}\omega}{\omega}.$$

Lecz im więcej liczba boków wielokąta będzie się powiększała, tém bardziej kąt ω będzie się zmniejszał, i tém bliżej stosunek $\frac{\text{sty}\omega}{\omega}$ przystępować będzie do jedności, która jest granicą jego (33). Jeżeli zaś przejdziemy do granicy, wielokąt zamieni się na koło, i jego okrąg stanie się $2\pi r$, tak jak daje Geometrya początkowa.

Łatwą jest rzeczą otrzymać teraz powierzchnią koła. Powierzchnia wielokąta ABC , będąc równą mnożności z jego obwodu $2\pi r \frac{\text{sty}\omega}{\omega}$, przez połowę promie-

nia, to jest przez $\frac{1}{2}OH$, czyli przez $\frac{1}{2}r$, wynosi $\pi r^2 \frac{\text{sty}\omega}{\omega}$, a przechodząc do granicy daje πr^2 na powierzchnią koła, tak jak w Geometrii początkowej.

Łatwobyśmy zastosowali te rachunki do ciał okrągłych, lecz nie będziemy się nad tém zatrzymywali: przestaniemy tylko na uważeniu, że tu granica okazuje

się nie jak dowolny sposób wykładu, lecz jak należąca do gruntu rzeczy.

Uważanie granic nie jest też obcą rzeczą w Algebrze początkowej. Daliśmy w niej przykład na ułamku $\frac{a(a^2-b^2)}{b(a-b)}$, którego licznik i mianownik giną gdy $a=b$, i którego wtedy wartością jest $2a$; użyliśmy także granic, dla wytłumaczenia przypadku szczególnego w zagadnieniu dwóch światła (*Ele. d' Alg.* 70, 120).

Jakoż zawsze uciekamy się do tego uważania, dla wytłumaczenia trudności mogących się rodzić z ilości nieskończenie wielkich lub nieskończenie małych, których bytności rzeczywiście przypuszczać Matematyka nie potrzebuje, i których umysł objąć nie może. Nie jest więc dziwną rzeczą, iż gdy roztrząsamy rozmaite uważania, podawane dla ustanowienia zasad rachunku różniczkowego, zawsze znajdujemy wyobrażenia granic.

IV. Niekiedy używano wyrażeń niestosownych: i tak przez czas długi nazywano sposób granic, sposobem pierwszych i ostatnich stosunków; lecz to wyrażenie nie jest dokładne. Gdyśmy uważali stosunek $\frac{2y+k}{p}$

linij $\frac{MQ}{M'Q}$ (str. 581), nie mogliśmy powiedzieć że granica

$\frac{2y}{p}$ była ostatnim stosunkiem tych linij; bo gdy przez znieszenie ilości k , stosunek $\frac{2y+k}{p}$ zamienia się na $\frac{2y}{p}$,

dwa punkta M' i M schodzą się razem, linije $M'Q$ i MQ już nie exystując, nie mają stosunku. Należy więc

ułamek $\frac{2y}{p}$ uważać jak ilość swojego rodzaju, i jak

exystującą osobno; wiąże się zaś ten ułamek z ilościami h i k czyli MQ i $M'Q$ tém tylko, że może z tych ilości być wyprowadzonym jako wyrażający swoją granicę, nie zaś ich stosunek. Co Newton bardzo dobrze wyraził w następnych słowach: „Ostatnie stosunki „między ilościami niknącemi nie są w rzeczy samej

„stosunkami ilości ostatnich, lecz granicami, do których
 „ilości nieograniczenie zmniejszające się ciągle się zbli-
 „żają, i do których mogą przystąpić bliżej od wszel-
 „kiej różnicy naznaczonej.” (*).

Jeżeliśmy przypuścili że punkt M' naprzód złą-
 czony z punktem M , potem od niego się oddalił, wte-
 dy linie MQ i $M'Q$, zamiast niknienia powstałyby, i
 w takowém znaczeniu wyrażenie $\frac{2\gamma}{p}$ nazywano ich
 pierwszym stosunkiem.

V. Zdaje się, że dla dobrego postrzeżenia tworze-
 nia się granic w przejściu od linii prostych do krzy-
 wych, dość jest uważać, że różnica charakterystyczna
 między linią krzywą a wielokątem zależy na tém, że
 można w linią krzywą zawsze wpisać kąt tyle zbliża-
 jący się do dwóch kątów prostych, ile zechcemy, cze-
 go w wielokącie zrobić nie możemy, w którym kąt
 przy okręgu jest największy z tych wszystkich, które
 mogą być umieszczone między dwoma bokami nastę-
 pnemi.

Z tego warunku wynika bezśrednie, że w jakiegokol-
 wiek linii krzywej, granicą stosunku łuku do swojej cię-
 ciwy jest jedność; bo, jeżeli z dwóch stron punktu A ,
fig. 58, będziemy brali cięciwy coraz mniejsze $AB=AC$,
 $AB'=AC'$, i t. d, poprowadzimy linie BC , $B'C'$, i t. d.,
 i na te linie spuścimy prostopadłe AD , AD' , i t. d.,
 trójkąty prostokątne BAD , $B'AD'$; i t. d. dadzą

$$\frac{BC}{AB+AC} = \frac{BD}{AB} = \text{wst} \frac{1}{2} BAC, \quad \frac{B'C'}{AB'+AC'} = \frac{B'D'}{AB'} = \text{wst} \frac{1}{2} B'AC', \text{ i t. d.}$$

lecz kąty $\frac{1}{2} BAC$, $\frac{1}{2} B'AC'$, i t. d., zbliżają się ciągle do

(*) *Ultimae rationes illae, quibuscum quantitates evanescent, re vera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant; et quas propius assequi possunt quam pro data quavis differentia.* (Philosophiae naturalis principia mathematica Lib. I. sect. I. lem. XI. Scholium.)

równości z kątami prostymi, a ich wstawy przystępują coraz bardziej do równości z jednością; jest to samo ze stosunkami linii prostych złamanych, do linii prostych łączących ich końce, które to linie zbliżają się także coraz bardziej do łuku i do jego cięciwy. Należy dobrze uważać że przy ciągłym zmniejszaniu się łuku i jego cięciwy, stosunek między niemi zbliża się ciągle do jedności, nie dla tego że różnica między niemi ciągle się zmniejsza; boki *np.* trójkąta prostokreślnego, jakkolwiek je zmniejszymy, byleby zmniejszony trójkąt był podobny do przedzającego, zawsze między sobą stosunek zachowują stały, chociaż różnica między niemi także ciągle się zmniejsza, lecz ta różnica zmniejsza się w tym samym stosunku, w którym się zmniejszają boki, różnica zaś między łukiem a cięciwą, prędzej maleje, niżli one same; jeśli *np.* uczynimy $A = a + \delta$, postrzegamy że stosunek $\frac{A}{a} = \frac{a + \delta}{a} = 1 + \frac{\delta}{a}$ wtedy tylko będzie się ciągle zbliżał do jedności, gdy ilość δ , będzie prędzej męalała, niżli ilość a , i dla tej to przyczyny stosunek łuku do cięciwy przy ciągłym ich zmniejszaniu się, bliża się ciągle do jedności.

