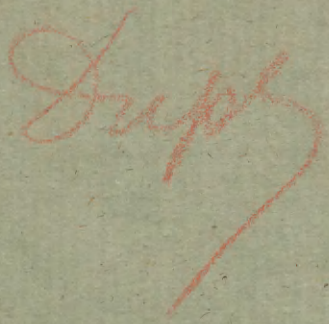


JEOMETRYA

DLA

SZKOŁ NARODOWYCH

CZĘŚĆ I.

Cena Zł. - 4.

W WILNIE

Nakładem i Drukiem Józefa Zawadzkiego Typografa Akademickiego.

1810.

129045
200645
513(075)

Za pozwoléniém Cenzury Wileńskiéy.

ZBIÓR RZECZY ZAWARTYCH

W ROZDZIAŁACH TEY XIĘGI.

Karta

ROZDZIAŁ I. *Wiadomości początkowe o Liniiach prostych, o Obwodzie koła, i o Kątach* - - - 1

ROZDZIAŁ II. *O przystáwaniu Tróykątów, z przystósowaniém do rozwiązaniá wielu Zagádnień* - 10

ROZDZIAŁ III. *O liniiach równoodległych, i o Równoległobokách* - 26

ROZDZIAŁ IV. *O kątach w Figurach prostokréślnych, a w szczególności w Tróykątach* - - - 32

ROZDZIAŁ V. *O Równoległobokach, i Tróykątach równych co do Powiérzchni, i o zamiéniéniu iakiékolwiek Figury prostokréślnéy na Tróykąt, i na Równoległobok* - - 39

Przygotowanié do Rozdziałów następuiących. *O podniesiéniu liczby do Kwadratu, i wyciągniéniu z niéy piérwiástku Kwadratowégo* - - 53

ROZDZIAŁ VI. *O Dodáwaniu, i odeymowaniu Kwadratów, i zamiéniániu ich na iakiékolwiek Figury prostokréślné* - - - - 74

Karta

ROZDZIAŁ VII. *O Liniiach stycznych z kołem; o Kątach przy okręgu Koła; i o Kątach, których wierzchołki są między okręgiém, albo za okręgiém* - - - - 90

ROZDZIAŁ VIII. *Wstęp do Proporcyi przez przykłady Jeometryczne, z przystósowaniém w szczególności do Trójkątów podobnych, a w ogólności do innych Figur prostokréślnych także podobnych* - - 164

ROZDZIAŁ IX. *O stósunkach powiérzchni Figur prostokréślnych w ogólności, a w szczególności o stósunkach Figur podobnych* - - - 127

ROZDZIAŁ X. *O Wielokątach foréмnych* - - - - - 150

Wstęp do Rozdziałów XI i XII. *O używaniu Przenośnika, cyrkla proporcyonalnégo, i podziale nazwanym Nonniiuszém* - - - - 157

ROZDZIAŁ XI. *Piérwsze początki Miernictwa* - - - - - 168

Przygotowanié do Rozdziału następuiącégo *O Logarytmach* - - 182

ROZDZIAŁ XII. *O Trygonometryi* 194

PRZYDATEK I. *Przystósowaniá Trygonometryi do różnych działáń na gruncie* - - - - - 219

PRZYDATEK II. *Piérwsze początki równoważénia* - - - - 229

ROZDZIAŁ XIII. *O Kwadrowaniu koła, czyli o wynalezieniu Powiérzchni Koła* - - - - 237

JEOMETRYI

CZĘŚĆ PIERWSZÁ

O Liniiach i Powiérzchowniach.

ROZDZIAŁ I.

Wiadomości początkowé o Liniiach prostych, o Obwodzie Koła, i o Kątach.

1. PODRÓŻNY umieiący rachować kroki swoié, potrafi dochodzić iak długá była droga ta, którą odprawił. Strzelec doświádczéniém i wprawą częstą nauczony, osądzi łatwo, ieżeli strzelba iego do zamiérzonégo doniesie célu. Obadwa tak sposobią się do pewnieyszégo wyobrażéniá sobie długości i odległości, toiest: do porównaniá ich z témi, które iuż dobrze poznali i wyznaczyli. Krok iest taką dlá podróżnégo długością, a śrzednia strzelby donośność, służy mysliwému do wymiaru innéy odległości.

Té prosté, i inné, im podobné sposoby wyo-

brażéniá sobie długości niewiadomych, użyteczné są w wielu bardzo okolicznościach życiá; gdzie potrzeba osądzéniá prędkiégo, innych dokładnieyszych użyć nie pozwálá. A ponieważ przez częste sposobów takich używanie, uczymy się chronić tych omyłek, w któreśmy w szczególnych razach wpádać zwykli byli; nie od rzeczy więc będzie wprawiać i tak oko uczących się, tylé iednak, ilé to zgodzić się może z publiczną edukacyą.

Ale iakiéyżekolwiek w téy mierze łatwości nabiorą uczniowie przez częste wprawianiá się; chybiać wszelako będą w porównywaniu długości bardzo wielkich, lub bardzo małych. Oprócz tego, każdy w szczególności człowiek, używaiąc sposobu wyżéy wspomnionégo, różnéby ieden od drugiégo czynił wyznaczéniá iednéyże nawet długości; a zatém trudnoby ludzie iedni z drugimi zrozumieć się w téy mierze mogli, gdyby się piérwszégo tego w wyznaczaniu długości sposobu trzymali.

2. Z téy pobudki udano się do ustanowiénia umówionéy pewnéy długości, którą na samo weyźrzénié, dokładnie sobie wyobrazić można było. Do téy stósowano wszystkié inné długości niewiadomé, które poznać chciano, i dochodzono ich, przykładaiąc wiadomą długość do niewiadomych; długość takowá nazwaná iest *Miarą*.

3. W jednymże kraiu, nie iedna Miara zwykła bydź używaną, według różnych okoliczności, które się do iéy użycia zdarzaią. W Polsce naprzykład kupieckié niektóre towary, i pomnieyszé na ziémi długości łokciém podzielonym na cále i linije mierzyć się zwykły. Gdy zaś znaczniejszą iaką długość wymiérzać na ziémi trzeba; używámy do tego sążnia ze trzech łokci złożonégo, albo prętu zawiéraiącégo $7\frac{1}{2}$ łokci, a iescze lepiéy sznura, który 10 prętów zamyká.

Ponieważ té ostatnié miary nic nie są inné-

go, tylko łokieć kilka razy przydany; dosyć więc będzie wielkości łokcia dokładné sobie wyobrażénié uczynić, aby dokładnie poznać i wielkość miár większych od łokcia. Wszystkié té słowa: *Sznur*, *Pręt*, *Sążéń*, *łokieć* i t. d. byłyby tylko słowami próżnémi i bez zrozumiéniá, gdybyśmy dokładnégo nié mieli wyobrażéniá, iednéy z tych miary, naprzykład łokcia: bo wszystkié naszé wyobrażéniá, które o wielkościach mámy, są tylko *względnémi* (relativae) iedné do drugich.

4. Kraie różné odmiénnych też miár zażywaią: a co ieszcze w opaczné rozumiénié wprowadzić może, miary té lubo odmiénné, iednémże słowém często się wyráżaią 1). I tak łokieć Litewski iest $\frac{1}{10}$ większy od łokcia Koronnégo; a zatém i inné Litewskié miary, w któré łokieć wchodzi, większé będą od miár Koronnych. Łokieć Francuzki, dwa razy prawie iest od Polskiégo większy. Mila Niémiecká zawiéra prawie $1\frac{2}{3}$ mili Francuzkiéy, a mila Angielská trzecią tylko iest Francuzkiéy mili częścią. (Obacz w 3. Części Arytmetyki, na karcie 276).

5. W przypádkach, o których mówiliśmy, na samę tylko wzgląd miało się *długość*, wielkości tych, któréśmy uważali. W takowym razie mówić się zwykło, że się samémi liniiami zaprzątámy; a w szczególności liniiami *prostémi*, gdy té wyznáczaią odległość, albo náykrótszą drogę od iednégo ich końca do drugiégo. Gdyby zaś w tychże samych liniiach báczył kto

---

1) Matematycy z wielką usilnością szukali miary iednostayney, do którey możnáby było stósować wszystkié inné. Rozumieli oni, iż ią znaleźli w długości *Wiészadła prostégo* (Pendulum simplex) ustawionégo w mieyscu wolném od zawád, i na powietrzu pomiarkowaném; ale ta materyá należy do Fizyki.

szczególniéy to mieysce, gdzie się liniiá zaczyná, albo gdzie się kończy, lub gdzie iedna drugą przecina; wtedy mówiłoby się, że się zaprzątá około *Punktu* 1).

6. Przez iedén Punkt można tylé liniy rzeczą samą, albo przynáymniéy myślą poprowadzić, ilé kto zechce. Ale gdy i drugi Punkt ieszcze, w jakiékolwiek od piérwszégo odległości, będzie wyznaczony, przez który liniiá prostá má przechodzić; w tym razie położénié téyże linii, iuż się wyznáczá; albo, co na iedno wychodzi, wszystkié Liniie prosté, któréby kto przez dwa Punkta daué poprowadził, nie będą tylko iedną i tą samą Liniią. A zatém, gdy dwie Liniie prosté schodzą się, lub przecinaią, nié mogą tylko Punkt iedén mieć spólny. Gdy się mówić będzie w szczególności o wymiérzaniu na ziémi, powiémy tam, iaką ostrożność mieć potrzeba, gdy wyznaczyć i wymiérzyć przychodzi Liniią łączącą dwa Punkta, których odległość iest wielká.

7. Na papiérze, aby złączyć dwa Punkta przez Liniią prostą, używámy narzędziá, któré się nazywá *Liniiałém* (Regula) nie spuszczaiąc się na samę rękę i oko; i przystawiwszy tén Liniiáł do dwóch wyznaczonych Punktów, kréślimy piórém, lub ołówkiém Liniią podaną.

Oprócz wymiaru Liniy prostych, przypádá często zatrudniać się położéniém ich, iednych względém drugich.

8. Gdy dwie Liniie, maią Punkt spólny, mogą bydź do siebie nachyloné rozmaitémi sposo-

---

1) Nie trzeba tych wyrazów mieć za Definicye, ale tylko za szczére obiaśnienia i wyłuszczénia wyobrażeń, które do tych słów zwykliśmy przywięzywać. Im więcéy kto zastánawiá się nad początkami, na których zasádzaią się nasze wiadomości; tym większą postrzéga trudność w ich wyłożeniu.

bami. Abyśmy tę wielość położéń ich, iednych względém drugich dobrze poięli; wystáwmy sobie Liniią iednę prostą na stole naprzykład wyrytą, i drugą na niéy naprzód położoną, i zupełnie do niéy przystaiącą, a potém obrácaiącą się około Punktu wyznaczonégo, któryby tym obudwóm Liniiom był spólny. W takowém obrácaniu się drugá Liniiá odmiénné coráz położéniá i nachyléniá mieć będzie względém piérwszéy. Té rozmaité nachyléniá nazywaią się *Kątami* (Anguli) Punktu, około którégs ta drugá Liniiá obrácała się, nazywá się *Wierzchołkiém kąta*, (Vertex Anguli). Liniie, które nachyléniém swoiém tén kąt czynią, nazwać można *Ramionami* (po Łacinie zowią takowé Liniie *Crura*). Podczás obrácaniá się tey Linii, Punkt którykolwiek w niéy naznaczony, w jednakiéy zawsze odległości będzie od tego Punktu, około którégo statecznie się Liniiá obrácá: a zatém i wszystkié Punkta śladu od niéy zostawionégo, iednakowo będą odległé od tego Punktu nie wzruszonégo. Ieżeli obrácaiącá się Liniiá zupełny obrot uczyni, że znowu do piérwszégo położéniá, skąd się obrácać zaczęła, powróci; ślad taki od tegoż samégo Punktu zostawiony, nazywá się *Okręgiém koła*, (Circumferentia Circuli). Własność Okręgu ztąd wypływaiącá, iest ta: że każdy w nim znáyduiący się Punkt, w równéy od iednégo Punktu zostaie odległości; a tén Punkt nazywá się *Srzodkiém* (Centrum). Odległość śrzodka od któregokolwiek Punktu Okręgu, nazywá się *Promiéniem* (Radius). Część Okręgu, nazywá się *Łukiém* (Arcus), a Liniiá prostá łączącá końce dwa Łuku, nazwać się może *Ciéńciwą* (Chorda.) Gdy Ciéńciwa ta przechodzi przez śrzodek Okręgu: a zatém dwa razy większá iest od promiénia, zwać ią będziémy *Srzednicą* (Diameter.) Dzieli ona okrąg koła, na dwie równé części, które tém tylko różnią się, że iedna z jednéy, a

drugá z drugiéy strony Srzednicy iest położoná 1).

9. Po tych Definicyach, (które obiaśnić należy ręcznem działaniém tego, co wyrażaią) póydźmy do wyłożeniá początku kątów, z któiego pochodzą.

Ieżeliby Liniiá ruchomá, odprawiła obrotém swoim, połowę, trzecią część, czwártą, piątą i t. d. téy całéy drogi, którą iéy obeyśdź trzeba było, aby do pierwszego swego położéniá powróciła; Punkt téż którykolwiek téy Linii, odprawił tém samém połowę, trzecią część, czwártą, piątą okręgu zupełnego, któryby ta Liniiá zrobiła w koło się obróciwszy. Skąd wyniká, że wiérzchołek kąta obrawszy za śrzodek, i od niego iakimkolwiek promiéniém łuk nakréśliwszy; któryby między ramionami kąta zamykáł się; wielkość tego łuku koła względém całego okręgu, do którego należy, dá nám poznać wielkość kąta, względém całego tego mieysca kątowego (Angularis) któréby iedna z tych dwóch Liniy przeszła, zaczynaiąc się obrácać wtedy, gdy na drugiéy leżała, a nie kończąc się obracać, aż znowu do niéy przystanie. I przeto łuk tén nazwany iest Miarą 2) kąta między dwoma ramionami zamkniętego, a zatém tak łuk tén, iako i kąt, iednakowo się powiększaią, albo

---

1) Chcąc na papiérze nakréślić Okrąg koła, którego śrzodek i promień mámy wyznaczony; używámy do tego narzędziá nazwanego pospolicie *Cyrklém* (Circinus).

2) Tén wyráz *Miara* nie kładzie się tu w ścisłém rozumieniu; miara albowiém iakiéy ilości właściwie wziętá, powinna bydź tego gatunku, którego iest ta ilość, która się mierzy: naprzykład długość iedna mierzy się przez długość inną. Łuk zaś koła i kąt, są gatunku różnego, a zatém łuk koła miarą kąta właściwie wziętą bydź nie może.

zmnieyszaią, toiest: staią się razém podwóyném, potróyném i t. d.

10. Stąd się okazuie, że wielkość kąta od długości ramion iego nie zawisła: (uwágato iest, nad którą dobrze zastanowić się potrzeba).

11. Aby sposobém wygodnym wielkość każdégo kąta wyznaczyć przez wielkość łuku między iego ramionami zamkniętégo, którégo promiéń iest dany; zgodzono się na podzielénié okręgu iakiégokolwiek na 360 części równych, z których każdá nazywá się *Stopniém* (Gradus). Przeto ieżeli łuk zamknięty między ramionami kąta, má w sobie 20, 30, 40. i t. d. części takich, iakich okrąg cały má 360; o tym także kącie mówią, że má 20, 30. 40. i t. d. stopniów 1). Na tym gruncie zasadzá się całá robota i używanié narzędzi zdatnych do mierzéniá kątów na ziémi, i sposób robiéniá tychże kątów na papiérze, któréby iakąkolwiek stopniów podaną liczbę zawierały. *O narzędziach tych mówić potém będziémy.*

Dlá unikniéniá długości, któráby obszérné każdégo działaniá wykładanié za sobą pociągało, i aby natężéniu myśli pofolgować, zgodzili się Matematycy na pewné nazwiska Punktów, Liniy, kątów i t. d. około których maią do czyniéniá.

12. Punkt oznáczaią przez iednę tylko literę, np. A. B. C. D. i t. d. gdy położénié tego punktu iest wiadomé: a np. przez x, y, z, gdy nie wiedzą, ale dopiéro szukaią iego położéniá.

---

1) W działaniach większéy dokładności wyciągaiących, dzielą iescze każdy stopień na 60 części nazwanych *Minutami*, a każdą minutę na 60 *minut drugich* [Minuta secunda, *albo iedném słowém*, secunda].

Znak stopniów, iest: o nad liczbą stopniów napisane. Tak n. p. 20^{o}, 21^{o}, 30^{o} 31^{o}, i t. d. wymáwiá się: dwadzieścia, dwadzieścia ieden i t. d. stopniów.

Do oznaczéniá Linii używaią liter, które na dwóch iéy końcach kładą, ieżeli iest wielkości ograniczonéy: ieżeli zaś w wielkości swoiéy nie iest ograniczoná; tedy na niéy dwa punkta stanowią, i przy nich piszą dwie litery, którémi ią mianuią. Tak np. Liniiá łączącá dwa punkta A i B oznaczoná byłaby témi dwiéma złączonémi literami AB. Táb. 1. *Fig.* 1.

Dlá oznaczéniá kąta (ponieważ tén czynią dwie Liniie do siebie się nachylaiącé) kładą trzy litery iednę przy wiérzchołku kąta, drugą i trzecią przy końcu ramion tego kąta: a złączywszy ié razém, i w środku ich położywszy literę nad wiérzchołkiém kąta napisaną, trzéma témi literami kąt wyrażaią. Tak np. kąt zrobiony przez dwie Liniie CA. CB. oznaczyliby iednym z tych dwóch wyrazém: ACB. albo BCA. Gdy wiérzchołek nie należy do więcéy iak do iednégo kąta, dosyć będzie oznaczyć kąt tą iedną literą, która iest nad wiérzchołkiém iego. Táb. 1. *Fig.* 2.

13. Kiedy ramié ruchomé przez obrot swóy, którymeśmy początek kątów obiaśnili, uchodzi tylko czwártą część całégo okręgu: zrobi takim obrotém swoim dwa kąty równé z tą Liniią, około któréy się obrácá, gdy tę drugą daléy pociągniémy. Té kąty nazywaią się *Prostémi* (Anguli recti), łuk koła, który im za miarę służy, będzie miáł w sobie 90 stopni, sama zaś Liniiá ruchomá, będzie wtenczas *Prostopadłą* (perpendicularis) względém drugiéy. (Obacz w piérwszéy części Arytmetyki na karcie 87). Táb. 1. *Fig.* 3.

Gdy to samo ramié ruchomé obrotém swoim nie dochodzi czwártéy części okręgu; wtedy kąty między niém i drugiém ramiéniém przedłużoném uczynioné, będą nie równé. Jeden mnieyszy będzie od prostégo, a drugi większy. Té dwa kąty nazwaniné są *Przyległémi* (Adjacentes), albo (deinceps positi). Mnieyszy od prostégo zowié się *Ostrym* (acutus), większy zaś od prostego, *Roztwartym* (obtusus) a iedna z tych

Liniiá nazywá się *Pochyłą* (obliqua) do dru- Táb. 1. giéy. Kąty DCA. DCB. są nie równe: kąt DCB. Fig. 4. iest ostry, a kąt DCA. roztwarty, Liniiá DC. pochyłá do Linii AB.

14. *Summa dwóch kątów przyległych, równá się dwóm kątóm prostym.*

Niech będzie DC. pochyłá do AB. summa kątów: DCB. DCA. równá iest dwóm kątóm prostym.

Iakoż, gdyby Liniiá DC. zrobiwszy obrotém swoim około Punktu C. kąt BCD, daléy się iescze obrácała, ażby naostatek przystała do linii CA; byłaby obrotém takim przeszłá dwa kąty proste, ale téż razém byłaby przeszła i kąty BCD, i DCA; więc té dwa kąty są dwiéma częściami summy z dwóch kątów prostych złożonéy, a zatém równaią się dwóm kątóm prostym.

15. Gdyby Liniiá CD, była pociągniona na drugą stronę linii AB, naprzykład aż do E; kąty BCD, ACE, nazywałyby się, iedén względém drugiégo *Przeciwległémi w wierzchołku* (ad Verticem oppositi): maią oné wiérzchołek C. spólny, a ramiona CA, CE, iednégo z tych kątów, są przedłużéniém ramión CB, DC, drugiégo.

16. *Kąty w wiérzchołku przeciwległé są równé.*

Iakoż w saméy rzeczy kąty: BCD, ACE, mogą bydź uważané, iak gdyby się zrobiły z obrácaniá się Linii ED, około Punktu niewzruszonégo C, zaczynaiąc tén obrot, gdy Liniiá ED, na Linii AB, leżała, aż do położenia iéy na CE. Tym sposobém Liniiá ED, przez taki swóy obrot nachyli się do Linii AB, równie z jedney iak i z drugiey strony, a zatém czyni równe kąty DCB, ECA.

Wszystkie té *Podaniá* (Propositiones) któréśmy dotąd przytoczyli, powinny bydź obia-

śnioné, wykonywaiąc ié, przez działaniá ręczne, na których się zasádzaią 1).

ROZDZIAŁ II.

O przystáwaniu Tróykątów, z przystósowaniém do rozwiązaniá wielu Zagádnień.

17. *Definicye:* Mieyscé zakończone trzéma Liniiami prostémi, zowie się *Tróykątém prostokréślnym* (Triangulum rectilineum). My samégo przez się słowa *Tróykąt* używać będziémy. Liniie trzy, w których się *Tróykąt* zamyká, zowiémy *Bokami* Tróykąta (Latera Trianguli). Takié Liniie zowią także *ścianami*. Tego nazwiska do innégo potém znaczénia użyiémy. *Przystáwanié*, (Convenientia) i przypádanie Figur iednych do drugich, na którém równość dwóch iakich Powiérzchni zakładámy, używané iest często w pospolitych życiá ludzkiégo potrzebach i wygodach. Na obicié naprzykład pokoiów, bierzémy tylé płótna, lub innéy iakiéy materyi, ilé wystárczá na przykrycié ścián iego: i wielkość powiérzchni tego obicia, nie różni się od ścián powiérzchni, które pokrywá tylko tém, że ściany są pod obiciém, a obicié na ścianach. Toż mówić o deskach wystárczaiących na

1) Niech się nie obáwiaią Nauczyciele żádnych zarzutów, gdy przez ruch linii tłumaczyć i obiaśniać będą wiele práwd Jeometrycznych Uczniom swoim dopiéro poczynaiącym. Dalecy oni są ieszcze, aby w téy materyi domyślać się mieli subtelności Metafizycznych. Czynić pod ich oczami działaniá około tych rzeczy, którémi się zatruduniać maią, i zmysły ich na nie obrácać, iestto iedén z náyskuteczniieyszych sposobów, báczność w nich, i uwágę do rzeczy przywiązać, a razém i natężéniu myśli pofolgować.

podłogę, albo o szybach do okién i t. d. Krawcy o to się stáraią, aby tak sukuie lub inné odzieniá wymiérzali, żeby té przystáwały iak náyściśiéy do tych ciała części, które pokrywać maią. Dwie Xięgi iednakowégo dzieła, dwa obrazy pod iednakowémi wymiarami odmalowané, nie różnią się co do powiérzchni, tylko tém, że nie są iedną rzeczą, ale dwiéma. Miary na zboże, napoie, i t. d. tak się zgádzaią z sobą, że iedna prawie wielość ziarna pewnégo, napełniá korzec iedén, iako i drugi: tylé w jedén garniec, co i w drugi mieści się napoiu i t. d. gdy té miary stósuią się do iednéy ustanowionéy od Zwiérzchności.

18. *Twiérdzénié* (Theorema). Ieżeli w dwóch Tróykątach, dwa boki w jednym, równé są dwóm bokóm w drugim, i kąty między témi bokami zawarté równé, trzeci też bok iednégo, równy będzie trzeciému bokowi drugiégo, i kąty przy tych bokach równych będącé, w jédnym i w drugim Tróykącie będą równé.

Niech będą dwa Tróykąty: ABC, abc, któ- Táb. 1.
rych boki: AC, ac, są równé, boki też BC, *Fig.* 5.
bc, równé i kąty: C, i c, równé. Dowiésdz trzeba, że i boki: AB, ab, i kąty A, i a, iako też B, i b, będą równé.

Dowodzénié (Demonstratio). Wystáwmy sobie Tróykąt: abc, iakoby oderwany (co też odstrzygłszy go, i w rzeczy saméy wykonać można) i przeniesiony na Tróykąt ABC, w tén sposób, aby położywszy liniią ca, na linii CA, liniiá też cb, przystała do linii CB, (co dla równości kątów C, i c, nastąpić powinno). Ponieważ liniiá ca, równa iest linii CA; a liniiá cb, linii CB, Punkta a, i b, przypadną na punkta A i B; a zatém i liniie ab, i AB, będą przez té samé punkta zakończoné. Więc té dwie ostatnié liniie przykryią się zupełnie iedna drugą; a zatém będą równé, i zrobią z liniiami ca, CA, cb, CB, kąty równé a, i A, iako też b, i B.

19. *Uwága.* Dwa Tróykąty cab, CAB, nie różnią się od siebie, tylko przez to, że odmienné mieysce zastępuią. O takich więc dwóch Tróykątach, a w powszechności o każdych dwóch figurach, samém tylko położéniém mieysca różniących się mówimy, że do siebie *przystáwać mogą.*

20. *Przystósowanié: Jeżeli w jednym Tróykącie, dwa boki są równe, będą też równé i dwa kąty przy nich leżące.*

Táb. 1 Fig 6 Niech będzie Tróykąt ABC, którégo boki AC, BC, są równé; kąty téż A i B, będą równé.

Wystáwmy sobie, że tén Tróykąt ABC, wybity iest na drugiém mieyscu tak, żeby bok CA, w wybitym Tróykącie, to miał położénié, co bok CB, w Tróykącie piérwszym, a znowu bok CB, aby w drugim, na téy stronie leżał na któréy bok CA, w piérwszym: ponieważ kąt C, iest iednakowy w obudwóch tych Tróykątach, położywszy tedy drugi Tróykąt na piérwszym; bok CB, i CA, Tróykąta wybitégo przystanie zupełnie piérwszy CB, do boku CA, drugi CA, do boku CB, Tróykąta piérwszégo, a zatém i Punkta B, i A, należące do Tróykąta wybitégo, leżeć będą na punktach A, i B, należących do piérwszégo Tróykąta. Więc drugi Tróykąt przeniesiony na piérwszy, będzie mógł przystać do niego: a przeto kąty B i A, tego Tróykąta równé będą, piérwszy kątowi A, drugi kątowi B, Tróykąta podłożonégo. A że kąt A, w tym podłożonym Tróykącie, iest równy także kątowi A drugiego Tróykąta; więc kąty A i B, Tróykąta podłożonego są równé kątowi A, w Tróykącie na nim położonym; a zatém kąty A i B, są sobie równé.

Następuiące tegoż twiérdzéniá dowodzénié, zastanáwiá prawie wszystkich poczynaiących, i wielu ie i zdaniá, lubo często zawodnégo, że w zrozumiéniu tego dowodzéniá, daie się poznâ-

wać poiętność Ucznia i sposobność do Jeometryi.

Niech będzie Tróykąt CAB, którego boki Tab. 1. AC. CB, są równé; kąty CAB, CBA, będą Fig. 7. równé

Przygotowanié. Na liniiach CA, CB, przedłużonych, weźmy iakiékolwiek liniie równé, naprzykład: AD, BE, i poprowádźmy BD, AE.

Dowodzénié. Ponieważ liniie CA, CB, są równé, a liniie téż AD, BE, wzięté są równé; więc w Tróykątach: DCB, ECA, gdzie kąt C iest spólny, ramiona CB, i CA, CD, i CE, tego kąta równé będą; a zatém té dwa Tróykąty przystać do siebie mogą; (18) a w szczególności liniie AE, BD, i kąty przy D i E, równé będą.

W Tróykątach: ADB, EBA, boki AD, BE, są równé, dowiedło się téż, że liniie BD, AE, są także równe, i że równé są kąty w tych ramionach zawarté przy D, i E; więc té Tróykąty mogą do siebie przystać: a w szczególności kąty: DAB, EBA, są równé, a zatém i im przyległé: CAB, CBA, będą równé.

21. Gdyby wszystkié trzy boki w Tróykącie były równé; trzy także kąty w nim równéby były.

22. *Definicye.* Gdy w Tróykącie dwa boki są równé, taki Tróykąt zowiémy *Równoramiénnym* (Isosceles albo Aequicrurum). Gdy w Tróykącie boki trzy będą równé, nazwiémy go *Równobocznym* (aequilaterum).

Gdy w Tróykącie wszystkié trzy boki nierównè będą, zwać go będziémy *Różnobocznym* (Scalenum).

23. *Twiérdzénié* 2. Gdy dwa Tróykąty, maią bok iedén równy, i gdy dwa kąty przy tym boku iednego tróykąta, równé są względém dwóch kątów przy boku równym drugiégo Tróykąta; trzeci téż kąt w jednym Tróykącie, równy będzie trzeciému kątowi w drugim; i dwa

Nr 129045₂ LUBLIN 200645₂

inné boki, równé względém siebie będą w obudwóch tych Tróykątach.

Táb. 1. Fig. 5. Niechay naprzykład w dwóch Tróykątach: ABC, abc, boki AB, ab, i kąty A i a, B i b, będą równé; będzie i kąt C, równy kątowi c; boki AC, ac; i boki także BC, bc, będą równé.

Dowodzénié. Wystáwmy sobie Tróykąt abc, przeniesiony na Tróykąt ABC, i na nim położony, tak, aby Punkt *a*, postawiwszy na Punkcie A, liniia ab, równá linii AB, na niéy leżała. Ponieważ kąt *a*, równá się kątowi A, i kąt *b*, kątowi B; liniiá téż *ac*, przystanie do linii AC: a liniiá bc, do BC: Punkt tedy c, musi się znáydować razém i na linii AC, i na linii BC, a zatém znáydować się będzie na ich spólném przecięciu C. Więc Tróykąt abc, zupełnie przystanie do Tróykąta ABC, a przeto liniie ac i bc, równé będą liniióm AC, BC, tak, iako i kąt c, równy kątowi C.

24. *Przystósowanié.* Ieżeli w Tróykącie, kąty przy *Podstawie* (ad basim) są równé; taki Tróykąt będzie *Równoramiénnym.* Dowodzénié tego podobné iest wcale dowodzéniu położonému w przystósowaniu pierwszégo Twiérdzéniá (20). Ieżeli Tróykąt má wszystkié trzy kąty równé, będzie Równobocznym.

25. *Twiérdzénié 3.* Gdy w dwóch Tróykątach, boki trzy iednégo, równé są trzém bokóm drugiégo; i kąty téż trzy w jednym, będą równé trzém kątóm w drugim, a té dwa Tróykąty mogą przystać do siebie.

Táb. 2. Fig. 1 i 2. Niech będą dwa Tróykąty ABC, abc, takié, aby bok AB, w pierwszym, równy był bokowi ab, w drugim, podobnie iak i boki AC, BC, równé bokóm ac, bc, té dwa Tróykąty mogą przystać do siebie.

Dowodzénié. Wystáwmy sobie Tróykąt abc, przeniesiony i położony pod Troykątém ABC, tak, iak go wyráżá na figurze Tróykąt ABD.

Poprowádźmy liniią CD. Ponieważ liniie CB, BD, są obiedwie równé linii cb, są téż i sobie równé; więc i kąty: BCD, BDC, są równé (23). Podobnie kąty ACD, ADC, są także równé; a zatém i kąty: ACB, ADB, równé będą.

Więc dwa Tróykąty: ACB, ADB, mogą przystać do siebie. Ale że téż Tróykąty: ABD, i abc, przystać do siebie mogą; więc przystaną także i Tróykąty: ABC, abc.

26. *Uwága.* Położénié linii CD, może bydź troiakié, bo może albo przecinać liniią AB, między punktami A i B, albo może przez który z tych dwóch punktów przechodzić, albo nawet i przez przedłużénié téyże linii AB. Dowodzénié toż samo iest we wszystkich trzech razach.

27. *Zagádniénié.* (Problema). Maiąc daué dwa Punkta, znaleźć trzeci, któryby od każdégo z tamtych, w jednakowéy był odległości.

Rozwiązanié (Solutio). Od iednégo i od drugiégo z punktów danych, poprowadziwszy łuk koła promiéniém większym od odległości tych dwóch Punktów; tam gdzie się té dwa łuki przecinać będą, będzie punkt, którégo szukámy.

28. *Uwága.* Na rozwiązaniu tego, lubo tak łatwégo zagádniénia, zasádzá się *Wykréślénié* Ieometryczné wielu innych Zagádnień. Wykréślénié to zowią po Łacinie *Constructio*, lubo tego samégo słowa zażywaią także Matematycy na oznaczénié przygotowaniá poprzédzaiącégo dowodzénié, przez kréślénié pewnych liniy potrzebnych do tegoż dowodzéniá. My przykładém ich, w obudwóch także razach, używać będziémy tego słowa *Wykréślénié.*

29. *Zagádniénié.* 2. Daną liniią prostą, podzielić na dwie części równé.

Rozwiązanié. Sposobém w poprzédzaiącém Zagádnieniu wyrażonym, znáydźmy po obudwóch linii téy stronach dwa punkta, któréby

od końców iéy iednakowo były odległé; złączmy té dwa punkta liniią prostą, ta przetnie w jednym punkcie liniią daną, i w tém przecięciu będzie punkt podziału żądanégo.

Táb. 2. Fig. 3. Niech będzie liniiá daná AB, C Punkt równo-odległy od A i B, końców linii danéy, D drugi punkt, podobnie także odległy. Punkt X, gdzie liniiá CD, przeciná liniią AB, dzielić będzie na dwie równé części liniią daną.

Wykréślénié, (Constructio). Pociągniéymy liniie AC, BC, AD, BD.

Dowodzénie. Tróykąty: CDA, CDB, maią trzy boki równé iedné drugim; a zatém (25) mogą przystać do siebie, a w szczególności, kąt ACD, równy iest kątowi BCD. Więc Tróykąty ACX, BCX, mieć będą boki AC, i BC, równé bok CX, spólny, i kąt także w tych ramionach zamknięty równy; więc (24) té dwa Tróykąty mogą do siebie przystać, i liniie AX. i BX. są równé.

30. *Defin:* Gdy w Tróykącie, albo w jakiéykolwiek inném figurze, bok iedén będzie przedłużony; kąt, który się między tém przedłużéném i bokiém przyległym zrobi; nazywá się *Zewnętrznym* (externus) tego Tróykąta, lub inném figury.

31. *Twiérdzénié* 4. W Tróykącie, zewnętrzny kąt większy iest od iednégo z wewnętrznych naprzeciwko niego położonych.

Táb 2. Fig. 4. Niech będzie Tróykąt ABC, którégo bok AB. przedłużony iest według upodobaniá ku D; kąt zewnętrzny CBD, większy iest niżeli iedén ze dwóch wewnętrznych, naprzykład C.

Przygotowanié. Przetniéymy na połowę w punkcie E, bok BC, i poprowádźmy liniią AE, aż do F, aby FE, równała się AE; pociągniéymy ieszcze i liniią BF.

Dowodzénié. Tróykątów: AEC, FEB, kąty przeciwné w wiérzchołku E, są równé, i ramiona tychże kątów równé, z wykréśléniá. Więc

dwa té Tróykąty, mogą do siebie przystać (18), a w szczególności kąt C, równy iest kątowi EBF, który kąt EBF, iest tylko częścią kąta CBD. Przeto kąt cały CBD, większy iest od kąta C, równégo kątowi EBF.

32. *Wniosek* (Corollarium). Summa dwóch iakichkolwiek kątów w Tróykącie, mnieyszá iest od dwóch kątów prostych. Ponieważ albowiém kąt CBD, większy iest od kąta C, Summa kątów CBD, ABC, większá będzie od Summy kątów C, i ABC: a że summa dwóch kątów piérwszych, váży tylé co dwa kąty proste, bo iest summą dwóch kątów przyległych (14); więc ta drugá summa mnieyszá iest od piérwszéy.

Idzie zatém, że ieżeli w Tróykącie, będzie kąt iedén prosty, albo téż roztwarty, dwa inné, nié mogą bydź tylko każdy z nich ostry.

33. *Definicye.* Jeżeli Tróykąt zawiérá w sobie kąt prosty, zowié się *Prostokątnym* (Triangulum Rectangulum). Ieżeli má kąt roztwarty, nazwać go można *Roztwartokątnym* (Obtusangulum). Ieżeli wszystkié trzy kąty má ostré, zwać się będzie *Ostrokątnym* (Acutangulum).

34. *Twiérdzénié* 5. Gdy w dwóch Tróykątach, bok iednégo będzie równy bokowi drugiégo, i kąt tym bokóm przyległy równy iedén drugiému, a kąt nieprzyległy tym bokóm, także równy w obudwóch Tróykątach; dwa té Tróykąty mogą przystać do siebie.

Niech będą dwa Tróykąty ABC, abc, maią- Táb. 2.
cé dwa boki AB, ab, równé, kąty A, i a, przy- *Fig.* 6.
tych bokach równé, i kąty C, i c, równé. Té dwa Tróykąty mogą do siebie przystać.

Dowodzénié. Przenieśmy Tróykąt abc, na Tróykąt ABC, tak, aby bok ab, przystáwszy do boku AB, bok téż ac przystáwáł do boku AC; (co dlá równości kątów a, i A, nastąpić powinno). Gdyby Punkt c, nie przypádł na punkt C, toby przypádł albo między punktami A i C, naprzykład na d, albo daléy za pun-

kiém C, na linii AC, przedłużoney, naprzykład na D; w piérwszym razie, kąt AdB, albo C, byłby zewnętrzny Tróykąta CBd, a zatém większy od kąta C. W drugim razie kąt C, byłby zewnętrzny Tróykąta CBD, a zatém większy od kąta D, albo c; co w obudwóch razach, iest przeciwko podaniu, bo kąty C, i c, dané, są równé. Więc liniiá ac, przeniesioná na AC, nie gdzie indziéy kończyć się będzie, iak na punkcie C, a zatém Tróykąty BAC, bac, mogą przystać do siebie (18).

35. *Twiérdzénié* 6. W każdym Tróykącie, ieżeli bok iedén większy iest od drugiégo; i kąt téż naprzeciwko boku piérwszégo, większy będzie od kąta drugiému bokowi przeciwnégo.

Táb. 2. *Fig.* 5. Niech będzie Tróykąt ABC, którégo bok AC, większy od boku BC; będzie téż i kąt ABC, większy od kąta A.

Przygotowanié. Na boku AC, większym, weźmy CD równą CB, i od D poprowadźmy DB.

Dowodzénié. Tróykąt równoramiénny BCD, má kąty CBD, CDB, równé: kąt CDB iest zewnętrzny Tróykąta BAD; więc iest większy niżeli kąt A; a zatém i kąt CBD większy będzie od kąta A; dopiéroż kąt CBA większy iest od tegoż kąta A.

36. *Twiérdzénié* 7. Gdy w Tróykącie, większy iest kąt iedén od drugiégo; bok naprzeciwko piérwszégo kąta, większy téż będzie od boku przeciwnégo drugiému kątowi.

Dowodzénié. Gdyby bok przeciwny piérwszému kątowi, był równy albo mnieyszy od boku drugiému kątowi przeciwnégo, piérwszy kąt byłby równy drugiému, albo od niego mnieyszy (35). Ale przez podanié, ten piérwszy kąt nie iest ani równy, ani mnieyszy od drugiégo; więc téż i bok tému piérwszému kątowi przeciwny, nie będzie ani równy, ani mnieyszy od drugiégo boku; a przeto będzie większy od niego.

37. *Uwága.* W tém twiérdzéniu użyliśmy piérwszy ráz dowodzéniá *zbocznégo*, albo *przez niepodobność*. Po Łacinie piszący, nazywaią takié dowodzénié: *Demonstratio indirecta*, albo *per absurdum*. Okazuie się tym sposobém, że wszelkié inné odmiénné w téy mierze utwiérdzénié, byłoby fałszywém: a zatém to tylko iest práwdziwé, któ ego dowodzimy.

38. *Wnioski.* Ponieważ w Tróykącie prostokątnym i w Tróykącie roztwartokątnym, kąt prosty, i kąt roztwarty, są z trzech kątów náywiększémi; przeto téż boki naprzeciwko takich kątów leżące, będą náywiększé.

A stąd między wszystkiémi liniiami poprowadzonémi od tegoż samégo punktu, od iednéy linii, náymnieyszá iest liniiá prostopadłá. Inné liniie pochyłé, tym większé będą, im dalsze od prostopadłéy. Dwie także liniie pochyłé, równéy wielkości, od Punktu tegoż samégo poprowadzić można; a nie więcéy, i té od prostopadłéy równie będą odległé.

Stąd téż wypływá, że liniiá prostá, nié może przecinać okręgu koła w więcéy, iak we dwóch punktach, a to w tych, których odległość od śrzodka koła, równá się promiéniowi tegoż koła: bo inaczéy więcéy niż dwie liniie równé, możnáby poprowadzić od iakiégo punktu do trzeciéy linii.

39. *Defin*: Liniiá prostopadłá, spuszczoná od iakiégo punktu na inną liniią, nazywá się *odległością* tego punktu od linii, na którą spádá: a to dlá tego, że ta liniiá iest náykrótszą między wszystkiémi innémi, któréby od tegoż punktu można poprowadzić do téy saméy linii.

40. *Twiérdzénié* 8. W Tróykącie summa dwóch boków, większá iest od boku trzeciégo.

Niech będzie Tróykąt ABC, Summa dwóch boków AB, BC, większá iest od boku AC. Táb. 2. *Fig.* 7.

Wykréślénié. Pociągnąwszy daléy bok AB,

weźmy BD, równą BC, i złączmy ich końce liniią CD.

Dowodzénié. W Tróykącie równoramiénnym BCD, kąty C i D, są równé; więc w Tróykącie ACD, kąt ACD, większy iest od kąta D; a zatém i bok AD, większy będzie od boku AC: a że AD równá się summie boków AB, BC, więc i ta summa boków iest większá od boku AC.

41. *Uwága.* To twiérdzénié służyć nám może po części za obiaśnienié w tém, które iuż mámy, naturalném linii prostéy wyobrażéniu. Widzimy tu oczywiście, że liniiá prostá, która łączy dwa Punkta, mnieyszá iest, niżeli summa dwóch innych liniy do tychże Punktów poprowadzonych od punktu takiégo, który się nie znáyduie na linii łączącéy té dwa punkta.

42. *Twiérdz:* 9. Ieżeli od śrzodka Linii prostéy wyprowadzimy prostopadłą; każdy Punkt w téy prostopadłéy, będzie równo odległy od obudwóch końców linii piérwszéy; każdy zaś inny Punkt za tą prostopadłą wzięty, nie iednakową od tychże końców odległość mieć będzie.

Táb. 2. *Fig.* 8. Niech będzie prostopadłá CD, do śrzodka C, linii AB.

Naprzód: Odległości DA, DB, Punktu którégokolwiek D, wziętégo na linii CD, od Punktów A i B. są równé.

Dowodzénié. W Tróykątach ACD, BCD, kąty proste przy C, są równé, i ramiona przy tych kątach równé; więc dwa té Tróykąty mogą przystać do siebie; a zatém liniie AD, i BD są równé.

Powtóré: Niech będzie Punkt E, za prostopadłą DC, liniie EA, EB, nierównė będą.

Niech liniiá AE, przechodzi przez Punkt D, należący do prostopadłéy CD; od Punktu tego poprowádźmy liniią DB.

Dowodzénié. Liniie AD, BD, są równé, iako się iuż dowiodło: więc liniiá AE, równá się

summie Liniy BD DE. A że w Tróykącie BDE, summa boków BD, DE, większá iest od boku BE; więc też liniiá AE, większá iest od linii BE.