Można jeszcze do tego warunku przywiązać własność, jaką ma stosunek przystawy do podstyczej, że jest granicą stosunku przyrostków przystawy i ucinka. Jakoż za pomocą trzech punktów M, M', M'' , *fig. 56*, wziętych na jakiejkolwiek linii krzywej, oznaczymy dwa stosunki $\frac{MQ}{M'Q}$, i $\frac{M'Q}{MQ}$, odpowiednie równe stycznym kątów $MM'Q$, i $M'MQ$, zawartym między cięciwami MM , i MM' , a osią ucinków P, P' ; oznaczając te kąty przez A i B , mieć będziemy

$$\frac{MQ}{M'Q} - \frac{M'Q}{MQ} = \text{sty } A - \text{sty } B.$$

$$\text{A że } \text{sty}(A - B) = \frac{\text{sty } A - \text{sty } B}{1 + \text{sty } A \text{sty } B},$$

zkań $\text{sty} A - \text{sty} B = (1 + \text{sty} A \text{ sty} B) \text{sty}(A - B),$

a jeżeli przedłużymy linią MM dalej za punkt M , utworzy się kąt RMM' , który będzie różnicą między kątami MMQ , i $M'MQ$, czyli $A - B$, i razem spełnieniem kąta M, MM' , do dwóch kątów prostych. Im kąt M, MM' bliżej przystępować będzie do dwóch kątów prostych, tém bardziej kąt RMM' , a tém samém różnica $\text{sty} A - \text{sty} B$ między stosunkami $\frac{MQ}{M, Q}$, i $\frac{M'Q}{MQ}$, zmniejszać się będzie; lecz jeden z tych stosunków jest mniejszy, a drugi większy od stosunku pośredniego $\frac{PM}{PT}$, przeto tém więcej do niego zbliżać się będą, im mniej jeden od drugiego będą się różniły, a że mogą do niego zbliżyć się, ile tylko zechcemy, przeto on będzie spólną ich granicą.

Przypisek B do liczby 187.

I. Zrównanie

$$z\sqrt{-1} = 1(\text{dost} z + \sqrt{-1} \text{wst} z)$$

przez założenie $z = 2m\pi$, zamieniając się na

$$2m\pi\sqrt{-1} = 1.1,$$

pokazuje że jedność ma nieograniczoną liczbę rozmaitych logarytmów. Znajdujemy zero czyniąc tylko $m = 0$; lecz na każdą inną wartość tak dodatnią jak odjemną ilości m , otrzymujemy wyrażenie urojone, które powinno być uważane jako logarytm jedności.

To podanie, które zdaje się być niezgodném z rzeczą, gdy logarytmóm naznaczamy początek arytmetyczny wyprawdzając je z porównania postępów, staje się naturalném, gdy je wyciągamy ze zrównania $y = e^x$. Jakoż jeżeli przez z oznaczmy wykładnik potęgi, do której należy podnieść ilość e , dla otrzymania wartości naznaczonej na ilość y , i uczynimy $x = z + z$, wypada

$$e^{z+z} = y,$$

co z przyczyny że jest $e^x = y$, sprowadza się do

$$e^x = 1.$$

Lecz to zrównanie będąc rozwinionem za pomocą wzoru z pod liczby 27, prowadzi do wielowyrazu

$$\frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \text{i t. d.} = 0,$$

który się rozkłada na mnożniki

$$z=0, \text{ i } 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2.3} + \text{i t. d.} = 0;$$

pierwszy jest oznaczeniem arytmetycznem logarytmu jedności, a drugi zamyka oznaczenia algebraiczne: to uważanie tém jest w teoryi logarytmów, czém jest uważanie pierwiastków urojonych jedności w teoryi potęg.

Wartości $z = 2m\pi\sqrt{-1}$, są pierwiastkami drugiego mnożnika zrównania $e^z = 1$, a pierwiastkami zrównania $y = e^x$, są $\alpha + 2m\pi\sqrt{-1}$, przeto $\log. y = \alpha + 2m\pi\sqrt{-1}$.

II. Dla wyprowadzenia tych pierwiastków, Euler, który pierwszy je odkrył, używał sposobu analitycznego bardzo dowcipnego, opierającego się na podaniu dowiedzionem pod liczbą 188; według którego pierwiastki zrównania

$$y^n - 1 = 0, \text{ są } y = \text{dost} \frac{2m\pi}{n} + \sqrt{-1} \text{wst} \frac{2m\pi}{n}.$$

Należy naprzód uważać, że wyrażenie

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 1 + \frac{z}{1} + \frac{n-1}{1.2} \frac{z^2}{n} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3} \frac{z^3}{n^2} + \text{i t. d.}$$

$$= 1 + \frac{z}{1} + \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2} z^2 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3} z^3 + \text{i t. d.},$$

gdy ilość n staje się nieskończenie wielką, (ma za granicę

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \text{i t. d.} = e^z.$$

Przeto zrównanie $e^z - 1 = 0$, będzie mogło być zastąpionem przez granicę zrównania $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - 1 = 0$, a podstawując $1 + \frac{z}{n}$ za y , mieć będziemy za pomocą rozumowań poprzedzających

$$1 + \frac{z}{n} = \text{dost} \frac{2m\pi}{n} + \sqrt{-1} \text{wst} \frac{2m\pi}{n};$$

biorąc potem granicę odpowiednie przypuszczeniu że ilość n jest nieskończenie wielką, przez co wyrażenia $\text{dost} \frac{2m\pi}{n}$ i $\text{wst} \frac{2m\pi}{n}$ stają się odpowiednio 1, i $\frac{2m\pi}{n}$, zawsze jednak zakładając, że ilość m jest skończoną, będziemy mieli, jak wyżej

$$z = 2m\pi \sqrt{-1}.$$

Dla łatwego postrzeżenia tej granicy trzeba za $\text{dost} \frac{2m\pi}{n}$, i za $\text{wst} \frac{2m\pi}{n}$, położyć ich rozwinięcia (37); po uproszczeniach otrzymamy

$$z = -\frac{m^2 \pi^2}{2n} + \text{i t. d.} + \sqrt{-1} \left(2m\pi - \frac{8m^3 \pi^3}{2.3n^2} + \text{i t. d.} \right),$$

co, gdy ilość n jest nieskończenie wielką, sprowadza się do $z = 2m\pi \sqrt{-1}$.

III. Za pomocą tego wyrażenia urojonego, objaśniamy wiele trudności zdarzających się w zastosowaniu logarytmów do liczb ujemnych, między innemi następujące: ponieważ $(-a)^2 = (+a)^2 = a^2$, wniesć należy, że

$$l(-a)^2 = l(+a)^2, \quad 2l(-a) = 2l(+a), \quad \text{z} \text{t} \text{a} \text{d} \quad l(-a) = l(+a);$$

lecz ostatni wniosek nie zgadza się zgoła ze zrównaniem $y = e^x$: żadna wartość rzetelna ilości x nie może nigdy

zrobić ilości y ujemną; przeto liczby ujemne nie mogą mieć logarytmów rzetelnych.

To stwierdza się także przez zrównanie

$$z\sqrt{-1} = l(\text{dost}z + \sqrt{-1}\text{wst}z),$$

w którym trzeba uczynić $z = (2m+1)\pi$ dla otrzymania $\text{dost}z = -1$, zkąd wypada

$$l(-1) = (2m+1)\pi\sqrt{-1};$$

a oznaczając przez a logarytm rzetelny ilości $+a$, otrzymamy wzór

$$l(-a) = a + l(-1) = a + (2m+1)\pi\sqrt{-1},$$

który nie daje żadnej wartości rzetelnej, bo ilość m powinna być zawsze liczbą całą (188).

Jednak prawdziwą jest rzeczą, że wyrażenia $2l(-a)$ i $2l(+a)$ są częściami wyrażenia la^2 , lecz nie są pomińmo tego równymi między sobą. Jakoż, gdy a jest logarytmem rzetelnym ilości a , będzie $2a$ logarytmem ilości a^2 , a wszystkie logarytmy ilości a^2 , tak rzetelne jak urojone, będą zawarte w wyrażeniu $2a + 2m\pi\sqrt{-1}$, w którym ilość m może być parzystą lub nieparzystą. W pierwszym przypadku $2m$ będzie liczbą podwójnie parzystą, a zatem wyrażenie poprzedzające zgadzać się będzie z wyrażeniem