Zwykło się krócéy ieszcze to twiérdzénié tak wyrážać: *Liniiá prostopadłá, z pośrzodka innéy linii wyprowadzoná, iest mieyscém* (Locus) *wszystkich punktów oddalonych iednakowo od obudwóch końców téyże linii* 1).

43. *Zagádniénié* 3. Od punktu danégo na linii prostéy wyprowadzić liniią prostopadłą.

Rozwiązanié. Weźmy na danéy linii dwa inné Punkta, iednakowo od punktu danégo odległé; od każdégo z tych dwóch punktów, iako od śrzodka (a centro) iednakowym promiéniém, większym iednak, niż iest odległość tych dwóch punktów od punktu danégo, nakréślmy dwa łuki przecinaiące się. Punkt dany, i drugi w przecięciu znaleziony złączmy z sobą liniią prostą, ta będzie prostopadłą, któréyśmy szukali.

44. *Zagádniénié* 4. Od punktu danégo za liniią prostą, spuścić na nię liniią prostopadłą.

Rozwiązanié. Znáydźmy dwa punkta na linii danéy, iednakowo odległé od punktu danégo; kréśląc od niego iako od śrzodka, iednakowym promiéniém, dwa łuki przecinaiące we dwóch punktach liniią daną; szukáymy inszégo ieszcze punktu równie od dwóch przecięciá punktów odległégo. Liniiá łączącá tén punkt znaleziony, i drugi dany, iest ta sama prostopadłá, któréyśmy szukali.

---

1) Ponieważ liniiá prostá, przez dané położénié dwóch Punktów, iest iuż tém samém wyznaczoná; ieżeli tedy przez dwa inne Punkta, z których każdy iednakową má od obudwóch punktów danych odległość, poprowadzimy liniią, ta w śrzodku linii łączącéy dwa punkta dané, będzie prostopadłą.

45. *Zagádnienié* 5. 1. Na danéy linii wystawić Tróykąt równoboczny.

2. Na danéy linii wystawić Tróykąt równoramiénny, którego iedén bok iest wiadomy.

3. Na danéy linii wystawić Tróykąt, którego dwa inné nierówné boki są wiadomé.

Rozwiązanié: 1. Z dwóch końców linii danéy, promiéniém równym téyże linii, pociągnąć trzeba po iednéy stronie dwa łuki, i punkt ich przecięcia złączyć z końcami linii danéy.

2. Z dwóch końców linii danéy, promiéniém równym linii, która má służyć za ramié Tróykąta równoramiénnego, pociągnąć dwa łuki, i od punktu ich przecięcia poprowadzić dwie liniie do końców linii danéy.

3. Z dwóch końców linii danéy, promiéniami odmiénnémi, równémi w długości liniióm maiącym służyć za boki do Tróykąta, pociągnąć dwa łuki, i od punktu ich przecięciá, poprowadzić dwie liniie do końców linii danéy.

Przestroga. Summa dwóch liniy danych, powinná bydź większá od trzeciéy linii także danéy (40).

46. *Definicyá.* Gdy uważámy Tróykąt, ilé wystawiony iest na iakiéy prostéy linii; taká liniiá nazywá się *Podstawą* (Basis) Tróykąta, a kąt naprzeciwko iéy stoiący nazywámy *Wiérzchołkiém Tróykąta* (Vertex Trianguli).

47. *Przystósowanié.* Przerysować Tróykąt dany.

Rozwiązanié: Weźmy iedén z boków Tróykąta za Podstawę onégo. Podstawę tę przenieśmy na inszé mieyscé, i od końców iéy promiéniami, dwóm innym bokóm równémi, nakréślmy dwa łuki, a od punktu ich przecięciá, poprowádźmy dwie liniie do końców podstawy; iuż tém samém przerysowany będzie Tróykąt dany, na inny iému we wszystkiém równy.

48. *Zagádnienié* 6. Maiąc dany kąt iaki, zrobić mu drugi równy, któryby miáł za iedno

ramié liniią daną, a za wiérzchołek punkt na téy linii także dany.

Rozwiązanié. Zaczynaiąc od wierzchołka kąta danégo, wziąć trzeba na iego ramionach dwie iakiékolwiek liniie równé i końce ich złączyć trzecią liniią; zrobi się tym sposobém Tróykąt. Od punktu danégo na linii także daney, przenosi się długość, wziętá na iedném ramiéniu kąta danégo, i na niéy iak na podstawie, przerysuie się Tróykąt, piérwszému ze wszystkiém równy (47).

49. *Przystósowanié* 1. Zrobić Tróykąt, któ égo wiadomé są dwa ramiona, i kąt między niémi.

2. Zrobić Tróykąt, którégo wiadomá podstawa, i dwa przy niéy kąty.

5o. *Zagadnienié* 7. Zrobić Tróykąt, któ égo dany iest kąt iedén, i dwa boki, iedén przyległy kątowi danému, drugi naprzeciwko niego leżący.

Uwága. Kąt dany może bydź *prosty*, *rozwarty*, albo *ostry*. W piérwszych dwóch razach, bok przeciwny kątowi danému, powinién bydź większy od boku przy kącie będącégo (3). W trzecim razie, bok przeciwny kątowi, może bydź większy lub mniewszy od drugiégo. We wszystkich tych razach, zrobimy kąt równy danému, i dáymy mu za ramié, liniią równą daney, a maiącéy mu służyć za toż ramié.

Z końca téy Linii promiéniém równym bokowi danému, który má leżeć naprzeciwko kąta danégo, pociągnieymy łuk, któryby przecinał drugié tegoż kąta ramié. Punkt przecięciá oznaczy koniec drugiégo ramiéniá kąta.

Niech będzie C wiérzchołek kąta danégo, li- Táb. 2. nią CA równá linii daney za ramié tego kąta, *ig.* 9. i niech łuk krédlony od punktu A, iako od śrzod- *i* Táb. 3. ka, promiéniém równym linii drugiéy daney *ig.* 1, (która má służyć za bok przeciwny kątowi C;) 2, 3. przecina drugié ramié w punktach B, i b.

1. Gdy kąt C iest *Prosty;* dwa Tróykąty: ACB, ACb, mogą przystać do siebie: bo liniie pochyłé równé AB, Ab, iednakowo są od prostopadłéy AC odległé, a zatém CB i Cb są równé.

W jnnych razach spuśćmy liniią prostopadłą AD.

2. Gdy kąt C iest *Roztwarty*, albo *ostry*, ale liniiá AB, większá od AC; w tym razie liniie pochyłé i równé AB, Ab, dalszé są od prostopadłéy AD, niżeli liniiá pochyłá AC: a zatém z dwóch Tróykątów ACB, ACb, iedén tylko Tróykąt ACB wypełniá trzy założoné *Warunki* (Conditiones).

3. Gdy kąt C iest *ostry*, ale liniiá AB mnieyszá od AC; dwie liniie pochyłé i równé: AB, Ab, będą bliższé prostopadłéy AD, niżeli liniiá AC; a zatém Tróykąty ACB, ACb, lubo sobie nierówné, obadwa iednak wypełnią trzy założoné warunki.

Powtórzénié przypádłów, w których dwa Tróykąty mogą przystać do siebie, albo w których Tróykąt wyznaczony iest przez wiadomość dostateczną boków i kątów iego.

1. Dwa boki i kąt między niémi.
2. Bok iedén i dwa przy nim kąty.
3. Trzy boki.
4. Dwa boki i kąt prosty nie między niémi zawarty.
5. Dwa boki i kąt roztwarty nie między niémi zawarty.
6. Dwa boki i kąt ostry nie zawarty między niémi, i gdy bok przeciwny danému kątowi iest náywiększy.
7. Dwa boki i kąt ostry nie zawarty między niémi, i gdy bok przeciwny kątowi danému iest náymnieyszy. (Tén przypádek iest wątpliwy) bo dwoiakim sposobém Tróykąt czyni zadosyć trzém warunkóm.

51. *Uwága* 1. Nietylko z tych, któréśmy tu

wymiénili wiadomości, ale i z innych ieszcze wyznaczyć można Tróykąt. Té iednak, które się tu wspomniały przypádki, náyczęściéy zdárzać się zwykły, i wszystkié inné mogą się pod nié podciągnąć.

Cztéry ostatnié przypádki mogą bydź ściągnioné do iednégo. (Obácz w Rozd: 10. Twiérdz: 5). Ale przy początkach lepiéy ié osobno podáwać.

52. *Uwága* 2. Samé tylko Tróykąty są tákiémi figurami, gdzie wiadomość trzech boków iuż iest dostateczná do wyznaczéniá Tróykąta. Okázać to w prostym przykładzie można na *Czworoboku*, albo *Czworokącie* (Quadrilaterum), którégo wszystkié boki są równé. Chociáż albowiém wiedzieć będziémy boki wszystkié tego Czworoboka; nie potrafimy iednak oznaczyć iaki Czworokąt ztąd wyniknie, bo tym bokóm różné dadź możémy nachylénié; a zatém i Czworokątowi odmiénną dadź możémy figurę. Tak np. ieżeli dámy mu kąty wszystkié proste, zrobi się *Kwadrat:* ieżeli dámy dwa kąty ostré, a dwa roztwarté, zrobi się Czworokąt pochyły tym bardziéy, im ostrzé iedné kąty, a drugié roztwartszé mieć będzie.

53. *Twiérdz:* 10. Liniiá prostá przecinaiącá kąt na dwie części równé, każdy w sobie punkt mieć będzie iednakowo odległy od obudwóch ramión tegoż kąta: a wszelki inszy nie na téy linii Punkt, nie tak odległy będzie od iednégo ramiéniá tego kąta, iak od drugiégo.

Niech będzie kąt ACB, który na dwie czę- Táb. 3. ści przeciná liniiá CD; ieżeli Punkt iaki na niéy, *Fig.* 4. naprzykład D, weźmiémy, liniie prostopadłé DE, DF, do ramión tego kąta spuszczoné, będą równé.

Dowodz: Dwa Tróykąty prostokątné CDE, CDF, które bok CD spólny maią, i kąty przy C równé, mogą przystać do siebie (18.) więc liniie DE, DF, są równé.

Niech znowu będzie Punkt G, nie w linii CD; prostopadłé GE, GH, będą nierówné.

Niech albowiém prostopadłá GE, spotyká w punkcie D, liniią CD, która na dwie części dzieli kąt ACB. Od Punktu D, spuśćmy prostopadłą DF, i poprowádźmy GF.

W Tróykącie DFG, summa linii FD, DG, większá iest od boku FG: ale ta summa linii FD, i DG, równá się linii EG; więc liniiá EG, większá iest od linii FG. A że znowu liniiá GF, większá iest od linii GH, (38.) więc tém bardziéy liniiá EG, większá będzie od linii GH.

54. *Uwága.* Liniiá prostá, która przedziélá kąt na dwie równé części, nazywá się *Mieyscém* wszystkich Punktów, których odległość iednakowá iest od dwóch liniy danych.

55. *Zagádn:* 8. Dany maiąc kąt, na dwie części go podzielić.

Rozwiązanié. Od wiérzchołka tego kąta, wziąwszy na ramionach iego dwie liniie równé, z końców ich kréślę dwa łuki iednakowym promiéniém. Przez ich przecięcié, i przez wiérzchołek kąta, prowadzę liniią, ta dzielić będzie kąt na dwie równé części.

56. *Wniosek.* Będzie téż można każdą z tych połowę podzielić daléy na dwie równé części, té znowu na dwie i t. d. Przeto każdy kąt może bydź (przynáymniéy myślą) podzielony na 2, 4, 8, 16, i t. d. części równych.

ROZDZIAŁ III.

O Liniiach równo-odległych i o równoległobokach.

57. *Twiérdzénié* 1. Niech będzie liniiá prostá, od któréy dwóch punktów wychodzą dwie liniie prostopadłé. Té prostopadłé nigdzie się nie zniydą, choćbyśmy ié náybardziéy przedłużali.

Dowodz: Gdyby té prostopadłé, gdzie się zeszły, zrobiłyby z trzecią liniią, od któréy są wyprowadzoné, Trójkąt maiący dwa kąty proste; a to iest niepodobná.

58. *Defin:* Dwie liniie na *Płaszczyznie* (Planum) poprowadzoné, gdy się zeyśdź z sobą nié mogą, nazwané są *Równoodległé* (Parallelae).

W ogólności zaś mówiąc: iakiékolwiek liniie dwie proste od trzeciéy przecięté iednakowo z jednéy strony nachylaiącé się do téy trzeciéy linii, są równoodległé.

59. Niechby naprzykład liniie CF, DG, przeTáb. 3. cięté w punktach A, i B, od linii HE, miały *Fig.* 5. kąty, CAE, DBE, równé; te dwie liniie nié mogą się nigdzie zeyśdź z sobą. Gdyby albowiém gdzie się zeszły, w Trójkącie z nich i z trzeciéy linii AB złożonym, byłby kąt zewnętrzny DBE, równy iednému z wewnętrznych CAE; co bydź nié może (31).

60. *Wniosek:* Ponieważ kąt HBG, równá się kątowi DBE, (16.) a kąt HAF kątowi CAE, można podobnie dowieśdź, że liniie CF, DG, nie zeydą się ani z drugiéy strony linii HE.

61. *Defin:* Kąty DBE, CAE, nazwać można *Iednostronné*, podobnie, iako i kąty: DBH, CAH; EBG, EAF; GBH, FAH, kąty: DBH, CAE, nazywaią się *Wewnętrzné* (Interni) takié też są i kąty: FAE, GBH. Kąty: FAE, DBH, nazwać można kątami na przemián, toiest na przemiánległémi (po Łacinie zowią się *Alterni*) toż nazwisko daie się i kątóm CAE, GBH.

Té Definicye znać dobrze Uczniowie powinni.

62. Kąty przyległé: DBE, DBH, czynią razém dwa kąty proste: (14.) ale że kąt DBE równá się kątowi CAE, dlá równéy pochyłości obudwóch liniy DB, i CA, do linii HE; więc i kąty wewnętrzné: DBH, CAE, razém wzięté równé będą dwóm kątóm prostym.

63. Kąty w wiérzchołku przeciwné DBE,

HBG, są równé (16.) więc i kąty na przemián CAE, HBG równé będą.

64. Piérwszé Twiérdzénié można i tak wyrazić: że ieżeli dwie linie prosté przecięté przez liniią trzecią, czynić będą z nią kąty iednostronné równé, albo kąty na przemián równé, albo że dwa kąty wewnętrzné równać się będą summie dwóch kątów prostych; takié liniie będą równoodległé.

65. *Zagádn:* 1. Daną maiąc iednę liniią, poprowadzić drugą równoodległą, przez punkt dany.

Táb. 3. *Fig.* 6. Niech będzie liniiá daná BC, i punkt A także dany: przez tén Punkt poprowadzić liniią równoodległą od linii danéy BC.

Rozwiązanié. Przez Punkt A ciągniémy iakążkolwiek liniią, naprzykład AD, do BC. Przy Punkcie A, zróbmy kąt DAE, równy kątowi ADC. Liniiá AE, będzie tą równoodległą, któréyśmy szukali.

Dowodz: Kąty na przemián DAE, ADC, są równé; więc liniie BC, AE, są równoodległé.

Táb. 4 *Fig.* 1. 66. *Twiérdz:* 2. Ieżeli kąty iednostronné CAE, IBE, nie są równé, choćby téż i bardzo nieznaczná była ich różnica; wszelako iednak liniie AC, BI, zniydą się gdziekolwiek z sobą; albo (co na iedno wychodzi) ieżeli summa kątów wewnętrznych IBH, CAE, mnieyszá, albo większá iest od dwóch kątów prostych; tedy dwie liniie CF, IL, zniydą się z téy strony linii HE, gdzie ta summa iest mnieyszá od dwóch kątów prostych.

Na dowodzénié tego Twiérdzéniá wysilali od dáwnych czasów dowcipy swoié Jeometrowie, i pospolicie fáłszywie ié dowodzili: bo będąc to Twiérdzénié w sobie tak iasné, można było i bez dowodzéniá na nié przystać. Można iednak dowiéśdź ié bez popadniéniá omyłce: ale dowody té tak długié, że ciąg i związek ich, wielkié-

go natężéniá, uwági, i rozumu wyciągaiący, znudziłby uczniów tym bardziéy, imby mniéy przeświadczéni byli o pożytku i potrzebie tego dowodzéniá. Rozumiém, idąc w tém za przykładém Euklidesa, że lepiéy iest mieć to Twiérdzénié za oczywisté, zwłaszcza dowiódłszy iuż dwóch innych Podáń *odwrotnych*, (Propositio inversa): piérwszégo, że, gdy liniie schodzą się z sobą, kąty iednostronné są nie równé; drugiégo, że, gdy kąty iednostronné równé są, liniie z sobą się zeyśdź nigdzie nié mogą.

67. *Wniosek.* Ieżeli dwie liniie są równoodległé, a trzeciá ié przecináy kąty iednostronné będą równé, kąty na przemián także równé, i kątów dwóch wewnętrznych summa równać się będzie summie dwóch kątów prostych. Iedén z tych trzech wniosków przypuściwszy, przypuścić trzeba i dwa drugié, tak, iak w piérwszém Twiérdzéniu. Iakoż, gdyby którákolwiek z tych trzech równości kątów, nie była práwdziwá, iużby tém samém liniie zeyśdź się gdzie z sobą mogły, toiest nie byłyby równoodległé.

Defin: Czworokąt, którégo boki naprzeciwko siebie leżące są równoodległé, nazywać będziémy *Równoległobokiém.* (Parallelogrammum). Liniią, która łączy wiérzchołki dwóch kątów przeciwnych, nazwiémy *Przekątną* (Diagonalis).

68. *Twiérdz:* 3. W każdym Równoległoboku, boki przeciwné i kąty przeciwné są równé.

Niech będzie Równoległobok ABCD, mieć on będzie boki AB, i DC równé; boki AD, i BC także równé, i kąty przeciwné A i C, iako téż B i D, równé. *Tab. 4. Fig. 2.*

Przygotowanié. Poprowádźmy przekątną AC.

Dowodz: Dwa Tróykąty: ACB, CAD, mogą przystać do siebie: maią albowiém bok AC spólny, kąty na przemián ACD, CAB, równé, i kąty na przemián CAD, ACB także równé; a zatém (23.) i liniie AB, DC są równé, iako téż i liniie AD, BC; kąty także B i D równé, i ką-

tv A i C iako składaiące summę kątów względem siebie równych w obudwóch Tróykątach, także równé.

69. *Wniosek* 1. Przekątná dzieli Równoległobok na dwa Tróykąty, któré przystać do siebie mogą.

70. *Wniosek* 2. Ieżeli dwie liniie są równoodległé, spuściwszy od dwóch punktów iednéy, dwie prostopadłé do drugiéy, té prostopadłé równé będą.

71. *Wniosek* 3. Ieżeli Równoległobok má iedén kąt prosty, wszystkié też inné kąty iego prosté będą; a ieżeli dwa iego boki przyległé, są równé, wszystkié także boki równé będą.

72. *Defin:* Równoległobok, którégo kąty są prosté, nazywá się *Prostokątém* (Rectangulum).

Prostokąt, którégo wszystkié boki są równé, zowié się *Kwadratém.* Równoległobok, który má kąty nierównè, zachowuie nazwisko Równoległoboku; lubo czasém z przydatkiém się wyráżá, że iest Równoległobokiém *Ukośnym* (Obliquangulum). Równoległobok ukośny, którégo boki wszystkié są równé, nazwany bydź może *Kwadratem ukośnym* (Rhombus).

73. *Twierdz:* 4. Ieżeli w Czworokącie boki przeciwné są równé, taki Czworokąt będzie Równoległobokiém.

Fig. taż co wyżéy Niech będzie Czworokąt: ABCD, którégo boki przeciwné AB, CD, są równé, i boki przeciwné AD i BC także równé, tén Czworokąt będzie Równoległobokiém.

Przygotowanié. Poprowádźmy Przekątną AC.

Dowodz: W Tróykątach: ACD, CAB, boki trzy w iednym równé są trzém bokóm w drugim; (68) więc przystać do siebie mogą (25) w szczególności zaś kąty na przemián CAB, ACD są równé, więc liniie AB, CD są równoodległé: podobnie i liniie BC, AD są także Równoodległé.

74. *Twiérdz*: 5. Ieżeli w Czworokącie dwa boki przeciwné są równé, i równoodległé; taki Czworokąt iest równoległobokiém.

Niech będzie Czworokąt ABCD, którégo boki przeciwné AB, CD, są równé, i równoodległé, tén Czworokąt iest Równoległobokiém. *Fig. taż co wyżéy*

Przygotowanié. Poprowádźmy Przekątną AC.

Dowodz: Dwa Tróykąty: ACD, CAB, maią bok AC spólny, boki AB i CD równé i kąty na przemián: ACD, CAB, zawarté między témi bokami, równé; więc przystać do siebie mogą; (18) a w szczególności, kąty: CAD, ACB będą równé, że zaś są na przemián: więc liniie AD i CB są równoodległé.

75. *Uwága.* Czworokąt może mieć dwa boki równoodległé, a dwa inné równé, a nie bydź przeto Równoległobokiém, chyba wténczas, gdy boki przyległé bokóm równoodległym, są prostopadłé. Widzieć to można na Figurze 3, gdzie lubo Czworokąt ABCD, má boki dwa przeciwné: AB i CD równoodległé, boki AD i BC równé, nie iest iednak Równoległobokiém.

76. *Zagádn*: 2. Maiąc daną liniią prostą postawić na niéy Kwadrat.

Rozwiązanié. Z końca iednégo linii danéy, wyprowádźmy prostopadłą iéy równą. Z drugiégo końca téy danéy linii i prostopadłéy, iako do śrzodka promiéniém równym danéy linii, nakréślmy dwa łuki okręgu, i Punkt ich przecięciá złączmy z końcém linii danéy i prostopadłéy.

Dowodz: Czworokąt tak zrobiony, będzie miáł wszystkié boki równé, i kąt iedén prosty; więc będzie Kwadratém.

77. *Zagádn*: 3. Wykréślić prostokąt, którégo boki są dané.

Sposób wykréślenia iest tén sám, co wyżéy, (76) z tą różnicą, że prostopadłá powinná mieć długość daną, a nie bydź równą podstawie; promiénie także łuków kréślić się maiących, iedén

powinién bydź równy podstawie, a drugi prostopadłéy.

78. *Zagádn*: 4. Wykréślić Równoległobok, którégo kąt iest wiadomy, i boki.

Sposób wykréślénia tém tylko różni się od poprzédzaiącégo, że zamiást prostopadłéy poprowadzić potrzeba liniią z tém nachyleniém, któréby czyniło kąt dany.

ROZDZIAŁ IV.

O kątach w Figurach Prostokréślnych, a w szczególności w Tróykątach.

Widzieliśmy, (31) że kąt zewnętrzny Tróykąta, większy iest od iednégo z dwóch kątów wewnętrznych iému przeciwnych; dowiedziémy teráz, że tén kąt zewnętrzny równá się obudwóm kątom wewnętrznym naprzeciw siebie leżącym.

Táb. 4. *Fig.* 4. 79. *Twiérdz*: 1. Niech będzie Tróykąt ABC, a kąt iego zewnętrzny CBD; tén kąt równy iest summie dwóch kątów wewnętrznych: A i C.

Przygotowanié. Poprowadźmy BE, równoodległą od AC.

Dowodz: Kąty na przemián C i CBE są równé; równé także i kąty iednostronné: A, i EBD; więc summa kątów: C i A, równá iest summie kątów: CBE i EBD, toiest kątowi zewnętrznému CBD.

80. *Twiérdz*: 2. W każdym Tróykącie summa trzech kątów równá iest dwóm kątom prostym.

Niech będzie Tróykąt ACB; summa trzech iego kątów, równá się summie dwóch kątów prostych.

Przygotowanié. Pociągniémy daléy AB, naprzykład aż do D.

Dowódz: Iuż się dowiodło, że kąt zewnętrzny CBD, równá się dwóm kątóm wewnętrznym A i C; więc summa kątów CBD, i CBA, równać się będzie summie kątów: A, C, i CBA: ale summa dwóch piérwszych kątów, iako przyległych, wyrównywá dwóm kątóm prostym; więc i drugá trzech kątów summa, tymże dwóm kątóm prostym iest równá 1).

81. *Wniosek* 1. W Tróykącie równobocznym, każdy w szczególności kąt, iest trzecią częścią dwóch kątów prostych, albo $\frac{2}{3}$ kąta iednégo prostégo, toiest, każdy váży 60 stopni.

82. *Wniosek* 2. W Tróykącie, znaiąc dwa kąty, iuż tém samém znany i kąt trzeci.

Przykład. Niech będzie Tróykąt, którégo kąt iedén má stopni 50, a drugi 72°, summa tych dwóch kątów będzie 122°. Różnica zaś 122°, od dwóch kątów prostych, albo od 180°, iest 58°, i ta iest wáżność trzeciégo kąta.

83. *Wniosek* 3. W Tróykącie równoramiénnym, znaiąc kąt iedén, poznámy zaráz i dwa drugié.

Przykład. Niechby kąt iedén przy wiérzchołku váżył 40°; w Tróykącie równoramiénnym. Iuż tém samém dwa inszé váżą 140°: a że

---

1) To Twiérdzénié iest bardzo wielkiéy wági; przeto trzeba, aby iak náydokładniéy zrozumieli ié Uczniowie, iako inszé Twiérdzéniá, od których dowiedzénié tego zawisło. Tu podobno mieyscé byłoby pokázaniá związku Twiérdzéń dotąd podanych iednych z drugiémi, któryto związek istotny iest postępowaniu Jeometrycznemu. Cwiczéniá, które poprzedziły, iuż powinny były dadź poznać Uczniom tén sposób postępowaniá. Trzeba iednak często im związek takowy okazywać, i iak się iedna práwda z drugiéy odkrywá. Stąd náywiększy pożytek z Matematyki odnieść mogą, i nabiorą práwdziwégo ducha Matematycznégo: co nierównie pożyteczniéy im będzie, iak mieć nawet wiadomość saméy Matematyki.

są równé, każdy z nich ważyć będzie połowę, toiest 70°.

Niechby znowu kąt iedén przy Podstawie ważył 64°, i drugi przy Podstawie ważyłby 64°. Summa tych dwóch kątów byłaby 128°, a różnica między 180°, i 128°, toiest 52°, pokázałyby ważność kąta trzeciégo.

84. *Defin*: Figura maiącá więcéy niż cztery boki, albo kąty, nazywá się *Wielokątém* (Polygonum).

85. *Twiérdz*: 3. Ważność summy kątów wszystkich w Figurze *Prostokréślnéy* (Figura Rectilinea), zawisła od liczby boków téyże Figury. Liczbę tę boków podwoiwszy, i odciąwszy od podwoionéy liczbę 4; reszta okáże w kątach prostych ważność kątów wszystkich Figury prostokréślnéy. Nim się przystąpi do ogólnégo dowodzéniá, trzeba zacząć od przypádków szczególnych w sposób podobny następuiącému.

Niechby naprzykład Figura Prostokréślná miała tylko cztéry boki, toiest niechby tylko była Czworokątém. Poprowadziwszy w niéy Przekątną, ta podzieli Czworokąt na dwa Tróykąty, w których summa kątów razém wziętá, będzie równá summie kątów w Czworokącie. A że ta summa kątów w dwóch Tróykątach, váży cztéry kąty prosté; więc i summa kątów w Czworokącie váżyć także będzie cztéry kąty prosté.

Niechby Figura miała pięć boków, toiest była *Pięciokątém* (Pentagonum). Poprowádźmy od iednégo wiérzchołku, do dwóch drugich przeciwnych dwie Przekątné; podzielą oné Pięciokąt na trzy Tróykąty, których summa ważności kątów, toiest 6 kątów prostych, będzie téż summą ważności kątów Pięciokąta.

Dowodzénié ogólné. Od wiérzchołku kąta którégokolwiek w Wielokącie, poprowádźmy tylé przekątnych, ilé można. Postrzeżémy łatwo, że Tróykątów liczba z tego podziału wynikaią-

cá, mnieyszá będzie dwoma, od liczby boków Wielokąta: albowiém od kąta tego, od którego się prowadziły Przekątné, nié można ich było prowadzić do dwóch innych kątów náybliższych, boby tylko przykryły sobą dwa náybliższé boki, albo ramiona tego kąta, i nie zrobiły Tróykątów. Ponieważ zaś w każdym Tróykącie ważność trzech kątów, równá się ważności dwóch kątów prostych, będzie więc dwa razy tylé zawiérało się (co do ważności) kątów prostych w Wielokącie; ilé się zawiérá w nim Tróykątów. A że liczba Tróykątów, mnieyszá iest dwoma, od liczby boków Wielokąta: więc liczba kątów prostych, w tymże Wielokącie, będzie dwa razy tak wielká, toiest będzie się równać liczbie boków podwoionych, odtrąciwszy od niéy dwa razy 2, toiest 4; a zatém ważność kątów wszystkich Wielokąta w kątach prostych znáydziémy odeymuiąc liczbę 4, od liczby podwoioney boków tegoż Wielokąta 1).

---

1) Dowodzénié to mogłoby się wydáwać trudném, gdyby go wielé przykładów na Wielokątach szczególnych nie poprzedziło, i Figury na każdy szczególny przykład kréślone nie obiaśniły. Wielé iednak na tém zawisło, aby i bez Figury przyuczali się Uczniowie dáwać sprawę z tego, czego się nauczyli: a tym sposobém aby wprawiali się w zachowanié dobrego porządku, tak w wyobrażéniach, które sobie czynić będą, iako też i w samych wyrazach. Szczególnieyszégo zaś staraniá przykładać trzeba, aby bardziéy rozumém, niż pamięcią wszystko to, czego się uczyć będą, ogarnywali. Z téy przyczyny przy rozwiązaniu niektórych zagádnień, opuszczało się umyślnie Figury. Niech iednak stąd nie wnoszą Nauczyciele, aby wcale bez Figur obeyśdź się mogło; i owszém niech przyuczaią Uczniów, aby ié sami sobie kréślić umieli z pamięci, zrozumiáwszy piérwéy Twierdzéniá, do których dowodzéniá stósować się maią té Figury. Przykłady dotąd przytoczoné, tym sposobém się podáwały, którym potrzeba, aby

86. *Twiérdz*: 4. Pociągnąwszy daléy w jednę stronę boki wszystkié Wielokąta, iakążkolwiek będzie liczba boków iego, zawsze iednak summa kątów zewnętrznych, zamkniętych między bokiém iednym i przedłużéniém drugiégo przyległégo, wáżyć będzie cztéry kąty prosté 2).

Nim się przystąpi do ogólnégo Dowodzéniá, trzeba piérwéy na szczególnych przykładach tego Twiérdzéniá dowiésdź, zacząwszy od Tróykąta, w którym każdy kąt ze swoim zewnętrznym przyległym wáży dwa kąty prosté: a że kątów iest w Tróykącie trzy; więc z przyległémi wážyć będą sześć kątów prostych: trzy zaś kąty, któré się w Tróykącie znáyduią, wážą dwa kąty prosté; więc té, które są za Troykątém, toiest zewnętrzné, wážyć będą cztéry kąty prosté.

Dowodzénié ogólné. Każdy kąt wewnętrzny w Wielokącie, ze swoim zewnętrznym przyległym, wáży dwa kąty prosté; więc summa wszystkich kątów tak wewnętrznych, iako i zewnętrznych, wáży dwa kąty prosté, wzięté tylé razy, ilé iest boków w Wielokącie; a zatém summa samych kątów zewnętrznych, wážyć będzie tylé, ilé brakuie summie kątów wewnętrznych, aby wážyła dwa kąty prosté, wzięté tylé razy, ilé má boków Wielokąt. Ale że, (iakośmy w poprzedzaiącém Twiérdzéniu dowiedli), brakuie do tego téy summie kątów cztéry; więc summa kątów zewnętrznych Wielokąta wážyć będzie cztéry kąty prosté.

---

i Uczniowie dáwali sprawę z działáń iuż dobrze od siebie poiętych. Odpowiédź náypospolitszá młodych iest, tych nawet, którzy lepiéy rzecz przenikaią: *Umiém iá to, ale się wytłumaczyć nié mogę.*

2) Mówię tu tylko o Wielokątach, w których kąt każdy mnieyszy iest od dwóch kątów prostych, toiest o takich, w których kąty są wyskakuiące (*Salientes*).

87. *Uwága* 1. Náywiększéy wági są té przypádki, w których kąty wszystkié Wielokąta są równé. Każdy w tym razie kąt zewnętrzny, váży 4 kąty prosté, podzielone przez liczbę boków Wielokąta. Ważność zaś każdégo kąta wewnętrznégo znáydziémy, odtrąciwszy tén Wieloráz, toiest: ważność iednégo kąta zewnętrznégo od dwóch kątów prostych.

Ieżeli wszystkié kąty wielokąta są równé; tedy im większy będzie każdy kąt iego zewnętrzny, tym mnieyszy będzie wewnętrzny: a im mnieyszy tamtén, tym tén większy.

Po dowiedzionych tych Twiérdzéniach, łatwo będzie Uczniom ułożyć sobie Táblicę ważności kątów tak wewnętrznych, iako i zewnętrznych w tych Wielokątach, w których kąty wszystkié są równé, i mogą tę ważność wyrazić, czyli to przez kąty prosté, czyli przez stopnie.

88. *Uwága* 2. Umieiąc dowieśdź dwóch Twiérdzéń poprzedzaiących, można rozwiązać i to, co następuie zadanié:

Iak wielorakim sposobém około Punktu danégo napełnić można mieyscé (toiest cztéry kąty prosté) przez kąty Figury Prostokréślnéy iednégo gatunku, 1) i któréy wszystkié kąty są równé?

1. Gdy Tróykąt má wszystkié boki równé, czyli iest Równobocznym; każdy z kątów iego váży trzecią część dwóch kątów prostych, albo $\frac{2}{3}$ iednégo kąta prostégo; a zatém sześć takich kątów, uczyni 4 kąty prosté, i napełni mieyscé około Punktu iednégo.

2. Gdy Czworokąt má wszystkié kąty równé

1) Mówię, *iednégo gatunku*, ponieważ gdyby wolno było miészać kąty różnych Wielokątów; możnáby 14 sposobami napełnić mieyscé około iednégo Punktu, używaiąc tych tylko Wielokątów, któré kąty wszystkié równé maią.

czyli iest Prostokątém; każdy z kątów iego iest kątém prostym, a zatém 4 takié kąty ważyć będą 4 kąty proste.

3. Kąt zewnętrzny Pięciokąta, ktorégo kąty wszystkie są równe, waży $\frac{1}{5}$ część cztérech kątów prostych, albo $\frac{4}{5}$ iednégo kąta prostégo; a zatém każdy kąt wewnętrzny, ważyć będzie $\frac{1}{5}$ kąta prostégo. Trzy takowé kąty, czynią tylko 3 kąty proste i $\frac{3}{5}$, co iest mniéy iak 4, a cztéry takié kąty, czynią 4 kąty proste i $\frac{4}{5}$, co iest więcéy iak 4. Przeto kątami Pięciokąta, maiącégo wszystkie kąty równe nié można napełnić mieysca około Punktu iednégo.

4. Kąt zewnętrzny Sześciokąta, którégo kąty wszystkie są równe, waży $\frac{1}{6}$ część cztérech kątów prostych, albo $\frac{2}{3}$ iednégo kąta prostégo; a zatém każdy kąt wewnętrzny ważyć będzie, 1 i $\frac{1}{3}$ kąta prostégo. Trzy zaś takowé kąty, czynią zupełnie cztéry kąty proste.

Ieżeli Wielokąt má więcéy niż 6 boków, każdy z kątów iego wewnętrznych, będzie większy od kąta w sześciokącie; trzy więc takowé kąty uczynią więcéy niż 4 kąty proste: a że kąt Wielokąta maiącégo boki wszystkie równe, iest zawsze mnieyszy od 2 kątów prostych; więc dwa takié kąty nie wystárczą na napełnién e mieysca około Punktu iednégo.

Táb. 4. *Fig.* 5. 6. Przeto trzéma tylko sposobami rozwiązać można wzwyż wyrażoné Zadanié, toiest przez 6 kątów Tróykąta, przez cztéry kąty Czworokąta, i przez trzy kąty Sześciokąta.

Táb. 5. *Fig.* 1.

Natura sama nauczyła Pszczoły układać w ulu komórki w sześciokąty.

ROZDZIAŁ V.

O Równoległobokach i Tróykątach równych co do Powiérzchni, i o zamiénieniu iakiéykolwiek Figury Prostokréślney na Tróykąt i na Równoległobok.

Widzieliśmy w Rozdziále drugim przypádki, w których dwa Tróykąty mogą przystać do siebie, i bydź zatém co do Powiérzchni, równé. W Rozdziále trzecim widzieliśmy także, iako dwa Równoległoboki, które miały i boki i kąty równé, mogły przystać do siebie, i że zatém powiérzchnie ich równé były. Té przypádki przystáwaniá iednych Figur do drugich, były tylko, co do równości Powiérzchni, przypádkami szczególnémi; ogólnieyszé zaś w téy mierze Twiérdzéniá będą rzeczą tego Rozdziáłu.

89. *Twiérdzénié* 1. Dwa Równoległoboki zrobioné na iednéyże Podstawie, a z przeciwnéy strony zakończoné przez Liniią równoodległą od podstawy, maią Powiérzchnie równé.

Niech będą dwa Równoległoboki: ABCD, ABEF, których taż sama iest Podstawa AB, a kończy ié z drugiéy strony, równoodległá od Podstawy Liniiá DE, té dwa Równoległoboki, maią równé Powiérzchnie, iakáżkolwiek boków ich długość będzie. Tab. 5. Fig. 2. 3. 4.

Dowodz: Tróykąty: DAF, CBE, mogą przystać do siebie: boki albowiém AD, BC są równé, bo naprzeciwko leżące w Równoległoboku ABCD; boki téż AF, BE, równé, bo naprzeciwko leżące Równoległoboku ABEF. Kąty oprócz tego iednostronné: ADF, BCE, i AFD, BEC, równé. Odiąwszy tedy osobno Tróykąt DAF, i Tróykąt iému równy CBE, od całéy Figury ABED; reszty będą równé, toiest Równoległo-

bok AFEB, równy będzie Równoległobokowi ABCD.

To Twiérdzénié możnaby obiaśnić Figurą z papiéru grubégo wyrobioną, i zacząć od przypádku, który wyráżá Figura 2, gdzie punkta C i F razém przypádaią. W takim razie Tróykąty: ACD, BEC równé są piérwszy i drugi Tróykątowi ABC; a zatém i sobie są równé; więc tak Równoległobok ABCD, iako i ABEF złożony iest z dwóch Tróykątów równych.

90. *Defin*: Ponieważ liniie prostopadłé spuszczoné od którégokolwiek Punktu linii, na drugą liniią równoodległą, są równé: ieżeli więc od punktu którégokolwiek w boku Równoległoboku spuścimy do boku przeciwnégo liniią prostopadłą; ta prostopadłá iednakowéy zawsze będzie wielkości, i nazywá się *Wysokością* tego Równoległoboku względém drugiégo boku, do którégo iest spuszczoná, i który wzięty iest za Podstawę tegoż Równoległoboku. Twiérdzénié poprzedzaiącé możnáby téż i tak wyrazić: *Dwa Równoległoboki maiącé spólną Podstawę, i wysokość iednakową, są równé.*

91. *Twiérdzénié* 2. Dwa Równoległoboki są równé, których Podstawy i wysokości równé.

92. *Dowodz*: Do Podstawy iednégo z tych Równoległoboku, przyłóżmy Podstawę drugiégo; przystaną zupełnie do siebie té Podstawy, bo są równé; będą więc té postawioné na sobie Równoległoboki miały spólną Podstawę, i równą wysokość; a zatém według piérwszégo Twiérdzéniá będą równé.

93. *Twiérdz*: 3. Ieżeli dwa Równoległoboki zrobioné na iedney Podstawie, równé maią Powiérzchnie, równé téy i wysokości mieć będą.

Táb. 5. *Fig.* 5 Niech będą dwa Równoległoboki ABCD, ABEF, których obudwóch Podstawa iest AB, i równá Powiérzchniá; maią oné i wysokość iednakową, toiest zakończoné są przez tę samę liniią równoodległą od Podstawy.

Dowodz: Gdyby Punkta F i E, nie były na linii DC, albo na iéy przedłużéniu; toby inné iakié Punkta naprzykład H, i G, linii AF, BE, były na téyże linii DC, a zatém Równoległoboki: ABCD, ABGH, byłyby równé. Aleśmy wzięli za równé Równoległoboki ABCD, i ABEF; więc i Równoległoboki ABEF, i ABGH byłyby równé, co iest niepodobną, chyba że Punkta H i G będą té samé, co i Punkta F i E.

W ogólności mówiąc: dwa Równoległoboki, maiące równé Podstawy i Powiérzchnie, maią téż i równé wysokości; a gdy znowu Równoległoboki miéć będą wysokości i Powiérzchnie równé, i Podstawy ich równé będą.

94. *Twiérdz:* 4. Gdy Trójkąt i Równoległobok, stoi na téyże saméy Podstawie, a wiérzchołek Trójkąta przypádá na boku równoodległym od Podstawy i należącym do Równoległoboku, albo na przedłużéniu tegoż boku; taki Trójkąt iest połową Równoległoboku.

Niech będzie Równoległobok ABCD, a Trój- Táb. 6. kąt ABE, maiący z nim spólną podstawę AB, i *Fig.* 1. niech wiérzchołek E, Trójkąta przypádá na boku DC należącym do Równoległoboku; Trójkąt tén ABE, będzie połową Równoległoboku ABCD.

Przygotowanié. Przez B poprowádźmy BF, równoodległą od AE, którąby spotkała DC, w F.

Dowodzénié. Trójkąt ABE, iest połową Równoległoboku ABFE, ponieważ bok BE Trójkąta iest Przekątną Równoległoboku ABFE. A że Równoległoboki: ABFE, ABCD, są równé; więc Trójkąt ABE, iest także połową Równoległoboku ABCD.

95. *Defin:* Prostopadłá spuszczoná od wiérzchołku Trójkąta do Podstawy, nazywá się *wysokością* tego Trójkąta. Twiérdzénié tedy powyższé takby mogło bydź inaczéy wyrażoné: *Ieżeli Równoległobok i Trójkąt maią spólną Pod-*

stawę, i wysokość równą, Tróykąt tén będzie połową Równoległoboku.

96. *Wniosek.* Można więc przystósować wszystko do Tróykątów, cokolwiek się o Równoległobokach powiedziało. I tak:

1. Dwa Tróykąty maiące równé Podstawy i wysokości, równé mieć będą i Powiérzchnie.

2. Dwa Tróykąty równé w Powiérzchniach, i w wysokościach albo w Podstawach; będą téż miały równé Podstawy lub wysokości.

W ogólności zaś mówiąc: z tych trzech ilości: z Podstawy, wysokości, powiérzchni Równoległoboku lub Tróykąta, dwie którékolwiek wiadomé, trzecią poznać daią; iedna zaś nie iest dostateczną, aby z niéy dwie drugié wyznaczyć można. Obáczymy daléy w tym Rozdziále, iako można zrobić tylé Równoległoboków równych i równokątnych, ilé zechcémy, chociáż boki nierówné mieć będą 1).

97. *Zagádn*: 1. Maiąc dany Równoległobok, zamiénić go na Prostokąt, któryby tę samę miáł Podstawę i Powiérzchnią.

Rozwiązanié. Od obudwóch końców Podstawy, wynieśmy liniie prostopadłé, aż do boku Podstawie przeciwnégo; zrobi się Prostokąt równy Równoległobokowi, co do Podstawy i Powiérzchni.

Podobnym sposobém postąpić sobie potrzeba, chcąc zamiénić Równoległobok dany na drugi równy piérwszému w Podstawie i w Powiérzchni, gdy inny iakikolwiek kąt przy Podstawie, a nie prosty dany będzie.

98. *Zagádn*: 2. Tróykąt dany zamiénić na

---

1) Trzeba to dobrze dadź poznać Uczniom, że wielkość Równoboków i Tróykątów nie zawisła od ich obwodu (Perimeter) omyłki w téy mierze częste zwykły bywać.

inny Prostokątny, któryby miał tę samę Podstawę i Powierzchnią.

Rozwiązanie: Przez wierzchołek Trójkąta danego, poprowadźmy równoległą od Podstawy, a od końca którégokolwiek téyże podstawy, wyniéśmy prostopadłą aż do równoległéy; Punkt przecięcia tych dwóch liniy będzie wierzchołkiém Trójkąta szukanégo.

Podobnym sposobém postąpimy sobie chcąc zamiénić Trójkąt dany na drugi równy mu w Podstawie i w Powierzchni: gdy inny a nie prosty kąt przy Podstawie dadź będzie potrzeba tému drugiému Trójkątowi.

99. *Zagádn:* 3. Zamiénić Trójkąt dany, na Równoległobok prostokątny, któryby miał albo tę samę co Trójkąt podstawę, albo tę samę wysokość.

Rozwiązanie. Równoległobok prostokątny, któryby miał tę samę podstawę, i wysokość, co Trójkąt; byłby dwa razy tak wielki; a zatém Równoległobok tén, którégo szukámy, powinién mieć tę samę podstawę, co Trójkąt, a połowę iego wysokości; albo téż tę samę wysokość, a połowę tylko Podstawy.

100. *Zagádn:* 4. Czworokąt dany zamiénić na Trójkąt téyże saméy powierzchni.

Rozwiąz: Poprowádźmy w Czworokącie danym przekątną, a przez wierzchołek iednégo z kątów iéy przeciwnych, pociągniémy równoległą od téyże przekątnéy. Wszystkie Trójkąty maiące za podstawę tę przekątną Czworokąta, a wierzchołek na równoodległéy od téy przekątnéy będą równe w Powierzchni Trójkątowi, który czyni ta przekątná z dwoma bokami Czworokąta schodzącémi się na równoodległéy (96.) a zatém będzie téż równy w powierzchni tému Trójkątowi, i Trójkąt maiący za Podstawę tę samę co i tamtén przekątną, a za bok iedén maiący przedłużénié aż do równoległéy, boku Czworokąta leżącégo z drugiéy strony przekątnéy;

tém Tróykąt ostatni dodáwszy do Tróykąta z drugiéy strony przekątnéy leżącégo, zrobi się Tróykąt równy co do powiérzchni Czworokątowi danému: bo ponieważ Tróykąty dwa, na które iest Czworokąt przez przekątną podzielony, równaią się co do powiérzchni całému Czworokątowi; więc témuż Czworokątowi równy także będzie co do powiérzchni i Tróykąt przez przekątną w Czworokącie uczyniony: a drugi równy w powiérzchni Tróykątowi drugiému wchodzącému także w Czworokąt i onégo dopełniaiącému.

Táb. 6. *Fig.* 2 Niech będzie naprzykład ABCD Czworokąt dany; poprowadziwszy przekątną BD, i od niéy równoległą CE, przez wiérzchołek C, kąta DCB; gdy bok AB Tróykąta drugiégo w Czworokącie pociągniémy aż do zeyściá się z równoodległą CE w punkcie E; zrobi się Tróykąt ADE, równy co do powiérzchni Czworokątowi ABCD.

101. *Uwága.* Tym sposobém postąpimy sobie, chcąc zmnieyszyć iednym bokiém Figurę iaką prostokréślną, bez odmiéniéniá iéy powiérzchni. Poprowadzimy naprzód przekątną, którąby odcięła Tróykąt iedén w Figurze podanéy; potém przez wiérzchołek tego Tróykąta pociągniémy równoodległą od téy przekątnéy, aż do zeyściá się téyże równoodległéy z bokiém drugim przyległym do przekątnéy; naostatek złączymy punkt przecięciá z drugim końcém téyże przekątnéy.

Można nawet użyć sposobu tego do zamiéniéniá iakiéykolwiek Figury prostokréślnéy, na Tróykąt téyże saméy, co i podaná Figura powiérzchni: a to zmnieyszaiąc naprzód iednym bokiém Figurę podaną; potém odeymuiąc znowu bok iedén, zmnieyszonéy iuż iednym bokiém Figurze i t. d. póty, póki do trzech tylko boków, toiest do Tróykąta nie przyydziémy.

Táb. 6 *Fig.* 3 *Przykład.* Niechby trzeba zamiénić Pięciokąt ABCDE na Tróykąt téyże saméy powiérzchni.

Poprowádźmy przekątné: DB, DA, przez C i E pociągniémy równoodległé CG, EF, aż do ich zeyściá się z liniią AB przedłużoną w Punktach G i F: złączmy té punkta z końcami przekątnych, przez DG i DF. Tróykąt DFG będzie równy w powiérzchni Pięciokątowi danému.

102. *Wniosek.* Widzieliśmy, (99) że Tróykąt może bydź zamiéniony na Równoległobok prostokątny, maiący tę samę co i Tróykąt powiérzchnią; a zatém można każdą Figurę prostokréślną zamiénić zawsze na prostokąt nie różniący się od niéy w powiérzchni, mogąc ią piérwéy zamiénić na Tróykąt.

103. *Uwaga.* Niechby nám podano dwie iakié Figury prostokréślné, którébyśmy iuż zamiénili obiedwie na Prostokąty; i niechby té dwa prostokąty miały albo podstawy, albo wysokości równé. Łatwo nám będzie zrobić taki znowu prostokąt, któryby równy był w powiérzchni, summie albo różnicy tych dwóch Figur podanych. Prostokąt albowiém, któryby miał podstawę równą summie albo różnicy Podstáw w obudwóch mnieyszych Prostokątach (gdyby ich wysokości były równé), i tę samę co oné wysokość, byłby równy w powiérzchni summie tych Figur, lub ich różnicy. Wkrótce się także pokaże, iż można zamiénić Prostokąt iedén na drugi, któryby był piérwszému równy w Powiérzchni, a miał w sobie bok iedén dany: a zatém można zawsze dwa Prostokąty do tego przyprowadzić, aby miały iedén bok równy w obudwóch; przeto można zawsze i Prostokąt taki zrobić, któryby równy był w powiérzchni dwóm albo więcéy Figuróm prostokréślnym podanym.

104. *Twiérdz:* 5. W jakimkolwiek Prostokącie, poprowadziwszy przekątną, przez iéy punkt którykolwiek pociągnąwszy dwie równoodległé od boków prostokąta, będą równé w powiérzchniach dwa prostokąty, przez té równo-

odległé zrobioné, a stykaiącé się w wiérzchołku dwóch kątów przeciwnych.

Táb. 6. *Fig.* 4. Niech będzie Prostokąt ABCD, przez punkt E, przekątnéy poprowadziwszy równoodległé: HF, GI; Prostokąty HEGD, FEIB będą równé w powiérzchniach.

Dowodz: Tróykąty: ACD, CAB, są równé. Piérwszy składá się z Tróykątów: CEG, EAH, i z Prostokąta HEGD. Drugi składá się z Tróykątów: ECF, AEI, i z Prostokąta FEIB. A że Tróykąt CEG, równy iest Tróykątowi ECF, a Tróykąt EAH, równy Tróykątowi AEI; więc i Prostokąt HEGD, równy będzie Prostokątowi EFIB.

Twiérdzéniá podobnégo poprzedzaiącému, gdy równoległobok nie będzie prostokątny, tymże samym sposobém dowiéśdź można.

105. *Zagádn:* 5. Dany Prostokąt zamiénić na inny téyże saméy powiérzchni, któryby miał za bok, liniią daną.

Táb. 6. *Fig.* 5. Niech będzie Prostokąt ABCD; tén zamiénić trzeba na inny, w którymby liniiá daná za bok służyła.

Rozwiąz: Pociągniémy daléy bok AB, aż do E, tak, aby liniiá BE, równá była linii danéy. Dopełniymy Prostokąta BEFC, i poprowádźmy przekątną FB, którąby spotkała w punkcie G, bok przedłużony AD; weźmy potém FI, równą DG, i złączmy punkta G, i I, liniią GI. To uczyniwszy, Prostokąt EBHI, równy będzie co do powiérzchni Prostokątowi ABCD, i za bok má liniią daną BE. Że równé są té dwa Prostokąty, można okázać podobnym iak w ostatniém twiérdzéniu sposobém.

106. *Uwága* 1. Aby dodadź dwa Prostokąty maiącé boki odmiénné; trzeba naprzód iedén z tych prostokątów zamiénić na inny równéy z nim powiérzchni, i któryby miáł bok iedén równy bokowi prostokąta drugiégo nie zamiénianégo. Wziąwszy potém za wysokość, tén bok równy w dwóch Prostokątach, a za

Podstawę, summę dwóch innych boków odmiennych; zrobi się Prostokąt równy co do powierzchni summie dwóch Prostokątów danych. Podobnie się postępuie, chcąc mieć ich różnicę.

107. *Uwága* 2. Gdyby Prostokąty dané były Kwadratami, a Prostokąt równy ich summie miał też bydź Kwadratém; poprzedzaiące wiadomości nie dosyć byłyby na rozwiązanié tego zagádnienia. Niżéy obáczymy, iak sobie w takim razie postąpić trzeba. (Obácz w Rozdziále VIII).

108. *Przystósowanié.* Nie powtárzá się tu, co się iuż powiedziało w Arytmetyce o mierzéniu Prostokątów, których boki są w liczbach, wyrażoné. Przystósowanié teraźnieyszé ściągać się będzie do Równoległoboków iakichkolwiek, i do Trójkątów, wyrażaiąc podstawy ich i wysokości w liczbach.

Aby dóyśdź powiérzchni Czworokąta, którégo przekątna, i prostopadłá od wiérzchołku kąta iéy przeciwnégo spuszczoná, w liczbach iest daná; trzeba rozmnożyć tę przekątną przez połowę summy obudwóch prostopadłych; albo połowę przekątnéy, przez summę tychże prostopadłych; albo nakoniec całą przekątną przez całą summę prostopadłych rozmnożyć, i rozmnożoney liczby wziąć połowę. Gdyby Czworokąt miał dwa boki równoodległé; powiérzchniá iego byłaby równá Prostokątowi maiącému za wysokość odległość tych dwóch Równoległych, a za Podstawę połowę summy dwóch boków przeciwnych Czworokąta, których wiémy odległość.

Przykłady. 1. Niech będzie ABCD, Równoległobok *Pochyłokątny* (obliquangulum) którégo Podstawa AB, má długości łokci 37, a wysokość DE łokci 20; powiérzchniá iego będzie $20 \times 37 = 740$ łokci kwadratowych. Tab. 6. Fig. 6.

2. Niech powiérzchniá Równoległoboku ABCD zawiérá łokci kwadratowych 378. Podstawa AB,

niech má długości łokci 27, wysokość DE, będzie $\frac{378}{27}$=14 łokci.

3. Niech będzie powiérzchniá Równoległoboku ABCD=544 łokci kwadratowych, wysokość DE=17 łokci. Podstawa AB, będzie=$\frac{544}{17}$= 32 łokci.

4. Niech znowu Równoległoboku ABCD podstawa będzie łokci 23, stóp 1, cál. 10, toiest $23\frac{11}{12}$ łokci, wysokość DE łokci 14, stóp. 1, cál. 8, toiest $14\frac{8}{6}$ łokci; powiérzchniá będzie $14\frac{8}{6}$ razy $23\frac{11}{12}$ = $354\frac{88}{72}$ łokci kwadr:=354 łok: kw: 3 stóp. 8 cál:

5. Niech powiérzchniá Równoległoboku ABCD będzie = 8433 sznur: kwad: 72. pręt: kw:= 8433, 72. sznur: kwad: podstawa AB=153 sznur: 9 pręt: = 153, 9. sznur: wysokość DE, będzie = $\frac{8433,\ 72.}{153,\ 9.}$ = 54, 8. sznur: = 54 sznur: 8 pręt:

6. Niech powiérzchniá Równoległoboku ABCD,
Ł. K. St: Kw. Cál: Kw:
będzie = 315, 3, 58. = $315\frac{345}{288}$. Ł. K. wy-
Łok. St: Cál.
sokość DE = 15. 1. 10. = $15\frac{11}{12}$ Łok: podsta-
Łok: Łok.
wa będzie = $\frac{90965.}{4584.}$ = 19. Stóp: 1. $8\frac{49.}{191}$ Cál.

Táb. 7. *Fig.* 1 7. Niech będzie ABC Tróykąt, którego podstawa AB,=28 łokci, a wysokość CD=16 łokci. Powiérzchniá iego będzie połową 28 przez 16 rozmnożonych, czyli = $\frac{28 \text{ w } 16.}{2}$ = 28×8=224. Łok: kw:

8. Niech będzie powiérzchniá Tróykąta ABC =156 stóp. kw: a podstawa AB=24 stóp. wysokość CD, będzie = $\frac{156}{\frac{1}{2}\times 24.}$ = $\frac{312}{24}$ albo $\frac{156}{12}$ = 13 stóp.

9. Niech będzie powiérzchniá Tróykąta ABC =195 Ł. kw: a wysokość CD = 15 łokci. Podstawa AB będzie = $\frac{195}{\frac{1}{2}\times 15}$ = $\frac{390}{15}$ = 26. Ł. kw:

10. Niech będzie ABC Trójkąt, którego pod-
pręt: łok. cal.
stawa AB = 12, 2, 4. = $12\frac{5}{18}$. pręt: Wysokość = $7\frac{5}{6}$ pr: powiérzchniá będzie = $7\frac{5}{6} \times 6\frac{5}{36}$ = $48\frac{19}{216}$ pręt: kw: = 48 pręt: kw: 4. łok. kw: 3. stóp, 114. cál: kw:

11. Niech będzie powiérzchniá Tróykąta ABC
ł. kw. cal: kw: łо: kw: Ł. cal.
= 25. 32. = $25\frac{1}{8}$ podstawa AB = 9. 2. lin. Łokci
8. = $9\frac{1}{9}$ wysokość CD będzie = $\frac{451}{82}$ = 5. ł. 1. st:

12. Niech będzie powiérzchniá Tróykąta = 21 szu: kw: 17 pręt: kw: Wysokość CD = 5 szu: 8 pręt: podstawa AB będzie = $\frac{21, 17.}{2, 9.}$ albo $\frac{42, 34.}{5, 8.}$ = 7, 3 szu: 7 szu: 3 pręt:

13. Niech będzie *Różnobok* (Trapezium) ABCD, maiący tylko równoodległé boki AB, CD; - bok AB = 35 łok. bok CD = 17 łok. Táb. 7. *Fig.* 2.

A zatém summa ich = 52.
Wysokość DE = 14.

Powiérzchniá tego Czworokąta będzie = $\frac{14 \times 52.}{2.}$ = 7 × 52, albo 14 × 26. = 364 ł. kw:

14. Aby powiérzchniá takiégo Czworokąta zawiérała 255 cál: kw: którégo boki dwa równoległé są:

iedén AB = 23 cál:
drugi CD = 11.

A zatém summa = 34.

trzeba mu dadź wysokość = $\frac{255}{17}$ = $\frac{510}{34.}$ = 15 cál.

15. Aby zaś powiérzchniá takiégo Czworokąta zawiérała 325 Stóp kw: gdy podstawa AB

$=31$ stóp, a wysokość ED$=13$, trzeba, aby summa boków równoodległych była$=\frac{325}{\frac{1}{2}\times 13}=\frac{650}{13}$ $=50$ stóp. A że bok AB$=31$ stóp, więc CD będzie$=19$. stóp.

16. Niech w takowym Czworokącie ABCD boki równoodległe będą;

AB$=$	20 pr:	4 łо.	1 st.	6 cál.
CD$=$	13.	5.	1.	4.
A zatém summa$=$	34.	2.	1.	10.$=$
$34\frac{7}{18}$ pręt:				
Wysokość DE $=$	9.	5.	1.	8.$=9\frac{7}{10}$.

Powiérzchniá będzie$=9\frac{7}{9}\times 17\frac{7}{36}=1^{6}8\frac{10}{81}$ pręt. kw: 168 pręt: kw: 6 łok: kw: st: kw: 112. cal: kw:

Táb. 7. *Fig.* 3. 17. Niech będzie Czworokąt iakikolwiek ABCD, którégo przekątná DB$=$ 6 łokci; prostopadłé zaś do niéy spuszczóné, - - AE$=39$.
- - - - CF$=25$.

A zatém ich summa AE$+$CF$=64$. łok: Powiérzchnia tego Czworokąta będzie$=\frac{64\times 86}{2}=32.\times 86$, albo $64\times 43=2752$ łokci kw.

18. Niech znowu będzie przekątná AB$=26$ sznurów 8 prętów 6 łokci$=26\frac{22}{25}$ sznurów. Prostopadłé: AE$=13$ sznurów 7 prętów 5 łokci.

CF$=$	11	9	$6\frac{1}{5}$.
A zatém AF$+$CF$=$	25	7	4.

$=25\frac{113}{150}$ sznur.

Powiérzchniá Czworokąta ABCD będzie$=25\frac{113}{150}\times 13\frac{1}{5}=346\frac{78}{628}$ szn: kw:

Táb. 7. *Fig.* 4. 19. Niech w Pięciokącie ABCDE będzie bok - AE $=$ 128 łok:

Przekątné: $\begin{cases} AC = 79. \\ CE = 81. \end{cases}$

Prostopadłé: $\begin{cases} CH = 49. \\ BF = 42. \\ DG = 39. \end{cases}$

Znáydziémy Powiérzchnie Tróykątów:

$$\left\{\begin{array}{l} AEC = 49 \times 64 = 3136 \text{ łok: kw:} \\ ABC = 21 \times 79 = 1659. \\ EDC = \frac{39 \times 81}{2} = 1579\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

A zatém Powiérzchniá Pięciokąta ABCDE będzie $= 6374\frac{1}{2}$ łok: kw:

20. Niech w Sześciokącie ABCDEF będą Táb. 7. *Fig.* 5.

Przekątné: $\left\{\begin{array}{l} AC = 200. \text{ łok:} \\ AE = 125. \end{array}\right.$

Prostopadłe: $\left\{\begin{array}{l} BG = 23. \\ DH = 80\frac{1}{2}. \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} DI = 64\frac{3}{4}. \\ FK = 42. \end{array}\right.$

A zatém $BG + DH = 103\frac{1}{2}$ łok:
$DI + FK = 106\frac{3}{4}$.

Znáydziémy Powiérzchnie Czworokątów:

$$\left\{\begin{array}{l} ABCD = 103\frac{1}{3} \times 100 = 10350 \text{ łok. kw:} \\ ADEF = 53\frac{3}{8} \times 125 = 6671\frac{7}{8}. \end{array}\right.$$

Powiérzchniá tedy całégo Sześciokąta będzie $= 17021\frac{7}{8}$ łokci kw:

Inaczéy następuiącym sposobém znaléźć można Powiérzchnią Sześciokąta ABCDEF.

Niech będzie Táb. 7. *Fig.* 6.

	szn:	pręt:	łok:
bok AB =	20	0	0.
Równoodległé: FG =	23	7	$3\frac{1}{8}$.
CH =	23	2	$2\frac{13}{16}$.
EI =	12	2	$2\frac{3}{16} = 12\frac{11}{48}$ Sz: kw.

Części prostopadłéy DN.

		sz.	pr.	łok.
DK =	2	4	$7\frac{7}{24} = 2\frac{179}{360}$.
KL =	4	6	$6\frac{1}{4} = 4\frac{41}{60}$.
LM =	1	0	$3\frac{3}{4} = 1\frac{1}{20}$.
MN =	7	8	$5\frac{5}{6} = 7\frac{79}{90}$.

A zatém AB + FG = 43 7 $3\frac{1}{8} = 43\frac{80}{200}$.
FG + CH = 46 9 $5\frac{15}{16} = 46\frac{47}{83}$.
CH + EI = 35 4 5 $= 35\frac{5}{17}$.

Więc Tróykąt DEI = $1\frac{179}{720} \times 12\frac{11}{48} = 15\frac{9}{34}\frac{31}{50}\frac{13}{60}$
szn: kw:

Czworokąty.
EICH = $2\frac{41}{20} \times 35\frac{7}{15} = 83\frac{23}{450}$.
CHFG = $1\frac{1}{20} \times 23\frac{47}{96} = 24\frac{85}{128}$.
ABGF = $3\frac{169}{180} \times 43\frac{89}{120} = 172\frac{63}{216}\frac{41}{000}$.
Sz: kw:

Cały więc Sześciokąt ABCDEF = $295\frac{641}{2304}$.

Táb. 8. *Fig.* 1. 21. Niech będzie Siedmiokąt ABCDEFG, w którym następuiące wymiary znaleźliśmy, toiest:

Części przekątnéy AD: AH = $32\frac{2}{3}$. stopy.
HI = 35.
IK = $15\frac{1}{3}$.
KL = $81\frac{5}{6}$.
LM = $11\frac{5}{6}$.
MD = $13\frac{1}{3}$.

Prostopadłé: GH = $78\frac{1}{2}$.
BI = $56\frac{1}{3}$.
FK = 64.
EL = $86\frac{1}{3}$.
CM = $45\frac{1}{3}$. stóp kw:

Będą tedy Trójkąty: $\begin{cases} AHG = 16\frac{1}{3} \times 78\frac{1}{2} = 1282\frac{1}{6}. \\ ABI = 28\frac{1}{6} \times 67\frac{1}{3} = 1905\frac{17}{18}. \end{cases}$

$\begin{cases} DLE = 43\frac{1}{6} \times 25\frac{1}{6} = 1086\frac{13}{36}. \\ CMD = 6\frac{2}{3} \times 45\frac{5}{6} = 305\frac{5}{9}. \end{cases}$

Czworokąty: $\begin{cases} HKFG = 25\frac{1}{6} \times 142\frac{1}{2} = 3588\frac{1}{4}. \\ KLEF = 81\frac{5}{6} \times 75\frac{1}{6} = 6151\frac{5}{36}. \end{cases}$

$\begin{cases} BCMI = 109 \times 51\frac{1}{12} = 5568\frac{1}{12}. \end{cases}$

A zatém cały Siedmiokąt ABCDEFG = $19885\frac{1}{2}$ stóp kw:

PRZYGOTOWANIE DO ROZDZIAŁÓW NASTĘPUIĄCYCH.

O podniesieniu liczby do Kwadratu i wyciągnieniu z niey pierwiastku kwadratowego.

Lubo nauka, ktorá się tu wykładać będzie, má częstę używanié w wyższych rachunkach; bardziéy iednak iest potrzebná w Jeometryi. W następuiących Rozdziałach, różné zdarzą się użyciá iéy okoliczności. Tam fundaménta, na których się zasádzá, iaśniéy zrozumiané będą, niż gdyby na zawilszych działaniach rachunkowych były okázané zwłáscza, gdy ieszcze algiebra uczniom iest nieznaiomá.

109. *Defin:* Kwadrat liczby; iestto ta sama liczba przez siebie rozmnożoná. Okázać to możná z Jeometryi, w któréy aby znaléźć polé Kwadratu; trzeba rozmnożyć przez siebie liczbę znaczącą wielkość boku tegoż Kwadratu.

I tak dziewięciu liczb piérwszych:

Kwadraty są:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.

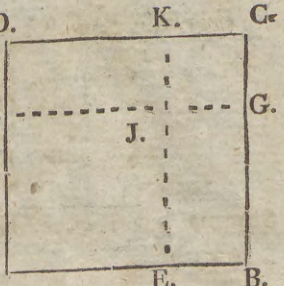
Liczb:	10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90.
Kwadraty są:	100.	400.	900.	1 600.	2 500.	3 600.	4 900.	6 400.	8 100.
Tych też:	1 000.		2 000.		3 000.		9 000.		
Kwadraty będą:	1 000 000.		4 000 000.		9 000 000.		81 000 000.		

110. Stąd się wnosi, że kwadraty liczb, które iednę cyfrę maią, a resztę zer, składaią się z kwadratu téyże saméy cyfry, i z tylé dwoie następuiących zer, ilé ich było w téy liczbie.

111. Gdy się robi Kwadrat z liczby, naprzykład z 37, mnożąc 37 przez 37; mnoży się naprzód 7 przez 7, toiest robi się Kwadrat z 7, potém mnoży się 30 przez 7, daléy 7 przez 30, albo drugi ráz znowu 30 przez 7, naostatek mnoży się 30 przez 30, toiest bierze się Kwadrat z 30. Iest tedy liczba rozmnożoná 1369 kwadratém trzydziestu siédmiu złożonym z kwadratu trzydziestu, z liczby 30 rozmnożonéy dwa razy przez 7 i z kwadratu 7. Ta reguła iest ogólná ściągaiącá się do kwadratów liczb wszystkich, które na dwie części podzielić można.

Niech będzie naprzykład liczba 5, którą uważám iak złożoná z 1 i z 4, kwadrat iéy może bydź uważany, iakby się składáł z tych trzech liczb: 1, 8, 16. Piérwszá 1 iest kwadratém z 1, drugá 8 iest liczbą rozmnożoną dwa razy z 1 przez 4, trzeciá 16 iest kwadratém z 4. Iakoż summa tych trzech liczb: 1, 8, 16, iest: 25, a 25, iest kwadratém z 5. Gdybyśmy uważali 5 iako zbiór z tych dwóch liczb: 2 i 3; kwadrat z 5 brálby się tém samém za summę z tych trzech liczb: 4, 12, 9, którá summa iest także 25. Liczba 4, byłaby kwadratém z 2, liczba 12 byłaby z rozmnożéniá dwa razy 2 przez 3, a liczba 9 byłaby kwadratém z 3.

Toż samo widocznie pokázać się może sposobém Jeometrycznym.



Niech liniiá AB będzie na mieyscé liczby iakiéy składaiącéy się z tylu iedności, ilé pewnych części zamyká w sobie taż liniiá AB. Linii téy części: AE, EB, niech zastępuią części dwie, które tę liczbę składaią: zróbmy kwadrat ABCD z linii AB, a wziąwszy liniią AF równą AE, pociągnieymy przez F i E dwie liniie FG, i EK, równoodległé od boków kwadratu, i przecinaiącé się w punkcie J. Kwadrat AEIF, będzie z części AE, linii AB. Kwadrat IGCK, będzie z części EB, linii téyże AB. Prostokąty: FIKD, EBGI, będą obadwa z linii: AE i EB, toiest z części iednéy, linii AB i z części drugiéy.

112. Wygodná rzecz iest, liczbę, któréy kwadratu szukámy, rozłożyć na iedności, dziesiątki, sta, i t. d.

Przykład 1. Chcę mieć kwadrat z 24.

Rozkładám tę liczbę na dziesiątki, i na iedności, toiest na 20 i na 4.

Będzie 1. 400. kwadrat z dziesiątków.
2. 160. liczba dwa razy rozmnożoná z dziesiątków przez iedności.
3. 16. Kwadrat z jedności.

Summa - - 576. Kwadrat z 24.

Przykład 2. Chcę mieć kwadrat z 36.

1. 900. Kwadrat z 30.
2. 360. dwa razy 30 przez 6 rozmnożoné.
3. 36. Kwadrat 6.

Summa - - 1296. Kwadrat 36.

Przykład 3. Chcę mieć Kwadrat z 324.

1.	90000.	Kwadrat z 300.
2.	12000.	Dwa razy 300 przez 20.
3.	400.	Kwadrat z 20.
4.	2560.	Dwa razy 320 przez 4.
5.	16.	Kwadrat z 4.
Summa - -	104976.	Kwadrat z 324.

Przykład 4. Chcę mieć Kwadrat z 4687.

1.	16000000.	Kwadrat z 4000.
2.	4800000.	Dwa razy 4000 przez 600.
3.	360000.	Kwadrat z 600.
4.	736000.	Dwa razy 4600 przez 7.
7. - - -	49.	Kwadrat z 7.
Summa - -	21967969.	Kwadrat z 4687.

113. *Uwága* 1. Postrzédz łatwo możémy w tych przykładach, że każdá liczba składaiącá po części kwadrat cały, má iedném zero mniéy, niżeli ta, którá ią poprzedziła; a zatém cyfra iedna w każdéy liczbie niższéy występuie bardziéy ku prawéy ręce, niż w téy, którá iest nad nią.

Widzimy zatém, że możnáby opuścić zera, pisząc cyfry samé tym sposobém iedné pod drugiémi, aby w każdym rzędzie niższym, cyfra iedna w prawą coráz bardziéy wychodziła. I tak opuściwszy zera w przykładzie ostatnim tym porządkiém szłyby samé cyfry.

16.
4 8.
36.
736.
64.
6552.
49.

Summa 21 967 969.

2. W piérwszym rzędzie, gdzie iest 16 opuszcá się zer sześć, a zatém 16 znaczy 16 milliionów, toiest Kwadrat z 4000, czyli z piérwszégo po lewéy ręce znaku liczby 4687. W drugim rzędzie gdzie iest 48, opuszcá się zer pięć, a zatém 48 znaczy 4 milliony 8 kroć stotysięcy, i dlá tego 4 piszą się pod iednościami milliionów, a 8 występuie. Ta zaś liczba 48 pochodzi z rozmnożéniá piérwszégo po lewéy ręce znaku 4, liczby 4687 przez drugi znak 6, téyże liczby dwa razy wzięty. W trzecim rzędzie opuszcá się zer cztéry, a zatém 36 znaczy trzykroć sto tysięcy, i 6 dziesiątków tysięcy, i dlá tego 3 piszą się pod stami tysiąców, a 6 występuie. Ta zaś liczba 36 znaczy kwadrat drugiégo po lewéy ręce znaku 6 liczby 4687. W czwartym rzędzie opuszcá się zer trzy, a zatém 736 znaczy siedmkroć trzydzieści sześć tysięcy: i dlá tego 3 piszą się pod dziesiątkami tysiąców, a 6 występuie. Ta zaś liczba 736 pochodzi z rozmnożéniá dwóch piérwszych po lewéy ręce znaków 46 liczby 4687, przez 8, trzeci znak téyże liczby dwa razy wzięty i t. d.

3. W takowém liczb ułożéniu, idąc od dołu do góry, toiest zaczynaiąc od 49; w piérwszym rzędzie, piérwszá po prawéy ręce cyfra 9 znaczy iedności; w drugim rzędzie 2 znaczy dziesiątki: w trzecim rzędzie 4 znaczy sta: a w czwártym rzędzie 6 znaczy tysiące, i t. d.

4. Ta sama liczba 49 w piérwszym od dołu rzędzie znaczy kwadrat z jedności 7; i pra-

wá iéy cyfra 9 náybardziéy występuie. Trzeciá w tym porządku liczba 64, iest kwadratém z dziesiątków 8, i przeto prawá iéy cyfra 4, iako znaczącá sta, mniéy występuie, niżeli obiedwie cyfry 49 kwadratu z samych iedności. Piątá w porządku liczba 36 iest kwadratém ze set 6: i przeto prawá iéy cyfra 6, iako znaczącá dziesiątki tysięcy, má przed sobą kwadraty z dziesiątków i z jedności. Na koniec siódmá i náywyższá liczba 16 iest kwadratém z tysięcy 4, i przeto prawá iéy cyfra 6, má przed sobą kwadraty ze stu, dziesiątków i iedności. W summie więc 21,967,969 na mieyscach nieparzystych, od prawéy ręki rachuiąc kończyć się będą kwadraty z liczb poiedynczych, z których się składá cały kwadrat: toiest kwadrat z jedności kończyć się będzie tam, gdzie ostatnié po prawéy ręce 9 napisane: kwadrat z dziesiątków tam, gdzie iest drugié 9; kwadrat ze stu tam, gdzie iest 6; kwadrat z tysięcy, gdzie 1.

5. Dlá podobnéy przyczyny w summie téyże 21 967 969, kwadrat wyrażaiącéy (rachuiąc zawsze od prawéy ręki) na mieyscach parzystych, drugiém, czwártém, szóstém i t. d. kończyć się będą liczby pochodzące z rozmnożéniá poiedynczych znaków, z których kwadrat urósł, przez té wszystkié, które ié poprzedzały.

Trzeba to ieszcze bardziey obiaśnić na wielu innych przykładach kwadratów, tymże samym, co wyżéy, porządkiém części ich układaiąc.

114. *Wniosek* 1. Gdy tedy mámy liczbę iaką kwadratową, możemy dóyść, z jak wielu znaków liczebnych przez siebie rozmnożonych urósł tén kwadrat: toiest, możemy dóyść wielości znaków piérwiástku kwadratowégo. Po Łacinie taki piérwiástek zowié się (*Radix quadrata*). Dóydziémy zaś tego, oddzielaiąc kréskami albo kropkami od prawéy ręki zacząwszy po dwa znaki liczebné. Liczba takich oddziałów pokáże

wielość znaków liczebnych piérwiástku. Naprzykład liczba 576, będzie miała dwa oddziały, które tak oznáczám 5,76 a zatém piérwiástek iéy z dwóch się składá znaków. Piérwiástek téy liczby: 10,49,76, będzie miáł trzy znaki liczebné, bo w niéy trzy oddziały zrobić można. Piérwiástek liczby 21,967,969, mieć będzie cztéry znaki, bo cztéry także w nim oddziały uczynić można, i t. d.

115. *Wniosek* 2. Ponieważ w mieyscach nieparzystych liczby kwadratowéy, kończą się kwadraty znaków poiedynczych tę liczbę składaiących, mogą zaś znaki liczebné w kwadracie bydź nieparzyste; więc w takim razie, w piérwszym záraz od lewéy ręki znaku kwadratu, znaleźć można znak piérwszy piérwiástku tegoż kwadratu: a zatém oddzielaiąc kréskami co dwie liczby, od prawéy ręki do lewéy, na ostatni oddział, może tylko przypaśdź znak iedén liczebny. Tak, iakeśmy wyżéy widzieli w tym kwadracie 5,76.

PRZYKŁAD I.

116. Niechby z téy saméy liczby 576, wyciągnąć trzeba było piérwiástek kwadratowy. Ta liczba mogąc mieć dwa oddziały, będzie téż miała dwa znaki w piérwiástku, toiest znak dziesiątków, i znak iedności. Piérwszy znak piérwiástku taki bydź powinién, aby kwadrat iego nie przechodził 5 set: taki kwadrat iest 4 sta, albo 400, którégo piérwiástek 2 dziesiątki, albo 20. Kwadrat 400 piérwszégo tego znaku piérwiástkowégo 20, odiąwszy od 576, zostanie 176. Ta reszta pozostałá powinná ieszcze zamykać w sobie drugi znak piérwiástku rozmnożony przez piérwszy 20, dwa razy wzięty, i nad to kwadrat tegoż drugiégo znaku: więc ieżeli przez téżże znak 20, dwa razy wzięty, toiest przez 40 po-

dzielimy resztę 176; wieloráz pokáże drugi znak piérwiástku złożony z jedności. Podzieliwszy 176, przez 40, wieloráz będzie 4 iedności. Te 4 iedności rozmnożywszy przez 40, wypadnie 160, które 160, odiąwszy od 176, zostanie 16. W téy reszcie 16 znáydować się ieszcze powinién kwadrat znaku piérwiástkowégo iedności 4, toiest 16, a że się znáyduie zupełnie; więc cały piérwiástek kwadratu 576 będzie 24.

Wzór działaniá.

5,76|20.
400 kwadrat z 20.

40|176|4.
160 z rozmnożéniá 40 przez 4.

16. Reszta.
16. Kwadrat z 4.

0.

Tymże sposobém wyciągnąć można piérwiástek kwadratowy z téy liczby 144.

Wzór działaniá.

1,44|10.
100 kwadrat z 10.

20|44|2
40 z rozmnożéniá 20 przez 2.

4. Reszta
4. Kwadrat z 2.

0.

Niechby potrzeba wyciągnąć piérwiástek, z kwadratu 692 224.

Oddzieliwszy, iak wyżéy, kréskami co dwie liczby od prawéy ręki, będzie trzy oddziáłów, a zatém i trzy znaki w piérwiástku. Kwadrat náybliżéy przystępuiący do 69 iest 64, którégo piérwiástek iest 8; więc 8 set, będzie znakiém piérwszym piérwiástku. Odiąwszy kwadrat 8 set, toiest 640 000 od 692 224 zostanie 52 224. Ta reszta powinná zamykać piérwszy znak 800 piérwiástku dwa razy wzięty, przez drugi znak dziesiątków rozmnożony, i kwadrat drugiégo znaku piérwiastku: powinná ieszcze zamykać dwa té piérwszé znaki set i dziesiątków rozmnożonych przez trzeci znak iedności dwa razy wzięty, i nakoniec kwadrat znaku tegoż iedności. W szczególności zaś mówiąc, powinná zamykać 800 dwa razy wzięté, toiest 1600 rozmnożoné przez znak dziesiątków którégo szukámy. Podzieliwszy tedy 52 224, przez 1 600, znáydziémy na wieloráz 30, albo 3 dziesiątki: a zatém 3 dziesiątki będą znakiém drugim Piérwiástku. 1 600 rozmnożoné przez 30, czynią 48 000, któré od 52 224 odiąwszy, zostanie 4 224. Ta reszta má ieszcze zamykać kwadrat z 30 toiest 900, któré 900 od 4 224 odiąwszy, zostanie 3 324.

Ta reszta powinná zamykać część piérwiástku znaleziona 830, dwa razy wziętą i rozmnożoną przez znak iedności piérwiástku, i ieszcze zamykać powinná kwadrat tychże iedności. Podzielmy więc 3 324 przez 1 660 toiest przez 830 dwa razy wzięté, a wieloráz 2 będzie znakiém iedności piérwiástku. Przez té 2 rozmnożywszy 1 660, i liczbę rozmnożoną 3 320 odiąwszy od 3 324, zostanie 4, któráto reszta iest kwadratém z 2 iedności. Cały więc piérwiástek kwadratu 692 224, będzie 832.

Wzór działaniá.

```
        692 224.|800.
        640 000.
      ----------
1 600.| 52 224| 30
        48 000
      ---------
         4 224
           000
      ---------
1 600|  3 324|2
        3 320
      --------
            4
            4
      --------
            0
```

Trzeba iako náywięcéy takich przykładów Uczniom podáwać, nieużywaiąc żádnégo ieszcze skrócéniá. Na wzór dwa się następuiącé przykłady podaią.

Przykład I.

```
        46,02,26,56|6000.
        36 00 00 00|
      -------------
12000|  10 02 26 56|700.
         8 40 00 00
      ------------
         1 62 26 56
           49 00 00
      ------------
13400|   1 13 26 56| 80
         1 07 20 00
      ------------
           6 06 56
             64 00
      ------------
13560|     5 42 56|4
           5 42 40
      ------------
                16
                16
      ------------
                 0.
```

Przykład II.

```
        13,59,39,69|3000
         9 00 00 00
      -------------
6000 |  4 59 39 69|600
         3 60 00 00
      ------------
           99 39 69
           36 00 00
      ------------
7200 | 63 39 69 |80
         57 60 00|
      ------------
          5 79 69
            64 00
      ------------
7360 |  5 15 69|7.
          5 15 20
      ------------
                49
                49
      ------------
                 0
```

117. *Uwága* Jako w dzieléniu zwyczaynem, tak i w wyciąganiu Piérwiástku kwadratowégo, możná się (kto ieszcze nie iest wprawnym) łatwo pomylić w znakach wieloráżu. Omyłka w dzieléniu łatwá iest do poprawienia, gdy uważać będziémy, ieżeli liczba dzielącá rozmnożoná przez wieloráż odiąć się może od części liczby podzielnéy, którą dzielić przypádá, albo ieżeli reszta nie iest większá od liczby dzielącéy. W wyciąganiu Piérwiástku kwadratowégo, (któré wychodzi na iedno prawie co i dzielénié, w któréby liczba dzielącá coráz się odmieniała) możná także omyłkę iakąkolwiek postrzédz podobną, iak przy zwyczáynem dzieléniu; czyniąc uwágę, wzgląd ieszcze i na to mieć należy, że wyciągaiąc piérwiástek sposobém wyżéy podanym, dwa się czynią odeymowaniá, toiest: odeymuie się naprzód liczba dzielącá przez część przypadaiącą Piérwiástku rozmnożoną, i powtóré odeymuie się kwadrat téyże części Piérwiástku: więc, gdyby zdarzyło się, że piérwsze tylko odięcié uczynić można, a drugiégo iuż nié można; ostrzeżeni tém bylibyśmy, żeśmy wzięli wieloráż bardzo wielki, a zatém zmnieyszyć go potrzeba. W ostatnich dwóch przykładach, w piérwszym, 12000, zmieścić się mogło razy 800 w 10022656; a w drugim 6000 mogło się znáydować 700 razy w 4696969: ale nié możnáby było od reszty odiąć kwadraty tychże wielorazów, i przetośmy w obudwóch tych przykładach iednością wieloráż zmnieyszyli.

118. *Piérwsze.* Skrócénié, którégo przy wyciąganiu Piérwiástku kwadratowégo użyć można, iest w opuszczéniu zer w liczbie dzielącéy, podzielnéy, i w wielorazie, zachowuiąc iednak cyfróm pozostałym té mieysca, któréby zastępować powinny, gdyby zera odcięté nie były.

119. *Powtóré*: Ponieważ ostatnié po prawéy ręce znaki kwadratu podanégo do wyciągaiá Piérwiástku, wcale się nie odmieniaią, po piér-

wszych odeymowaniach; nie są więc do nich potrzebné; zatém do każdégo w szczególności odeymowaniá, można té tylko cyfry spuszczać z kwadratu, od których odeymować przypádá liczbę dzielącą przez wieloráz rozmnożoną; zachowuiąc im mieyscé i znaczénié to samo, które miały w całym kwadracie.

120. *Potrzecié.* Zamiást dwóch odeymowáń, naprzód liczby dzielącéy przez wieloráz rozmnożonéy, potém kwadratu tegoż wielorazu, można obadwa razém czynić odeymowaniá: kładąc znak znaleziony na wieloráz, nie tylko na zwyczayném swoiém mieyscu; ale téż przy końcu liczby dzielącéy, i dopiéro tak powiększoną liczbę dzielącą mnożyć przez tén znak wielorazu, a rozmnożoną od liczb przypádaiących z kwadratu odeymować.

Tu na tych samych liczbach kwadratowych, z których iuż uczniowie wyciągali piérwiastek, niechay użyią tych trzech sposobów skrócéniá: bo im iuż i działanié będzie łatwieyszé, i lepiéy dokładność tego sposobu skroconégo obáczą, porównywaiąc działanié piérwszé z drugiém.