$$2l(+a) = 2a + 2 \cdot 2m\pi\sqrt{-1};$$

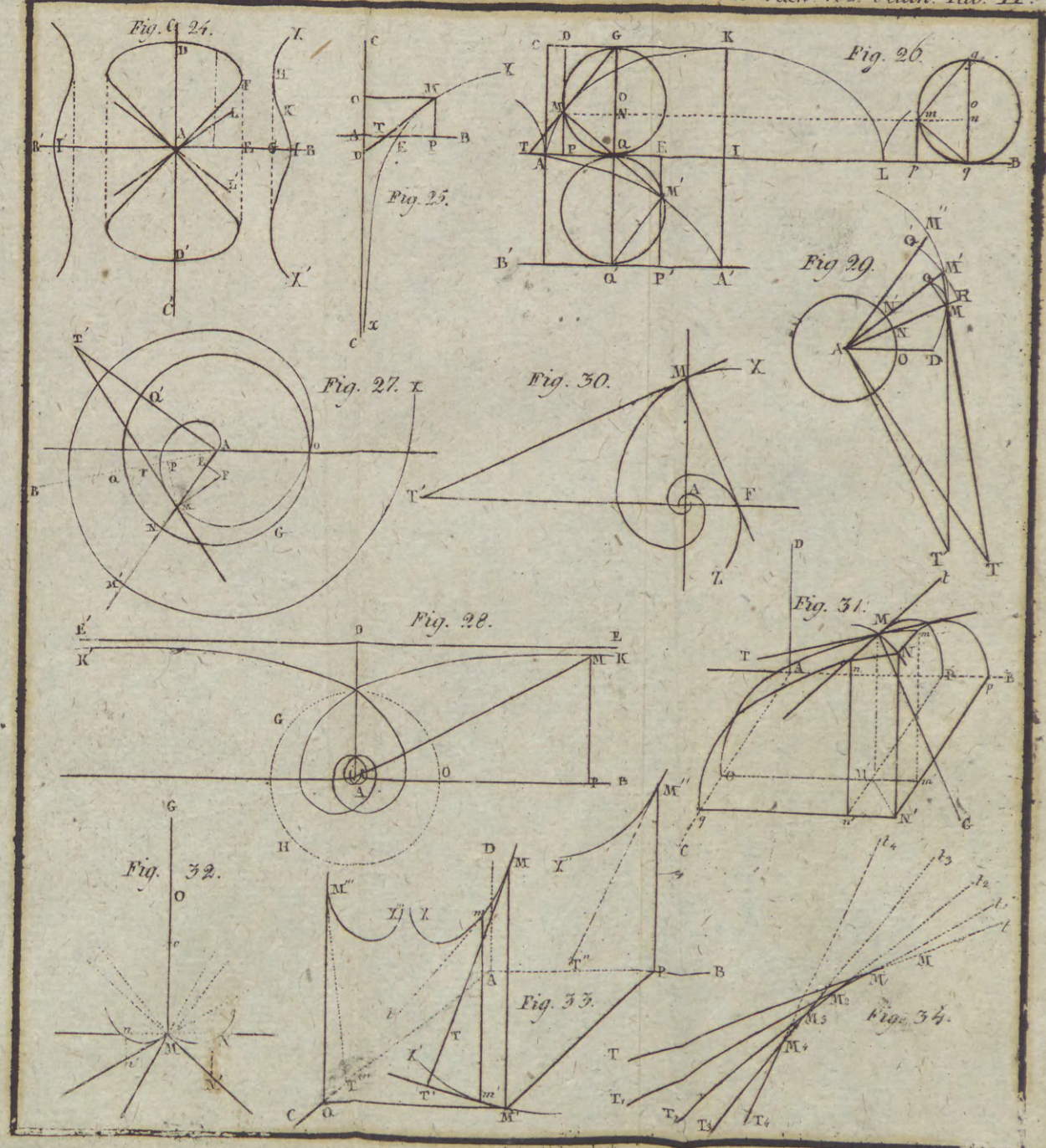
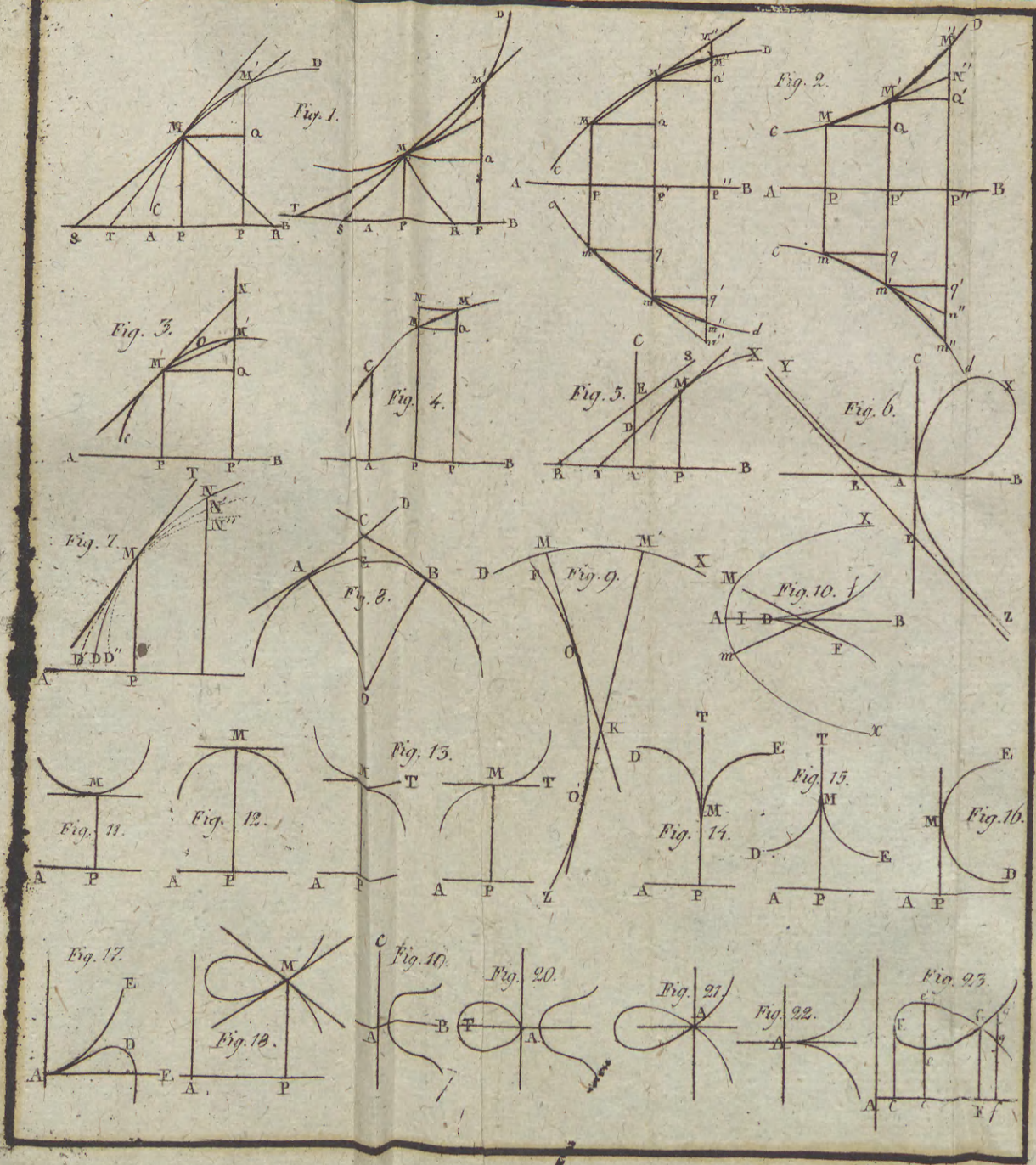
w drugim przypadku, liczba $2m$ jest pojedynczo-parzystą, a wyrażenie logarytmu ilości a^2 , będzie się zgadzało z wyrażeniem