121. Wyciągniéymy tym skróconym sposobém piérwiástek kwadratowy z liczby 13593969.

Naprzód oddzielić trzeba kréskami co dwie liczby; iak wyżéy; oddzieliwszy tak liczby kwadratu podanégo 13,59,39,69, widzimy, że tén kwadrat cztéry znaki liczebné mieć będzie w swoim Piérwiástku. Kwadrat náybliższy w piérwszym po prawéy ręce oddziále zawarty, będzie 9, którégo Piérwiástek, 3, znaczący tysiące. Odiąwszy tén kwadrat 9 od 13, zostanie 4, do których przypisáwszy oddziáł następuiący 59, będzie 459. Podwóymy piérwszy znak Piérwiástku 3 i będzie 6. Té 6, w piérwszych dwóch znakach 45, liczby 459, znalazłoby się razy 7: ale maiąc wzgląd, że kwadrat tego wielorazu nié mógłby się potém odiąć, położmy tylko 6, na mieyscu wielorazu, i przypiszmy ié także do 6,

liczby dzielącéy. Rozmnożywszy 66 przez 6, i liczbę rozmnożoną 396, odiąwszy od 459, zostanie 63, do któréy reszty przypiszmy oddział kwadratu następuiący 39; i dzielmy daléy 6339 przez dwa znaki Piérwiástku znalezioné, 36, podwoiwszy ié, toiest przez 72. 72 w 633 znáyduie się razy 8. Napiszmy 8 na wieloráz, i przypiszmy ié do liczby dzielącéy 72. Rozmnożywszy 728 przez 8, będzie 5824, które odiąwszy od 6339, zostanie 515. Dopiszmy do téy reszty, ostatni kwadratu oddział 69, i 51569 dzielmy przez podwóyną liczbę znaków Piérwiástku iuż znalezionych 368: toiest, przez 736. 736 w 5156 znáydziémy razy 7. Przypiszmy ié 7 do 368, i do 736. Rozmnożywszy 7367 przez 7, i liczbę rozmnożoną 51569 odiąwszy od 51569 nic nie zostanie: a zatém kwadratu podanégo piérwiástek będzie 3687.

Wzór działania.

```
13,59,39,69| 3687.
   9
 ------
 66|45.9
    396
 ------
728| 6339
     5824
 ------
7367 | 5156,9
       51569
 ------------
          0.
```

122. *Wniosek.* Ponieważ wyniesienie iakiéy liczby do kwadratu iestto iedno, co rozmnożenie téy liczby przez siebie samę, czyli rozmnożenie dwóch liczb równych iednéy przez drugą; kwadrat więc ułomka iakiégo, będzie ułomek, którego licznik, iest kwadratém licznika tamtego, a mianownik kwadratém miano-

E.

wnika iego. I tak kwadrat z $\frac{1}{2}$, iest $\frac{1}{4}$, kwadrat z $\frac{1}{3}$, iest $\frac{1}{9}$, kwadrat z $\frac{2}{3}$, iest $\frac{4}{9}$, kwadraty ułomków: $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ są: $\frac{1}{16}$, $\frac{9}{16}$ i t. d.

Chcąc tedy wyciągnąć piérwiástek kwadratowy z ułomka podanégo, trzeba osobno wyciągnąć go z licznika i z mianownika. I tak Piérwiástki kwadratowé tych ułomków: $\frac{9}{16}$, $\frac{16}{25}$, $\frac{25}{36}$ i t. d. są: $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ i t. d.

123. *Uwága.* Gdy się trafi wyciągać Piérwiástek kwadratowy z liczby miészanéy, toiest, złożoney z liczby cáłkowitéy, i z ułomka; trzeba ią piérwéy obrócić na sám ułomek. Tak naprzykład chcąc wyciągnąć piérwiástek z 2 $\frac{1}{4}$, liczba ta będzie iedno co ułomek $\frac{9}{4}$, którégo piérwiástek $\frac{3}{2}$, czyli 1 $\frac{1}{2}$. Liczba też 2 $\frac{7}{9}$, iest iedno co $\frac{25}{9}$, a zatém piérwiástek iéy $\frac{5}{3}$, czyli 1 $\frac{2}{3}$. Liczba 10 $\frac{6}{25}$ tylé znaczy, co $\frac{256}{25}$, więc piérwiástek iéy $\frac{16}{5}$, czyli 3 $\frac{1}{5}$.

O Ilościach niespółmiernych, i przybliżéniu Piérwiástków tych liczb, które nie są kwadratami.

124. *Uwági.* 1. Niech będzie liczba 2, z któréy przypádá wyciągać Piérwiástek kwadratowy. Piérwiástkiém téy liczby nie będzie ani 1, ani 2: bo kwadrat z 1, iest 1, mniéy od 2, a kwadrat z 2, iest 4, więcéy od 2. Więc Piérwiástek z 2, będzie między 1 i 2, a zatém będzie złożonym z jedności, i z ułomka, toiest: będzie liczbą miészaną, którą na sám ułomek obrócić można.

125. Aby ułomek tén był práwdziwym Piérwiástkiém z 2, trzebaby, aby kwadrat iego równáł się 2; a zatém aby kwadrat licznika iego był dwa razy większy od kwadratu mianownika. Znaléźćby tedy potrzeba taki kwadrat, któryby dwa razy w sobie zamykáł inny kwadrat: a że to iest nie podobná, zaráz się pokáże.

Każdá liczba kończyć się musi na iedén z tych dziesięciu znaków: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Każdy zaś kwadrat inaczéy kończyć się nié może, tylko na té znaki, na które kończą się kwadraty dziesięciu znaków dopiéro wyrażonych, toiest na:

1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, o.

czyli krócéy na: 1, 4, 9, 6, 5, o,

Kwadraty podwoioné nié mogą się inaczéy kończyć, tylko tak, iak się kończą liczby kwadratów ostatnié, podwoioné, toiest, na: 2, 8, 8, 2, o, o, czyli krócéy na: 2, 8, o. A że piérwszé zakończéniá na: 2, 8, nie są zakończéniami kwadratów; więc kwadraty podwoioné, liczb zakończonych na: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, nié mogą bydź kwadratami. Ieżeli liczba zakończoná iest na iedno zero, toiest ieżeli iedén lub więcéy dziesiątków w sobie zupełnie zamyká; kwadrat iéy zamykać będzie takąż liczbę stu, a zatém kończyć się będzie na dwa zera. Kwadrat zaś liczby kończącéy się na 5, kończy się na 25, a podwoiony, kończyć się będzie na iedno tylko zero, bo będzie kończył się na 5o: więc tak podwoiony nie będzie kwadratém.

Nakoniec ieżeli liczba kończy się na iedno zero, 10 razy zamykać w sobie będzie liczbę zakończoną na iedén z dziewięciu piérwszych znaków: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: a kwadrat iéy 100 razy zamykać będzie liczbę zakończoną na: 1, 4, 5, 6, 9, kwadrat zaś tén dwa razy wzięty, zamykać będzie 100 razy liczbę zakończoną na: 2, 8, o, a piérwiástek kwadratu tego dwa razy wziętégo, zamykać będzie 10 razy piérwiástek liczby zakończonéy na iedén z tych trzech znaków: 2,8,o; któryto ostatni piérwiástek wyciągniony bydź nié może, iakośmy iuż okázali. Tego samégo rozumowaniá użyć można gdy liczba kończyć się będzie na dwa, trzy, cztéry i t. d. zera.

Więc w szczególności mówiąc, Piérwiástek kwadratowy z liczby 2, wyciągniony bydź nié może.

126. To Dowodzénié stósowané bydź może do wszystkich liczb na 2 zakończonych. I tak nié można wyciągnąć Piérwiástku kwadratowégo z liczb: 12, 22, 32, 42, 52, 62 i t. d. czyli to w liczbach cáłkowitych, czyli w ułomkach, czyli, w liczbach miészanych.

127. Podobnie dowiéśdź można, że niepodobná znaleźć Piérwiástek kwadratowy liczby 3, ani żádnéy innéy na 3 kończącéy się. Tym, co wyżéy sposobém dowodzi się niepodobność wyciągnięniá Piérwiástku kwadratowégo z liczb kończących się na 5, 7, i t. d: a stąd możnáby ułożyć Táblicę bardzo obszérną liczb takich, których Piérwiástki kwadratowé w liczbach ani cáłkowitych, ani łámanych, zupełnie wyciągnioné bydź nié mogą.

128. Możnáby iednak i ogólnie dowiéśdź, że wszystkié liczby cáłkowité, które nié maią Piérwiástku kwadratowégo w liczbach cáłkowitych; mieć go téż nie będą i w liczbach łámanych. Kładzie się tu treść tylko tego dowodu:

Ieżeli dwie liczby są *piérwszémi* iedna względém drugiéy, (obácz w Arytmetyce na karcie 192) ich kwadraty piérwszémi téż będą iedén względém drugiégo: ponieważ dzielniki kwadratów pochodzą z dzielników ich Piérwiástków.

I tak, że liczby 2, i 3, są między sobą *piérwszémi;* piérwszémi są także między sobą i ich kwadraty: 4, i 9: że liczby 3, i 5 są między sobą piérwszémi; podobnież piérwszémi będą i ich kwadraty 9. 25. Więc ieżeli dwie iakiekolwiek liczby są piérwszémi między sobą, ich kwadraty nie będą wielokrotné iedén drugiégo, toiest: iedén kwadrat nie będzie zupełnie w sobie zamykáł drugiégo.

Niech będzie liczba iaká cáłkowitá, któréy nié można mieć Piérwiástku kwadratowégo w liczbach cáłkowitych. Gdyby tén Piérwiástek można zupełnie okázać w liczbie miészanéy; ta licz-

ba mieszaná, dałaby się obrócić na sám ułomek, a ułomek tén możnáby przywieśdź do náyprościeyszych wyrazów. Ale, aby tenże ułomek wyrażał zupełny Piérwiástek; trzebaby, aby iego kwadrat był liczbą cáłkowitą, a zatém aby licznik tego ułomka kilka razy zupełnie większy był od dzielnika iego, co iest nie podobná: więc, gdy liczbie iakiéy cáłkowitéy, nie można zupełnie znaleźć Piérwiástku kwadratowégo w liczbie cáłkowitéy; nié można go téż znaleźć ani w ułomku.

129. Są więc takié niektóre Ilości (*Quantitates*) ktore w liczbach dokładnie bydź wyrażoné nié mogą, ani nawet wyrazić można, iak się maią do iedności. Takié są té Ilości, które przez siebie samé rozmnożoné, czyniłyby: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, i t. d. Té ilości nazywaią się *niespółmiernémi* (Incommensurabiles, *albo* Irrationales) piszą się następuiącym sposobém. $\sqrt{}2$, $\sqrt{}3$, $\sqrt{}5$, $\sqrt{}6$, $\sqrt{}7$, $\sqrt{}8$, $\sqrt{}10$. i t. d. Znak tén $\sqrt{}$, czytá się *Piérwiástek* (Radix) naprzykład: $\sqrt{}2$, Piérwiástek dwóch, $\sqrt{}3$, Piérwiástek trzech i t. d.

130. Gdy mówię, że tych Ilości wyrazić dokładnie nié można; przydaię zaráz, że ich dokładnie wyrazić nié można w liczbach: bo w inny sposób można ie dokładnie wyrazić. Naprzykład: można zawsze naznaczyć dwie liniie, któréby się miały między sobą, iak 1, do Piérwiástku kwadratowégo liczby podanéy. I tak Przekątná kwadratu, má się do boku iednégo, iak się má Piérwiástek kwadratowy z 2, do 1, albo iak $\sqrt{}2 : 1$. Wysokość także Tróykąta równobocznégo, tak się má do połowy Podstawy, iak $\sqrt{}3 : 1$. i t d.

131. Lubo w liczbach nié można dokładnie wyrazić Ilości niespółmiernych; można iednak ich wártość przybliżyć do práwdziwéy, i uchybienié zmnieyszyć tylé, ilé zechcémy. Sposób

do tego náysnadnieyszy iest przez użycié znaków *Dziesiątnych* do wyrażéniá takich Ilości.

Niech będzie podaná liczba 2, aby wyciągnąć z niéy Piérwiástek kwadratowy przez *przybliżénié* (per approximationem).

Gdyby liczba podaná była razy 100, 10000, 1000000, i t. d. większá, iéy piérwiástek byłby téż większy razy 10, 100, 1000, i t. d. tak dalece, że wyciągnąwszy piérwiástek z liczb 200, 20000, 2000000 i t. d. trzebaby piérwiástek tén dzielić przez 10, 100, 1000, i t. d. aby w nim uniknąć omyłki w częściach dziesiątnych, setnych, tysiącznych i t. d. Przeto Piérwiástek kwadratowy, wyciągniony z 2, aż do cząstek tysiącznych, znáydzie się wyciągaiąc go z liczby 2000000.

Piérwiástek náybliższy z liczby 2000000 wyciągniony, iest 1414, a piérwiástek z liczby 2, przybliżony aż do $\frac{1}{1000}$, iest 1,414. Ponieważ kwadrat z 1,414, iest 1,999396, i różni się od 2, tylko 0,000604.

Wzór działaniá.

```
2,00,00,00 | 1,414
  1
 ---
24 | 10,0
     9 6
 ----
281. |  40,0
        28 1
 -----
2824 | 11 90,0
       11 29,6.
 ------------
        60 4.
```

Gdybyśmy chcieli ieszcze bardziéy przybliżyć do práwdziwégo, tén Piérwiástek, naprzykład żeby ani w cząstce $\frac{1}{10000}$ nie było uchy-

biéniá; trzebaby ieszcze dwa zera przydadź, aby mieć iednym znakiém więcéy w piérwiástku.

132. Dlá spráwdzéniá, czyliśmy w cząstce $\frac{1}{1000}$. nie uchybili, można położyć zamiást piérwiástku znalezionégo 1,414, liczbę 1,415, a ta przez siebie rozmnożoná uczyni kwadrat 2,002225, większy od 2.

133. Częstokroć bardzo wygodnie i prędko wyciągnąć można z liczby piérwiástek przybliżony, w ułomkach zwyczaynych. Sposób tén zasádzá się na tém, że ieżeli liczba iest złożoná z dwóch części, z których iedna iest bardzo wielká względém drugiéy; kwadrat téy liczby będzie prawie złożony z kwadratu części większéy, i z podwoionégo rozmnożéniá części piérwszéy przez drugą: ponieważ kwadrat części mnieyszéy, iako bardzo mały, może bydź zaniedbany. I tak kwadrat liczby naprzykład 11, podzieloney na dwie części: 10, i 1, będzie równy 100, toiest kwadratowi z 10, przydáwszy 10, przez 2 rozmnożone, toiest 20, i kwadrat części mnieyszéy 1: a choćby tén ostatni kwadrat i opuścić; tedy iednak summa 120, małoby się różniła od kwadratu práwdziwégo 121.

134. Idzie stąd, że maiąc liczbę, z któréy przypádá wyciągać Piérwiástek złożony z dwóch części, z których iedna byłaby wielká, a drugá małá, ieżeli wiémy iuż tę część wielką, znáydziémy z niewielkiém uchybieniém i część małą, podzieliwszy różnicę między liczbą podaną, i kwadratém części wielkiéy, przez tę samę część wielką dwa razy wziętą. To, co na wieloráz wypadnie, trzeba przydadź do wielkiéy części, gdy liczba podaná będzie większá od kwadratu części wielkiéy; albo odiąć od części wielkiéy, gdy kwadrat iéy większy będzie od liczby podanéy.

Niech będzie podaná do wyciągnieniá Piérwiástku, liczba 5. Piérwiástek iéy náybliższy w liczbie cálkowitéy, iest 2, którégo kwadrat 4.

Różnica między tym kwadratém i 5, iest 1. Podzielmy tę różnicę 1 przez 2, dwa razy wzięte, toiest przez 4, i będzie $\frac{1}{4}$. A zatém Piérwiástek liczby 5, nie wiele uchybiony, będzie $2\frac{1}{4}$, albo $\frac{9}{4}$, Kwadrat z $\frac{9}{4}$ iest $\frac{81}{16}$, czyli $5\frac{1}{16}$. Podzielmy $\frac{1}{16}$ przez $\frac{9}{4}$ dwa razy wzięte, toiest przez $\frac{9}{2}$, wypádnie na wieloráz $\frac{1}{72}$, który odiąwszy od $\frac{9}{4}$, czyli od $2\frac{1}{4}$, zostanie $2\frac{17}{72}$, albo $\frac{161}{72}$, i tém będzie iescze bardziéy przybliżaiący się do práwdziwégo piérwiástek kwadratowy liczby 5, iakoż kwadrat z $\frac{161}{72}$ iest $\frac{25921}{5184}$, czyli $5\frac{1}{5184}$.

135. Chcąc porównać to przybliżénié z tém, któréśmy mieli w ułomkach dziesiątnych; obróćmy ułomek zwyczayny $\frac{161}{72}$, na ułomek dziesiątny, a znáydziémy 2,2361 i t. d. Piérwiástek zaś liczby 5, w ułomku dziesiątnym byłby 2,2360 i t. d. A zatém różnica liczb w tém dwoiakiém postępowaniu, wydałaby się dopiéro w częściach dziesięć tysiącznych.

136. W piérwszém postępowaniu, kładzie się zamiást liczby podaney, ułomek ze wszystkiém iéy równy, którégo dzielnik iest kwadratém z 10, z 100, z 1000 i t. d. Naprzykład zamiást 2, pisze się $\frac{200}{100}$, $\frac{20000}{10000}$, $\frac{2000000}{1000000}$. W drugiém postępowaniu, szukámy ułomka bardzo blizko równégo liczbie podaney, którégo tak licznik, iako i mianownik, byłby zupełnym kwadratém. I tak liczba 2, iest prawie równá ułomkóm: $\frac{9}{4}$, $\frac{49}{25}$, $\frac{100}{49}$, $\frac{289}{144}$ i t. d. Liczba 3, iest prawie równá ułomkóm: $\frac{49}{16}$, $\frac{361}{121}$ i t. d. Znáyduiémy zaś té ułomki, dwoiąc, troiąc i t. d. kwadraty liczb naturalnych: 2, 3, 4, 5, i t. d. i uważaiąc, ieżeli między liczbami kwadratowémi nie będzie którá tuż zbliżaiącá się do liczby podwoionéy, potroionéy, i t. d. którąśmy iuż znaleźli. Naprzykład: 2 razy 4, czyni 8, a blizko czyni kwadrat 9, więc 2, zupełnie równá się $\frac{8}{4}$, a nie daleko iest od $\frac{9}{4}$, a zatém Piérwiástek z 2, będzie blizko $\frac{3}{2}$. Podobnie 2 razy 25, czyni 50, więc 2, równá się $\frac{50}{25}$, a nie daleko iest od $\frac{49}{25}$;

a zatém Piérwiástek z 2, będzie blizko $\frac{7}{5}$. Można potém poprawić, gdy zechcémy piérwszé tó przybliżéniá, postępuiąc sobie tak, iak się wyżéy powiedziało.

Dosyć będzie tym czasém na téy początkowéy wiadomości względém przybliżaniá Piérwiástków niespółmiernych. Rzecz ta stała się materyą wielkiéy wági, gdy sławni Matematycy *Euler* i de la *Grange*, głębiéy ią brać poczęli, i rozmaité iéy przysłowaniá czynić 1).

137. Niech będzie ułomek $\frac{1}{3}$, z którégo trzeba wyciągać Piérwiástek kwadratowy. Zamiást cobyśmy mieli osobno tén Piérwiástek wyciągać z 2 i z 3, i dzielić potém Piérwiástek licznika przez Piérwiástek mianownika, wygodniéy będzie ułomek tén $\frac{1}{3}$, odmiénić na inny, gdzieby mianownik, był zupełnym kwadratém. Ułomek tedy tak odmiéniony będzie $\frac{6}{9}$. Wyciągniéymy Piérwiástek z licznika 6, a trzeciá część tego Piérwiástku, będzie Piérwiástkiém ułomka $\frac{2}{3}$ $\sqrt{6} = 2{,}4494$; trzeciá tego piérwiástku część iest prawie 0, 8165. Iakoż kwadrat z 0, 8165, będzie 0, 66667225; i nie wiele różni się od $\frac{2}{3} =$ 0, 6666666 i t. d.

138. Możnaby téż wyciągnąć Piérwiástek z $\frac{2}{3}$, przez ułomki zwyczayné. Kwadrat náybliższy ułomka $\frac{2}{3}$, iest 1, który różni się od $\frac{2}{3}$ przez $\frac{1}{3}$. Dzielmy, przez kwadrat 1 podwoiony toiest przez 2, tę różnicę $\frac{1}{3}$, i będzie $\frac{1}{6}$, a odiąwszy $\frac{1}{6}$ od 1, albo od $\frac{6}{6}$, zostanie $\frac{5}{6}$, kwadrat z $\frac{5}{6}$, iest $\frac{25}{36}$, który od $\frac{24}{36}$ różni się przez $\frac{1}{36}$. Tę różnicę $\frac{1}{36}$ podzieloną przez dwa razy $\frac{5}{6}$, czyli przez $\frac{10}{6}$, toiest $\frac{1}{60}$, odeymuię od $\frac{5}{6}$, zostanie $\frac{49}{60}$. I tén ułomek

1) Obácz między innémi Dzieło pod Tytułém: *Introductio ad analysim Infinitorum* przez Eulera; i przydatki, de la Grange do Algebry po Francuzku wydané.

$\frac{42}{60}$, będzie piérwiástkiém bardzo blizkim z $\frac{2}{3}$, ponieważ kwadrat z $\frac{42}{60}$ iest $\frac{2401}{3600}$, a ułomek $\frac{2}{3}$ znaczy tylé, co $\frac{2400}{3600}$; różnica więc będzie tylko w $\frac{1}{3600}$.

139. W ogólności mówiąc, aby Piérwiástek kwadratowy wyciągnąć z ułomka iakiégo; trzeba piérwéy tak zrobić, aby mianownik iego był kwadratém, mnożąc, gdy inaczéy bydź nie może, licznika i mianownika przez mianownika, i wyciągać potém piérwiástek z licznika tak rozmnożonégo, a przez mianownika nierozmnożonégo podzielić tén piérwiástek.

140. Może się iednak obeyśdź czasém bez mnożénia tak licznika, iako i mianownika, przez tegoż samégo mianownika; gdy mianownik iuż iest kwadratém, albo gdy takim można go uczynić, mnożąc przez mnieyszą iaką od mianownika liczbę, tak licznika, iako i mianownika. Naprzykład chcąc wyciągnąć piérwiástek z $\frac{3}{4}$; wyciągniémy go z 3 i podzielimy przez 2; chcąc mieć piérwiástek z $\frac{5}{12}$, rozmnożymy 5 i 12 przez 3, a maiąc stąd $\frac{15}{36}$, wyciągniémy piérwiástek z 15, i podzielimy przez 6 piérwiástek z 15, będzie prawie 4, odtrąciwszy $\frac{1}{8}$, toiest będzie $\frac{31}{8}$, więc piérwiástek z $\frac{5}{12}$ będzie $\frac{31}{48}$: kwadrat albowiém z $\frac{31}{48}$, iest $\frac{961}{2304}$, a $\frac{5}{12}$ tylé znaczy, co $\frac{960}{2304}$: a zatém uchybiénié iest tylko w $\frac{1}{2304}$.

ROZDZIAŁ VI.

O dodawaniu i odeymowaniu Kwadratów, i zamiénianiu ich na iakiékolwiek Figury prostokréślné.

141. *Defin:* W Tróykącie prostokątnym, bok przeciwny prostému kątowi nazywać będziémy, Liniią *Przeciwprostokątną*, albo iedném słowém, Przeciwprostokątną (Hypothenusa).

142. *Twiérdz:* 1. Kwadrat zrobiony na przeciwprostokątnéy Tróykąta prostokątnégo, równá się summie kwadratów z dwóch innych boków tegoż Tróykąta.

Prawdę Twiérdzéniá tego okázać naprzód potrzeba na Tróykącie Prostokątnym, równoramiénnym, toiest maiącym dwa boki równé, dowodząc: że kwadrat zrobiony na Przekątnéy kwadratu dwa razy iest od tegoż kwadratu większy.

Niech będzie ABCD, kwadrat, którégo Prze- Táb. 8.
kątná AC. Przeciągnieymy AB, do E, a CB, do Fig. 2.
F, tak, aby BE, i BF, równé były AB. Poprowádźmy Liniie: AF, CE, EF, Czworokąt ACEF, będzie kwadratém przekątnéy AC, i będzie dwa razy większy od kwadratu ABCD.

Iakoż cztéry Tróykąty: ABC, ABF, EBC, EBF, mogą przystać do siebie: bo maią wszystkié kąty przy B, proste, i boki przy nich równé: a zatém liniie: AC, CE, EF, AF, będą wszystkié równé. Każdy oprócz tego kąt w czworokącie ACEF, iest prosty, bo złożony z dwóch kątów półprostych: iak naprzykład kąt ACE, złożony iest z kątów półprostych BCA, BCE; więc Czworokąt ACEF iest prostokątém maiącym boki wszystkié równé, a przeto iest kwadratém. Tén kwadrat ACEF, składá się z cztérech Tróykątów, z których każdy przystać może do iednégo z dwóch Tróykątów kwadratu ABCD. Ze tedy takich Tróykątów iest cztéry w kwadracie ACEF, iakich iest dwa w kwadracie ABCD, kwadrat więc Przekątnéy AC, iest dwa razy większy od kwadratu tego, którégo bokiém iest ta Przekątná.

143. *Wniosek:* Aby dodadź dwa kwadraty równé, trzeba zrobić Tróykąt prostokątny równoramiénny, którégo boki przy kącie prostym byłyby równé, bokowi iednégo z dwóch kwadratów, a Przeciwprostokątná tego Tróykąta, będzie bokiém kwadratu równégo summie dwóch tamtych kwadratów.

Można ieszcze nim się do ogólnego dowodzéniá przystąpi, przytoczyć niektóre przypádki
Táb. 8. szczególne, gdzie trzy boki Tróykąta prostoką-
Fig. 3. tnego będą w liczbach wyrażone. Obácz na Figurze 3, gdzie trzy boki Tróykąta prostokątnégo, wyrażone przez liczby: 5, 4, 3, w częściach równych, naprzykład w cálach, kwadraty tych liczb są: 25, 16, 9, cálów kwadratowych; i piérwszy kwadrat równá się summie dwóch ostatnich.

INNE PRZYKŁADY.

Przeciwprostokątné	*boki.*
13, - - -	12 - 5
17, - - -	15 - 8
25, - - -	24 - 7.

Dowodzénié ogólné, które teráz dámy, można obiaśnić na kwadratach z karty grubéy wyrzniętych.

Táb. 8. Niech będą dwa iakiékolwiek kwadraty: ABCD,
Fig. 4. i AEFG, znáydziémy kwadrat równy ich summie w tén sposób. Postáwmy naprzód té kwadraty, iedén przy drugim tak, aby dwa ich boki AD, i AG, stykały się, i iednę liniią czyniły DG, Bok AG mnieyszégo kwadratu, przenieśmy potém na bok AD, większégo kwadratu od D do J. Poprowádźmy liniie IF, IC. Tróykąty prostokątné: IGF, CID, maią boki przyległé kątowi prostému równé bokóm kwadratów obudwóch. Trzeba więc dowieśdź, że kwadrat przeciwprostokątnéy IF, albo IC, równy iest summie kwadratów z GI, GF, albo z DC, i DI. Wyrznąwszy kartę wzdłuż Linii IF, i IC, przyłóżmy, Tróykąta IDC, Bok DC, na iego równym boku BC, bok DI, przypadnie na BH, przedłużeniu boku AB, a to z téy przyczyny, że obadwa są kąty proste D, i B; bok

zatém trzeci IC, weźmie położénié HC: będzie więc Tróykąt CBH, równy Tróykątowi GDI. Podobnie i drugiégo Tróykąta IGF, bok IG, przysłanie zupełnie do boku HE, sobie równégo, ponieważ IG, równá się AD, AD równá się AB: a AB równá się HE: bok GF, przypadnie na równy sobie bok EF: a IF, weźmie położénié HF: będzie więc Tróykąt FEH, równy Tróykątowi FGI. Czworokąt, który się zrobi z cztérech przeciwprostokątnych: CI, IF, FH, HC, będzie miáł wszystkié kąty proste, bo kąt naprzykład IFH, równá się summie kątów IFE, i EFH, które równie czynią kąt prosty, iak czyniły kąty IFE i IFG. Tén więc czworokąt iest razém i prostokątém maiącym wszystkié boki równé, a zatém iest kwádratém: któryto kwadrat równá się summie dwóch kwadratów podanych, a zrobiony iest na Przekątnéy Tróykąta prostokątnégo, maiącégo za boki przyległé kątowi prostému té samé, któré były bokami tychże kwadratów.

Dowodzénié następuiącé powinno tym iaśniéy bydź wyłożoné; im prościéy ieszcze od piérwszégo tę prawdę okazuie, i więcéy daie do czyniénia dowcipowi. Wiele także użytecznych wniosków z niego wypływá.

Niech będzie Tróykąt ABC, prostokątny przy C. Na trzech bokach iego: AB, AC, BC, wystáwmy trzy kwadraty: ABDE, ACFG, BCHI. Kwadrat ABDE, równy będzie summie dwóch innych: ACGF i BCHI. Tab. 9. Fig. 1.

Z wiérzchołku kąta prostégo spuśćmy na przeciwprostokątną AB, prostopadłą CL, i przeciągnięymy ią aż do boku ED, do M.

Pokázać teráz trzeba, że kwadrat BCHI równy iest prostokątowi BDML, a kwadrat ACFG, Prostokątowi AEML, a zatém obadwa razém kwadraty równé kwadratowi ABDE.

Pociągnięymy liniią CD, Tróykąt BDC, będzie połową Równoległoboku prostokątnégo BDML:

bo obadwa maią spólną podstawę BD, i na téyże saméy równoodległéy MC, są zakończoné (94).

Pociągniémy liniią AI, Tróykąt BIA, będzie połową kwadratu BCHI, dlá téyże, co wyżéy, przyczyny: bo obadwa także maią podstawę spólną BI, i obadwa na iednéy równoodległéy AH, są zakończoné.

Ieżeli tedy dowiedziémy, że Tróykąty: ABI, CBD, są równé; iuż tém samém Prostokąt BDML, równy będzie kwadratowi BCHI: bo kiedy połowy dwóch rzeczy są równé; to i dwie té rzeczy będą równé.

Té dwa Tróykąty mogą przystać do siebie: ponieważ bok AB, w jednym, równy iest bokowi BD, w drugim, bo obadwa té boki do iednégo kwadratu należą: bok BI, w jednym, równy także iest bokowi BC w drugim: kąty między témi bokami zawarté: ABI, CBD, składaią się obadwa z kąta prostégo i z kąta ABC; więc té dwa Tróykąty są równé w powiérzchniach; a zatém i kwadrat BCHI, równy będzie Prostokątowi BDML. Tymże samym sposobém dowodzi się, że kwadrat ACFG, równy iest Prostokątowi AEML, toiest pociągnąwszy liniie CE, BG, Tróykąty BAG, EAC, mogą przystać do siebie, a zatém będą równé: kwadrat więc ACFG, że iest dwa razy większy od Tróykąta BAG, będzie równy Prostokątowi AEML, dwa razy także większému od Tróykąta EAC 1).

144. *Wniosek.* Gdy od wiérzchołka kąta prostégo, w Tróykącie prostokątnym spuszczoná bę-

---

1) Sposób postępowaniá w tém dowodzéniu, może służyć za wzór do innych dowodzéń przydłuższych i z wielu złożonych. Podzieliliśmy go na części, z każdą osobnośmy się obeszli. W tych samych częściach były znowu uczynioné, nowé podziáły, nie zawisłé iedné od drugich, i każdy podziáł w szczególności

dzie Prostopadłá na przeciwprostokątną; kwadrat z boku iednégo tego Tróykąta równy będzie Prostokątowi zrobionému z przeciwprostokątnéy, i z odcinka uczynionégo przez Prostopadłą, a przyległégo témuż Tróykąta bokowi, któ.égo kwadrat bierze się. Tak naprzykład kwadrat boku AC, toiest ACFG, równy iest Prostokątowi z Przeciwprostokątnéy AB, albo AE, i z odcinka AL, toiest Prostokątowi AEML; iako się wyżéy pokázało. Podobnie i kwadrat drugiégo boku BC, toiest BCHI, równy iest Prostokątowi z Przeciwprostokątnéy AB, albo BD, i z odcinka BL, toiest Prostokątowi BDML.

145. *Zagádn:* 1. Maiąc dané dwa kwadraty, zrobić kwadrat równy ich summie, albo ich różnicy.

1. Zróbmy kąt prosty, którégo ramionami byłyby boki dwóch kwadratów danych. Pociągnąwszy przeciwprostokątną, ta będzie bokiém kwadratu równégo summie tamtych dwóch kwadratów.

2. Zróbmy kąt prosty, dáwszy mu za iedno ramié bok mnieyszégo kwadratu. Od końca tego ramiénia, promiéniém równym bokowi większégo kwadratu, nakréślmy łuk koła, któryby przecinał ramié drugié kąta prostégo: to przecięcié naznaczy długość tego drugiégo ramiénia, z którégo wyprowadziwszy kwadrat; tén będzie równy różnicy dwóch kwadratów danych.

Gdyby kwadraty dané były równe; rozwiązanié byłoby iescze łatwieyszé.

---

dowodzony. Liniie nie były razém prowadzone, ale wtedy dopiéro, gdy były potrzebné. Ta ostatniá uwága powinná bydź między innémi na pamięci w dowodzeniu Twiérdzeń złożonych, gdzie gdyby wiele razém liniy prowadziło się na Figurze, nie małą trudność zadałoby to Uczniom, nie dobrze iescze w takowé działaniá wprawionym.

Przysposobowanie zagádnienia poprzedzaiącego, do wynalezienia innych Kwadratów.

146. Iużeśmy pokázali, że kwadrat Przekątnéy iest dwa razy większy od kwadratu, którego iest ta Przekątná. Aby zrobić kwadrat równy summie trzech kwadratów równych, czyli aby potroić iaki kwadrat, znalázłszy naprzód kwadrat podwóyny, możnaby mu przydadź znowu kwadrat poiedynczy, ale też można i iescze lepiéy tak sobie postąpić: Kwadrat potróyny iest różnicą kwadratu poczwórnego, od kwadratu poiedynczego. Zróbmyż więc Tróykąt prostokątny, którego bokiem iednym byłby bok kwadratu danego, a Przeciwprostokątną dáymy mu dwa razy większą od tego boku; bok drugi, który przypadnie w tymże Tróykącie, będzie taki, iakiego nám potrzeba, abyśmy mieli kwadrat potróyny.

147. *Uwága.* Tróykąt Prostokątny, którego Przeciwprostokątná iest dwa razy tak wielká, iak iest wielkié ramié iedno kąta prostégo, tén mówię, Tróykąt dwa razy iest mnieyszy od Tróykąta równobocznego, którego połową podstawy byłoby ramié iedno kąta prostégo, a drugié byłoby wysokością iego: a zatém, aby potroić iaki kwadrat, dosyć iest na podstawie dwa razy większéy od boku tego kwadratu zrobić Tróykąt Równoboczny, a wysokość tego Tróykąta okáże wielkość boku, na którym wystawić mámy kwadrat potróyny.

148. Aby zrobić cztéry razy większy kwadrat od tego, który iest dany; trzeba tylko kwadratu danego bok podwoić.

149. Aby zrobić kwadrat pięć razy większy od podanego; trzeba przy kącie prostym postawić dwa ramiona: iedno równé bokowi kwadratu danego, drugié dwa razy tak wielkié, a przeciwprostokątná będzie bokiem kwadratu pięć razy większego.

150. Aby zrobić kwadrat sześć razy większy

od podanégo; trzeba albo dodadź do siebie kwadrat poczwórny i podwóyny: albo też kwadrat podwóyny potroić poprowadziwszy w danym kwadracie Przekątną, i tę podwoioną, wziąwszy za bok Tróykąta równobocznégo, któ-rego wysokość oznaczy bok kwadratu sześć razy większégo.

151. Aby zrobić kwadrat siédm razy większy od danégo: trzeba dodadź kwadrat poczwórny i potróyny, dáwszy kąt prosty między bokami tych dwóch kwadratów a na przeciwprostkątnéy kwadrat postawiwszy; tén będzie siédm razy większy od danégo.

152. Aby zrobić kwadrat ośm razy większy od podanégo; trzeba go albo podwoić, i podwoiony cztéry razy pomnożyć, dáwszy mu bok dwa razy większy od boku kwadratu podwoionégo; albo też zrobić kwadrat równy różnicy między kwadratém danym, i kwadratém dziewięć razy większym od niego; postawiwszy na tén koniec Tróykąt prostokątny, któremu za ramié iedno przy kącie prostym dámy bok kwadratu podanégo, a za przeciwprostokątną, liniią trzy razy od tego boku większą. Ramié drugié, które przypadnie w tym Tróykącie, oznaczy bok kwadratu ośm razy większégo od danégo.

153. Aby zrobić kwadrat dziewięć razy większy od podanégo; trzeba mu dadź bok, trzy razy od podanégo większy.

154. Aby zrobić kwadrat dziesięć razy większy od podanégo; trzeba wziąć summę kwadratów, podanégo, i dziewięć razy większégo.

155. Aby zrobić kwadrat iedénáście razy większy od podanégo; trzeba wziąć summę kwadratów, dwa razy, i dziewięć razy tak wielkiégo, iak iest podany.

156. Aby zrobić kwadrat dwanáście razy większy od podanégo; trzeba podwoić bok kwadratu potróynégo, i na tym boku potróynym kwadrat postawić.

157. Aby zrobić kwadrat trzynáście razy większy od podanégo; trzeba wziąć summę kwadratu poczwórnégo, i dziewięć razy większégo, niż iest kwadrat podany: albo też postawić Troykąt prostokątny i dadź dwa ramiona: iedno trzy razy, a drugie dwa razy większé od boku kwadratu podanégo; przeciwprostkątná oznaczy bok kwadratu trzynáście razy większégo i t. d.

158. Wniosek z zagádnienia poprzedzaiącégo, że kwadrat ramiénia iednégo przy kącie prostym, równy iest Prostokątowi i z odcinka iéy przyległégo témuż ramieniu, przez prostopadłą zrobionégo, ten mówię wniosek daie sposób ogólnieyszy, a czasém i prostszy rozwiązaniá zagádnień w przystósowaniu położonych.

Iakoż ieżeli przeciwprostokątná iest dwa, trzy, cztéry i t. d. razy tak wielká, iak odcinek przyległy iednému bokowi: prostokąt z téy przeciwprostokątnéy i z tego odcinka, będzie też dwa, trzy, cztéry i t. d. razy tak wielki, iak kwadrat tego samégo odcinka: a zatém i kwadrat boku przyległégo tému odcinkowi będzie też dwa, trzy, cztéry i t. d. razy, tak wielki, iak kwadrat tego odcinka: co iasno bydź powinno, maiąc w pamięci to, co się powiedziało w Arytmetyce na karcie 88, i następuiących o mierzeniu Prostokątów; a co tu nie zawadzi powtórzyć.

159. *Podanié przybrané* (Lemma) 1). Gdy od punktu którégokolwiek na okręgu koła, poprowadzoné będą dwie liniie do dwóch końców średnicy; kąt przy tym punkcie zrobiony, i zawarty między dwiéma témi liniiami będzie prosty.

---

1) Lemma nazywámy podaniém przybraném, że nie należy właściwie do téy rzeczy, o któréy mowa, i że się przybiérá czasém z innéy części Matematyki dlá przysposobieniá nás do łatwieyszégo zrozumieniá tego, co następuie.

Niech będzie AKB, półkolé, którégo AB, iest śrzednica. Weźmy iakikolwiek punkt, np. K, na okręgu tego półkola, i poprowádźmy od tego punktu liniie AK, BK, do końców śrzednicy. Kąt zrobiony przez té dwie liniie iest prosty. Táb. 9. *Fig.* 2.

Przygotowanié. Pociągnijmy promiéń CK.

Dowodz: Tróykąt AKC, iest równoramiénny, bo AC, równá się CK; więc i kąty A, i CKA, naprzeciw tym bokóm stoiące będą równé; toż mówić, i o Tróykącie CKB; a zatém w Tróykącie AKB, kąt przy K, będzie równy summie kątów A i B: a ponieważ razém z témi dwoma kątami, czyni dwa kąty prosté; więc sám przez się będzie czynił kąt iedén prosty.

160. *Zagádn:* 2. Znaléźć kwadrat, któryby kilka całé razy, lub więcéy zamykáł w sobie kwadrat dany.

Niech AC, zamyká tylé razy w sobie AB, ilé razy kwadrat, którégo szukámy, má w sobie zamykać tén który iest dany. Na AC, iako na śrzednicy nakréślmy półkolé. Od punktu B, wyprowádźmy prostopadłą BD, przecinaiącą półkolé w Punkcie K. Liniiá AK, będzie służyła za bok kwadratowi żądanému. Táb. 9. *Fig.* 3.

161. *Uwága.* Trzeba, tu pokázać widocznie Uczniom pożyteczność większą i ogólnieyszą Jeometryi, niżeli Arytmetyki: ponieważ w Arytmetyce nié można zupełnie wyciągnąć Piérwiástku kwadratowégo z liczb całych któré są podwóyné, potróyné, poszóstné i t. d. innych liczb kwadratowych. I tak nié można, nawet w ułomkach, znaléźć Piérwiástku kwadratowégo liczb 2, 3, 5, 6, i t. d; a w Jeometryi, iako się pokázało, znáyduiémy i wyznáczámy boki kwadratów podwóynych, potróynych, poszóstnych i t. d.

Można więc powiedzieć, że niepodobność w wyznaczéniu piérwszych ilości, których kwadraty byłyby podwóyné, potróyné i t. d. innych kwadratów,

nie iest w sobie, ale pochodzi tylko od sposobu, którego używámy.

162. *Zagádn:* 3. Maiąc dany Prostokąt, zamiénić go na kwadrat iému równy.

Rozwiąz: Na większy bok prostokąta, przenieśmy długość boku iego mnieyszégo, tak, aby koniec iedén tego boku mnieyszégo schodził się z końcém iednym boku większégo. Na tymże boku większym, iako na śrzednicy nakréślmy półkolé, a do końca drugiégo boku mnieyszégo nieschodzącégo się z końcém drugim boku większégo wyprowádźmy Prostopadłą, i od punktu przecięciá téyże Prostopadłéy z półkolém, poprowádźmy liniią do tego końca śrzednicy, który schodzi się z bokiém mnieyszym Prostokąta. Ta ostatniá liniiá będzie bokiém kwadratu równégo Prostokątowi.

163. *Wniosek.* Widzieliśmy w Rozdziále V, iako Figurę każdą prostokréślną można zamiénić na Prostokąt. Teráz się pokázało, iak można Prostokąt każdy zamiénić na kwadrat; więc każdá Figura Prostokréślná, może bydź i na kwadrat zamiénioná.

164. W Tróykącie maiącym kąt iedén roztwarty, kwadrat boku przeciwnégo tému kątowi, większy iest od summy kwadratów dwóch innych boków: mnieyszy zaś byłby kwadrat boku przeciwnégo kątowi ostrému od summy kwadratów dwóch innych boków w jednymże Tróykącie.

Dwa następuiące Twiérdzéniá, pokážą różnicę w Tróykącie między kwadratém boku tak przeciwnégo kątowi roztwartému, iako i przeciwnégo kątowi ostrému, i kwadratowi dwóch innych boków.

165. *Twiérdz:* 2. W Tróykącie maiącym kąt roztwarty, spuściwszy prostopadłą od iednégo końca boku przeciwnégo kątowi roztwartému, na inny bok którykolwiek; kwadrat tamtégo boku, będzie równy summie kwadratów dwóch innych boków, i dwa razy wz. tému Prostokąto-

wi z boku, na który prostopadłá spuszczoná, rozmnożonégo przez odległość od téyże Prostopadłéy, wiérzchołka kąta roztwartégo.

Niech będzie Tróykąt ABC, który má kąt roztwarty przy C, od końca A, boku AB, przeciwnégo tému kątowi, spuśćmy na BC, prostopadłą AD. Kwadrat z AB. równy będzie summie kwadratów z AC, i z BC, i dwa razy wziętému Prostokątowi z BC, przez CD. Tab. 9. *Fig.* 4.

Przygotowanié. Na linii BD, zróbmy kwadrat BDEF, i na dwóch bokach iego weźmy FG, i FL, równé BC; poprowádźmy przez G, i L, liniie GI, i LC.

Dowodz: Prostokąt FGKL, iest kwadratém z BC; Prostokąt CDIK, iest kwadratém z CD: a Prostokąty obadwa BCKG, i EIKL, są z BC, przez CD.

Kwadrat z AB, równá się summie kwadratów z AD, i z BD, toiest summie kwadratów z AD, z DC, i z BC, i dwa razy wziętému Prostokątowi z BC, przez CD. A że summa kwadratów z AD, i DC, równá iest kwadratowi z AC; więc kwadrat z AB, równy iest summie kwadratów z AC, i z BC, i dwa razy wziętému Prostokątowi z BC, przez CD.

166. *Przykład.* Niechby Tróykąt ACD był połową Tróykąta równobocznégo; toiest, niechby liniiá AC była połową linii CD. Prostokąt z BC, przez CD, dwa razy wzięty, byłby równy Prostokątowi BC, przez CA: a sám przez się byłby tylko iego połową. Tén przypádek szczególny można wyrazić w słowach następuiących: *W Tróykącie, którego kąt roztwarty równá się summie kąta prostégo i trzeciéy części iego; kwadrat boku przeciwnégo kątowi roztwartému, równy iest summie kwadratów innych dwóch boków, i Prostokątowi z tychże boków.*

167. *Twiérdz:* 3. W Tróykącie iakimkolwiek uważaiąc iedén kąt ostry, a od końca boku przeciwnégo tému kątowi spuściwszy prostopadłą na iedno ramié iego; kwadrat tego boku równać się

będzie różnicy między summą kwadratów ramión obudwóch kąta tego ostrégo, i dwa razy wziętym Prostokątém z ramiéniá, na które prostopadłá iest spuszczoná i z odległości wiérzchołka kąta ostrégo od prostopadłéy.

Táb. 9. *Fig.* 5. Niech będzie Tróykąt ABC, w którym kąt C iest ostry. Od końca A, boku przeciwnégo AB, spuśćmy Prostopadłą AD, na ramié BC, kąta ostrégo. Kwadrat z AB, równy będzie różnicy między summą kwadratów z AC, i z CB, i dwa razy wziętym Prostokątém, którégo bokami będą BC, i CD.

Przygotowanié. Zróbmy kwadrat z CB, BCEF. Naznáczmy liniie: FG, FL, równé DB, i CI równą CD. Poprowádźmy ieszcze liniie: DL, IG. Przeciągnięymy DL, i CE do M i N, tak, aby LM, EN równé były CD. Złączmy ich końce linią MN. Prostokąt ELMN, równy będzie kwadratowi z CD.

Dowodz: Kwadrat z AB równy iest summie kwadratów z AD, i z BD. Kwadrat z BD, toiest FGKL, równy iest kwadratowi BCEF, z BC, mniéy summą dwóch Prostokątów: BGIC, i EIKL: albo dodáwszy, i odiąwszy kwadrat ELMN, z CD; kwadrat z BD będzie równy summie kwadratów: BCEF, i ELMN, mniéy summą Prostokątów BGIC, EIKL, i kwadratu ELMN, czyli mniéy summą Prostokątów BGIC, i IKMN, które obadwa są Prostokątami z boków BC, i CD; a zatém kwadrat z AB, iest równy summie kwadratów z AD, z CD, i z BC, mniéy dwa razy wziętym Prostokątém z BC, przez CD. A że summa kwadratów z AD, i z CD, równá się kwadratowi z AC; więc kwadrat z AB, równy iest summie kwadratów z AC, i z BC, mniéy dwa razy wziętym Prostokątém z BC, przez CD.

168. *Przykład.* Niechby Tróykąt ACD, był połową Tróykąta równobocznégo, a zatém AC, dwa razy większá od CD; w takim razie kwadrat z AB, będzie równy summie kwadratów

z AC, i z BC, mniéy Prostokątém z tychże boków AC, i BC. Co tak można wyrazić: *W Tróykącie, którego kąt iedén równa się kątowi prostému, mniéy trzecią iego częścią, kwadrat boku przeciwnégo tému kątowi równać się będzie różnicy między summą kwadratów z ramión tegoż kąta, i Prostokątém z tychże ramión.*

169. *Wnioski i Przystósowaniá dwóch Twiérdzén ostatnich.*

1. Ieżeli w Tróykącie kwadrat iednégo boku równy iest summie kwadratów z ramión kąta przeciwnégo, albo większy lub mnieyszy od téy summy; kąt téż przeciwny będzie prosty, albo roztwarty, lub ostry.

2. W każdym Tróykącie, Prostokąt dwa razy wzięty, z boku którégokolwiek i z odległości wiérzchołka kąta iednégo przy tym boku, od prostopadłéy spuszczonéy na ténże bok, z wiérzchołka kąta iému przeciwnégo, tén, mówię, dwa razy wzięty Prostokąt, równy iest różnicy między summą kwadratów z dwóch ramión, i kwadratém boku przeciwnégo tému kątowi, to-iest, równy będzie summie tych dwóch kwadratów, mniéy kwadratém boku przeciwnégo, gdy kąt iest ostry; a gdy roztwarty, to tén Prostokąt dwa razy wzięty, równy będzie kwadratowi boku przeciwnégo, mniéy summą kwadratów z ramión: a zatém ieżeli wiadomé nám są w liczbach boki Tróykąta; dóydziémy stąd w liczbach i prostokąta tego podwóynégo: dóydziémy i odcinka (*Segmentum*) podstawy, zawartégo między wiérzchołkiém kąta, o którym iest rzecz, i prostopadłą. A że kwadrat wysokości Tróykąta, równá się różnicy między kwadratém boku przyległégo odcinkowi, i kwadratém tegoż odcinka; więc dóydziémy i wysokości Tróykąta, a zatém i powiérzchni iego.

170. *Przykład* 1. Niech będą trzy boki: BC, AB, AC, w liczbach oznaczoné: piérwszy 21, drugi 20, trzeci 13.

Kwadrat z AB, iest 400.

Summa Kwadratów z BC, i AC iest summa z 441 i z 169, toiest 610.

Ta summa ponieważ iest większá, niż kwadrat z AB, przeto kąt przy C, iest ostry.

Różnica między tą summą i kwadratém z AB, iest 210, któráto różnica równá się podwóynému Prostokątowi z BC, przez CD, czyli liczbie znaczącéy długość boku BC, rozmnożonéy przez liczbę oznaczaiącą długość odcinka CD, dwa razy wziętą. Tén prostokąt poiedynczy wyrazi się więc przez 105. A że BC oznaczoné iest przez 21, więc długość CD, będzie 5. Kwadrat z AD równá się różnicy między kwadratém z AC, i kwadratém z CD, toiest, różnicy między 169 i 251. Ta różnica iest 144, więc AD, będzie oznaczoné przez 12, Powiérzchniá Tróykąta CAB, iest połową Prostokąta z BC, przez AD, toiest 126.

171. *Przykład* 2. Niech będzie BC 11, AB 20, AC 13. Kwadrat z AB, będzie 400.

Summa kwadratów z BC, i z AC, będzie summa z 121 i 169, toiest 290.

Ta summa ponieważ iest mnieyszá od kwadratu z AB; przeto kąt przy C, będzie roztwarty.

Różnica między tym kwadratém, i tą summą iest 110, któráto różnica równá się podwóynému Prostokątowi z BC, przez CD, a zatém Poiedynczy Prostokąt będzie = 55. A że BC, równá się 11; więc CD, będzie się równać 5.

Kwadrat z AD, równá się różnicy między kwadratém z AC, i kwadratém z CD; toiest różnicy między 169 i 25. Ta różnica iest 144, więc AD będzie = 12; a powiérzchniá Tróykąta będzie 6 razy 11, toiest 66. Trzeba na więcéy ieszcze przykładach wprawiać uczniów, dobieraiąc po większéy części liczb takich, aby Piérwiástki kwadratowé zupełnie w liczbach całkowitych wychodziły.

Przykłady:	*Boki*		*Podstawa.*
51	i 25	- -	52 albo 28
52	i 29	- -	69 albo 27
17	i 39	- -	44 albo 38
68	i 87	- -	95 albo 31.

172. *Przestroga* 1. Dlá większéy wygody używać napotém będziémy skróconych wyrażéń, których tu znaczénié wykładámy.

Znak tén: = wyrażać będzie równość między dwiéma ilościami.

Znak: + gdzie iedna liniiá prosto drugą przeciná, wyrażać będzie dodanié iednéy ilości do drugiéy; i wymáwiá się tém słowém: *więcéy* (plus). Naprzykład, $4 + 5 = 9$, wymáwiá się, cztéry więcéy pięcią, równá się dziewięciom.

Znak: — wyrażać będzie odeymowanié iednéy ilości od drugiéy; i wymáwiá się tém słowém: *mniéy*; (minus). Naprzykład: $7 - 4 = 3$, wymáwiá się, siédm mniéy cztérémá, równá się trzém.

Dlá oznáczéniá rozmnożéniá liczb, w Arytmetyce, albo Prostokąta z dwóch liniy w Jeometryi, używać będziémy znaku: × toiest krzyża ukośnégo. Naprzykład 4×3, znaczy cztéry przez trzy rozmnożoné, $AB \times CD$, znaczy Prostokąt z linii AB i CD: albo Prostokąt z AB, przez CD. Dzielénié oznáczá się tym znakiém, toiest dwiéma kropkami, iedną pod drugą, któré kładą się po ilości podzielnéy, a przed ilością dzielącą. Naprzykład 6: 2, znaczy 6, przez 2 podzieloné. Można także dzielénié i sposobém ułomków wyrażać, kładąc za licznika ilość podzielną, a za mianownika, ilość dzielącą kwadrat iakiéy ilości, naprzykład linii AB, iednym z tych dwóch sposobém zwykł się wyrażać AB^2, albo AB^9, częściéy iednak piérwszym.

I tak piérwszé Twiérdzénié można było w tén sposób wyrazić:

Táb. 9. *Fig.* 1. $AB^2=AC^2+BC^2$

Fig. 4. Szóste $AB^2=AC^2+BC^2+2BC\times CD$

Fig. 5. Siódme $AB^2=AC^2+BC^2-2BC\times CD$

Wszystkie trzy tych Twierdzeń przypádki, takby razém mogły bydź wyrażone: $AB^2=AC^2+BC^2+2BC\times CD$. W tym razie, gdzie kąt iest prosty, liniiá CD, a zatém i prostokąt $BC\times CD$ niknie.

173. *Przestroga* 2. Trzeba ostrzédz Uczniów, aby używaiąc tych skróconych wyrazów, mieli zawsze przed oczyma Figury stósuiące się do tychże wyrazów, i dobrze ié rozważali. Należy także ustnie piérwéy wyrazić każdé Twiérdzénié lub Zagádnienié, nim się przystąpi do pisaniá ich znakami wyráz skrácaiącémi. I owszém lepiéyby było, aby póty tych znaków nie używać, póki zupełnéy wprawy nie nabiorą Uczniowie w wyłożéniu ustném a iasném Twiérdzéń i Zagádnień im podanych.

ROZDZIAŁ VII.

O Liniiach stycznych z kołém; o kątach przy okręgu koła; i o kątach, ktorych wiérzchołki są między okręgiém, albo za okręgiém.

174. *Definicye.* Koła równé są té, których promiénie są równé i takié koła przystać mogą do siebie.

Gdyby to podanié nie zdáwało się bydź tak oczywistém, aby go przypuścić można, za Definicyą; tedy możnáby dowiésdź ié tymże samym sposobém, którym wyłożyliśmy w Rozdziále I. tworzénié się koła; (8) pokazuiąc, iż dwie liniie równé, obrotém swoim około iednégo i nieporuszonégo końca, nié mogą zrobić,

tylko równé dwa koła: albo téż uważaiąc té dwie liniie, iak gdyby iedna leżała na drugiéy, i iak gdyby obiedwie razém czyniły ten obrot; w takim razie, iakiékolwiek będzie położénié spólné tych dwóch liniy, ponieważ zawsze iedna do drugiéy przystaie, więc i té mieysca, któré przeyśdź maią w tymże samym czasie, i té, które iuż przeszły w czasach równych, rachuiąc od początku ich obrotu, przystałyby do siebie: a zatém i całé té mieysca, czyli koła, któréby zrobiły, mogłyby téż do siebie przystać.

Końce tych dwóch liniy tak się obrácaiących, w czasach równych, zrobiłyby łuki równé, a zatém w kołach równych, kąty przy ich śrzodkach równé, zamykaią swémi ramionami łuki równé.

Wzaiémnie, gdy w równych kołach, równé łuki weźmiémy, kąty w śrzodkach tych kół, któré między ramionami swémi zamykaią té łuki, będą równé.

Niech będą dwa łuki równé: BA, ba, w dwóch T. 10. równych kołach. Kąty: ACB, acb, które wiérz- *Fig.* 1. chołki swoié maią w śrzodkach tych kół, i któré zamykaią swémi ramionami té łuki, są téż równé. Bo gdyby kąty: ACB, acb, nie były równé, kąt naprzykład ACB, gdyby był mnieyszy od kąta acb; to kąt inny, naprzykład DCB, byłby równy kątowi acb: a zatém i łuki DB ab, byłyby równé: ale, że wzięliśmy za równé łuki AB i ab; więc łuki także AB i DB, byłyby równé, co iest nie podobną, chyba żeby liniie CD, i CA iednę tylko liniią czyniły, zupełnie do siebie przystaiąc.

Część koła zawartą między dwoma promieniami i łukiém, zwać będziémy wycinkiém koła, (Sector Circuli).

Z tego, co się wyżéy powiedziało, wnieść można, że w równych kołach i wycinki té przystać mogą do siebie, których kąty albo łuki są równé; a wzaiémnie, że kąty i łuki są równé

w tych wycinkach, które przystać do siebie mogą.

W kołach równych, łuki równe maią też i ciénciwy równe. Iakoż w takich dwóch kołach tróykąty równoramiénne, złożone z ciénciwy i z dwóch promiéni, mogą przystać do siebie, dlá równości promiéni, i kątów w śrzodku, któré na równych łukach wspiéraią się.

Wzaiémnie, ieżeli w kołach równych ciénciwy są równé; łuki téż równé będą: bo Tróykąty złożone z tych ciénciw, i z promiéni równych, maiąc trzy boki równé, mogą przystać do siebie, i kąty w śrzodku, zrobioné przez dwa promiénie będą równé, a zatém i łuki im przeciwné, równé będą.

Przez *odcinek koła* (segmentum Circuli) rozumieć będziémy mieyscé zawarté między łukiém i ciénciwą.

Gdy ciénciwa nie iest razém śrzednicą, dzieli koło na dwa odcinki: iedén większy, a drugi mnieyszy od półkoła. Takié dwa odcinki nazywaią się odcinkami *naprzemián* (Alterna).

W dwóch równych kołach, ieżeli dwa odcinki maią równé łuki, przystać do siebie mogą. Iakoż té odcinki są różnicami dwóch wycinków maiących równé łuki, od dwóch Tróykątów, któré za podstawy maią ciénciwy tychże łuków równych.

A że té wycinki mogą przystać do siebie, bo maią łuki równé; Tróykąty mogą też do siebie przystać, bo maią wszystkié trzy boki równé.

Więc i dwa odcinki, przystać mogą do siebie będąc różnicą dwóch Tróykątów równych, od dwóch wycinków równych.

Wszystko to, co się teráz powiedziało, trzeba przystósować do łuków, ciénciw, wycinków, odcinków iednégo koła.

Té podaniá powinnyby się wydáwać oczywistémi, i nie potrzebować wcale żádnégo dowo-

dzéniá, i z téy przyczyny są bardzo zdatné, aby się na nich wprawiali Uczniowie w tłumaczéniè się iak náydokładnieyszé z tych nawet wyobrażéń, które im iuż wystawuią rzecz iaką dosyć iaśnie; i aby tym soosobém wyobrażéniá w sobie proste, prościeyszémi ieszcze czynić uczyli się.

175. *Twiérdz:* 1. Prostopadłá ciągnioná od śrzodka ciénciwy, przechodzi przez śrzodek koła.

2. Liniiá prostá prowadzoná od śrzodka koła do śrzodka ciénciwy, iest do niéy prostopadłą.

3. Prostopadłá od śrzodka koła spusczoná na ciénciwę, przypadá na iéy śrzodek.

Niech będzie AB, ciénciwa w kole, którégo śrzodek C, a promiéń CA. Tá. 10. *Fig.* 2.

1. Prostopadłá od śrzodka D, ciénciwy wystawioná, przechodzi przez śrzodek koła.

Dowodz: W téy prostopadłéy wszystkié punkta iednakowo są odległé od dwóch końców ciénciwy: a że i śrzodek koła iednakowo iest odległy od dwóch końców téyże ciénciwy; więc będzie téż znáydował się na téy prostopadłéy.

2. Liniiá CD, od śrzodka koła poprowadzoná do śrzodka ciénciwy, iest do niéy prostopadłą.

Dowodz: Tróykąty: DCA, DCB, maią wszystkié boki równé; więc mogą przystać do siebie, a w szczególności kąty przy D, są równé, a będąc kątami przyległémi, obadwa proste bydź muszą, a zatém liniiá CD, iest prostopadłá do AB.

3. Prostopadłá CD, spusczoná od śrzodka koła na ciénciwę AB, przypádá na iéy śrzodek.

Dowodz: W Tróykącie Równoramiénnym ACB, kąty A i B są równé; więc w Tróykątach prostokątnych: ACD, BCD, wszystkié kąty równé będą iedné względém drugich: a że i

boki AC, CB, są równé; więc té dwa Tróykąty przystać do siebie mogą, a w szczególności liniie AD, i BD, są równé.

176. *Wniosek.* Koło nié może mieć więcéy, iak dwa punkta spólné z liniią prostą: bo gdyby mogło mieć więcéy takich spólnych punktów, naprzykład trzy; złączywszy iedną liniią punkt piérwszy z drugim, a drugą punkt drugi z trzecim, i od śrzodka koła poprowadziwszy do tych dwóch liniy dwie prostopadłé, té uczyniłyby Tróykąt maiący dwa kąty prosté, co iest nie podobną.

177. *Zagád:* 1. Maiąc danė trzy punkta, których położénié nie iest w linii prostéy, nakréślić koło, któréby przez té trzy punkta przechodziło.

Rozwiąz: Ponieważ śrzodek koła powinién się znáydować na każdéy prostopadłéy poprowadzonéy od śrzodka linii łączącéy dwa punkta, znáyduiącé się w kole, ieżeli tedy piérwszy z punktów danych złączymy liniią z drugim, a drugi z trzecim, i od śrzodka tych dwóch liniy poprowadzimy Prostopadłé; té przetną się w punkcie, który będzie śrzodkiém koła maiącégo przechodzić przez trzy punkta dané.

178. *Przystósowanié.* Znaléźć śrzodek koła danégo.

Rozwiąz: Na okręgu koła, weźmy trzy iakiékolwiek Punkta, a przez poprzedzaiącé zagádnieniė szukáymy śrzodka koła przez té trzy punkta przechodzącégo.

179. *Wniosek.* Ponieważ prostopadłé wystawioné na śrzodku dwóch liniy łączących punkt iedén dany z dwoma innémi, nié mogą się przecinać tylko w jednym punkcie; więc nié może bydź więcéy iak iedno koło przechodzącé przez té trzy punkta: albo ieżeli dwa koła przechodziłyby przez té trzy punkta, toby nie były tylko iednėm w rzeczy saméy kołém: a zatém gdy dwa koła się przecinaią, nie więcéy mogą

mieć iak dwa punkta spólné w przecięciach. Ta własność koła, że ié z trzech punktów danych wyznaczyć można, iako i ta drugá, że wszystkié iego promiénie są równé, różni koło od wszystkich krzywych liniy, podobnie iako liniiá prostá różni się przeto od krzywych liniy, że dosyć iest mieć dwa punkta dané, aby ią wyznaczyć.

180. *Twiérd:* 2. Od końca promiénia koła wyprowadziwszy Prostopadłą do tegoż promiénia; wszystkié inné punkta téy prostopadłéy będą za kołém.

Dowodz: Odległością którégokolwiek z tych innych punktów, od śrzodka koła, iest przeciwprostokątná Tróykąta, którégo bokiém iednym iest promiéń koła: a że przeciwprostokątná większá iest od iednégo z boków Tróykąta; więc i odległość od śrzodka koła, punktu którégokolwiek na prostopadłéy, oprócz tego, który iest końcém promiénia, większá iest od tegoż promiénia: a zatém każdy z tych punktów będzie za kołém.

181. *Defin:* Gdy prostá liniiá iedén tylko má punkt spólny z okręgiém koła; taká liniiá nazywá się styczną z kołém (*Tangens Circuli*).

182. *Zagádn:* 2. Maiąc dany punkt na okręgu koła, poprowadzić przez niego styczną.

Rozwiąz: Punkt dany ze śrzodkiém koła złączmy promiéniém, i od tegoż punktu wyprowádźmy prostopadłą do promiénia: a ta sama będzie i styczną z kołém w punkcie danym.

183. *Zagádn:* 3. Od punktu danégo za kołém, poprowadzić do tegoż koła, styczną.

Rozwiąz: Złączmy liniią, punkt dany ze śrzodkiém koła. Na téyże linii, iako na śrzednicy, nakréślmy półkolé; punktém, gdzie okrąg półkoła przecinać będzie koło dané, będzie tém samém punkt tén, do którégo poprowadzoná liniiá od punktu danégo, będzie styczná z kołém (159).

To zagádnienie dwoiako może bydź rozwiązane: gdyż półkolé z jedney lub z drugiéy strony śrzednicy nakréślić można.

184. *Twiérdz:* 3. Od końca promiénia poprowadziwszy styczną z kołém, ieżeli przez punkt, w którym się ta styczna koła dotyká, przeciągniémy inszą iaką liniią prostą, ta przecinać będzie okrąg koła.

Dowodz: Promiéń koła iest prostopadły do stycznéy w końcu tegoż promiénia, a zatém pochyły będzie do każdéy inszéy linii, przez tén koniec promiénia, toiest punkt koła przechodzącéy. Poprowadziwszy więc prostopadłą od śrzodka koła do téy linii, ta prostopadłá krótszá będzie od promiénia: bo promiéń będzie przeciwprostokątną tego Tróykąta, którégo ta prostopadłá będzie tylko bokiém: a że koniec promiénia iest na okręgu koła; więc koniec téy prostopadłéy nie dóydzie do okręgu koła. Iuż tedy iedén punkt téy linii będzie w kole, a drugi w samym okręgu koła, na końcu promiénia: a zatém liniiá ta przechodząca przez koniec promiénia, ponieważ drugi swóy punkt má w kole, przecinać go musi.

185. *Twiérdz:* 4. leżeli liniiá prostá iest styczną z kołém, będzie:

1. Promiéń poprowadzony od punktu tego, gdzie się liniiá styká z kołém będzie do téy stycznéy prostopadłym.

Iakoż, gdyby promiéń do punktu tego poprowadzony, nie był do stycznéy prostopadłym, tedy liniiá inszá prostopadłá do tego promiénia, i przechodząca przez iego koniec, byłaby styczną z kołém, a ta piérwszá zamiást stykaniá się z kołém, przecinałaby go: iako się w poprzedzaiącém twiérdzéniu okázało.

2. Prostopadłá do stycznéy, od punktu dotknięciá ciągnioná, przechodzi przez śrzodek koła.

Gdyby ta prostopadłá nie przechodziła przez

śrzodek koła; tedyby iednak promień do tegoż punktu dotknięciá ciągniony był prostopadłym do stycznéy, a zatém od iednégo punktu, toiest od punktu dotknięciá, możnáby dwie prostopadłé prowadzić, co iest niepodobná.

186. *Uwága.* Pokázaliśmy (59) własność kąta, którégo wiérzchołek iest na okręgu koła, a którégo dwa ramiona wspiéraią się na końcach śrzednicy tegoż koła: to podanié było tylko przypádkiém szczególnym podaniá daleko ogólnieyszégo, w którém się dowodzi, że wszystkié té kąty są równé, które wiérzchołek maią na okręgu koła, a ramionami wspiéraią się na końcach równych łuków tegoż koła.

187. *Twiérdz:* 5. Kąt maiący swóy wiérzchołek na okręgu koła, a którégo ramiona są ciénciwami tegoż koła, iest połową innégo kąta, który má wiérzchołek w samym koła śrzodku, a ramionami swémi obeymuie ténże sám łuk, co i kąt piérwszy.

Niech będą kąty: ACB, ADB, z których piérwszy má wiérzchołek w śrzodku C koła, a drugi na okręgu tegoż koła w punkcie D: i niech obadwa té kąty obeymuią ramionami swémi ténże sám łuk AB. W takim razie kąt ACB dwa razy iest większy od kąta ADB. Tá. 10. *Fig.* 3.

Przypádek 1. Gdy iedno ramié AD kąta ADB, iest razém i śrzednicą koła.

Dowodz: Tróykąt BCD, iest równoramiénnym, więc kąty B i D będą równé, a summa ich, dwa razy większá od iednégo z nich: ale że kąt ACB, iako zewnętrzny, równá się téy summie kątów B i D; więc dwa razy iest większy od iednégo z nich, naprzykład od kąta D. Tá. 10. *Fig.* 4. i 5.

Przypádki té, w których żádné ramié kąta ADB nie byłoby razém śrzednicą koła, możná łatwo przywiésdź do przypádku piérwszégo, poprowadziwszy śrzednicę DE.

Przypádek 2. Gdy śrzodek C, iest między ramionami kąta ADB.

Tá. 10. *Fig.* 4. *Dowodz.* Kąt ADB, składá się z dwóch kątów: ADE, i BDE, a kąt ACB składá się także z dwóch kątów: ACE i BCE: a że podług dowiedzieniá w piérwszym przypádku każdy z tych dwóch ostatnich kątów, iest dwa razy większy od iednégo z piérwszych, którégo ramiona obeymuią tenże sám łuk; więc obadwa razém piérwszé kąty są też dwa razy większé od obudwóch razém kątów drugich: a zatém kąt ACB, dwa razy iest większy od kąta ADB.

Przypádek 3. Gdy śrzodek C, nie iest między ramionami kąta ADB.

Tá. 10. *Fig.* 5. *Dowodz:* Kąt ECB, dwa razy iest większy od kąta EDB, (1. Przypádek), tenże kąt ECB, składá się z dwóch kątów: ECA, ACB, kąt także EDB, składá się z dwóch kątów: EDA, ADB: a że kąt ECA dwa razy iest większy od kąta EDA (1. Przyp:); więc i kąt ACB, większy dwa razy będzie od kąta ADB.

188. *Uwága.* Uczniowie poczynaiący, więcéy doznáwać zwykli trudności, w poięciu tego trzeciégo przypádku, niż drugiégo, w którym przez dodáwanié to samo się dowodzi, co w trzecim przez odeymowanié. Można im to w ten sposób obiaśnić, że dwie naprzykład liczby 12 i 8, z których piérwszá dwa razy iest większá od 6, a drugá od 4, té, mówię, dwie piérwszé liczby, gdy dodané będą, summa ich 20, będzie też większá dwa razy od summy dwóch drugich liczb 6 i 4, toiest od 10. A przeciwnie gdy naprzykład 12 i 8, piérwszé większé iest dwa razy od 6, a drugie od 4, różnica między 12 i 8, toiest 4, dwa razy też większá będzie od różnicy między 6 i 4, toiest od 2.

Gdyby tego była potrzeba, możnaby na liniiach to samo okázać.

Tá. 10. *Fig.* 6. Niech będzie Liniiá AB, większá dwa razy od CD_1 i AE większá także dwa razy od CF.

Od punktu E, naznaczywszy na linii AB, Liniie EG, EH, równé liniiom FC, FD; Liniie: AG, i BH, będą tak iedna, iako i drugá oznáczać różnicę Linii AE, od CF, summa zaś tych dwóch liniy AG, i BH, oznaczy różnicę całéy linii AB, od całéy linii CD.

189. *Wniosek.* Kąty przy okręgu koła, któ-ré ramionami swémi iednakowé łuki obeymuią, są równé: albo, co na iedno wychodzi, kąty w tymże samym odcinku koła są równé. Że tak w saméy rzeczy iest, co do kątów przynaymniéy ostrych, toiest: których ramiona obeymuią łuk mnieyszy od pół okręgu, wynika to z Twierdzénia poprzedzaiącego. Z następuiącego zaś wnieść będzie łatwo można, że to samo má mieyscé i w kątach przy okręgu koła, których ramiona obeymuią okrąg większy od pół okręgu.

190. *Twierdz:* 6. Summa kątów w odcinkach na przemián, (174) równá się dwóm kątom prostym: albo, co iedno znaczy, ieżeli czworokąt iest kołém obwiedziony, summa kątów przeciwnych tego czworokąta, równá się dwóm kątom prostym.

Niech ciénciwa AB, dzieli koło na dwa od- T. 11.
cinki: ADB, ACB; kąt ADB, w jednym od- *Fig.* 1.
cinku, wraz z kątém ACB w drugim odcinku, wyrównywá dwóm kątom prostym; albo, summa kątów D, i C, czworokąta kołém obwiedzionégo, równá się dwóm kątom prostym.

Przygotowanié. Poprowádźmy Przekątną DC.

Dowodz: Kąty ADC, ABC, obeymuią obadwa ramionami swémi łuk iedén AC, mnieyszy od pół okręgu; więc są równé. Dlá téyże przyczyny i kąty: BDC, BAC, są równé. Summa tedy kątów: ADC, BDC, toiest kąt ADB, równá się summie kątów: ABC, BAC; a zatém summa kątów ADB, ACB, równá iest summie trzech kątów Tróykąta ABC: a ponieważ ta o-

statniá summa wyrównywá dwóm kątóm prostym; więc i tamta.

Powtórzénié. Ieżeli ciénciwa iest razém i śrzednicą, dzieli koło na dwa półkoła, a w każdém tém półkole, kąty są proste.

Ieżeli ciénciwa nie iest śrzednicą; dzieli koło na dwa odcinki, iedén większy a drugi mnieyszy od pół okręgu; kąt w większym odcinku wspiérá się na łuku mnieyszym od pół okręgu, i iest ostry; iednakowéy zawsze wielkości. Kąt zaś w mnieyszym odcinku wspiérá się na łuku większym od pół okręgu, i iest roztwarty, dopełniaiący zawsze dwóch kątów prostych, z kątém ostrym w drugim odcinku.

191. *Twiérdz*: 7. Ieżeli od punktu w odcinku koła, lub za odcinkiém będącégo, do końców podstawy tego odcinka poprowadzimy dwie liniie; kąt między témi dwiéma linniiami zawarty, będzie w piérwszym razie większy, a w drugim mnieyszy od kąta w samym odcinku.

T. 11. *Fig.* 2. Niech będzie punkt D, w odcinku albo za odcinkiém CAB; prowádźmy od punktu tego, do końców Podstawy AB, tegoż odcinka Liniie: DA, DB, kąt ADB, będzie większy w piérwszym razie, a mnieyszy w drugim, od kąta ACB.

Dowodz: W piérwszym razie, kąt ADB, iest zewnętrzny Tróykąta DBC, więc iest większy od iednégo z wewnętrznych kątów tegoż Tróykąta, toiest, od kąta ACB, w samym odcinku.

W drugim razie, kąt ACB, iest zewnętrzny Tróykąta CDB, a zatém większy od kąta D, albo co na iedno wychodzi, kąt D, iest mnieyszy od kąta C, w odcinku.

192. *Uwága* 1. W piérwszym razie, gdzie ramié BD przedłużóné spotyká okrąg w punkcie E. kąt ADB, równá się summie kątów: BCD, CBD, a kąt CBD obeymuie swémi ramionami

łuk EC, który też łuk zawarty iest między przedłużéniami ramión AD, BD, kąta ADB.

W drugim razie, gdzie ramié BD przeciná okrąg w punkcie E: kąt ADB mnieyszy iest od kąta ACB, w odcinku, kątém CBD; któryto kąt CBD obeymuie swémi ramionami łuk CE, a tén łuk CE, mnieyszy iest od łuku AB, obiętego od tychże ramión AD, BD, kąta ADB.

193. *Uwága* 2. Na okręgu koła znáyduią się té wszystkié punkta, od których poprowadziwszy dwie liniie do dwóch punktów danych, kąt między dwiéma témi liniiami zawarty, iednakowy zawsze będzie, toiest, okrąg koła iest *mieyscém* (Locus) tych wszystkich punktów.

194. *Defin.* Kąt zawarty między styczną z kołém i między ciénciwą przez punkt dotknięciá prowadzoną, nazywá się *kątém odcinka.*

195. *Twiérdz.* 8. *Kąt odcinka*, równá się kątowi *w odcinku na przemián.*

Niech będzie ABD kąt odcinka, między BD, T. II. styczną z kołém, i BA, ciénciwą przechodzącą Fig. 3. przez B, punkt dotknięciá. Tén kąt równy iest kątowi którémukolwiek w odcinku na przemián, naprzykład kątowi BEA, którégo iedno ramié BE iest śrzednicą do punktu dotknięciá B, poprowadzoną.

Dowodz. Kąt EBD między śrzednicą EB, i styczną BD, zawarty, iest prosty (185) toiest summa kątów: ABE, i ABD, czyni kąt prosty.

Kąt A w półkole iest też prosty (159) więc summa kątów ABE, AEB, w tymże samym Tróykącie równá także będzie kątowi prostému. A zatém kąt ABE tak z kątém AEB, iak i z kątém ABD, czyni kąt prosty. Muszą tedy równé bydź kąty AEB, i ABD, kiedy przydany każdy z osobna do kąta ABE, czyni równą summę.

196. *Zagádn:* 4. Na lini danéy zrobić od-

cinek koła, w którym odcinku zmieściłby się kąt dany.

T. 11. Fig. 5. Niech będzie linią AB, na któréy zrobićby trzeba ten odcinek.

Rozwiązanie. Od punktu B, prowadzę linią BD, czyniącą kąt dany z linią daną BA. Od tegoż punktu B, wyprowádzám prostopadłą do BD, a od punktu A, drugą prostopadłą do AB. Punkt E, przecięciá tych dwóch prostopadłych, wyznaczy mi wielkość śrzednicy BE, należącéy do tego koła, w którégo odcinku má się mieścić kąt dany.

Albo też: Od śrzodka linii danéy AB, prowadzę Prostopadłą, która przetnie linią BE, w punkcie maiącym służyć za śrzodek koła, w którém będzie odcinek żądany.

Zamiást robiéniá kąta ABD, równégo danému, możnaby zrobić kąt ABE, dopełniaiący kąt dany do 90 stopniów, toiest, czyniący z nim razém kąt prosty.

197. *Zagád*: 5. Maiąc dané koło, oddzielić od niego odcinek, w którymby się zmieścił kąt dany.

Rozwiąz: Od punktu którégokolwiek na okręgu koła danégo, ciągnę styczną, a przez punkt dotknięciá prowadzę ciénciwę czyniącą kąt dany z styczną. Ta ciénciwa oddzieli w kole odcinek żądany.

198. *Zagádn*: 6. W koło dané wpisać (*inscribere*) Tróykąt, któryby miał kąty wszystkie równé kątóm Tróykąta danégo.

Rozwiąz: 1. Pociągnąwszy styczną przez którykolwiek punkt okręgu koła, przez téżże punkt prowadzę dwie ciénciwy po prawéy i po lewéy ręce, czyniące dwa kąty równé kątóm Tróykąta danégo. Liniiá trzeciá łączącá końce tych dwóch ciénciw, będzie trzecim bokiém Tróykąta, którégo kąty wszystkie równé będą kątóm Tróykąta danégo.

Rozwiąz: 2. Tróykąt dany opisuię (*circum-*

scribo) kołém, i do trzech wiérzchołków kątów, prowadzę od śrzodka trzy promiénie. Od tegoż samégo śrzodka, kréślę koło, promiéniém koła danégo. Punkta, w których okrąg tego drugiégo koła, przecinać będzie promiénie trzy piérwszégo, będą wiérzchołkami kątów Tróykąta, którégo szukám.

199. *Zagádn*: 7. Maiąc dany Tróykąt, wpisać weń koło, toiest nakréślić takié koło, któréby się dotykało trzech boków tego Tróykąta.

Rozwiąz: Śrzodek tego koła, ponieważ iednakowo má bydź odległy, od wszystkich trzech boków Tróykąta danégo, musi się gdzieś znáydować na linii dzielącéy kąt którykolwiek Tróykąta na dwie równé części: gdyż téy linii odległość punktów wszędzie będzie równá od dwóch boków Tróykąta iéy przyległych: podzieliwszy na dwie równé części, i drugi kąt Tróykąta drugą liniią; tam gdzie ta drugá liniiá przetnie piérwszą, będzie śrzodek koła, którégo szukámy: bo tén punkt przecięciá będzie iednakowo odległy od wszystkich trzech boków Tróykąta danégo.

200. *Zagádn*. 8. Maiąc dané koło, opisać na niém (*circumscribere*) Tróykąt, któryby miał kąty wszystkié równé kątóm Tróykąta danégo.

Rozwiąz. 1. W Tróykąt dany wpisuię koło; i do Punktów trzech dotknięciá, prowadzę trzy promiénie. Od tegoż samégo śrzodka kréślę drugié koło, promiéniém koła danégo Punkta, w których okrąg tego drugiégo koła przecinać będzie promiénie trzy pierwszégo, albo ich przedłużéniá oznaczą trzy punkta dotknięciá trzech boków Tróykąta, którégo szukám.

Rozwiąz: 2. W czworokącie, który się zrobi z dwóch promiéni koła danégo, i ze dwóch stycznych z kołém w końcach tychże promiéni, kąty dwa między témi promiéniami i stycznémi będą proste, a zatém kąt iedén między dwiéma

stycznémi, i drugi kąt między dwoma promieniami, będą razém wzięte, równe dwóm kątom prostym (85). Stąd wypádá wykréślénié następuiącé.

Prowadzę promień iedén w kole daném: po obudwóch stronach tego promiénia, prowadzę dwa insze czyniącé z piérwszym dwa kąty, równé kątom dwóm dopełniaiącym dwa którékolwiek kąty Tróykąta, do 180 stopniów, toiest, równé dwóm kątom przyległym (14) do dwóch którychkolwiek kątów tegoż Tróykąta. Przez końce tych trzech promiéni przeciągám trzy styczné, té zrobią Tróykąt żądany.

ROZDZIAŁ VIII.

Wstęp do Proporcyi przez przykłady Jeometryczné, z przystósowaniém w szczególności do Tróykątów podobnych, a w ogólności do inszych Figur prostokréślnych także podobnych.

Dotąd uważaliśmy tylko wielkość różnych Ilości i Figur, co do przystáwaniá iednych do drugich, czyli do ich równości. Teráz téż samé ilości porównywać z sobą będziémy w sposób ogólnieyszy.

201. *Uwági.* Widzieliśmy, że dwa równoległoboki, które miały iednakową podstawę i wysokość były równé. Weźmy teráz dwa równoległoboki z równą wysokością, ale z nieiednakową podstawą, i obáczmy coza różnica wypadnie między témi dwoma równoległobokami, z przyczyny nierówności ich Podstáw.

Ieżeli Podstawa iednégo z tych równoległoboków, dwa, trzy, cztéry, i t. d. razy, większá będzie od podstawy drugiégo; dá się podzielić tén piérwszy równoległobok, na dwa, trzy, czté-

ry, i t. d. równoległoboki równé między sobą, i z drugim równoległobokiém: ponieważ wszystkié iednakowé mieć będą wysokości, i podstawy; a zatém tén piérwszy równoległobok będzie dwa, trzy, cztéry, i t. d. razy większy od drugiégo.

Gdyby podstawa piérwszégo równoległoboku nie zamykała w sobie kilka zupełnie razy podstawy drugiégo równoległoboku, naprzykład, gdyby ta piérwszá podstawa, miała w sobie 4, 5, 7, i t. d. takich części, iakich podstawa drugá má 3; możnaby tę piérwszą podstawę podzielić na 4, 5, 7, i t. d. części równych między sobą, i równych także każdéy z 3 części drugiéy podstawy: a zatém, iako liczby ukazuiące wielkość podstawy piérwszégo równoległoboku względém podstawy drugiégo, są: 4, 5, 7, i t. d. i 3; tak téż liczby ukázuiące wielkość piérwszégo równoległoboku względém drugiégo, są: 4, 5, 7, i t. d. i 3. Albo, iako podstawa piérwszégo równoległoboku, zamyká w sobie podstawę drugiégo tylé razy, ilé oznáczaią liczby ułomkowé: $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, i t. d.; tak téż piérwszy równoległobok zamyká w sobie drugi, tylé razy, ile oznáczaią té samé liczby ułomkowé: $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, i t. d.

Podobnie gdy dwa Tróykąty maią równé wysokości, a nierównè podstawy, ieżeli podstawa piérwszégo Tróykąta zawiérać w sobie będzie podstawę drugiégo, dwa, trzy, cztéry i t. d. razy; to téż powiérzchniá tego piérwszégo Tróykąta, będzie dwa, trzy, cztéry i t. d. razy większá od powiérzchni drugiégo. Toż mówié, gdy podstawa iednégo Tróykąta, zamiást zawiérać w sobie kilka zupełnie razy podstawę drugiégo, będzie się tylko składała z kilku takich części równych, z iakich się składá i podstawa Tróykąta drugiégo. I tak ieżeli podstawy obudwóch Tróykątów zamykaią w sobie, iedna 4, a drugá 5, takichże równych części; té téż dwa Tróykąty zamykać będą iedén 4, a drugi 5, równych między so-

bą Tróykątów maiących wysokość iednakową z wysokością niepodzielonych Tróykątów, a za podstawę, część iednę tylko podstawy tamtych Tróykątów. A zatém, iako podstawa piérwszégo Tróykąta iest $\frac{4}{5}$ podstawy drugiégo; tak téż i powiérzchniá piérwszégo Tróykąta będzie $\frac{4}{5}$ powiérzchni drugiógo.

Dwa kąty maiące swoié wiérzchołki we śrzodku tego saméjo koła, albo kół równych, i obeymuiące ramionami swémi łuki równé, są równé (174).

Ieżeli tedy z dwóch kątów we śrzodku kół równych, iedén wspiérá się na łuku, dwa, trzy, cztéry i t. d. większym, niżeli iest tén na którym wspiérá się kąt drugi; można tamtén kąt większy podzielić na dwa, trzy, cztéry i t. d. kątów równych sobie i kątowi drugiému. Toż samo mówić można gdy dwa łuki nie zupełnie się zamykaią iedén w drugim. I tak ieżeli iedén z tych łuków może bydź podzielony na 4 równé częśći, a drugi na 3 takiéż częśći; dwa kąty, któré się wspiéraią na tych łukach, mogą się podzielić, iedén na 4, a drugi na 3 kąty równé między sobą.

Toż samo przystósować można i wycinkóm w kołach równych, względém łuków, któré ramionami swémi téż wycinki obeymuią.

W takich szczególnych razach, szukano, ilékroć dwie iakié ilości iednakowégo gatunku, naprzykład dwie liniie, dwa łuki, koła, zamykały się iedna w drugiéy, i znaydowano, że tylékroć i inszé dwie ilości iednakowégo także gatunku zamykały się iedna w drugiéy, naprzykład: dwa Równoległoboki, dwa Tróykąty, dwa wycinki i t. d.