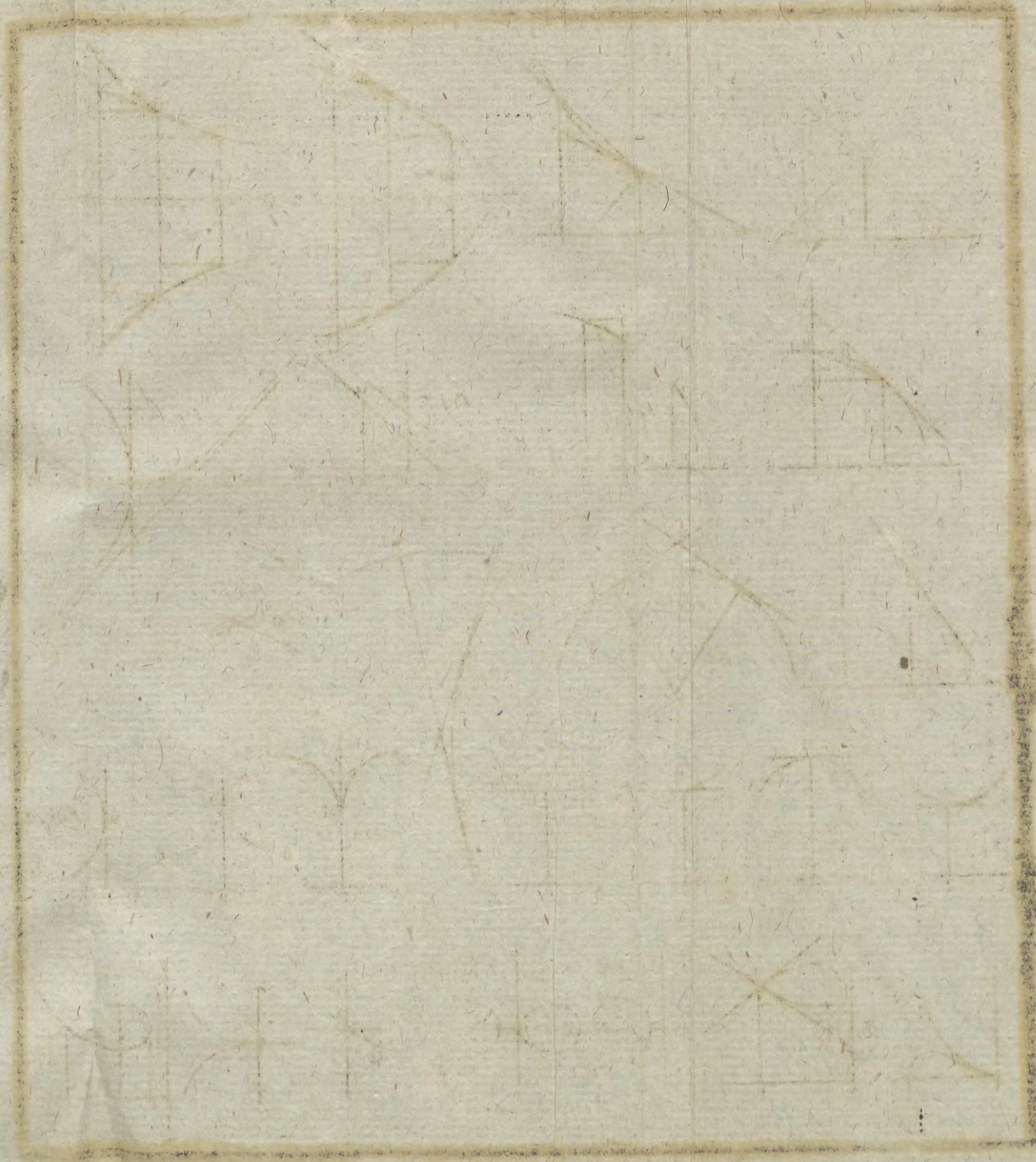
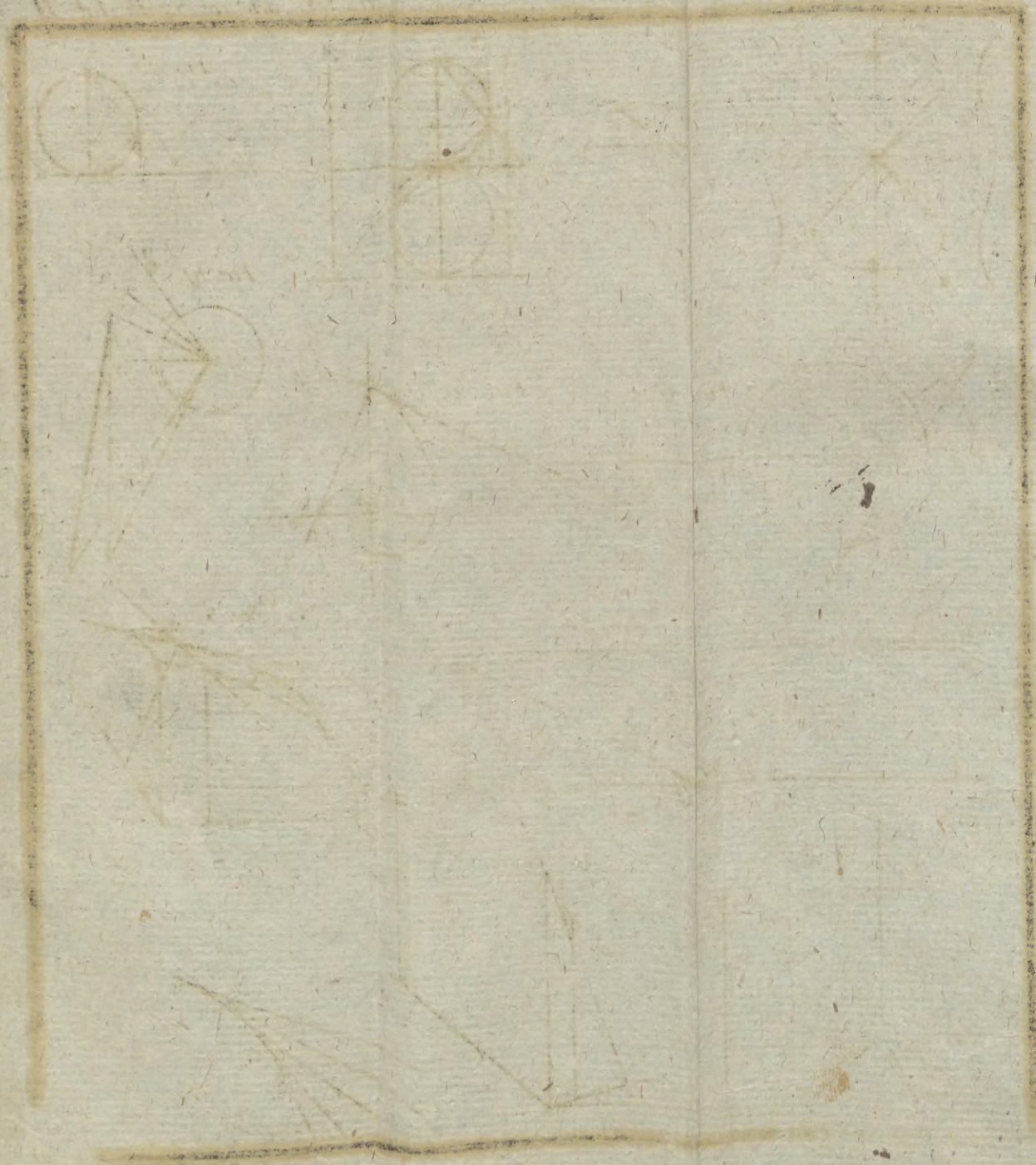
$$2l(-a) = 2a + 2(2m+1)\pi\sqrt{-1};$$