202. *Definicye.* Gdy dwie iakié ilości do siebie przyrównywámy, abyśmy wiedzieli, ilé razy iedna zamyká w sobie drugą; takié przyrównywanié nazwać można stósunkiém Jeometrycznym

(*Ratio Geometrica*) albo bez przydatku stósunkiém tych dwóch ilości. Piérwszy wyráz ilości, którą do drugiéy stósuiémy, zwać będziémy *Poprzednikiém* stósunku (*antecedens rationis*); Drugi zaś wyráz ilości téy, do któréy przyrównywámy ilość piérwszą, nazwiémy *Następnikiém* (*consequens*) stósunku. To, co z tego przyrównaniá wynika, nazwać można *Wykładnikiém* stósunku (*exponens rationis*). Dwa stósunki nazywaią się równémi, gdy równémi są ich wykładniki.

203. *Uwága.* Z tych samych Definicyy widzimy, że wyrazy stósunku Jeometryczného, nié mogą bydź tylko iednakowégo gatunku, gdyż nié można do siebie przyrównywać, tylko ilości iednakowégo gatunku; a stąd dwa wyrazy stósunku tego, zawsze w liczbach mieć możémy, z których iedna tylé razy zamykać w sobie drugą będzie; ilé razy ilość przyrównywać się maiącá, zamyká w sobie drugą ilość tegoż gatunku, do któréy ią przyrównywámy. Przeto stósowanié takié uważać można iak dzielénié liczebné biorąc za liczbę podzielną poprzednika stósunku, za liczbę dzielącą następnika stósunku, a za wieloráz wykładnika tegoż stósunku. Wykładnik tedy iedno będzie, co ułomek, którégo Licznikiém Poprzednik, a mianownikiém Następnik stósunku.

204. Gdy się cztéry ilości takié znáyduią, że stósunek dwóch piérwszych, równy iest stósunkowi dwóch drugich; takié cztéry ilości czynią *Proporcyą Jeometryczną*, albo bez przydatku, *Proporcyą*; i mówimy, że tak się má Poprzednik piérwszégo stósunku, do swégo Następnika, iak się má Poprzednik drugiégo stósunku do swégo także Następnika. I tak, przypádki szczególné, któréśmy za przykład wyżéy przytoczyli, takby mogły bydź wyrażoné.

Ieżeli dwa Równoległoboki iednakową maią wysokość, powiérzchniá iednégo z nich, tak się

będzie miała do powiérzchni drugiégo; iak się má podstawa piérwszégo, do podstawy drugiégo. Ieżeli dwa Tróykąty iednakową maią wysokość, powiérzchniá iednégo Tróykąta, tak się má do powiérzchni drugiégo Tróykąta; iak się má podstawa piérwszégo do podstawy drugiégo.

Ieżeli dwa kąty we śrzodku dwóch równych kół znáyduią się: iedén z tych kątów, tak się mieć będzie do kąta drugiégo; iak się má łuk obięty od ramión piérwszégo kąta, do łuku obiętégo od ramión drugiégo kąta.

Ieszcze i tak możnáby té samé podaniá wyrazić: Dwa równoległoboki iednakowéy wysokości tak się maią do siebie, iak ich podstawy.

Dwa Tróykąty iednakowéy wysokości, tak się maią do siebie, iak ich podstawy.

Dwa kąty we śrzodku kół równych tak się maią do siebie, iak dwa łuki, na których się wspiéraią. Toż mówić i o wycinkach kół równych.

Nakoniec ieszcze krócéy zwykły się czasém wyráżáć podobné podaniá, zamykaiąc całą proporcyą w dwóch tylko na oko wyrazach, i to ieszcze znaczących ilości odmiénnégo gatunku. *Wiele na tém zawisło, aby Uczniowie znali się dobrze na takowych wyrazach często używanych.*

Mówi się naprzykład, że powiérzchniá równoległoboku, któ égo wysokość iest *iednostayná* (constans) proporcyonalną iest do swoiéy podstawy.

Tu się opuszcá wyráz drugiégo równoległoboku, który także wchodzi w porównanié, i iego podstawy; ale się wyrazów tych domyślać trzeba. Dlá tego się zaś opuszczaią, że tén drugi równoległobok równéy z piérwszym wysokości bydź mniémámy, i iednostaynéy, toiest nieodmiénnéy podstawy, a zatém i powiérzchni. Będzie tedy piérwszy równoległobok tym większy albo mnieyszy względém drugiégo równoległoboku opuszczonégo; im podstawa piérwszégo większá lub mnieyszá iest od podstawy drugiégo.

Tak, niech piérwszy równoległobok má wysokości 3 łokci, równie iak i drugi; ieżeli tén drugi równoległobok mieć będzie podstawę łokci 4, zawsze iednostayną i nieodmiénną, a zatém i iednostayną powiérzchnią 12 łokci kwadratowych; piérwszy równoległobok tym większy lub mnieyszy będzie od drugiégo, toiest, tym większą lub mnieyszą mieć będzie powiérzchnią od drugiégo; im większą lub mnieyszą dámy mu podstawę od drugiégo. Dáwszy mu naprzykład podstawy 8 łokci, będzie powiérzchniá iego 24 łokci kwadratowych, dwa razy większá od powiérzchni drugiégo równoległoboku: dáwszy mu podstawy 2 łokci, będzie powiérzchniá iego 6 łokci kwadratowych, dwa razy mnieyszá od powiérzchni tegoż równoległoboku, i t. d. Gdy tedy tén piérwszy równoległobok, albo powiérzchniá iego, tyle się tylko powiększá lub pomnieyszá względém powiérzchni drugiégo równoległoboku, ile się powiększy lub pomnieyszy podstawa iego względém podstawy drugiéy iednostayney; dosyć iest więc powiedzieć w takim razie, że powiérzchniá tego równoległoboku, któréy wysokość iednostayná, proporcyonalną iest do swoiéy podstawy, toiest, gdy podstawa dwa razy naprzykład większá będzie, powiérzchniá téż większá będzie dwa razy: gdy tamta dwa razy mnieyszá, to i ta, i t. d.

205. Niech będą cztéry ilości oznaczone przez ABCD, które do siebie stósować można; zgodzono się: aby stósunek tén wyrazić kształtem następuiącym A:B=C:D: co się tak wymáwiá: A, tak się má do B, iak się má C, do D. Dwa punkta umieszczone między dwoma wyrazami każdégo w szczególności stósunku znakiém są dzieléniá iednégo wyrazu przez drugi: dwie zaś linii w pośrzodku znaczą równości dwóch stósunków.

206 *Wnioski.* Z tych *zasád* (principium) któréśmy o proporcyach założyli, wynikaią następuiące podaniá.

1. Ieżeli dwa stósunki są równé trzeciému; równé téż i sobie będą.

2. Ieżeli w dwóch Proporcyach trzy piérwszé wyrazy w jednéy, równé są trzém piérwszym wyrazóm w drugiéy; to i czwárté wyrazy równé téż będą.

3. Stósunek między dwiéma ilościami ténże sám iest, co i między témiż ilościami podwoionémi, potroionémi i t. d. Tak naprzykład 4 má się do 2, iak 8 do 4, albo iak 12 do 6 i t. d. Ztąd wynikà, że można podzielić, albo rozmnożyć przez iednakową liczbę dwa piérwszé lub dwa ostatnié wyrazy Proporcyi, nie naruszaiąc przeto proporcyi między témiż czterema wyrazami.

4. Można także podwoić, potroić, i t. d. obadwa Poprzedniki, albo obadwa Następniki, a proporcyá wszelako będzie zachowaná. W piérwszym razie wykładnik stósunków, stanie się dwa, trzy, i t. d. razy większym, niż był z początku: w drugim zaś razie będzie tylko połową, trzecią częścią; i t. d. Wykładnika piérwszégo.

5. W téyże saméy proporcyi, można odmiénić mieyscé obudwóm Poprzednikóm, to iest, położyć tam Poprzedniki, gdzie były Następniki, a Następniki tam, gdzie były Poprzedniki; równość iednak i po téy odmianie zachowaná będzie między dwoma stósunkami téyże proporcyi. I tak naprzykład w téy Proporcyi: 4: 2 = 12: 6, można odmiénić położénié Poprzedników: 4 i 12 i napisać: 2: 4 = 6: 12, wszelako iednak zachowá się Proporcyá: bo iako w piérwszéy proporcyi wykładniki stósunków obudwóch: 4: 2, i 12: 6, były równé, toiest tak, 4 przez 2, iak 12 przez 6, podzielone dawały na wykładnika, albo na wieloráz, 2; tak i drugiéy proporcyi, wykładniki stósunków 2: 4 i 16: 12 są równé; toiest, tak 2, przez 4 iak i 6 przez 12 podzielone, daią na Wykładnika, albo na wieloráz iednakowy ułomek $\frac{1}{2}$. Toż mówić i o po-

dobnéy odmianie w jakiéykolwiek inszéy Proporcyi: co tak można ogólnie przez litery wyrazić:

Ieżeli A: B = C: D.
to téż i B: A = D: C.

6. W proporcyi każdéy można powiedzieć, że summa, albo różnica dwóch piérwszych wyrazów, tak się má do iednégo z tych dwóch wyrazów, iak się má summa albo różnica dwóch drugich wyrazów, do iednégo z tychże wyrazów. Naprzykład ieżeli 4: 2 = 12: 6, to téż będzie 6: 2 = 18: 6, albo 6: 4 = 18: 12, albo 2: 4 = 6: 12.

Iakoż ieżeli każdą Poprzednika i Następnika summę lub różnicę stósuiémy do następnika iéy własnégo; Wykładnik każdégo w szczególności stósowaniá powiększy się lub pomnieyszy iednością, a zatém równy będzie w obudwóch stósunkach i po takiéy odmianie.

Ieżeli zaś każdą Poprzednika i Następnika summę lub różnicę stósuiémy do Poprzednika iéy własnégo, iedno czynimy, iak gdybyśmy piérwéy poprzednika każdégo za następnika położyli, a potém dopiéro, summę lub różnicę ich stósowali do następników, tak iak wyżéy; a zatém tąż częścią pomnoży się lub zmnieyszy wykładnik piérwszégo stosunku, iak i drugiégo.

Wyrażénia literalné tegoż samégo.

Ieżeli A: B = C: D.
to téż A + B: B = C + D: D
A — B: B = C — D: D
A + B: A = C + D: C
A — B: A = C — D: C.

Gdyby Następniki większé były od swoich Poprzedników, naprzykład B od A, i D od C; tę proporcyą A: B = C: D możnaby w tę zamiénić B: A = D: C. a zatém

B — A: A = D — C: C
B — A: B = D — C: D.

7. Gdy w Proporcyi, cztéry wyrazy iednégo są gatunku, toiest, gdy wszystkié znaczą np. liniie, lub powiérzchnie i t. d. można powiedzieć, że summa dwóch Poprzedników, tak się má do summy dwóch Następników; iak się má którykolwiek poprzednik do swégo następnika.

Iakoż, ieżeli iedén Poprzednik zamyká naprzykład dwa, trzy i t. d. razy swégo Następnika, i drugi téż Poprzednik, tylé razy następnika swégo zamykać w sobie będzie; a zatém i summa Poprzedników, tylé téż razy zamykać będzie summę następników. Przeto summa Poprzedników tak się mieć będzie do summy następników; iak każdy w szczególności Poprzednik do swégo Następnika. To samo rozumowanié przystósować można do różnicy dwóch Poprzedników i do różnicy dwóch Następników, i do więcéy iak dwóch równych stosunków.

Wszystkié té odmiany na wielu przykładach liczebnych obiaśnić należy.

207. *Uwága.* Dadzą poznać Nauczyciele Uczniom swoim, że *Reguła trzech*, iest pewnym gatunkiém proporcyi, w któréy z trzech wyrazów znaiomych, szukámy czwártégo nieznaiomégo: co samo na przykładach iakich rachunkowych pokázać trzeba. Mnożénié nawet i dzielénié, do proporcyi przyrównać można: bo w mnożéniu liczby, mnożna i mnożącá, są śrzedniémi wyrazami proporcyi, iedność iest piérwszym wyrazém proporcyi, a liczba rozmnożoná iest ostatnim wyrazém. I tak naprzykład: $4 \times 3 = 12$, rozłożyć można na proporcyą następuiącą $1 : 4 = 3 : 12$. W dzieléniu zaś, liczba dzielącá i wieloráz są śrzedniémi wyrazami proporcyi; iedność iest wyrazém piérwszym, a liczba podzielná iest ostatnim wyrazém. I tak, naprzykład, $\frac{8}{4} = 2$, albo $8 : 4 = 2$, rozłożyć można na proporcyą następuiącą $1 : 4 = 2 . 8$. Więcéy iescze takowych przykładów podadź nie zawadzi.

208. *Twiérdzénié* 1. *fundaméntalné.* Gdy

w Tróykącie iakimkolwiek bok iedén przedłużaiąc go powiększymy dwa, trzy, cztéry, pięć i t. d. razy, i przez końce takiégo przedłużénia poprowadzimy równoległé od boku drugiégo aż do boku trzeciégo także przedłużonégo; zrobią się tym sposobém Tróykąty, których i inné dwa boki większé téż będą od boków piérwszego Tróykąta, dwa, trzy, cztéry, pięć i t. d. razy.

Niech naprzykład będzie Tróykąt ABC, któ- Tá. 11.
régośmy bok AB, tak przedłużyli, aby liniiá AD, *Fig.* 4.
dwa razy była większá od AB. Przez D, poprowadziwszy DH równoległą od BC; Liniiá DH, dwa razy téż większá będzié od linii BC, a liniiá AH, dwa razy większá od linii AC.

Wykréślénié. Przez punkt C poprowádźmy CN równoległą od AB, którąby spótkała w punkcie N, liniią DH.

Dowodz: Czworokąt BDNC, iest równoległobokiém; więc boki w nim przeciwné są równé, toiest, BC = DN, a BD = CN: a że BD = AB; więc i CN = AB. Kąty iednostronné A, i NCH są równé, iako téż i kąty iednostronné ACB, AHD: a zatém Tróykąty ACB, CHN dlá równości kątów wszystkich i boków AB, CN równych, mogą przystać do siebie, i będzie AC = CH, a tém samém AH = 2 AC, toiest, liniiá AH dwa razy większá od AC. Iest téż i EC = NH, a tém samém DH = 2 BC, toiest, liniiá DH dwa razy większá od BC. Weźmy znowu Liniią AE trzy razy większą od AB, i poprowádźmy EI równoległą od BC. Podobnie, iak wyżéy, dowiéśdź będzie można, że téż liniiá EI trzy razy iest większá od BC, a AI trzy razy większá od AC: co się łatwo okáże pociągnąwszy liniią HO równoległą od AE: bo dlá równości kątów wszystkich, i boków AB, HO, Tróykąty ABC, HOI przystaną do siebie, a zatém AC = HI, i BC = OI. A że EO = DH, a DH = 2 BC = 2 OI, więc EO = 2 BC, a zatém EI = 3

BC. Tak też i AI = AH + HI = 2 AC + HI = 3 HI.

Tymże sposobem dowodzi się, że ieżeli liniiá AF, cztéry razy będzie większá od linii AB; Liniiá téż FL równoodległá od BC, cztéry razy od niéy większá będzie, i liniiá AL, cztéry także razy większá od AC, i t. d.

209. *Zagádn:* 1. Podzielić daną liniią na ilékolwiek części równych.

Niech naprzykład będzie liniiá daná AG, którą podzielić mámy na 5 części równych.

Rozwiązanié. Od końca iednégo, naprzykład A, linii danéy AG, prowadzę drugą liniią AM, iakiéykolwiek długości, czyniącą z liniią daną, kąt iaki mi się podobá. Od A ku M, biorę tylé części równych na linii AM, na ilé ich má bydź podzieloná liniiá AG; tu naprzykład biorę 5 części równych. Punkt M, Linii AM, gdzie się ostatniá część podziáłu kończy, łączę liniią MG z punktém G, Linii danéy AG. Przez inszé podziáłu punkta: L, I, H, C, prowadzę równoodległé od linii MG, do linii AG. Té równoodległé: LF, IE, HD, CB, wraz z liniią MG przecinać będą liniią daną AG w punktach podziáłu żądanégo.

Podobnym sposobém postąpić sobie trzeba, gdy na więcéy lub mniéy części podzielić przypadnie liniią daną.

Dlá większéy łatwości, w prowadzéniu równoodległych, można użyć następuiącégo sposobu, zwłászcza gdy na wielé równych części przypádá dzielić liniią daną.

T. 11. *Fig.* 5. Chcąc naprzykład podzielić liniią AB na 5 równych części, prowadzę od końca iéy iednégo A liniią AC pod iakimkolwiek kątém, i od drugiégo końca B, prowadzę liniią BD, od piérwszéy równoodległą. Dzielę od punktu A liniią AC, na pięć iakichkolwiek równych części i na takiéż pięć równych części od punktu B, dzielę liniią BD. Punkta podziáłów równych w obu-

dwóch liniiach, łączę tyląż równoodległémi; té przetną liniią daną AB w punktach podziału żądanégo.

Dowodzénié tego nie różni się od poprzedzaiącégo, gdyż w równoległoboku ACBD, uważać można iedén tylko Tróykąt BAC, lub ABD; a zatém równość części, Linii AB, podobnie się, iak w piérwszém Twiérdzéniu dowiedzie 1).

210. *Twiérdz*: 2. Dwa Tróykąty równokątné, maią proporcyonalné boki przeciwné kątóm równym.

Niech będą dwa Tróykąty AGM, i abc, w któ-Tá. 11. rych kąty A i a, G i b, M i c są równé. Niech *Fig.* 4. naprzykład bok AG, będzie pięć razy większy *i* 6. od boku ab; będzie téż i bok AM, pięć razy większy od boku ac, i bok GM, pięć razy także większy od boku bc.

Iakoż odciąwszy liniią AB, równą linii ab, i AC, równą ac, i pociągnąwszy liniią BC, Tróykąty ABC, abc, będą mogły przystać do siebie, a w szczególności kąty B i b, C i c będą równé. A że téż kąty G i b, M i c są równé; więc równé także są i kąty G i B, M i C; a zatém liniie BC, GM będą równoodległé. Przeto według piérwszégo Twiérdzéniá, ieżeli AG iest pięć razy większá od AB, czyli od ab; będzie téż i AM pięć razy większá od AC, czyli od ac, i GM pięć razy większá od BC, czyli od bc. Toż samo mówićby się mogło, gdyby dwa boki Tróy-

1) Rozwięzuiąc tymże podobné Zagádnieniá, niechay nie przestaią Uczniowie na Figurze podanéy, ale niech sami kreślą sobie podobną Figurę, i na niéy rozwięzuią Zagádnienié. Figura podaná niech im tylko służy do łatwieyszégo w czytaniu zrozumienia Propozycyi, którą gdy iuż dobrze zrozumieią; niechay, zamknąwszy nawet Xiążkę, na Figurze osobnéy od nich nakréślonéy pokażą Nauczycielóm, że to, co czytali, dokładnie zrozumieli, i umieią się dobrze wytłumaczyć.

kątów, przeciwné równym kątóm nie pięć, ale mniéy lub więcéy zupełnych razy w sobie się zamykały.

Gdyby zaś dwa boki w dwóch Trójkątach, przeciwné kątóm równym, nie zamykały się zupełnie iedén w drugim, ale iedén naprzykład z tych boków miał w sobie 7 takich równych części, iakich drugi má tylko 3; w takim razie inszé też boki równym kątóm przeciwné, w tychże Trójkątach nie zamykałyby się zupełnie iedén w drugim, ale iedén składałby się z 7 takich części, z jakich 3 składá się drugi. Tak na *Figurze* 7, gdzie Trójkąty ABC, abc, są równokątné i bokóm AB, ab, taká długość daná, żeby bok AB, zamykáł w sobie 7 części równych linii AD, a bok ab, takiéż miał 3 tylko części równé linii AD, albo ad; w tych Trójkątach poprowadziwszy liniie DE, de, równoodległé od BC, bc; boki AC i ac, mieć też będą piérwszy 7, drugi 3 części równé linii AE, albo ae, a boki BC i bc, zamykać także będą piérwszy 7, a drugi 3 części równé linii DE, albo de. Toż mówić, gdyby boki dwóch Trójkątów, przeciwné kątóm równym, więcéy lub mniéy części równych w sobie zamykały.

211. *Przestroga.* W dwóch Trójkątach równokątnych, których boki porównywać z sobą mámy, dobrze iest wiérzchołki kątów równych naznáczać podobnémi literami: naprzykład, gdy nad wiérzchołkiém kąta w jednym Trójkącie napiszémy literę A, napiszmy i nad wiérzchołkiém kąta równégo piérwszému w drugim Trójkącie literę a: gdy nad drugim kątém, w piérwszym Trójkącie będzie B, niech i nad drugim kątém równym tamtému w drugim Trójkącie będzie b, i t. d. Tym sposobém i boki przeciwné równym kątóm w obudwóch Trójkątach, będą podobnémi też literami naznaczoné: a zatém, gdy w Proporcyi weźmiémy naprzykład boki AB, ab, za Poprzedniki stósunku, za Na-

stępniki wziąć będzie potrzeba boki AC, ac, albo BC, bc, i dlá tego wszystkié té proporcye będą dobré: AB: ab = AC: ac. AB: ab = BC: bc, albo AC: ac = AB: ab. BC: bc = AB: ab, albo AC: ac = BC: bc, albo BC: bc = AC: ac.

212. *Twiérdz:* 3. Ieżeli we dwóch Tróykątach, kąty dwa którékolwiek są równé i boki dwa około każdégo z tych kątów proporcyalné; takié Tróykąty będą równokątné.

Niech będą dwa Tróykąty ABC, abc, i w tych kąty A i a równé, boki zaś AB, ab, i AC, ac, około tych kątów proporcyonalné, toiest, niech się má tak AB do ab, iak AC do ac, czyli AB: ab = AC: ac. W takim razie będą téż równé kąty B, b, i kąty C, c, a zatém i stósunek boków BC, bc, będzie tén sám, co i boków AB, ab, albo AC, ac.

Wykréślénié. Na boku AB, weźmy liniią AD, T. 12. równą ab, i poprowádźmy DE równoodległą od *Fig.* 1. BC, i spotykaiącą AC w Punkcie E.

Dowodz: Tróykąty ABC, ADE, są równokątné; więc (iako się w drugim Twiérdzéniu dowiodło) AB: AD (albo ab) = AC: AE. A że AB: ab = AC: ac, więc AE = ac: a zatém Tróykąty ADE, abc mogą przystać do siebie: że zaś Tróykąty ABC, ADE, są równokątné; więc równokątné także będą i Tróykąty ABC, abc, a zatém, AB: ab = BC: bc.

213. *Twiérdz:* 4. Ieżeli w dwóch Tróykątach, trzy boki w jednym są proporcyonalné względém trzech boków w drugim, takié Tróykąty będą równokątné.

Niech będą dwa Tróykąty: ABC, abc, i boki w nich proporcyalné, tak, że AB: ab = AC: ac, i AB: ab = BC: bc, té dwa Tróykąty są równokątné.

Wykréślénié. Weźmy liniią AD równą linii ab, i poprowádźmy DE równoodległą od BC.

Dowodz: Tróykąty ABC, ADE są równokątné, więc AB: AD (albo ab) = AC: AE.

A że też iest AB: ab = AC: ac

więc - - AE = ac

Podobnie AB: AD (albo ab) = BC: DE

A że też iest, AB: - - ab = BC: bc

Więc - - - DE = bc

A zatém dwa Tróykąty ADE, abc, wszystkié trzy boki maią sobie równé, i dlá tego mogą przystać do siebie, i są równokątné. A że też są równokątné i Tróykąty ABC, ADE, więc równokątné także będą Tróykąty ABC, abc.

214. *Twiérdz:* 5. Niech będą dwa Tróykąty maiące kąt iedén prosty, roztwarty, lub ostry równy w obudwóch Tróykątach, i niech stósunek ramión przy tych kątach będzie równy stósunkowi boków przeciwnych tymże kątóm. Té dwa Tróykąty będą równokątné, byleby w trzecim przypádku, boki przeciwné kątowi ostrému większé były w obudwóch Tróykątach, niżeli ramiona po iednéy lub po drugiéy stronie przyległé témuż kątowi: albo, chociaż té boki przeciwné mnieyszé będą od ramión, byleby inszy kąt w obudwóch Tróykątach był roztwarty, lub ostry, który iedno ramié, má spólné z kątém piérwszym, równym w obudwóch Tróykątach. Niechby naprzykład były dwa Tróykąty: ABC, abc, w których kąty A i a, równé, i stósunek ramiénia AC do ac, taki, iaki boku BC, do bc.

Tá. 12. Té dwa Tróykąty będą równokątné.

Fig. 2. 1. Gdy kąty A i a, obadwa są prosté.

Fig. 3. 2. Gdy kąty A i a, obadwa są roztwarté.

Fig. 4. 3. Gdy kąty A i a obadwa są ostré, ale boki BC, bc, większé od ramión AC, ac.

Gdy kąty A i a, obadwa są ostré, ale boki BC, bc, mnieyszé od ramion AC, ac: i kąty B i b, obadwa ostré, *Fig. 5*, albo obadwa roztwarté *Fig. 6.*

Wykréślénié powszechné. Weźmy liniią AD, równą ac, i poprowádźmy DE równoodległą od BC.

Dowodz: Tróykąty ACB, ADE są równokątné;

Więc AC: AD (albo ac) = BC: DE

Ale téż iest AC: ac = BC: bc

więc DE = bc

A zatém dwa Tróykąty ADE, acb, mogą przystać do siebie, i są równokątné: a że téż i Tróykąty ACB, ADE są równokątné; więc równokątné także będą i Tróykąty ACB, acb 1).

215. *Defin:* Gdy w dwóch Figurach prostokréślnych równé się kąty wszystkié znáyduią iedné względém drugich, i boki około tych kątów proporcyonalné; takié Figury nazywaią się *Podobnémi* (Figurae similes).

216. *Uwága.* Po przytoczonych dowodzéniach Twierdzéń poprzedzaiących iasnie się pokazuie, że równość kątów w dwóch Tróykątach, pociągá za sobą proporcyonalność ich boków, i wzaiémnie proporcyonalność boków w dwóch Tróykątach wywodzi równość kątów w tychże Tróykątach. W inszych zaś Figurach prostokréślnych, które z więcéy niż trzech boków są złożoné, nié można z równości kątów we dwóch takich wielokątach, wnosić proporcyonalność ich boków, ani wzaiémnie z proporcyonalności boków, wnosić równość kątów. I tak kwadrat prostokątny, z kwadratém ukośnym, lubo maią boki proporcyonalné, nié maią iednak kątów równych. Dwa znowu prostokąty, nie różnią się między

1) Dlá skrócéniá, różné té przypádki w jednem powszechném zamknęło się dowodzéniu; lepiéy iednak będzie każdego z osobna przypádku osobno Uczniom dowodzić, aby wielu razém okoliczności wystawiéniém, báczność ich nie była roztargnioná.

sobą, co do kątów, a iednak boki ich mogą bydź nierówne i wcale nieproporcyonalne.

Trzeba iak nayiaśniey i naydokładniey wyłożyć Uczniom té trzy rzeczy, toiest: *Przystáwanié*, *Równość* i *Podobiéństwo* Figur.

Równość dwóch naprzykład Figur, ściągá się tylko do ich wielkości, nie zaś do ułożéniá boków, albo granic w których się zamykaią. I tak dwa Tróykąty, które równé podstawy maią, i wysokości są sobie równé, lubo ich boki, nie iednakowo mogą bydź ułożoné, i większé iedné lub mnieyszé od drugich. Dlá tego téż można znaléźć Tróykąt, lub kwadrat, równy Figurze prostokréślnéy daney, iakąkolwiek liczba iéy boków będzie, i tychże boków ułożénié.

Podobiéństwo ściągá się tylko do saméy Figury czyli ułożéniá boków, nie zaś do wielkości. Dwie Figury, naprzykład dwa Tróykąty mogą bydź do siebie podobné, lubo iedén będzie nader wielki, a drugi nader mały. Lecz aby Figury były podobné, trzeba *1mo.* Aby miały iednakową liczbę boków. *2do.* Aby kąty w jednéy Figurze były równé kątóm w drugiéy. *3tio.* Aby *boki odpowiadaiącé* (latera correspondentia) toiest, té, które zamykaią w sobie kąty równé, były proporcyonalné. I tak dwa kwadraty zawsze są podobné iedén do drugiégo, chociażby naprzykład bok iednégo był na milę długi, a drugiégo tylko na łokieć, lub na cál.

Przystáwanié zamyká w sobie razém równość i podobiéństwo. Dwie Figury aby przystać do siebie mogły; trzeba aby się w niczém nie różniły, tylko w tém, że na odmiénnych mieyscach są nakréślone 1).

---

1) Przetrząsnąwszy Twierdzéniá ściągaiącé się do równości, i do podobiéństwa Tróykątów, łatwo postrzeżémy, że dowodzéniá tam przytoczoné zupełnie się

217. *Twierd:* 6. Ieżeli dwie iakiékolwiek Figury prostokréślné są podobné, i w każdéy z nich przez wiérzchołki kątów równych, poprowadzimy do drugich kątów, tylé przekątnych, ilé ich poprowadzić można; wszystkie té Tróykąty, na które iednę Figurę podzielimy, będą podobné Tróykątom w drugiéy Figurze. Fi-T. 15. *Fig.* 14.

Przykład: Niech będą dwa Pięciokąty ABCDE, abcde, podobné do siebie; od wiérzchołków A i a, dwóch kątów równych, poprowadziwszy przekątné AC, AD, ac, ad; Tróykąty, ABC, ACD, ADE, będą podobné Tróykątom, abc, acd, ade.

Dowodz: Ponieważ té Pięciokąty są do siebie podobné, kąty w nich B i b, będą równé, i boki około tych kątów proporcyonalné; dwa więc Tróykąty ABC, abc, są do siebie podobné, iako maiące kąty B i b, równé, i boki, około nich proporcyonalné, a w szczególności kąt ACB, równy iest kątowi acb: a że téż równé są dané kąty BCD, bcd; więc i kąty ACD, acd, równé będą. Boki także AC, ac, są między sobą iak boki AB, ab, albo BC, bc. A że tak boki AB, ab, iak i boki, BC, bc, są w proporcyi z bokami DC, dc; więc i boki AC, ac, są proporcyonalné bokóm DC, dc; a zatém i Tróykąty ACD, acd, będą podobné, maiąc kąty C i c równé, i boki około nich AC, DC, ac, dc, proporcyonalné, a w szczególności kąty, ADC, adc, będą równé. A że znowu i kąty E, e, są równé; więc i Tróykąty ADE, ade, będą względém siebie równokątné; a zatém podobné.

---

zasádzaią na tych, któréśmy dáwali mówiąc o przystáwaniu Tróykątów. Wiele na tém zawisło, aby często przypominać Uczniom sposób postępowania, który prowadzi od wyobrażéń prościeyszych, do tych, które bardziéy są zawikłané.

218. *Uwága* 1. Dlá dowiedzénia, że Tróykąty ADE, ade, są podobné, nie trzeba było używać koniecznie proporcyonalności boków AE, ae, DE, de; można nawet było i nie pokazywać wyraźnie równości kątów E, e, z samégo wykréślénia: ponieważ kątów EDA, eda, EAD, ead, mogła bydź równość okázaná, z równości iuż dowiedzionéy kątów ADC, adc, DAC, dac, CAB, cab, w innych Tróykątach: a tém samém równość kątów E, e, wydałaby się, a zatém i podobiéństwo Tróykątów ADE, ade, byłoby dowiedzioné.

219. *Uwága* 2. Wiele na tém zawisło, aby to dadź postrzédz Uczniom, że gdy we dwóch Figurach podobnych złączoné będą przekątnémi wiérzchołki dwóch kątów odpowiadaiących sobie; té przekątné mieć będą iednostayné stósunki, z bokami tych dwóch Figur; a zatém gdy w podobnych Figurach końce dwóch boków odpowiadaiących sobie złączymy przez przekątné; Tróykąty złożoné z tych przekątnych i z dwóch boków należących do tych Figur, będą do siebie podobné.

220. *Zagádn*: 1. Maiąc dané trzy liniie proste, na trzy piérwsze wyrazy proporcyi, znaléźć liniią czwártą proporcyonalną.

Wykréślenié. Zróbmy kąt iakikolwiek. Na dwa ramiona tego kąta, przenieśmy od wiérzchołka iego dwie dané liniie, maiące służyć za dwa piérwsze wyrazy proporcyi. Końce tych dwóch liniy złączmy trzecią liniią. Przenieśmy iescze podobnym sposobém i trzecią daną liniią na to ramié, na które iuż iest przeniesioná piérwszá liniiá proporcyi. Od końca téy trzeciéy linii poprowádźmy aż do drugiégo ramiénia liniią równoodległą od téy, którá złączyła końce dwóch piérwszych liniy. Liniiá zawártá między wiérzchołkiém kąta i punktém, w którym ostatniá równoodległá przecináramié drugié, będzie

czwártą liniią proporcyonalną, któréyśmy szukali 1).

221. *Zagádn.* 2. Maiąc daną liniią prostą, ak ią przeciąć, aby dwa iéy odcinki tak się do siebie stósowały, iak się stósuią dwie inszé dané liniie.

Wykréślénié. Od końca iednégo linii danéy do przecięciá, poprowádźmy pod iakimkolwiek kątém liniią równą iednéy z tych dwóch, których dany iest stósunek, a od drugiégo końca, w stronę przeciwną, poprowádźmy równoodległą od piérwszéy, równą drugiéy linii, któréy także dany iest stósunek.

Złączmy końce tych dwóch liniy w przeciwné strony poprowadzonych, liniią trzecią, ta przetnie liniią daną w punkcie, którégośmy szukali.

Albo tak. Od końca linii danéy do przecięciá, poprowádźmy liniią, któraby z nią czyniła kąt iakikolwiek. Na tę drugą liniią, od wiérzchołka kąta, przenieśmy iednę z tych liniy, których dany iest stósunek, i od końca znowu téy ostatniéy linii pociągniéymy drugą liniią, równą drugiéy, któréy także dany iest stósunek: koniec téy złączmy z końcém linii danéy do przecięciá: a od tego punktu, gdzie się piérwszá kończyła, a ta drugá zaczynała, poprowádźmy równoodległą, która przetnie liniią daną do przecięciá w punkcie żądanym.

Tén ostatni sposób postępowaniá, może bydź przystósowanym i w innych razach, gdzieby liniią daną na więcéy części przeciąć potrzeba, naprzykład na 3. 4. 5. i t. d. które takby się

---

1) Co w Arytmetyce znaczy *Reguła trzech*, to znaczy w Jeometryi Zagádnienié, aby trzy maiąc dané Liniie proste, znaléźć czwártą proporcyonalną. Iest-to w saméy rzeczy Reguła trzech wykonaná na liniiach.

miały do siebie, iak się maią 3. 4. 5. i t. d. liniy danych 1).

222. *Zagádn.* 3. Przedłużyć liniią daną, tak, aby summa z téy linii i z jéy przedłużéniá tak się miała do samégo przedłużéniá, iak się maią do siebie dwie inszé liniie dané: czyli, znaléźć dwie liniie, których daná iest różnica i stósunek.

Wykréślénié. Od obudwóch końców linii danéy, poprowádźmy w jednę stronę dwie liniie równoodległé, i równé dwóm liniióm, których dany iest stósunek. Przez końce tych równoodległych, przeciągniéymy liniią tak daleko, aż się spotká z przedłużéniém linii danéy. Punkt tén spotkaniá, wyznaczy długość przedłużéniá linii danéy; i odległość iego od dwóch końców téyże linii, będzie wymiarém długości dwóch liniy, którycheśmy szukali.

223. *Zagádn*: 4. Maiąc dany Tróykąt, i liniią osobną, wystawić na téy linii Tróykąt podobny danému.

Sposób 1. Dwóm bokóm Tróykąta danégo, i trzeciéy linii danéy, szukám czwártéy proporcyonalnéy, i mieć będę dwa boki Tróykąta, którégo szukám, w proporcyi z dwoma bokami Tróykąta danégo. Tymże sposobém znáydę i trzeci bok Tróykąta, który má bydź podobny Tróykątowi danému.

Sposób. 2. Od dwóch końców linii danéy prowadzę po iednéy stronie dwie liniie czyniącé z nią dwa kąty równé dwóm kątóm Tróykąta danégo; té dwie liniie zeyściém się z sobą, zrobią z daną liniią Tróykąt podobny danému.

Sposób 3. Liniią daną przenoszę na bok którykolwiek Tróykąta danégo, tak, aby koniec iedén téy linii był na wiérzchołku kąta, a dru-

1) Takié zagádnienié iest tém samém w Jeometryi, czém iest w Arytmetyce *Reguła spółki.*

gi tam, gdzie przypadnie, lub na samym boku Tróykąta, lub za nim, gdy liniiá daná dłuższá będzie od boku Tróykąta. Z końca tego drugiégo, linii danéy, prowadzę równoodległą od boku Tróykąta przeciwnégo kątowi, od którégo piérwszą liniią ciągnąłém, i tak daleko ią prowadzę, aż się zniydzie z trzecim bokiém Tróykąta danégo, przedłużonym, gdy tego będzie potrzeba. Zrobi się tym sposobém Tróykąt podobny danému, i maiący za podstawę liniią równą danéy, któryto Troykąt przerysować potém mogę na saméy linii danéy 1).

224. *Zagád*: 5. Na danéy linii wykréślić iakąkolwiek Figurę prostokréślną podobną Figurze danéy.

Rozwiąz: Na danéy Figurze od końca boku którégokolwiek, prowadzę tyle przekątnych do innych kątów, ile można, i dzielę tak Figurę daną na Tróykąty. Potém na linii danéy wykréślam po iedney stronie sposobém wyżéy opisanym, tyle Tróykątów podobnych, ile ich iest w Figurze danéy. Wiérzchołki tych Tróykątów, będą wiérzchołkami kątów Figury, któréy szukáłém.

225. *Uwága*. Między innémi sposobami rozwiązaniá tego Zagádnieniá, sposób podany zdaie się náylepszym: a to dlá tego, że używaiąc go, uchybiéniá, które popełnić można w położéniu linii, czyli boków Figury, nie zawisły iedné od drugich: i można uchybić w położéniu iedney linii, a nie uchybić tém samém, w położéniu drugiéy: na co osobliwszą báczność koniecznie mieć potrzeba.

226. *Podanié przybrané* (Lemma). W Tróykącie prostokątnym, gdy spuścimy prostopadłą,

1) Częste tego zagádnieniá używanié, było pobudką do podaniá kilku sposobów, którémi bydź może rozwiązané.

od wiérzchołka kąta prostégo; ta prostopadłá podzieli Tróykąt na dwa inszé z piérwszym równokątné, a zatém i równokątne między sobą.

Tá. 13. *Fig.* 2. Niech będzie Tróykąt ABC prostokątny w C, skąd spuszczoná iest prostopadłá CD, na przeciwprostokątną AB; Tróykąty trzy: ABC, ACD, CBD są względém siebie równokątné.

Dowodź: Tróykąty ABC, ACD, maią kąt spólny A, i kąty ACB, ADC prosté, a zatém równé; trzeci przeto kąt w jednym, będzie téż równy trzeciému kątowi w drugim. Są więc obadwa té Tróykąty, równokątné. Podobnie i Tróykąty prostokątné ABC, CBD, maią kąt spólny B, i są także równokątné.

W Tróykątach równokątnych ABC, ACD, mámy proporcyą: AB: AC=AC: AD. w Tróykątach: ABC, CBD będzie, AB: BC=BC: BD; a w Tróykątach ADC, CDB; AD: DC=DC: BD. w Tróykątach ABC, ACD, iest téż i ta proporcyá: AB: BC=AC: CD.

Toiest 1. W Tróykącie prostokątnym, bok iedén iest śrzednim Jeometrycznie proporcyonalnym, między przeciwprostokątną i odcinkiém mu przyległym, który czyni prostopadłá.

2. Wysokość Tróykąta prostokątnégo, iest śrzednią Jeometrycznie proporcyonalną, między dwoma odcinkami przeciwprostokątney.

3. Przeciwprostokątná, dwa boki, i wysokość Tróykąta prostokątnégo, są w proporcyi.

227. *Zagádn:* 6. Między dwiéma danémi liniiami, znaleźć śrzednią Jeometryczną.

Sposób 1. Złączywszy z sobą dwie danė liniie, w jednę liniią prostą; na niéy iako na śrzednicy nakréślmy półkolé, i od punktu złączéniá tych dwóch liniy, wynieśmy prostopadłą aż do okręgu półkoła. Ta prostopadłá będzie śrzednią proporcyonalną, któréy szukámy.

Sposób 2. Na większéy z dwóch danych liniy, iako na śrzednicy nakréślmy półkolé. Na tę samę śrzednicę, od końca iéy iednégo, przenieś-

my drugą mnieyszą liniią daną, a od tego punktu, gdzie się na średnicy kończyć będzie, wynieśmy prostopadłą, aż do okręgu półkoła, i punkt zeyściá się z półkołém złączmy liniią z punktém tym średnicy, od którego przeniesioná była liniiá mnieyszá daná. Ta liniiá łącząca té dwa punkta, będzie średnią proporcyonalną, którey szukámy.

ROZDZIAŁ IX.

O stósunkach powierzchni Figur prostokréślnych w ogólności, a w szczególności o stósunkach Figur podobnych.

228. *Twierdz:* 1. Gdy cztery liniie są w proporcyi Jeometrycznéy; prostokąt z dwóch skraynych, równy iest prostokątowi z dwóch średnich.

To Twierdzénié trzeba naprzód obiaśnić na liczbach: ieżeli cztéry liczby są Jeometrycznie proporcyonalné, dwie skrayné rozmnożoné iedna przez drugą, równé będą dwóm średnim podobnie rozmnożonym. W każdéy albowiém proporcyi Jeometrycznéy równość zachodzi między dwoma stosunkami Jeometrycznémi, toiest: tylé razy piérwszy poprzednik zamykać w sobie powinién swégo następnika; ile razy i drugi poprzédnik zamyká także następnika swégo. I tak naprzykład w téy proporcyi 6:3=8:4, iak 6, zamyká w sobie 3 razy 2, tak i 8, zamyká 4 razy 2. Stąd wynikà, że rozmnożénié skraynych i średnich wyrazów proporcyi, można oznaczyć, przez trzy iednakowé liczby, a tém samém okázać równość wyrazów rozmnożonych, tak skraynych iako i średnich. Naprzykład, ponieważ 21:3=28:4, i równie 21, zamyká w sobie 3, iak i 28, zamyká 4 razy 7, a zatém tak

21=7, razy 3, iak 28=7, razy 4; więc 4 razy 21=4×7×3; 3 razy 28=3×7×4. A że 4×7×3=3×7×4, więc i 4×21=3×28.

Podobnie, ponieważ 16: 12=20: 15 i tak 16 zamyká w sobie 12, iak 20 zamyká 15 razy $1\frac{1}{3}$ albo $\frac{4}{3}$; a przeto tak $16=\frac{4}{3}\times 12$, iak i $20=\frac{4}{3}\times 15$; idzie zatém, że tak $15\times 16=15\times\frac{4}{3}\times 12$; iako i $12\times 20=12\times\frac{4}{3}\times 15$.

Tak też ponieważ 8: 28=10: 35, i $8=\frac{2}{7}\times 28$, a $10=\frac{2}{7}\times 35$; idzie zatém, że tak iest $35\times 8=35\times\frac{2}{7}\times 28$; iako też $28\times 10=28\times\frac{2}{7}\times 35$.

W ogólności zaś mówiąc, ieżeli iest a: b=c: d; i tak a, zamyká w sobie b, iak, i c, zamyká d razy n; będzie a=n×b, i c=n×d, a zatém tak d×a=d×n×b. iako

b×c=b×n×d.

Obiaśniwszy to twierdzénié na wielu przykładach, przystąpi Nauczyciel do następuiącégo dowodzéniá.

Tá. 13. *Fig.* 3. Niech będą dwa prostokąty: ABCD, BDEF, i boki iednégo, AB, BC niech będą skraynémi téy proporcyi, któréy boki BD, BF drugiégo prostokąta są śrzedniémi, toiest niech się má AB: BF=BD: BC, w takim razie té dwa prostokąty są równé.

Wykréślénié. Ustáwmy tak té dwa prostokąty, aby w kątach dwóch przeciwnych przy B schodziły się, i przedłużmy boki ich DC, EF, aż do zeyścia się w punkcie G.

Dowodz: Prostokąty: AC, BG 1) których iednakową iest wysokość, maią się do siebie, iak ich Podstawy AB, BF. Prostokąty także BE BG, iednakowéy wysokości, maią się do siebie, iak ich Podstawy BD, BC. A że z podaniá iest liniiá AB, do BF, iak liniiá BD: BC; więc też i prostokąt AC tak się má do prostokąta BG,

1) Prostokąty zwykły się wyráżać przez dwie litery, na końcach przeciwnych dwóch kątów napisané.

iak prostokąt BE, do prostokąta BG; czyli Prost: AC: Prost. BG=Prost. BE: Prost. BG, a zatém Prost. AC=Prost. BE, co samo krócéy tak się wyráżá:

AC: BG=AB: BF
BE: BG=BD: BC
A że AB: BF=BD: BC
więc AC: BG=BE: BG.
A zatém AC=BE.

229. *Wzaiémnie téż* (Reciproce *albo* e converso) dowieśdź można, że ieżeli dwa Prostokąty są równé; wziąwszy dwa boki iednégo za skrayné, a dwa boki drugiégo za śrzednié wyrazy proporcyi, znáydziémy między témi bokami proporcyą.

W liczbach oczywiście się to pokazuie: bo gdyby boki dwa iednégo Prostokąta wyrażoné były przez liczby: 10 i 42, a boki drugiégo przez 15 i 28, obadwa té prostokąty zawiérałyby w sobie 420, naprzykład stóp kwadratowych, toiest byłoby $10 \times 42 = 15 \times 28$, skądby wypadła ta proporcyá: 10: 15=28: 42.

Wykréślénié Jeometryczné do tego Twiérdzéniá służące, nieodmiénné byłoby od poprzedzaiącégo. Dowodzénié także we śrzodku dopiéro dziáłaniá różniłoby się, toiest ponieważ

AC: BG=AB: BF
i BE: BG=BD: BC
A przez podanié AC=BE.
więc AC: BG=BE: BG
A zatém AB: BF=BD: BC

230. *Wnioski* 1. Ponieważ w proporcyi, ténże sám bydź może następnik piérwszégo stósunku, co i poprzednik drugiégo; naprzykład: 8: 4=4: 2, albo, 8: 4: 2, przeto kwadrat ze śrzedniéy linii Jeometrycznie proporcyalnéy, równá się téż Prostokątowi z dwóch liniy skraynych: i znowu, ieżeli kwadrat równy iest prostokątowi, bok kwadratu będzie liniią śrzednią proporcyonalną między bokami Prostokąta.

Té podaniá były wyłożoné, w Rozdziáłach szóstym i ósmym, lubo sposobém odmiénnym.

2. Możná to samo przystósować i do równoległoboków, chociáż nieprostokątnych, byleby kąty iednégo, równé były kątóm drugiégo: także i do Tróykątów, któré kąt iedén spólny maią: bo ieżeli ramiona ich około tego kąta są proporcyonalné, tak, żeby możná wziąć dwa ramiona iednégo Tróykąta za skrayné, a dwa drugiégo za śrzednié; té dwa Tróykąty będą sobie równé: i wzaiémnie, a to stąd wynika, że takié Tróykąty, są połowami dwóch równoległoboków równokątnych, maiących za boki ramiona tego kąta spólnégo.

3. Przystósowanié to uczynić możná, i do równoległoboków różnokątnych, biorąc zamiást boku iednégo, w obudwóch, wysokość oznaczaną przez prostopadłą, spuszczoną od końca boku iednégo na bok drugi, tak dalece, że té dwa równoległoboki będą równé, gdy Podstawa i wysokość iednégo będą mogły bydź wzięté za dwie liniie skrayné, a podstawa i wysokość drugiégo za dwie liniie śrzednié proporcyonalné: i wzaiémnie, ieżeli té cztéry liniie będą proporcyonalné, równoległoboki będą téż równé.

4. Ieżeli cztéry liniie są w proporcyi, możná zawsze odmiénić mieyscé dwóm śrzednim, lub dwóm skraynym, a nawet i dwie śrzednié położyć na mieyscu dwóch skraynych, lub skrayné na mieyscu śrzednich, nie psuiąc proporcyi: ponieważ przy takich odmianach, prostokąt z śrzednich równy iednakowo będzie prostokątowi z skraynych.

231. *Twiérdz:* 2. Gdy przez punkt iaki w kole, lub za kołém poprowadzimy dwie liniie, któréby okrąg koła przecinały po obudwóch stronach; prostokąt ze dwóch części iednéy z tych liniy zawartych między tym punktém i okręgiém koła, będzie równy Prostokątowi z dwóch

części drugiéy liniy zamkniętych także między tym punktém, i koła okręgiém.

1. Niech będzie w kole punkt A, przez któ- Tá. 13.
ry przeciągnioné są ciénciwy BC, ED; Prosto- *Fig.* 4.
kąt, EA×AD równy iest Prostokątowi, BA×AC.

Wykréśl: Poprowádźmy liniie: BD, EC.

Dowodz: Tróykąty: BAD, EAC, są do siebie podobné, kąty ich albowiém w wiérzchołku A przéciwné, są równé, i kąty B, E, (189) równé, iako obeymuiącé ramionami swémi téńże sám łuk CD. Będą więc boki tych Tróykątów proporcyonalné; i AB: AE=AD: AC, a zatém AB×AC=AE×AD.

2. Niech będzie punkt A, za kołém, od te- T. 13.
go punktu ciągniémy dwie liniie AB, AE, prze- *Fig.* 5.
cinaiącé okrąg koła, iedna w B i C, a drugá w E i D. Prostokąty AB×AC, i AE×AD, będą równé.

Wykréśl: Poprowádźmy liniie: BD, EC.

Dowodz. Tróykąty: BAD, EAC maią kąt A, spólny, i kąty B i E równé, bo wsparté ramionámi na tym samym łuku CD; więc té Tróykąty maią boki proporcyonalné; i AB: AE=AD: AC, a zatém AB×AC=AE×AD.

To Twiérdzénié zwykło się ieszcze i tak wyrażać:

1. Ieżeli dwie ciénciwy przecinaią się w kole, części ich będą *odwrotnie* (inverse, *albo* in ratione inversa) proporcyonalné, toiest, tak się będzie miała część iednéy ciénciwy, do części ciénciwy drugiéy; iak się má drugá część ciénciwy drugiéy, do drugiéy części ciénciwy piérwszéy.

Dwie tedy części ciénciwy iednéy, będą śrzedniémi proporcyi, a dwie części ciénciwy drugiéy będą skráynémi téyże proporcyi.

2. Gdy dwie liniie przecinaiącé koło, wychodzą od iednégo punktu za kołém; są odwrotnie proporcyonalné z częściami témi, któré za koło wychodzą, toiest, tak się má iedna prze-

cinaiącá do drugiéy, iak się má część drugiéy za kołém, do części piérwszéy także za kołém: iedna tedy przecinaiącá, i część iéy za kołém są śrzedniémi w proporcyi, a drugá przecinaiącá, i część iéy także za kołém, są skraynémi téy saméy proporcyi.

232. *Uwága. W piérwszym razie.* Gdy iedna z ciénciw iest śrzednicą koła, a drugá do niéy prostopadłą; ta prostopadłá na dwie równé części będzie od śrzednicy podzieloná, i Prostokąt z dwóch części śrzednicy, będzie równy kwadratowi z połowy drugiéy ciénciwy. Prostopadłá tedy spuszczoná od którégokolwiek punktu koła, na śrzednicę, iest śrzednią Joometrycznie proporcyonalną między dwiéma częściami śrzednicy: któryto przypádek szczególny, i wyżéy iuż iest dowiedziony.

W drugim razie. Gdy iedna z liniy zamiást coby miała przecinać koło, iest *styczną* (tangens) iego, można ią uważać iak przecinaiącą koło, ale tak, że część iéy w kole niknie dlá małości, i dwa iéy punkta przecięciá schodzą się w punkt iedén.

W tym razie Prostokąt iedén, odmiéniá się na kwadrat z stycznéy. I stąd wyniká to wielkiéy wági podanié: że ieżeli od iednégo punktu, wychodzą dwie liniie, iedna przecinaiącá koło, a drugá styczná z kołém, kwadrat z stycznéy równać się będzie Prostokątowi z całéy linii przecinaiącéy, i z części iéy za kołém: toiest, że styczná iest śrzednią Jeometryczną między całą przecinaiącą, i częścią iéy za kołém. Następuiącé dowodzénié iest iescze iaśnieyszé, i bardziéy pod oczy podpádaiącé.

T. 13. *Fig.* 6 Niech będzie AD styczná, AB zaś przecinaiącá koło, i od tegoż samégo punktu A poprowadzoná. Ta styczná AD iest śrzednią Jeometryczną między przecinaiącą AB, i iéy częścią AC, za kołém.

Wykréśl: Od punktu dotknięciá D, poprowádźmy dwie liniie: DB, DC.

Dowodz: Tróykąty: ABD, ADC, są do siebie podobné: maią albowiém spólny kąt A, i kąt odcinka ADC, równy kątowi w odcinku na przemian ABD (195) a zatém i trzeci kąt w jednym Tróykącie równy iest kątowi trzeciému w drugim: będą więc tych Tróykątów boki proporcyonalné, i AB: AD=AD: AC, toiest kwadrat z styczney AD, równy będzie Prostokątowi z AB przez AC.

233. W szczególności zaś niech będzie sty- Tá. 13.
czná AT, i przecinaiącá AD, od tegoż samégo *Fig.* 7.
punktu A poprowadzoná, przez śrzodek C, koła.

Pociągnięymy promień CT do punktu dotknięciá T: kwadrat z linii AC, równy będzie summie kwadratów z AT, i CT, toiest, równy będzie summie z Prostokąta AD przez AB, i z kwadratu BC. Skąd wynika tén wniosek, że ieżeli śrzednicę BD, podzielimy na dwie równé części w punkcie C, i potém na iéy przedłużéniu, weźmiémy iakikolwiek punkt naprzykład A; Prostokąt z całéy téy linii i z jéy przedłużéniá (AD×AB) z przydanym kwadratém, z połowy śrzednicy (BC^2) równać się będzie kwadratowi i linii złożonéy z połowy śrzednicy, i z jéy przedłużéniá (AC^2) toiest będzie $AD \times AB + BC^2 = AC^2$.

234. *Zagád:* 1. Maiąc dany Prostokąt, i kwadrat, znaleźć dwie liniie, któréby tak się miały do siebie, iak się maią, tén Prostokąt i kwadrat.

Rozwiąz: Zamiéńmy Prostokąt dany na inszy iému równy, któryby za bok iedén, miał bok kwadratu: czyli (co na iedno wychodzi) szukáymy czwártéy linii proporcyonalnéy do boku kwadratu, i do dwóch boków Prostokąta. Bok kwadratu, tak się mieć będzie do téy czwártéy

proporcyonalnéy, iak się má kwadrat do Prostokąta.

To postępowanié zgádzá się, zupełnie z tém, co się iuż powiedziało w Arytmetyce (*na karcie 89 i 90*) a co tu przez różné przykłády, podobné następuiącému obiaśnić ieszcze należy.

Wziąwszy bok kwadratu za spólną miarę, albo za iedność, niechby bok iedén Prostokąta, zawiérál w sobie 5 razy bok kwadratu, a drugi 7 razy. Czwártá liniiá proporcyonalná do boku tego kwadratu, i do dwóch boków Prostokąta, zawiérałaby w sobie 35 razy bok kwadratu, tak, iako i cały Prostokąt, zawiérálby w sobie 35 razy cały kwadrat.

235. Przystósowanié. Podobnym sposobém postąpimy sobie chcąc znaléźć dwie liniie, któréby tak się miały do siebie, iak się maią dwa Prostokąty, toiest, szukać będziémy czwártéy proporcyonalnéy do boku iednégo Prostokąta, i dwóch boków drugiégo: do téy albowiém czwártéy proporcyonalnéy tak się mieć będzie drugi bok piérwszégo Prostokąta, iak się maią powiérzchnie tychże Prostokątów.

Możnáby to samo wykonać, szukaiąc sposobém wyżéy wyrażonym (234) stósunku każdégo z dwóch Prostokąta, do tegoż samégo kwadratu, znaleźlibyśmy albowiém, że powiérzchnie tych dwóch Prostokątów tak się maią do siebie, iak się maią dwie czwárté proporcyonalné do boku kwadratu, i dwóch boków każdégo z osobna Prostokąta.

Niechbyśmy naprzykład znaleźli, że Prostokąt iedén, który nazywám P, zawiérá w sobie kwadrat K, tylé razy, ile razy liniiá L, zawiérá w sobie bok B, kwadratu, toiest, że P: K = L: B.

Niechbyśmy znowu znaleźli, że drugi Prostokąt Q, zawiérá w sobie tén sám kwadrat K, tylé razy, ilé razy liniiá M, zawiérá w sobie bok B tegoż kwadratu, toiest, że Q: K = M: B.

Wnoszę stąd, że Prostokąty P, Q, tylé razy zawiérać będą iedén drugi, ilé razy się zawiérają liniie L, M, iedna w drugiéy, toiest, że będzie P: Q=L: M.

Iakoż ieżeli prostokąt P, zawiérá w sobie kwadrat K, dwa, trzy, cztéry, i t. d. razy, a prostokąt Q, zawiérá naprzykład 6 razy kwadrat K: Prostokąt piérwszy, będzie do prostokąta drugiégo, iak są liczby: 2, 3, 4, i t. d. do liczby 6. A że téż i liniiá L, zawiérá w sobie bok B, 2, 3, 4, i t. d. razy; więc téż i liniiá M zawiérać będzie bok B, razy 6: a zatém tak się má Prostokąt P, do Prostokąta Q, iak liniiá L, do linii M.

Ieżeli tedy mámy dwie proporcye np.

P: K=L: B.

i Q: K=M: B.

W których iednakowé są następniki; poprzedniki piérwszé obudwóch proporcyy tak się do siebie będą miały, iak poprzedniki drugié tychże proporcyy, toiest, P:Q=L:M.

236. *Uwága.* W jednéy z dwóch dopiéro wyrażonych proporcyy, naprzykład w drugiéy, można było odmiénić mieyscé poprzednikóm, i następnikóm, i té samé proporcye tak wyrazić:

P: K=L: B.

K: Q=B: M.

Skąd wynika P: Q=L: M.

237. *Defin.* Gdy będą trzy iakiékolwiek ilości iednakowégo gatunku, stósunek piérwszéy z nich, do trzeciéy nazywá się *stósunkiém składanym* (ratio composita) z stósunku piérwszéy ilości do drugiéy, i drugiéy do trzeciéy. I tak stósunek P do Q, nazywá się składanym z stósunku P do K, i K do Q; Tak téż stósunek L do M będzie składanym z stósunku L do B, i B do M. Takié stósunki złożoné z stósunków równych są równé. I tak ponieważ stósunek P do K, i K do Q równy iest piérwszy stósunko-

wi L do B, drugi stósunkowi B do M; będzie też i stósunek składany P do Q równy stósunkowi składanému L do M.

238. *Przyst:* 1. To, co się tu powiedziało o stósunku składanym, dobrze będzie przystósować do reguły trzech składanéy, o któréy mówiło się w Arytmetyce.

Przykład: Rzémieślnicy z jednakową pilnością prácuiący około iakiéy roboty, tym więcéy iéy zrobią, im większá będzie ich liczba, i czas dłuższy strawiony na téyże robocie. Przeto gdy porównać chcémy dwie iednakowégo gatunku roboty, któremi się dwie kupy Rzémieślników zatrudniaią, trzeba rozmnożyć (iako się to iuż w Arytmetyce wyłożyło) liczby Rzémieślników przez liczby dni, przez które prácowali; a roboty przez tych Rzémieślników wygotowané, tak się będą do siebie miały, iak się maią tamté dwie liczby rozmnożoné.

Niechby naprzykład liczby Rzémieślników były do siebie, iak 2 do 3; a czasy przez które robili iak 5 do 7. Piérwszy stósunek 2 do 3, równá się stósunkowi tychże liczb przez tę samę liczbę 5 rozmnożonych, i będzie, iak 10 do 15. Drugi stósunek 5 do 7, równá się stósunkowi tychże liczb przez tę samę liczbę 3 rozmnożonych, i będzie iak 15 do 21. A zatém stósunek robót, który się równá stósunkowi 10 do 21, równy będzie stósunkowi składánému z stósunku 10 do 15, i 15 do 21; z których piérwszy równy iest stósunkowi 2 do 3, a drugi równy stósunkowi 5 do 7.

Podobnie rozumować można, gdy więcéy niż dwa będzie stósunków.

239. *Przystós:* 2. Wszystkie także działaniá o zamianach, i inné podobné, któremi zatrudnialiśmy się w Arytmetyce, zasádzały się na stósunkach złożonych z dwóch lub więcéy stósunków równych: iako to bardzo łatwo w przykładach okázać można.

240. *Przystós:* 3. Samé nawet niektóré działaniá, które zdaią się bydź tylko zwyczaynem mnożeniem, możná podciągnąć pod stósunek składany.

Przykład 1. 15 czerwonych złotych ileż czyni groszy Polskich?

Aby znaleźć wartość 15 czerwonych złotych w groszach, zwyczaynie obrácaią się czerwone złote na złote, a té potém na grosze. Rozwiążémy teráz to zadanié, rozkładaiąc ié na stósunki poiedyncze i szukaiąc stósunku z nich złożonego, a to dlá pokázaniá, że czasém i nie myśląc o tém, używámy w saméy rzeczy stósunku składanego.

Stósunek wartości 15 czerw: do wartości w groszach, składá się z stósunków następuiących:

1. Wartość 15 czer: zł: do wartości 1 czer: zł: iest, iak - - - - - 15 do 1.
2. Wartość 1 czer: zł: do wartości 1 złotego iak - - - - - - 18 do 1.
3. Wartość 1 złotego do wartości 1 grosza iak - - - - - 30 do 1.
4. Stósunek z tych trzech złożony iest iak - - - 8 100 do 1.

Więc 15 czerwonych złotych czyni groszy - - 8 100.

Przykład 2. Osoba 30 lát maiącá, ileż minut żyła, rachuiąc w roku dni 365?

Stósunek 30 lát do iednéy minuty składá się z stósunków następuiących:

Z Stósunku 30 lát do 1 roku, toiest, - 30 do 1.
Z Stósunku 1 roku do 1 dnia, toiest, - 365 do 1.
Z Stósunku 1 dnia do 1 godziny, toiest, - - - 24 do 1.
Z Stósunku 1 godziny do 1 minuty, toiest, - - - - 60 do 1.
Stósunek z tych wszystkich złożony iest - - - - 15768000 do 1.
A zatém w 30 latach minut - 15768000.

241. *Przystós:* 4. Widzieliśmy wyżéy, że dlá

znalezieniá stósunku dwóch Prostokątów, trzeba było iedén z nich zamiénić na inszy, któryby miał bok równy bokowi w drugim Prostokącie, albo (co na iedno wychodzi) trzeba było znaléźć czwártą liniią proporcyonalną do iednégo boku iednégo Prostokąta, i dwóch boków drugiégo: i że tak się má piérwszy prostokąt do drugiégo, iak się má drugi bok piérwszégo prostokąta, do téy czwártéy linii proporcyonalnéy. Zwyczaynie to podanié tak się wyráżá: że *stósunek dwóch Prostokątów składá się z stósunków ich boków.* Co tak okázać można.

Niech będą dwa boki iednégo Prostokąta nazwane, A i B, a dwa boki drugiégo prostokąta, C i D. Szukáymy czwártéy linii proporcyonalnéy trzém bokóm B, C, D, i ta niech będzie L, toiest niech będzie B: C = D: L, stósunek linii A, toiest, drugiégo boku piérwszégo prostokąta, do L, równy będzie stósunkowi piérwszégo prostokąta, do drugiégo (235). A że stósunek A do L składá się z stósunków, A do D, i D do L; stósunek zaś A do D, iest stósunkiém boku iednégo, iednégo Prostokąta do boku drugiégo, drugiégo Prostokąta, a stósunek D do L, równá się stósunkowi drugich dwóch boków B i C (bo było B: C = D: L:) *więc stósunek dwóch Prostokątów, składá się z stósunków ich boków.*

242. *Przyst:* 5. Gdy dwa Prostokąty, które z sobą porównywać mámy, są kwadratami: ponieważ boki kwadratu są wszystkié równé; kwadrat iedén tak się mieć będzie do kwadratu drugiégo, iak się má bok iedén piérwszégo kwadratu do trzeciéy linii proporcyonalnéy z tym bokiém, i z bokiém drugiégo kwadratu. Niech naprzykład A i B, będą boki tych dwóch kwadratów, a C, niech będzie liniiá trzeciá proporcyonalná do tych boków, kwadrat piérwszy tak się mieć będzie do kwadratu drugiégo, iak się má A do C.

243. *Defin:* Tén stósunek A do C, składá się

z stósunku A do B, i B do C. Iako zaś té dwa ostatnié stósunki są równé: bo kładliśmy A do B, iak B do C, albo A: B: C; tak stósunek z nich złożony, nazywá się *dwumnożnym*, (Ratio duplicata), że wykładnik iego, iest kwadratém iednégo z wykładników, dwóch piérwszych stósunków.

Niechby boki dwóch kwadratów miały się do siebie, iak 1 do 2; Powiérzchnie tych kwadratów będą do siebie w tym samym stósunku, w którym iest 1 do 4; trzeciá téż liniiá proporcyonalná do 1 i 2, iest 4: a zatém té dwa kwadraty tak się do siebie mieć będą, iak się má bok iednégo z nich do trzeciéy linii proporcyonalnéy.

Ieżeli boki dwóch kwadratów będą do siebie, iak 2 do 3, powiérzchnie ich będą, iak 4 do 9; trzeciá téż liniiá proporcyonalná do 2 i 3, iest $\frac{9}{2}$, a stósunek 2 do $\frac{9}{2}$ iest tén sám, co i stósunek 4 do 9.

Iako stósunek piérwszéy naprzykład linii do trzeciéy *ciągło* (continue) proporcyonalnéy, nazywá się stósunkiém dwumnożnym stósunku piérwszéy linii do drugiéy; tak znowu stósunek piérwszéy téy linii do drugiéy, nazwać można stósunkiém *dwudzielnym* (ratio subduplicata) stósunku linii piérwszéy do trzeciéy. I tak gdy trzy liniie przez liczby oznaczone: 1, 2, 4, są ciągło proporcyonalné, toiest, 1 do 2, iak 2 do 4: albo 1: 2: 4. Ponieważ piérwszá do trzeciéy, toiest, 1 do 4 iest w stósunku dwumnożnym piérwszéy do drugiéy, toiest iak 1^2 do 2^2; będzie znowu 1 do 2 w stósunku dwudzielnym 1 do 4, toiest, iak $\sqrt{}$ 1 do $\sqrt{}$ 4.

244. *Zagádn*: 2. Maiąc dany kwadrat iedén, znaléźć drugi, któryby do piérwszégo był w danym stósunku.

Rozwiąz: Danému stósunkowi znáydźmy inszy równy, maiący za poprzednika bok kwadratu danégo. Między tym poprzednikiém i nastę-

pnikiém iego, szukáymy śrzedniéy proporcyonalnéy, ta będzie bokiém kwadratu żądanégo.

Albo tak: Złączmy wprost z sobą dwie liniie, maiące do siebie tén sám stósunek, który maią dwa wyrazy, naprzykład dwie liczby dané. Na téy linii ze dwóch złożonéy, iako na śrzednicy, nakréślmy półkolé, i od punktu ich łączénia się wyniesmy prostopadłą, aż do okręgu. Od punktu zeyścia się prostopadłéy z okręgiém poprowádźmy dwie liniie do dwóch końców śrzednicy; kwadraty tych dwóch liniy mieć będą do siebie stósunek: a zatém ieżeli iedna z nich równá iest bokowi kwadratu danégo; równá będzie bokowi kwadratu, którégo szukámy. Ieżeli zaś piérwszá nie równá iest bokowi kwadratu danégo; to trzeba na niéy, zacząwszy od punktu iéy przecięciá z okręgiém, wyznaczyć liniią równą bokowi kwadratu danégo i od punktu naznaczonégo prowadzić równoodległą od śrzednicy, a ta równoodległá przetnie drugą liniią w tym punkcie, który wyznaczy długość linii kwadratu szukanégo.

To Zagádnienie przystósować należy do przykładów Arytmetycznych.

Przykład: 1. Znaléźć kwadrat, któryby był $\frac{3}{5}$, kwadratu danégo, toiest, któryby tak się miał do niego, iak 3 do 5.

Bok kwadratu danégo dzielę na dwie części, któreby tak się miały do siebie iak 2 do 3. Na tymże boku, iak na śrzednicy kréślę półkolé, a od punktu podziału wynoszę prostopadłą aż do iéy spotkaniá się z okręgiém. Od tego punktu spotkaniá prowadzę liniią do końca śrzednicy, w tę stronę, gdzie część iéy większá znayduie się. Ta liniiá będzie bokiém kwadratu szukanégo.

Przykład 2. Maiąc dany kwadrat dobrać mu drugi, któryby tak się miał do niego, iak 5 do 3.

Liniią równą bokowi danégo kwadratu przeciągniéymy daléy, aż takich 5 części zamykać w sobie będzie, iakich 3 nieprzeciągnioną zamykała.

Na téyże linii tak przeciągnionéy, iak na śrzednicy nakréślmy półkolé, i od punktu, od którégo iest przedłużoną, wynieśmy prostopadłą aż do okręgu, i od tego punktu, gdzie go spotyká, poprowádźmy liniią do końca tego śrzednicy, gdzie część iéy równá się bokowi danégo kwadratu. Ta ostatniá liniiá będzie wymiarém boku kwadratu, którégo szukámy.

245. *Uwága.* Rozwiązanié Arytmetyczné takowych zagádnień zasádzá się na wyciągnieniu piérwiástku kwadratowégo.

Gdy naprzykład znaléźć potrzeba kwadrat, któryby był $\frac{3}{5}$ kwadratu danégo, toiest, któryby tak się miał do niégo iak 3 do 5; rozmnożywszy obiedwie té liczby przez 5, będzie 3 do 5, iak 15 do 25; więc kwadrat, którégo szukámy tak się mieć będzie do kwadratu danégo, iak 15 do 25: a zatém bok kwadratu, którégo szukámy, będzie do boku kwadratu danégo, iak iest liczba, którá przez siebie rozmnożoná czyni 15, do liczby, któ:á przez siebie rozmnożoná czyni 25; toiest, iak piérwiástek kwadratowy z 15 do 5. Trzeba tedy wyciągnąć piérwiástek kwadratowy z 15, i tén pokáże wielkość boku kwadratu szukanégo, toiest trzeba znaléźć śrzednią liczbę proporcyonalną między dwiéma danémi, 3 i 5: rozmnożywszy iedné przez drugą, i z rozmnożonéy liczby 15, piérwiástek kwadratowy wyciągnąwszy.

Działanié więc Jeometryczné zmierzaiącé do znaleziénia śrzedniéy linii proporcyonalnéy między dwiéma danémi, iest to samo, co w Arytmetyce wyciąganié piérwiástku kwadratowégo z liczby danéy: co można i tém potwiérdzić, że kwadrat liczby śrzedniéy Jeometrycznie proporcyonalnéy między dwiéma inszémi, równá się

tymże dwóm liczbóm przez siebie rozmnożonym: a zatém ta średniá liczba znáydzie się, wyciągaiąc piérwiástek kwadratowy z tych dwóch liczb, iednéy przez drugą rozmnożonych.

Gdyśmy wyżéy Jeometryczńie szukali kwadratu, któryby miáł się do kwadratu danégo w danym stósunku; szukaliśmy przez wykréślénié, średniéy linii Jeometrycznié proporcyonalnéy między dwiéma w danym stósunku będącémi, i ta średniá liniiá była bokiém kwadratu szukanégo.

246. Przystósować z łatwością można Podaniá dopiéro wyłożoné do inszych iakichkolwiek figur prostokréślnych, i do siebie podobnych. Pokáże się to naprzód na Prostokątach podobnych, potém na Tróykątach, naostatek w ogólności na iakichkolwiek figurach prostokréślnych.

Gdy będą dwa Prostokąty podobné, i na ich dwóch bokach odpowiadaiących sobie zrobimy dwa kwadraty; té dwa Prostokąty, tak siebie mieć będą, iak té dwa kwadraty.

T. 14. *Fig.* 1. Niech będą dwá prostokąty podobné: ABCD, abcd; ich powiérzchnie, tak się do siebie mieć będą, iak się maią powiérzchnie kwadratów ABEF, abef, zrobioné na bokach odpowiadaiących sobie; AB, ab. Iakoż Prostokąt ABCD, tak się má do kwadratu ABEF, iak wysokość AD, do wysokości AF = AB, toiest.

ABCD: ABEF = AD: AB.

Podobnie a b c d: abef. = ad: ab.

A że dlá podobiéństwa prostokątów, iest téż AD: AB = ad: ab, więc

ABCD: ABEF = abcd: abef.

albo ABCD: a b c d = ABEF: abef.

To samo ieszcze wyłożyć można sposobém następuiącym:

Tá. 14. *Fig.* 2. Niech dwie podstawy dwóch Prostokątów podobnych będą do siebie iak 5 do 3; wysokości ich będą téż w takowym stósunku 5 do 3: a zatém ieżeli podzielimy iednę podstawę na 5, a

drugą na 3 równé części, wysokość także, iednę na 5 części równych, a drugą na 3 równé piérwszym; powiérzchnie tych dwóch Prostokątów będą mogły bydź podzielonė, piérwszá na 25, a drugá na 9 części równych w obudwóch Prostokątach, tak iak téż i kwadraty na tych samych podstawach zrobionė mogłyby bydź podzielonė, iedén na 25, a drugi na 9 równych kwadracików: Ztąd wypływá, że i Tróykąty prostokątnė podobnė, tak się maią do siebie, iak kwadraty ich boków odpowiadaiących sobie: bo takié Tróykąty są w saméy rzeczy połowami prostokątów podobnych, i maiących tęż samę, co oné, podstawę i wysokość.

1247. Można ieszcze przystósować to samo i do iakichkolwiek Tróykątów podobnych: ponieważ albowiém w podobnych Tróykątach, wysokości są między sobą, iak Podstawy; zatém prostokąty, któréby miały téy wielkości podstawy i wysokości, co i Tróykąty; byłyby podobnė i miałyby się do siebie w stósunku dwumnożnym ich boków; albo iak kwadraty ich boków odpowiadaiących sobie (246); więc i Tróykąty, iako połowy tychże prostokątów, będą do siebie w stósunku także dwumnożnym ich boków.

Iaśniéy to wyłożyć można, gdy stósunki boków wyrażonė będą przez liczby.

Niech będzie Tróykąt iakikolwiek, którégo po- Tá. 14. dwoiliśmy wszystkié trzy boki. Tén drugi Tróy- *Fig.* 3. kąt zmieści w sobie 4 Tróykąty, z których każdy przystanie do piérwszégo.

Ieżeli w tymże piérwszym Tróykącie bok każdy potroimy; tén drugi Tróykąt zamknie w sobie 9 Tróykątów, z których każdy przystanie do piérwszégo.

Ieżeli znowu każdy bok w piérwszym Tróykącie tak przedłużymy, żeby dłuższy był 4, 5, 6, i t. d. razy; tén drugi Tróykąt pomieści w sobie, 16, 25, 36, i t. d. Tróykątów, mogących przystać do piérwszégo.

Przeto ieżeli boki Tróykąta iednégo zawiéraią w sobie 1,2,3,4,5,6,7,8,9.. razy boki innégo Tróykąta; powiérzchniá piérwszégo Tróykąta zawiérać będzie powiérzchnią drugiégo, 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64, 72, 81 - - razy.

Podobnie, powiérzchnie kwadratów, których boki zawiéraią 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 - - razy bok innégo kwadratu, będą zawiérać powiérzchnią tego drugiégo kwadratu, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 72, 81 - - razy.

Gdyby boki dwóch Tróykątów podobnych miały się naprzykład do siebie, iak 5 do 7; możnaby w piérwszym Tróykącie umieścić 25, a w drugim 49 równych Tróykątów, których wszystkié boki przystaćby mogły do siebie; a zatém powiérzchnie tych dwóch Tróykątów miałyby się do siebie, iak 25 do 49, toiest, iak powierzchnie dwóch kwadratów, których boki byłyby do siebie iak 5 do 7.

Nakoniec, można tego samégo dowieśdź sposobém podobnym, iakośmy dowodzili, że kwadraty maią się do siebie w stósunku dwumnożnym ich boków (242).

I tak, gdy będą dwa iakiékolwiek Tróykąty podobné, do których dwóch boków odpowiadaiących sobie, znáyduiémy trzecią liniią, ciągło proporcyonalną; powiérzchniá iednégo Tróykąta, tak się mieć będzie do powiérzchni drugiégo, iak bok piérwszégo Tróykąta, który wzięty iest za piérwszy wyráz proporcyi, do téy trzeciéy linii proporcyonalnéy.

Tá. 14. *Fig.* 4. Niech będą dwa Tróykąty podobné: ABC, abc, znáydźmy AD trzecią ciągło proporcyonalną do boków AB, ab, i tę samę AD przenieśmy na liniią AB od A do D. Powiérzchniá Tróykąta ABC, będzie do powiérzchni Tróykąta abc, iak AB do AD.

Wykréślénié. Poprowádźmy liniią CD.

Ponieważ dlá podobiéństwa Tróykątów iest AB: ab = AC: ac, a przez wykréślénié AB: ab

=ab: AD, będzie więc, AC: ac=ab: AD: a zatém Tróykąty cab, CAD, maią kąty A i a równé, i ramiona około tych kątów *na odwrot* proporcyonalné: będą tedy té dwa Tróykąty równé co do powiérzchni, a przeto stósunek Tróykąta ABC, do każdégo z nich będzie iednakowy. A że stósunek tegoż Tróykąta ABC, do Tróykąta ADC, równy iest stósunkowi linii AB, do linii AD; więc téż i Tróykąt ABC tak się mieć będzie do Tróykąta abc, iak liniiá AB do linii AD, toiest, w stósunku dwumnożnym boków AB, ab.

Idzie stąd, że i równoległoboki podobné są także między sobą w stósunku dwumnożnym ich boków: ponieważ takié równoległoboki dwa razy w sobie zamykaią Tróykąty podobné.

248. Można także było równie dokładnie dowiésdź, że Tróykąty podobné ABC, abc, są między sobą w stósunku dwumnożnym ich boków AC, ac: a zatém, że stósunek dwumnożny AB do ab, równy iest stósunkowi dwumnożnému AC do ac, toiest, że stósunki dwumnożné z równych stósunków, są równé: co téż iuż się ogólnie pokázało, mówiąc wyżéy o stósunkach składanych z iuszych stósunków.

Iakoż niech będą trzy iakiékolwiek ilości ciągło proporcyonalné, A, B, C, i drugié trzy ciągło także proporcyonalné, a, b, c, i w równym z piérwszémi stósunku. Stósunek składany A do C, równy będzie stósunkowi składanému *a* do *c*, toiest, A: C=a: c.

Bo ponieważ stósunek A do B równy wzięliśmy stósunkowi a do b, będzie

A: B=a: b. A że A: B=B: C

i a: b=b: c

Więc B: C=b: c

a zatém A: C=a: c

W liczbach to samo iaśniéy się okazuie.

Niech będą trzy liczby ciągło proporcyonal-

né 8, 4, 2, i drugié trzy ciągło także i równie proporcyonalné, 12, 6, 3, będzie 8 : 2 = 12 : 3.

Ponieważ albowiém równé są stósunki 8 do 4, i 12 do 6, będzie

8 : 4 = 12 : 6. A że 8 : 4 = 4 : 2.
i 12 : 6 = 8 : 3.

Więc 4 : 2 = 6 : 3
A zatém 8 : 2 = 12 : 3.

249. *Podánié przybrané.* Gdy mámy iakiżkolwiek zbiór stósunków równych, których wyrazy wszystkié iednakowégo są gátunku; summa wszystkich poprzedników, tak się mieć będzie do summy wszystkich następników, iak każdy w szczególności poprzednik, do swégo następnika.

Bo ieżeli każdy z osobna poprzednik dwa, trzy, cztéry i t. d. razy, zamyká w sobie swoiégo następnika; wszystkié téż razém poprzedniki zamykać będą wszystkié razém następniki dwa, trzy, cztéry i t. d. razy: a zatém summa wszystkich poprzedników, tylé razy zamykać będzie summę następników, ilé każdy z osobna poprzednik, swégo następnika.

I tak niech będą równé stósunki: 64 do 32, 50 do 25, 42 do 21, 30 do 15, 24 do 12, 18 do 9, 10 do 5, 8 do 4, 6 do 3, 4 do 2, 2 do 1. Summa wszystkich poprzedników = 258, a summa wszystkich następników = 129; będzie tedy, 258 : 129 = 64 : 32, albo = 50 : 25, albo = 42 : 21 i t. d.

250. *Twiérdzénié* 3. Iakiéżkolwiek są Figury prostokréślné podobné, zawsze té do siebie będą w stósunku dwumnożnym boków odpowiadaiących sobie.

Tá. 14. *Fig.* 5. *Wykréśl:* Od wiérzchołków dwóch kątów odpowiadaiących w obudwóch figurach, poprowádźmy przekątné do inszych kątów, do których mogą bydź poprowadzoné.

Dowodzénié. Dwie té figury będą podzielonè na Tróykąty, któré z osobna brané w jednéy figurze, będą podobné Tróykątom odpo-

wiadaiącym w drugiéy figurze. Każdy zaś w szczególności Tróykąt w jednéy figurze, będzie do Tróykąta odpowiadaiącégo sobie w drugiéy figurze w stósunku dwumnożnym boków odpowiadaiących; wszystkié tedy Tróykąty, z których się składá iedna figura, będą poprzednikami, a wszystkié tróykąty piérwszym odpowiadaiącé, z których się składá drugá figura, będą następnikami tamtych: a zatém summa wszystkich Tróykątów, które składaią iednę figurę, toiest (ta całá figura) tak się mieć będą do summy wszystkich Tróykątów, z których się składá drugá figura (toiest do téy drugiéy całéy figury), iak się má każdy w szczególności Tróykąt w jednéy figurze, do Tróykąta odpowiadaiącégo w drugiéy figurze, toiest, w stósunku dwumnożnym boków odpowiadaiących w tych dwóch figurach.

Wszystko zatém, cokolwiek się powiedziało o stósunku dwóch kwadratów i o sposobie znalezieniá kwadratów, któréby się miały do siebie w danym stósunku, może bydź przystósowané do iakichkolwiek figur prostokréślnych podobnych.

251. Aby Figurę iaką prostokréślną zrobić podobną i równą danym dwóm inszym podobnym figuróm prostokréślnym, trzeba tym końcem postawić Tróykąt prostokątny, dáwszy mu za ramiona dwa boki odpowiadaiącé sobie w dwóch figurach danych podobnych, a przeciwprostkątná tego Tróykąta, będzie bokiém odpowiadaiącym w figurze, któréy szukámy.

252. Gdy cztéry liniie składaią proporcyą, i na dwóch piérwszych, wyrażaiących iedén stósunek, zrobimy dwie iakiékolwiek figury podobné, a na dwóch drugich, wyrażaiących drugi stósunek, zrobimy inszé dwie iakiékolwiek figury podobné; w takim razie stósunek dwóch piérwszych figur, równy będzie stósunkowi dwóch drugich, bo tak stósunek dwóch piérwszych figur, iako i stósunek dwóch drugich, iest sto-

sunkiém dwumnożnym ze dwóch równych stósunków.

Práwdzi się to w szczególności, gdy wszystkié cztéry figury są sobie podobné: a tém widoczniéy ieszcze się okázuie, gdy té cztéry figury są kwadratami.

253. Maiąc dwie proporcye, których wyrazy wszystkié są liniiami, Prostokąt z poprzedników dwóch piérwszych stósunków, w każdéy proporcyi tak się mieć będzie do Prostokąta z dwóch ich następników, iak Prostokąt z poprzedników, drugich dwóch stósunków do Prostokąta z jchże następników.

Należy to obiaśnić naprzód na przykładach liczebnych, pokázuiąc, że gdy będą dwie proporcye w liczbach wyrażoné, poprzedniki dwóch piérwszych stósunków, w obudwóch proporcyach, iedén przez drugi rozmnożoné, tak się mieć będą do swoich następników przez siebie także rozmnożonych; iak i inszé dwa poprzedniki, iedén przez drugi rozmnożoné, do swoich następników podobnie rozmnożonych.

Przykład. Niech będzie: $14 : 7 = 6 : 3$.

i znowu $15 : 5 = 12 : 4$.

będzie też $14 \times 15 : 7 \times 5 = 6 \times 12 : 3 \times 4$.

toiest $210 : 35 = 72 : 12$.

To, co na liczebnych przykładach widocznie się pokáże, trzeba ieszcze stwiérdzić rozumowaniém podobném następuiącému. Ieżeli poprzednik w piérwszéy proporcyi iest dwa razy naprzykład większy od swégo następnika, a poprzednik w drugiéy proporcyi, trzy razy naprzykład iest większy od swégo także następnika; tedy rozmnożywszy piérwszégo poprzednika, piérwszéy proporcyi, przez piérwszégo poprzednika drugiéy proporcyi, poprzednik z tych dwóch rozmnożony, będzie dwa razy trzy, toiest sześć razy większy, od następnika podobnie z dwóch następników piérwszych, w obudwóch proporcyach rozmnożonégo: a że i drugié dwa poprze-

dniki, są, iedén dwa razy, a drugi trzy razy, większé od swoich następników; więc tak piérwszy poprzednik ze dwóch piérwszych poprzedników rozmnożony, iak i drugi poprzednik ze dwóch drugich rozmnożony, będzie sześć razy większy od swoiégo następnika podobnie rozmnożonégo; któréto rozumowanié przystósować można i do każdégo inszégo wykładnika.

Niech litery A, B, C, D, wyrażaią cztéry linie składaiącé piérwszą proporcyą, i niech litery a, b, c, d, wyrażaią drugié cztéry liniie składaiącé drugą proporcyą, toiest: niech będzie A: B = C: D i a: b = c: d; będzie téż A × a: B × b = C × c: D × d.

Bo naprzód A : B = Aa : Ba.
i podobnie C : D = Cc : Dc.
A że - A : B = C : D.
Więc - - - Aa : Ba = Cc : Dc.
Tak téż znowu a : b = Ba : Bb.
c : d = Dc : Dd.
A że - a : b = c : d
Więc - - - Ba : Bb = Dc : Dd.

Stósunek tedy złożony z stósunków:
Aa : Ba.
i Ba : Bb.
Toiest stósunek Aa : Bb, równa się stósunkowi złożonému z stósunków
Cc : Dc.
i Dc : Dd.
Toiest stósunkowi Cc : Dd.
albo co na iedno wychodzi, Aa : Bb = Cc : Dd.

ROZDZIAŁ X.

O wielokątach foremnych.

254. *Defin:* Gdy wielokąt má wszystkié boki i kąty równé; nazywá się *Wielokątém foremnym* (Polygonum regulare).