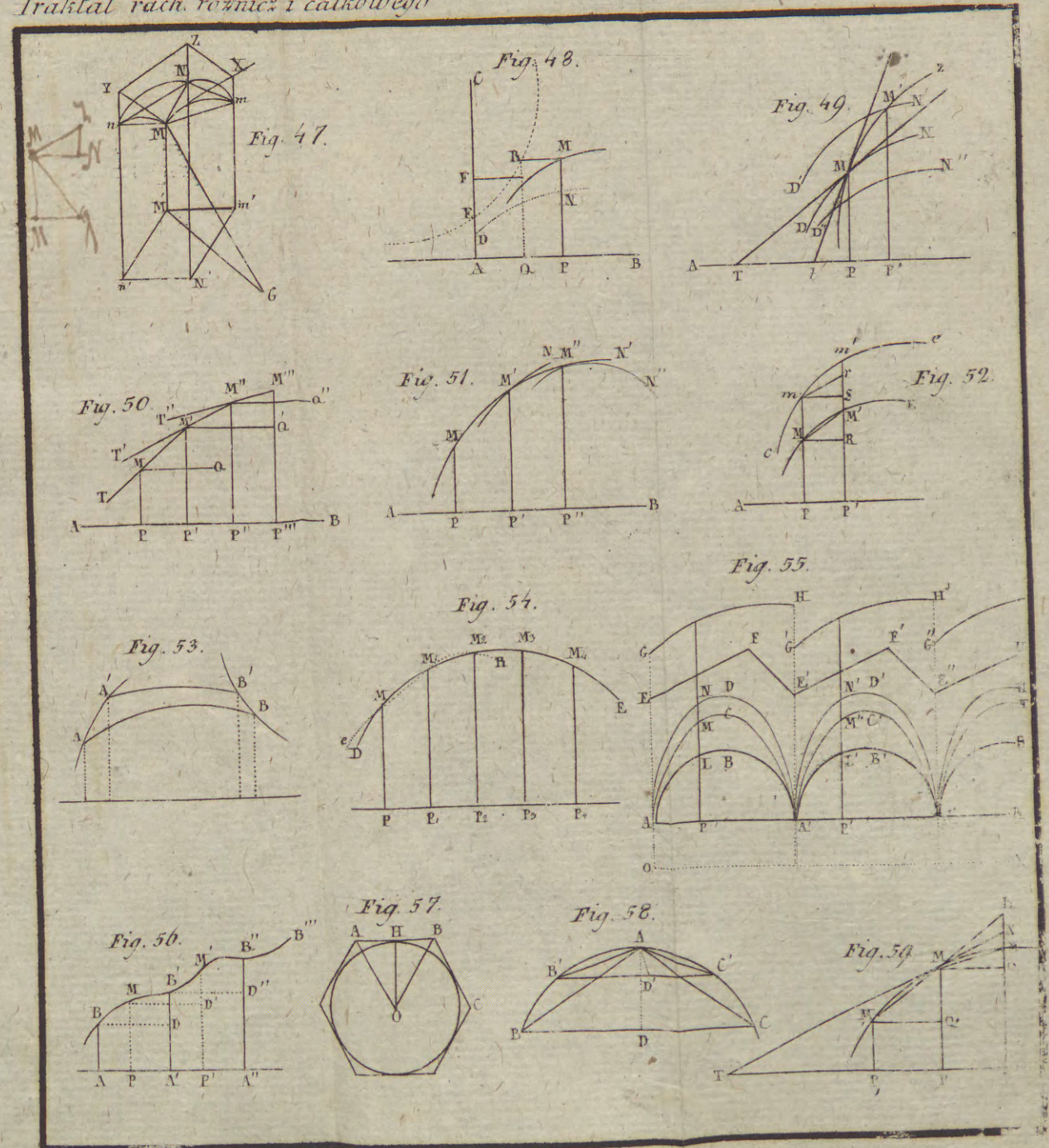
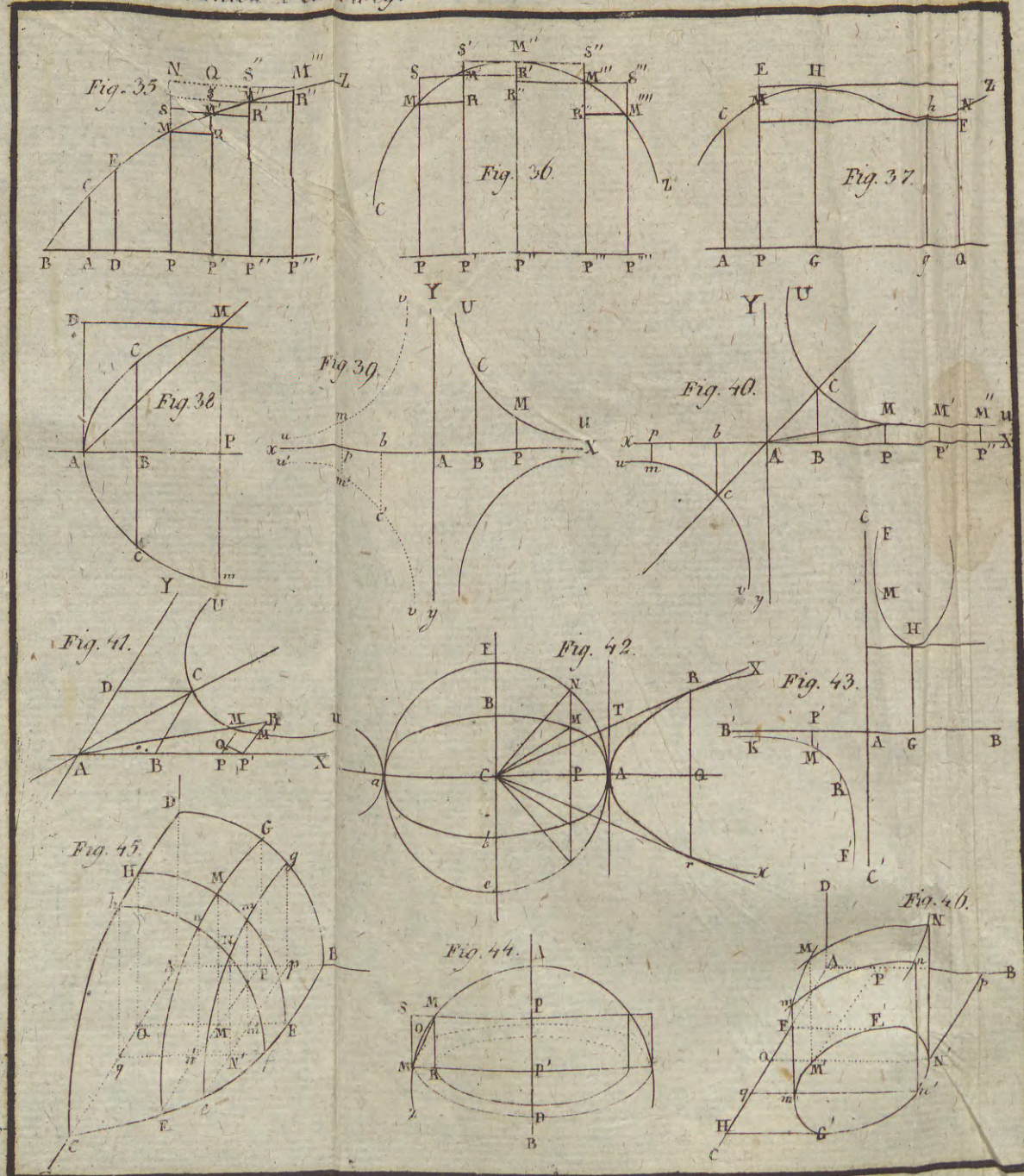
lecz wyrażenia $2a + 2 \cdot 2m\pi\sqrt{-1}$, i $2a + 2(2m+1)\pi\sqrt{-1}$, nie mogą się między sobą, zgodzić, bo liczby wskazane są w wyrażeniu pierwszym podwójnie parzyste, a w wyrażeniu drugim pojedynczo-parzyste.

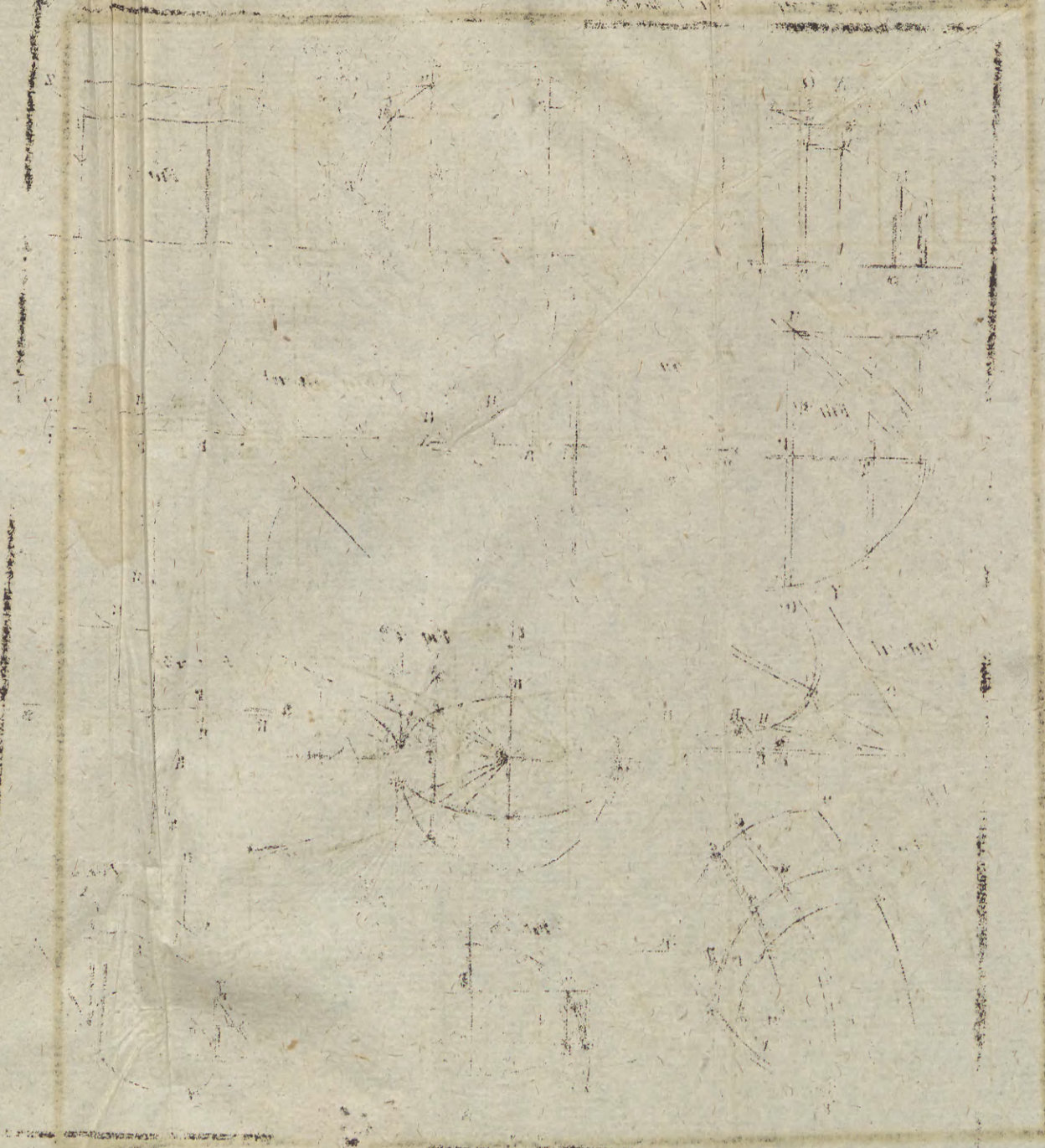
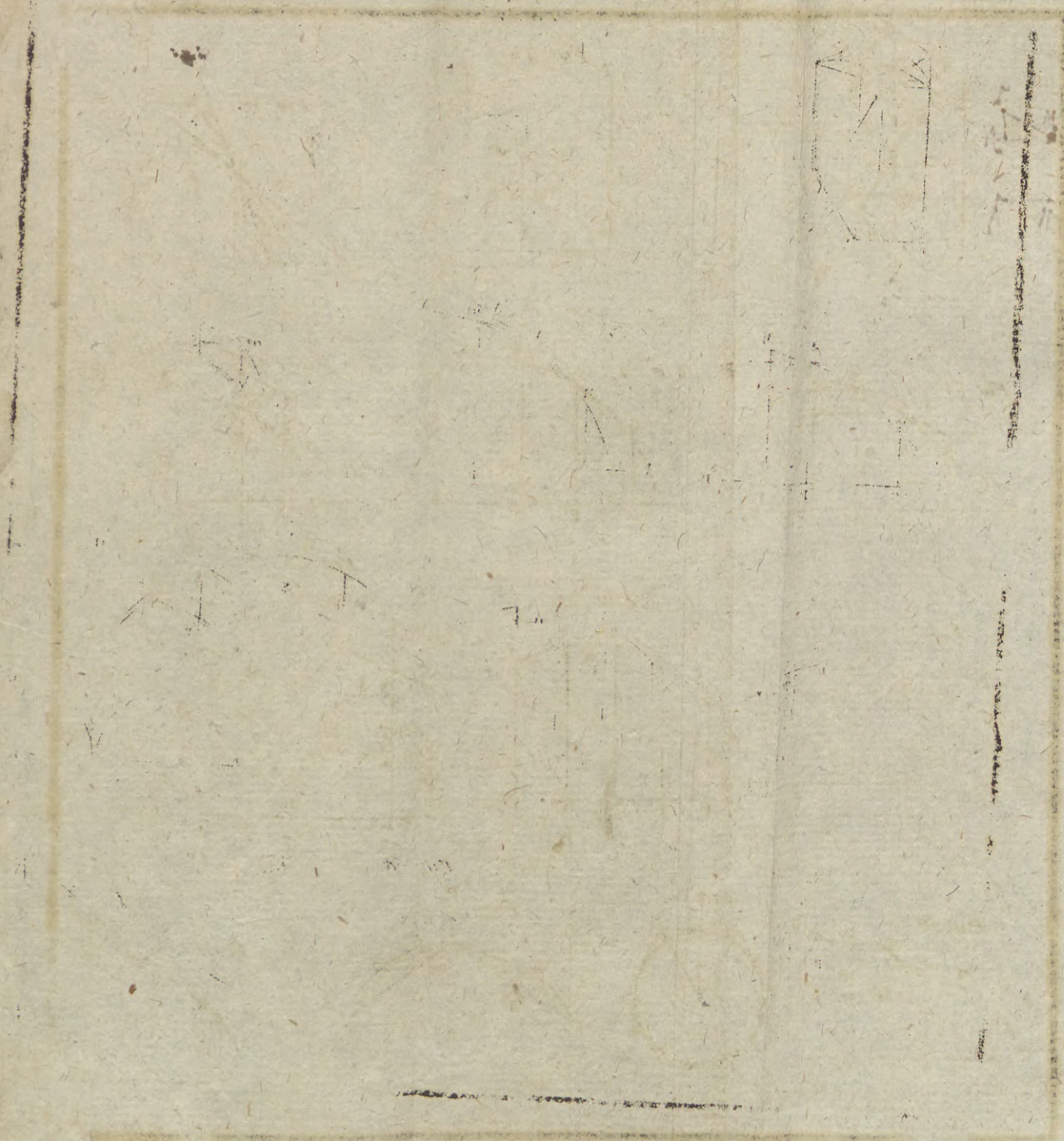
KOŃIEC PRZYPISKÓW.

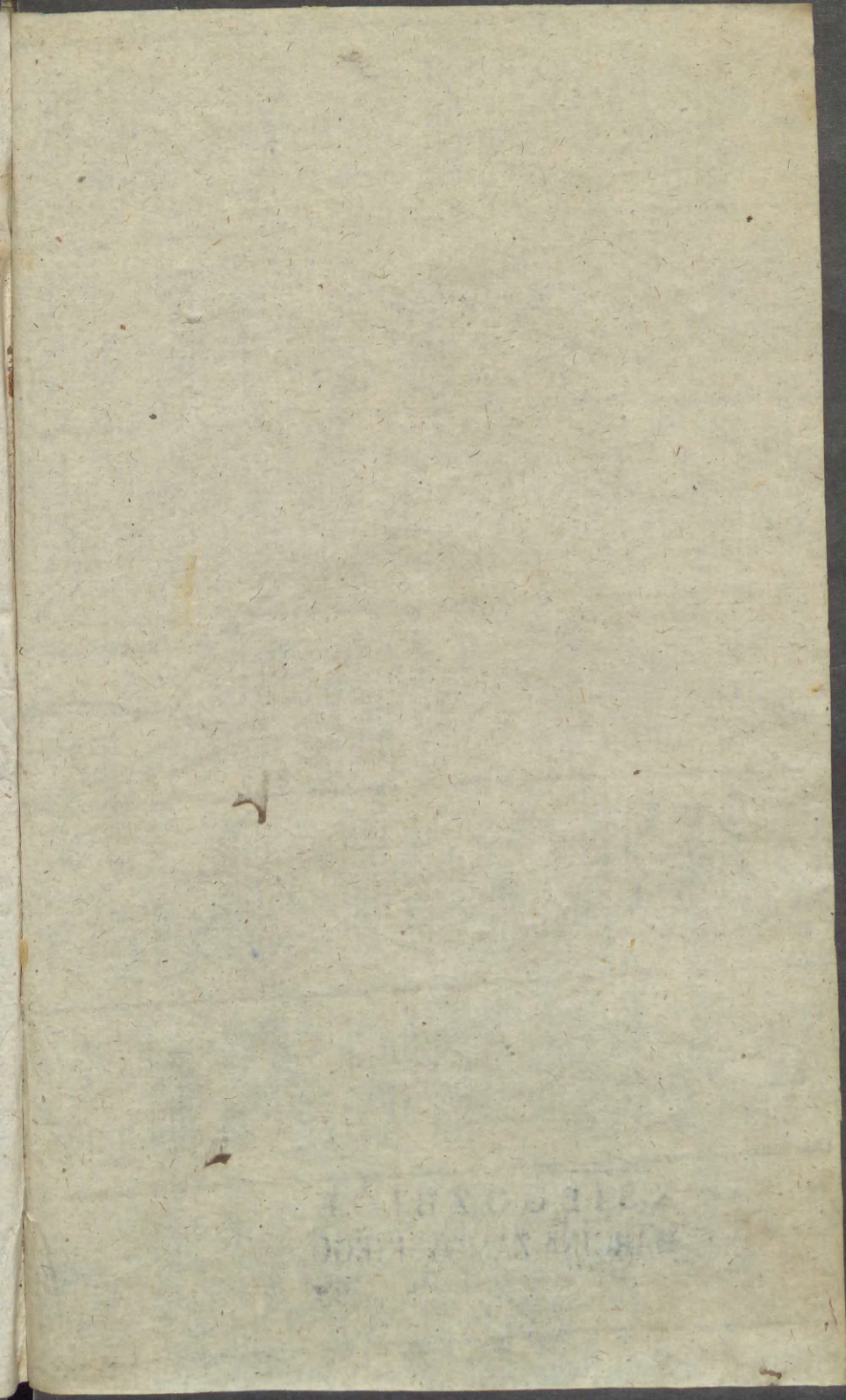












KSIEGOZBIÓR
MARCINA ZAMOYSKIEGO

KZ

8155



Biblioteka im. Hieronima
Łopacińskiego w Lublinie

II 202.118