255. *Wniosek.* Ponieważ ważność wszystkich razém kątów wielokąta, zawisła tylko od liczby boków iego (85) gdy tedy wszystkié kąty wielokąta są równé, ważność iednégo z tych kąta, zawisłą tylko od liczby boków tegoż wielokąta. Ztąd idzie, że wielokąty foremné, iednakową maiącé liczbę boków, kąty téż wszystkié maią równé, i boki proporcyonalné; są więc do siebie podobné. Można tedy przystósować im to wszystko, co się w ogólności o figurach podobnych powiedziało.

Wiémy iuż sposób wykréślénia Tróykąta równobocznégo i kwadratu na linii danéy; wiémy téż iak wpisać w Tróykąt równoboczny, lub na nim opisać koło.

Wpisanié w koło dané, Tróykąta równobocznégo, i opisanié tegoż koła Tróykątém, łatwiéy się wykonywá przez wykréślénié *Sześciokąta* foremnégo (Hexagonum).

256. *Twiérdz:* 1. Bok sześciokąta w koło wpisanégo, równy iest promiéniowi tegoż koła.

Tá. 15. *Fig.* 1 Niech będzie ABCDEF sześciokąt foremny, w koło wpisany; bok którykolwiek tego sześciokąta np. AB, równy iest promieniowi SB tegoż koła.

Wykréślénié. Poprowádźmy promiéń SA.

Dowodz: Kąt ASB, zamyká szóstą część, cztérech kątów prostych, toiest $\frac{4}{6}$ iednégo kąta prostégo: a że trzy kąty Tróykąta ASB, składaią dwa kąty proste; więc dwa kąty A i B tegoż Tróykąta, razém wzięté są różnicą między dwoma kątami prostémi i $\frac{4}{6}$ iednégo kąta prostégo,

toiest, czynią $\frac{4}{3}$ kąta prostégo. Ponieważ zaś té dwa kąty są sobie równé; więc każdy z nich będzie $\frac{2}{3}$ kąta prostégo: a zatém wszystkié trzy kąty Tróykąta ASB są równé, i dlá tego téż i boki wszystkié trzy równé będą. Będzie tedy bok AB, sześciokąta forémnégo (czyli ciénciwa 60 stopniów) równy promiéniowi koła opisanégo.

257. *Wniosek* 1. Aby więc wpisać sześciokąt forémny w koło dané, dosyć iest przenieść 6 razy, iako ciénciwę, promień tego koła, na okrąg iego.

258. *Wniosek* 2. Poprowadziwszy liniią AC, będzie ona ciénciwą trzeciéy części okręgu koła, a zatém będzie bokiém Tróykąta równobocznégo wpisanégo w dané koło. Pociągnąwszy tedy liniie AE, CE, Tróykąt ACE, będzie Tróykątém równobocznym w koło wpisanym.

259. *Twiérdz:* 2. Gdy w koło wpisany będzie Tróykąt równoboczny, a przez wiérzchołki kątów iego, pociągniémy styczné z kołém tak daleko, aż się z sobą zniydą; té styczné zrobią Tróykąt równoboczny na kole opisany.

Niech będzie ABC Tróykąt równoboczny wpi- Tá. 15.
sany w koło SABC; przez wierzchołki A, B, C, *Fig.* 2.
tego Tróykąta prowadzoné styczné koła, aż do spotkaniá się ich z sobą w punktach D, E, F, zrobią Tróykąt równoboczny na kole opisany.

Wykréślénié. Pociągniéymy promiénie SA, SB, SC.

Dowodz: Którykolwiek z kątów w śrzodku koła, naprzykład kąt ASB, i iému przeciwny kąt E, między dwiéma stycznémi zawarty, czynią razém dwa kąty proste. A że kąty wszystkié trzy we śrzodku koła są równé; więc równé będą i kąty trzy od stycznych zrobioné: a zatém i Tróykąt DEF będzie równoboczny.

Łatwo więc opisać można dané koło Tróykątém równobocznym, wpisawszy piérwéy w toż koło Tróykąt także równoboczny.

260. W ogólności zaś mówiąc: niechby był iakikolwiek wielokąt forémny w koło wpisany: ieżeli przez wszystkié wiérzchołki kątów tego wielokąta poprowadzimy styczné koła, tak, aby każdé dwie blizkié z sobą się spotykały; Wielokąt, który z tych stycznych zrobi się, będzie także forémnym.

Dowodz: We wszystkich czworokątach takich, iak naprzykład ASBE, kąty między dwiéma stycznémi zawarté; iak naprzykład kąt E, będą równé, a zatém wszystkié kąty tego Wielokąta będą równé.

Wszystkié także Tróykąty, iak naprzykład ABE będą równoramiénné, i kąty w jednym Tróykącie, równé będą kątom w drugim, i podstawy w nich, iak naprzykład iest podstawa AB, będą równé: a zatém wszystkié té Tróykąty mogą przystać do siebie, i ztąd boki iednégo Tróykąta równé będą bokóm drugiégo. Więc summa dwóch takich równych boków iednakową zawsze będzie. A że naprzykład EF iest summą dwóch takich równych boków Wielokąta opisanégo; więc wszystkié boki tego Wielokąta równé będą.

261. *Twiérdz:* 3. W każdy Wielokąt forémny, można wpisać iedno koło, i drugié koło na nim opisać, a obadwa té koła, spólny mieć będą śrzodek.

Niech będzie iakikolwiek sześciokąt forémny, ABCDEF, można zawsze wpisać weń koło, i drugié na nim opisać, a té dwa *koła* będą *spółśrzodkowé* (circuli concentrici).

Tá. 15. *Fig.* 3. *Dowodz:* Od śrzódka dwóch boków blizkich, naprzykład od G, i H, wyprowadziwszy dwie prostopadłé: GS, HS; punkt S przecięciá ich, iednakowo będzie odległy od trzech wiérzchołków blizkich A, B, C (według tego co się iuż powiedziało o opisaniu kołém Tróykąta) będą tedy równé liniie AS, BS, CS: a zatém Tróykąty SBC, SBA równé względém siebie boki mieć

będą, i iedén Tróykąt przystać może do drugiégo: a w szczególności kąt SBC, równy iest kątowi SBA, i każdy z nich czyni połowę kąta w wielokącie, toiest kąta ABC. A że téż równé są i kąty SCB, SBC; więc i kąt SCB, będzie połową kąta w Wielokącie, a zatém kąt SCD, będzie drugą iego połową. Maią więc Tróykąty: SCD, SCB spólny bok SC, równé boki: CD, CB, i kąty w C między niémi zawarté, równé. Mogą tedy i té dwa Tróykąty przystać do siebié, a w szczególności liniie SB, SD równé będą. Więc to koło, którégo śrzodkiém iest S i które przechodzi przez punkta blizkié: A, B, C, przechodzić także będzie i przez punkt następuiący D. Podobnym sposobém pokázać można, że toż koło przechodząc przez punkta: B, C, D, przechodzić będzie i przez punkt E, i t. d.

Wszystkié promiénie: SA, SB, SC, SD, i t. d. dzielą w wiérzchołkach na dwie równé części, kąty Wielokąta, iako się pokázało: a zatém dwa Tróykąty naprzykład SBH, SBG, mogą przystać do siebie, bo maią kąty proste przy H i G, bok spólny SB, i kąty przy B równé; a w szczególności liniie SH, SG są równé: toż samo możnáby dowieśdź i względém inszych prostopadłych spuszczonych od śrzodka S, na boki wielokąta. Punkt tedy S, iest iednakowo odległy od wszystkich boków Wielokąta, a zatém iest śrzodkiém koła, któréby wpisać można w Wielokąt.

262. *Twiérdz:* 4. Maiąc Wielokąt foremny w koło wpisany, a przeciąwszy na dwie równé części łuk, którégo ciénciwą, iest bok tego Wielokąta, i od punktu każdégo takiégo przecięciá poprowadziwszy liniie do dwóch końców łuku, zrobi się z tych liniy inszy wielokąt foremny, tylé dwoie co piérwszy boków maiący.

1. Wszystkié boki tego nowégo wielokąta będą równé, bo będą ciénciwami połowy łuków równych.

2. Wszystkié także kąty tego Wielokąta, będą ró-

wné, bo każdy z nich będzie dwa razy większy od kąta przy podstawie Tróykątów równoramiénnych, i przystać do siebie mogących, któré za boki, maią promiénie koła.

Tén tedy Wielokąt, będzie miáł wszystkié boki i kąty równé, a zatém będzie forémnym.

Podobnym sposobém dowieśdź możnáby, że ieżeli boki Wielokąta, są ciénciwami tyluż części równych koła, ilé Wielokąt má boków; tén Wielokąt będzie forémnym: a zatém wykréślénié Wielokąta forémnégo, któryby zamykáł w sobie pewną liczbę boków danych, zależy od tego, aby podzielić okrąg koła na daną liczbę części równych.

263. *Zagádn:* Na danym kwadracie opisać, i wpisać weń koło; i znowu w dané koło wpisać, i opisać na niém kwadrat.

Rozwiąz: 1. Prowadzę dwie przekątné w kwadracie: punkt przecięcia ich, będzie śrzodkiém koła, które wpisać w kwadrat, i opisać na nim mámy.

2. Prowadzę dwie śrzednice w kole, iednę do drugiéy prostopadłą. Końce ich będą wiérzchołkami kwadratu wpisać się w koło mogącégo: przez té wiérzchołki pociągnąwszy styczné koła, té zrobią kwadrat na kole opisany.

264. *Wniosek* 1. Kwadrat opisany na kole, równá się kwadratowi śrzednicy iego, i dwa razy iest większy od kwadratu wpisanégo.

265. *Wniosek* 2. Z tego, co się wyżéy powiedziało, wynika, że przez *poddziały*, (subdivisiones) ciągłé łuków na dwie części równé, możná wpisać w koło Wielokąty, których liczba boków byłaby następuiącá:

3, 6, 12, 24, 48, 96, albo w ogólności.
- - - - - - 3×2^n. 1).

4, 8, 16, 32, 64, 128, albo w ogólności.
- - - - - - 4×2^n.

1) Co znaczą té wyrazy: 3×2^n, 4×2^n dá się poznać w Algiebrze.

Przestr: Za pomocą samego liniiału i Cyrkla nie można z zupełną dokładnością i pewnością, (to iest bez szukaniá takowego podziáłu cyrkiem) podzielić łuk każdy na 3, 5, 7, i t. d. części równych: a zatém z takową samą pomocą, nie można zawsze wykréślić takie Wielokąty, których liczba boków wyrażałaby się przez liczby rozmnożne, z 3 lub 4, i t. d. przez 3, raz lub więcéy razy wzięte.

266 *Twiérdz:* 5. Powiérzchniá Wielokąta opisanego na kole, a w szczególności Wielokąta foremnego równá się Tróykątowi maiącému za wysokość promiéń tego koła, a za podstawę *obwód* (Perimeter) tego Wielokąta.

Wykréśl. Od śrzodka koła poprowádźmy liniie do wszystkich wiérzchołków Wielokąta.

Dowodz. Wielokąt podzielony będzie przez té liniie, na tylé Tróykątów, ilé má boków: Tróykąty zaś té maią za wysokość promiéń koła, a za podstawę boki Wielokąta; więc powiérzchniá tych wszystkich Tróykątów, czyli powiérzchniá Wielokąta równá iest iednému Tróykątowi, któryby miáł za wysokość promiéń tego koła, a za podstawę obwód Wielokąta.

267. *Wniosek.* Gdy rozmaité Wielokąty opisané są na iedném kole; ich powiérzchnie mieć się do siebie będą, iak obwody.

268. *Twiérdzénié* 6. Powiérzchniá Wielokąta foremnego, w koło wpisanego, równá się Tróykątowi maiącému za wysokość promiéń tego koła, a za podstawę, obwód wielokąta inszego foremnego w toż koło wpisanego, a tylko połowę tylé boków maiącego.

Niechay naprzykład sześciokąt ABCDEF, T. 15; wystawiá nam iakikolwiek Wielokąt foremny, *Fig.* 1. w koło wpisany, powiérzchniá tego sześciokąta równá iest Tróykątowi maiącému za wysokość promiéń tego koła, a za podstawę obwód Tróykąta równobocznego, w toż samo koło wpisanego.

Dowodz: Poprowádźmy promień SB przecinaiący w punkcie G, bok Tróykąta równobocznégo. Tróykąt ASB, uważać można, iak gdyby miał podstawę SB, a wysokość AG, Tróykąt także CSB uważać można, iak gdyby miał podstawę SB, a wysokość CG: a zatém czworokąt ASCB równá się Tróykątowi, któryby miał albo wysokość AC, a podstawę SB. Toż mówić i o inszych Czworokątach zawartych między dwoma Wielokąta bokami przyległémi, i dwoma promieniami; summa więc powiérzchni, wszystkich tych czworokątów, toiest powiérzchniá Wielokąta forémnégo w koło wpisanégo, równá się takiému Tróykątowi, któryby miał za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód Wielokąta inszégo forémnégo, w toż koło wpisanégo, a połowę tyle boków maiącégo.

Przykład. Powiérzchniá Dwunástokąta forémnégo w koło wpisanégo, równá się Tróykątowi, maiącému za wysokość, promień tego koła, a za podstawę, obwód szościokąta, w toż koło wpisanégo, albo, (co na iedno wychodzi) równá się Prostokątowi, któryby miał za wysokość, promień tego koła, a za podstawę, tenże promień trzy razy wzięty.

Ta więc powiérzchniá iest trzy razy większá od kwadratu promienia, i iest równá $\frac{3}{4}$ kwadratu śrzednicy.

Twiérdzénié to stósuie się tylko do Wielokątów, których boki są parzyste; następuiącé Twiérdzénié przystósować można do wszystkich ogólnie Wielokątów forémnych.

269. *Twiérdz:* 7. Powiérzchniá Wielokąta forémnégo w koło wpisanégo, równá się Tróykątowi, maiącému za wysokość prostopadłą spuszczoną od śrzodka koła do boku wielokąta, a za podstawę obwód iego 1).

1) Taká w szczególności prostopadłá nazywá się z Greckiégo apothema.

Dowodz: Prostopadłą tę uważać można, iak promień koła wpisanego, lub wpisać się mogącego w Wielokąt: a zatém twierdzenie to iest tylko przystósowaniém wyższego (266).

270. *Wniosek.* Ieżeli od punktu iakiégokolwiek w Wielokącie forémnym, nawet i w tym, którego boki tylko wszystkie są równe, spuścimy prostopadłe do wszystkich iego boków; te prostopadłe dodane do siebie, iednakową zawsze długość uczynią.

Iakoż poprowadziwszy od tego samego punktu dwie liniie do dwóch końców iednego z boków, powierzchniá Tróykąta, témi liniiami zakończoná, równá będzie Tróykątowi maiącému za podstawę bok wielokąta, a za wysokość prostopadłą nań spusczoną: albo, co na iedno wychodzi, powierzchniá ta równá będzie Tróykątowi maiącému za wysokość bok wielokąta, a za podstawę, prostopadłą nań spusczoną: a zatém powierzchniá całego Wielokąta równać się będzie Tróykątowi, któryby miał za wysokość bok tego Wielokąta, a za podstawę summę wszystkich prostopadłych na boki iego spusczonych. A że powierzchniá takowego Tróykąta iest zawsze iednakowá, i wysokość także iednakowá; więc i podstawa, czyli summa wszystkich prostopadłych iednakowá zawsze będzie, z którégokolwiek punktu Wielokąta, oné spuścimy.

WSTĘP DO ROZDZIAŁOW XI i XII.

O używaniu Przenośnika, Cyrkla proporcyonalnego, i o Podziale nazwanym Nonniiuszém.

271. *Defin. Przenośnik* (Transportator) iest Tá. 16. to półkolé, którégo okrąg podzielony iest na stopnie, albo, gdy większy będzie, na półstopnie, i ćwierci stopniów.

272. *Zagádn.* 1. Maiąc dany kąt na papiérze, znaléźć liczbę stopniów, którą w sobie zamyká.

Sposób 1. Przykładám śrzodek przenośnika do wiérzchołka kąta danégo, a podstawę tegoż przenośnika do iednégo z ramión kąta; łuk przenośnika zawarty między ramionami kąta, pokáże w stopniach ważność iego.

Sposób 2. Od wiérzchołka kąta danégo, iak od śrzodka, promiéniém równym promiéniowi przenośnika, kréślę łuk zawarty między ramionami kąta, odległość dwóch końców tego łuku przenoszę cyrklém na okrąg przenośnika, od końca śrzednicy, która mu służy za podstawę; łuk przenośnika między końcém śrzednicy i drugim punktém, gdzie drugié ramié Cyrkla przypadnie, zawarty, pokáże w stopniach ważność kąta danégo.

273. *Zagádn.* 2. Na linii daney, i przy punkcie na niéy danym, zrobić kąt zawiéraiący w sobie daną liczbę stopniów.

Sposób 1. Położywszy na linii daney przenośnik, tak, aby śrzednica iego, do téy linii przystáwała, a śrzodek do punktu danégo, naznáczam na papiérze punkt, którému odpowiadá punkt przenośnika ukazuiący liczbę daną stopniów, tén punkt łączę liniią z punktém danym, a ta liniiá uczyni z daną kąt, którégo szukáłém.

To działanié będzie dokładnieyszé, gdy przenośnik má sobie przydany promiéń ruchomy około śrzodka iego.

Sposób 2. Od punktu danégo, iak od śrzodka, promiéniém równym promiéniowi przenośnika, kréślę łuk, i na tén, wziętą na przenośniku liczbę stopniów danych przenoszę, od punktu przecięcia linii z tym łukiém, aż do drugiégo punktu na tymże łuku. Punkt tén ostatni złączywszy liniią z punktém danym na drugiéy linii, té obiedwie liniie zamykać będą kąt, którégo szukáłém.

274. *Zagádn:* 3. W dané koło, wpisać Wielokąt forémny o pewnéy liczbie boków.

Rozwiąz: Szukám kąta w śrzodku tego Wielokąta; ciągnę promień iakikolwiek, i robię na nim kąt równy kątowi w śrzodku Wielokąta, maiący śrzodek koła danégo za wiérzchołek; łuk tego koła zawarty między ramionami kąta, będzie miał za ciénciwę bok Wielokąta danégo.

275. *Zagádn.* 4. Na danéy linii wykréślić Wielokąt forémny o pewnéy liczbie boków.

Rozwiąz. Przy dwóch końcach danéy linii robię dwa kąty równé połowie kąta, przy obwodzie Wielokąta, którégo szukám. Punkt przecięciá ramión tych dwóch kątów będzie śrzodkiém koła, w które wpisać się dá Wielokąt, o tylu bokach, ilé ich dano, i téy wielkości, iakiéy iest liniiá daná.

276. *Uwága.* Używanié przenośnika, wyciągá wielkiéy báczności. Im większy promień mieć będzie, tym mniéy obáwiać się trzeba znacznieyszégo iakiégo uchybiéniá.

Między inszémi narzędziá tego niedostatkami, iest tén mianowicie, że promiénia w nim odmiénić nié można według okoliczności; ale tén niedostatek zastąpić może w potrzebie inszé narzędzié nazwané *liniią ciénciw* (linia chordarum) w cyrklu proporcyonalnym.

277. Na obudwóch ramionach cyrkla proporcyonalnégo, znáyduie się *liniiá ciénciw*, któréy podziáły zaczynaią się we śrzodku (*in centro*) tego narzędziá: a kończą tam, gdzie iest liczba 180, albo w mnieyszych narzędziach tam, gdzie iest liczba 60. Odległości śrzodka od inszych punktów podziału, pokázuią wielkość ciénciw wyznaczoną przez *rachunek* (per calculum) albo przez figurę dokładną. Ta wielkość ciénciw wyznaczoná iest w półkole, którégo promień równá się odległości śrzodka cyrkla proporcyonalnégo od punktu podziału naznaczonégo liczbą 60, a T. 17.

to z przyczyny równości ciénciwy 60 stopniów z promiéniém.

Ponieważ rozwiązanié cztérech poprzedzaiących zagádnień iedynie zawisło od wyznaczéniá ciénciwy łuku, toiest od wielkości iéy względém promiénia; można więc cztéry té Zagádniéniá rozwiązać, używaiąc, iednégo tylko ramiéniá w cyrklu proporcyonalnym, biorąc za promiéń koła odległość punktów: o, i 60.

Dwa razém ramiona tego cyrkla służą do odmiéniéniá promiénia; náymnieyszym będzie, odległość dwóch punktów 60 i 60, gdy cyrkiel proporcyonalny zupełnie iest zamknięty; powiększonym zaś będzie przez odległość większą tychże punktów, gdy cyrkiel coráz więcéy otworzymy: a náywiększym będzie, gdy cyrkiel wcale tak otworzymy, że ramiona iego w prostéy będą linii.

Niechby naprzykład tak był otworzony cyrkiel proporcyonalny, aby odległość dwóch punktów 60 i 60, czyniła połowę odległości iednégo z tych punktów, od śrzodka; będzie téż i odległość drugich punktów odpowiadaiących sobie naprzykład 40 i 40, połową odległości iednégo z nich od śrzodka; a zatém odległość ta punktów: 40 i 40, oznaczyłaby ciénciwę stopniów 40, albo 40°, w kole, którégo promiéń równałby się odległości punktów 60 i 60: bo ciénciwy łuków podobnych, w kołach różnych tak się maią do siebie, iak tychże kół promiénie. W ogólności więc mówiąc: gdy za promiéń weźmiémy odległość punktów 60 i 60, na linii ciénciw, iakąkolwiek inszą odległość dwóch punktów na téyże linii, naznaczonych iednakową liczbą, będzie ciénciwą łuku, o tylu stopniach, ilé wyráżá ta liczba.

Ztąd wyniká sposób, którégo użyć wygodnie można, chcąc rozwiązać cztéry poprzedzaiącé zagádniéniá, przez liniią ciénciw, i odmiéniaiąc iak się podobá promiéń.

278. *Przykład* 1. Na daney linii i przy punkcie na niéy także danym, zrobić kąt o pewnéy liczbie stopniów.

Rozwiąz: Weźmy iakikolwiek promień; otwórzmy cyrkiel proporcyonalny tak, aby odległość punktów naznaczonych liczbą 60, była równá tému promieniowi. Od punktu danégo, iak od śrzodka, promieniém tymże nakréślmy łuk koła, i dáymy mu ciénciwę równą odległości dwóch punktów naznaczonych liczbą daną stopniów.

279. *Przykład* 2. Na daney linii wykréślić Wielokąt forémny iakikolwiek.

Rozwiąz: Szukáymy kąta, iaki bydź powinién we śrzodku Wielokąta żądanégo, otwórzmy cyrkiel proporcyonalny tak, aby odległość punktów naznaczonych na linii ciénciw tą liczbą, iaká iest liczba stopniów kąta, we śrzodku Wielokąta, równała się linii daney; na téyże linii wystáwmy Tróykąt równoramiénny, dáwszy mu za ramiona, liniie równé odległości punktów naznaczonych liczbą 60; wiérzchołek tego Tróykąta, będzie śrzodkiém koła, w któré wpisać można Wielokąt żądany.

280. *Uwága.* Co do wykréślénia Wielokątów forémnych w szczególności: aby się obéyśdź można bez szukániá kątów we śrzodku, znáyduie się na cyrklu proporcyonalnym osobná liniiá Wielokątów, za któréy pomocą, zacząwszy od Tróykąta, lub czworokąta, aż do dwunástokąta wykréślić można. Odległość śrzodka, tego narzędziá, od punktu 6, téy linii Wielokątów, wziąwszy za promień, albo za bok Sześciokąta forémnégo w koło wpisanégo, odległości tegoż śrzodka od punktów 3, 4, 5, i t. d. pokażą wielkość boku Wielokąta forémnégo, który wpisać można w to samo koło, o tylu bokach, ilé znaczą liczby: 3, 4, 5, i t. d. *Albo téż:* otworzywszy do woli cyrkiel proporcyonalny, i wziąwszy na linii Wielokątów za promień odległość

punktów 6 i 6; odległości inszych dwóch punktów: 3 i 3, 4 i 4, 5 i 5, i t. d. pokażą bok Wielokąta foremnego o téyże saméy liczbie boków wpisanego w to koło, do którego za promień wzięliśmy odległość punktów 6 i 6.

281. Trzecią liniią, którą na cyrklu proporcyonalnym znáyduiémy, a wielkiego iest użytku, nazywá się *liniią części równych.* Na obudwóch cyrkla proporcyonalnégo ramionach, mámy liniią podzieloną na 200 części równych, a czasém, gdy cyrkiel mnieyszy, na 120, mniéy lub więcéy. Iakożkolwiek tén cyrkiel otworzymy, odległość dwóch Punktów naznaczonych tą samą liczbą naprzykład 200, będzie dwa razy większá od odległości punktów naznaczonych liczbą 100, cztéry razy większá od odległości dwóch punktów, 50, i t. d. a mówiąc ogólnie, odległość dwóch iakichkolwiek punktów tą samą liczbą naznaczonych, będzie się tak miała do odległości dwóch inszych punktów przez iednakową także liczbę naznaczonych; iak się maią do siebie też liczby.

282. *Używanié* 1. Maiąc daną liniią, podzielić ią na pewną liczbę części równych.

Niechby naprzykład podzielić trzeba liniią daną na 5 części równych.

Otwórzmy tak cyrkiel proporcyonalny, aby odległość punktów naznaczonych liczbą podzielną przez 5, równá była linii danéy: niech naprzykład odległość ta będzie punktów naznaczonych liczba 200; weźmy piątą część téy liczby, toiest 40: a odległość tych dwóch punktów naznaczonych liczbą 40, będzie częścią piątą linii danéy.

283. *Uwága.* Ostatnią tę odległość znalezioną przenosząc 5 razy na liniią daną, uchybiénié, któréby zayśdź mogło w jey wielkości, byłoby 5 razy powtórzoné, a zatém tak powtórzoné, mogłoby się stać znacznem, chociáż każdé z osobna było nieznaczné. Przytrafić się to

może, osobliwie wtenczas, gdy na wiele części dzielić przychodzi liniią. Aby więc tego powtarzaniá uniknąć, lepiéy będzie wziąć osobno $\frac{4}{7}$ linii, toiest odległość dwóch punktów 160, i przenieść ią, od obudwóch końców na liniią daną: toż uczynić, wziąwszy potém $\frac{3}{7}$ linii i t. d.

284. *Używanié* 2. Maiąc daną liniią znaleźć inną, któráby do niéy była w pewnym stósunku w liczbach wyrażonym, naprzykład iak 4 do 7.

Przenieśmy liniią daną na dwa punkta naznaczoné liczbą podzielną przez 7, naprzykład na dwa punkta 140; $\frac{4}{7}$ téy liczby 140, są 80: odległość tych dwóch punktów 80, będzie liniią, któréy szukaliśmy.

285. *Używanie* 3. Maiąc daně w liczbach trzy boki Tróykąta, wykréślić go.

Przykład: Niechby trzy boki Tróykąta miały bydź iak trzy liczby: 150, 147, 128.

Otwórzmy iakokolwiek cyrkiel proporcyonalny: odległości dwóch Punktów 150, dwóch punktów 147, i dwoch punktów 128, będą do siebie, iak boki daně, a zatém mogą bydź wzięté za té boki.

286. *Używanié* 4. Maiąc dany Tróykąt iuż wykréślony, którégo podstawa zamyká naprzykład 100 sznurów, znaléźć wielkość inszych dwóch boków.

Przenieśmy podstawę daną na dwa punkta 100; zmiérzmy cyrklém długość dwóch innych boków, i przenieśmy ią znowu na punkta dwa iednakową liczbą naznaczoné, tam gdzie przypadnie; liczby dwie, na któré długość tych dwóch boków przypadnie, wyrażać będą długość tychże boków w sznurach.

Opuszczam inszé używaniá, gdzie wykréślenié Jeometryczné, krótszé iest często i pewnieyszé; iak naprz. w znalezieniu kwadratu równégo summie dwóch inszych danych, albo więcéy.

287. *Uwága* 1. Gdy kto nié má cyrkla proporcyonalnégo, może na mieyscé iego, a czasém i lepiéy użyć linii podzielonéy na wielé części równych.

288. *Uwága* 2. Gdy część náyminieyszá, któréy nám do podziału potrzeba, iest bardzo małá, a liczba części, których szukámy, znacznie wielká; w takim razie trudno iest mieć wszystkie, na téyże saméy linii, podziały, tak, aby ié dobrze rozeznać można. Udámy się więc w podobnym razie do sposobu następuiącégo:

Tá. 15. *Fig.* 4. Niechby podaná była liniiá, która zbyt iest małá, aby ią widocznie na 10 części podzielić można; trzeba osobno té części wynaléźć od 1, aż do 10.

Rozwiąz. Przez dwa końce téy linii prowadzę, po iednéy stronie dwie równoodległé. Na té równoodległé przenoszę od końców linii danéy dziesięć równych części; każdy Punkt podziału w jednéy równoodległéy, łączę liniią z punktém odpowiadaiącym mu na drugiéy równoodległéy. (Té liniie łączące będą równoodległé od linii danéy.) Od końca iednégo linii danéy, ciągnę liniią poprzeczną do końca drugiégo linii ostatniéy równoodległéy; od danéy tá poprzeczná liniiá wyznaczy na równoodległych od linii danéy, części których szukáłém.

T. 15. *Fig.* 5. Maiąc daną liniią bardzo małą, do podzieléniá na 100 równych części, ale iednak tak wielką, aby mogła bydź widocznie podzieloną na 10 równych części; podzielić ią tak, aby tylé zaráz części równych wyznaczyć na niéy można, ilé zechcémy, zacząwszy od 1, aż do 100.

Rozwiąz. Podzielmy tę liniią na 10 równych części; przez piérwszy punkt podziału, i przez drugi koniec téy linii, wyciągniémy dwie równoodległé iakiékolwiek, (zręczniéy iednak, i wygodniéy iest, aby małoco od prostopadłych uchybiały:) Przenieśmy znowu na

te dwie równoodległe 10 części równych, albo mało różniących się od części linii danéy.

Złączmy drugi koniec linii danéy, od którego nie była prowadzoną równoodległą, z ostatnim punktém podziału, równoodległéy bliższéy; złączmy także i punkta iednéy równoodległéy z punktami odpowiadaiącémi na drugiéy, i przeciągnięymy ié aż do linii ostatniéy nierównoodległéy. Nakoniec przez wszystkie punkta podziału linii danéy prowádźmy równoodległe od dwóch pierwszych równoodległych, co z łatwością przyydzie, przeniósłszy podziały linii danéy, na liniią iéy przeciwną i łączącą końce dwóch pierwszych równoodległych, i złączywszy liniiami punkta podziału odpowiadaiące. Po takiém wykréśléniu mieć zaráz można tyle co chcémy, części równych na linii danéy, zacząwszy od 1, aż do 100.

Trzeba naprzykład znaléźć nám części 64, takich, iakich linii daná má 100.

Stáwmy ramié iedno cyrkla zwyczaynégo na punkcie śrzednim, 4, i otwórzmy cyrkiel széroko, aż drugié ramié iego przypadnie na przecięcié dwóch liniy, których końce naznaczoné są liczbami: 4 i 60. Ta otwartość cyrkla, dá nám liczbę części, których szukaliśmy, i t. d.

Przedłużaiąc liniią daną i wszystkié od niéy równoodległé, aż póki té przedłużéniá nie będą równe linii danéy wziętéy ráz, dwa razy, trzy razy - - dziesięć razy, otrzymámy taką liczbę części, iaką zechcémy, zacząwszy od 1, aż do 200, 300, 400 - - 1000.

Taká *podziałka* (scala) iest do używaniá náywygodnieyszá, gdy kto nié má cyrkla proporcyonalnégo, dlá tego téż i náywięcéy iéy używaią.

289. Inny sposób do wynaleziéniá części równych linii danéy, tak małéy, że iéy podzielić widocznie nié można na części żądané, iest ten, który się nazywá *podziałém Nonniiusza*, a

który raczéy nazywaćby się powinién podziałém *Verniera*, z przyczyny, że tak zwał się prawdziwy podziału tego wynalázca.

Niechby naprzykład przyszło podzielić na 30 równych części liniią tak małą, że widocznie na niéy części tych wyznaczyć nié można, niechby iednak była téy wielkości, że można ią wyraźnie podzielić na 5, albo 6 części równych.

Tá. 15. *Fig.* 6. Podzielmy tę liniią naprzykład na 6 części równych, i drugą iéy równą na 5 równych także części. Różnica szóstéy części piérwszégo podziału, od piątéy części drugiégo podziału, będzie równą różnicy między $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{6}$ częścią całéy téy linii daney, toiest, będzie $\frac{1}{30}$ téy linii. Gdy tedy té dwie liniie tak ułożymy, że iedna będzie przy drugiéy, i końce iednéy wprost będą naprzeciwko końców drugiéy; odległość dwóch punktów piérwszégo podziału w obudwóch liniiach, będzie 30stą częścią daney linii; podobnie odległość dwóch punktów drugiégo podziału (rachuiąc od tychże samych, co wyżéy końców) będzie $\frac{2}{30}$, odległość dwóch punktów trzeciégo podziału $\frac{3}{30}$, czwártégo $\frac{4}{30}$, piątégo $\frac{5}{30}$, albo $\frac{1}{6}$ częścią całéy linii daney: toiest, iedną z tych części, na które ta liniiá iest podzieloná.

T. 17. 290. Czwártá liniiá, która iescze zwykła się znáydować na cyrklach proporcyonalnych, i któréy wykréślénié zasádzá się na tém, co się wyżéy iuż wyłożyło, nazwaną iest *liniią Płaszczyzn* (linea Planorum).

Odległości śrzodka w cyrklu proporcyonalnym od punktów podziału téy linii, tak się maią do siebie, iak boki kwadratów, które w tym samym stósunku byłyby do siebie, w którym są liczby przy tychże punktach wyrażoné. I tak gdyby kwadrat iedén był: 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 razy większy od drugiégo; bok tego drugiégo kwadratu większy byłby: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 razy od piérwszégo; dlá tego téż odległości od śrzodka, punktów naznaczonych licz-

bami: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, tak się maią do siebie, iak liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Szczupłość narzędziá nie pozwoliła daléy tych podziałów rozciągnąć. Co się zaś tycze boków w kwadratach śrzednich między témi, które się dopiéro wyraziły, można ié wyznaczyć przez figurę dokładną lub przez rachunek przybliżaiąc ich ważność do práwdziwéy. I tak ieżeli odległość śrzodka od punktu 1, będzie wyrażać bok kwadratu równy naprz: 12 iakim częściom; odległość tegoż śrzodka od punktu 2, wyrazi bok innégo kwadratu równy blizko 17 takimże częściom: albo gdy piérwszá odległość znaczy nap: 100, drugá znaczyć będzie trochę więcéy iak 141, i t. d.

Używanié w tém, dwóch ramión cyrkla proporcyonalnégo, iest to samo, które było i do inszych liniy.

Ponieważ naprzykład odległości śrzodka od punktów:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64,
maią się
do siebie, iak liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8;
- - - - więc też
i odległości dwóch punktów iednakową liczbą naznaczonych:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64,
przy iakiém-
kolwiek o- - - - - -
twiéraniu - - - - -
cyrkla, mieć - - - - -
się będą iak - - - - -
liczby:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Toż mówić i o innych liczbach pośrzednich.

Przystósowanié. Niech będzie dany bok kwadratu iednégo; trzeba znaléźć bok innégo kwadratu, któryby był $\frac{5}{6}$ piérwszégo.

Otwiéram tak cyrkiel proporcyonalny, aby dwa ramiona cyrkla zwyczaynégo, z otwartością równą bokowi danému, przypadły na dwa pun-

kta linii płaszczyzn iednakową liczbą naznaczoné, którąby podzieloną bydź mogła przez 6, naprzykład na dwa punkta 60. Biorę $\frac{5}{6}$ téy liczby 60, toiest 50, i nie odmieniaiąc otwarciá cyrkla proporcyonalnego, mierzę odległość dwóch punktów, 50: a ta będzie liniią któréy szukám za bok kwadratowi, maiącému bydź $\frac{5}{6}$, kwadratu danego: a że figury podobné maią się do siebie, iak kwadraty ich boków odpowiadaiących sobie, przeto działanié to przystósować równie można do wszystkich figur podobnych.

ROZDZIAŁ XI.

Piérwszé początki Miernictwa.

Ieżeli gdzie nauka o figurach podobnych używaná bywá w praktyce, to szczególniéy gdy się wykréślaią na papiérze figury, choć w małości swoiéy, podobné tym, których są wyobrażéniém; i gdy wyznáczámy na karcie położénié punktów na polu naprzykład znáyduiących się, których tam dlá różnych zawád wyznaczyć częstokroć nié można.

291. *Przykład* 1. Niech będzie izba kwadratowá, któréy bok zmierzony, má łokci 10.

Iakiéykolwiek wielkości kwadrat odrysuiémy na papiérze, zawsze iego figura, podobną będzie do figury izby.

Zeby iednak patrząc na kwadrat na papiérze odrysowany, można sobie wystawić wielkość téy izby, trzeba położyć i oznaczyć *Podziałkę*, według któréy bok izby przenieśliśmy na papiér: bo inaczéy zapatruiąc się na tén ostatni kwadrat, poznalibyśmy tylko, iaká iest figura izby, a nie wiedzieli ieszcze, iaká iéy wielkość.

Gdyby ta izba była prostokątém maiącym długość łokci naprzykład 12, a szérokości łokci

8; odrysowáwszy na papiérze iakikolwiek prostokąt, którego dwa boki miałyby się do siebie, iak 12 do 8; tén prostokąt podobny do izby, wystawiłby nám iéy figurę, ale nie wielkość: która dopiéro wténczas byłaby poznaná; gdyby się wyraziło, w jakiéy mierze to przeniesienie boków izby na papiérze stało się, czyli to przypisuiąc do boku odrysowanégo że łokci 12, ukazuie, czyli oznaczaiąc iaká iest długość na papiérze wyrażaiącá łokci 10 i t. d.

Mierząc podobnie długość i szérokość domów, dziedzińców, ulic, grubość murów i t. d. można wyrazić na papiérze wszystkié té, iedné względém drugich położéniá i wielkość każdéy z osobna części np. budynku i t. d.

Można potém i drobnieyszé części wyrazić, kładąc położéniá drzwi, okién, i t. d. aby pod iedén razém widok poddadź budynek cały z jego częściami.

Kilkakrotnie takowé roboty czyniąc, nabędą w nich Uczniowie coráz większéy łatwości.

292. *Przykład* 2. Niech będzie na polu Tróykąt, którégo boki wszystkié zmiérzyć można; iedén z tych boków zawiérá łokci 180, drugi 164, trzeci 148.

Zróbmy iakąkolwiek podziáłkę, i według niéy zróbmy Tróykąt, którégo trzy boki zawiérałyby liczbę części równych z téy podziáłki iedén 180, drugi 164, trzeci 148. Ponieważ tén mały Tróykąt má boki w tym samym stósunku, w którym są boki Tróykąta wielkiégo, na polu naprzykład wymiérzoné; niczém więc od wielkiégo Tróykąta różnić się nie będzie, tylko samą wielkością: a zatém będzie nám go mógł wyobrazić, i dá nawet poznać samę wielkość iego, gdy na papiérze wyrazimy podziáłkę, któréy do tego użyliśmy.

293. *Uwági.* W ostatnim przykładzie długości do mierzéniá, były przywiększé, a przeto

gdybyśmy używali w takim razie krótkiéy iakiéy miary, naprzykład łokcia, robota byłaby długá, i bardzo pracowitá; nadewszystko uchybienia małé, których się ciężko uchronić, w przykładaniach następnych, miary, zebrane razém, uczyniłyby omyłkę tym znacznieyszą, im częściéy byłyby powtórzone. Z tego powodu, wniosło się używanie sążni, prętów, a nawet i sznurów, na mieysce łokci.

Do wymiarów tedy długości znacznieyszéy, należy mieć sznur, a iescze lepiéy łańcuch, który pewną liczbę łokci albo sążni w sobie zamyká. Dáymy naprzykład, że łańcuch którego używámy, má w sobie 10 sążni. Takowy łańcuch, do długości 180 łokci, przyłożyć trzeba następnie sześć tylko razy, a iuż całá ta długość będzie wymiérzoná; będzie zatém wymiár i prędszy i pewnieyszy. W takowych wymiarach wielkiéy báczności potrzeba.

1. Należy bydź zapewnionym, że miary brane są w linii prostéy.

Tym końcém zostawuią się żérdzie, w pewnéy od siebie odległości, i w téy linii, którą mierzyć przypadá, tak, aby piérwszá żérdź zasłaniała następuiącé, a osobliwie drugi koniec linii do mierzéniá: trzeba także té żérdzie ustawić prostopadle 1) używaiąc do tego *Pionu* (Perpendiculum).

2. Ieżeli na końcu linii do mierzéniá nie znáyduie się iaki cél znaczny, naprzykład drzewo, róg domu, i t. d. trzeba tam osobliwie, gdy długość iest bardzo wielká, wystawić znak iaki, naprzykład żérdź wysoką z chorągiewką, z táblicą biáłą na wiérzchu, lub z innym podobnym znakiém.

1] Liniią prostopadłą do iakiéy płaszczyzny, *poziomey* (horizontalis) nazywać będziémy *Pionową* [verticalis].

Trzeba ieszcze uważać, aby przykładaniá następné miary, były w linii prostéy; według drogi od żérdzi wyznaczonéy. Przeto tén, co trzymá piérwszy koniec łańcucha lub sznura, powinién się postawić wprost żérdzi, i dadź znak drugiému trzymaiącému drugi koniec, aby i tén wprost niego stanął w téyże saméy linii: albo znowu trzeciá osoba, stoiąc przy końcu iednym linii do mierzéniá, przestrzegać będzie, i uważać przykładaiących miarę, aby z linii prostéy nie zchodzili.

Trzeba się starać, aby przy każdém przykładaniu miary, łańcuch lub sznur, iak náybardziéy był wyciągniony: dlá tego należy go do saméy ziémi przystáwiać, ieżeli ta równá iest wszędzie: albo téż wspiérać go na podporach w pewnéy odległości zostawionych; a tym sposobém nachylénié, któré ciężár łańcucha, lub sznura sprawuie, będzie mniéy znaczné.

I dlá tegoćto, w robotach wielkiéy wági, i osobliwéy dokładności wyciągaiących, łańcucha, ani sznura używać nié można.

5. Trzeba ieszcze mieć báczność, aby do tego samégo mieysca, gdzie się miara iedna skończyła, przykładać znowu koniec sznura, lub łańcucha. Dlá tego należy dlá znaku wbić zaráz żérdkę lub kół w to mieyscé, w któ ém się miara przeszłá zakończyła, a następuiącá má się zaczynać.

6. Trzeba dobrze pamiętać, ilé razy się łańcuch, lub sznur w całym wymiarze przykládał, i aby o tém dlá iakiégo roztargnieniá nie zapomnieć; lepiéy iest za każdym razém naznaczyć sobie to przykładanié, albo na karcie, albo wtykaiąc na końcu każdégo w szczególności wymiaru, znak iaki.

7. Bezpieczniéy także iest, powtórzyć zawsze wymiár całéy długości.

8. Ieżeli polé do wymiérzeniá wcale iest otwarté, i wolné; można ié podzielić na Tróy-

kąty, czyli to prowadząc wszystkié przekątné od iednégo rogu, czyli biorąc bok iedén, za spólną podstawę tylu Tróykątów, ilé będzie pozostałych rogów; czyli iescze wyznáczaiąc punkt w samém polu, i uważaiąc go iak wiérzchołek, albo raczéy zbiég tylu Tróykątów, ilé figura, którą odrysować chcémy, má boków. Zmiérzywszy potém wszystkié boki wszystkich tych Tróykątów, można będzie odrysować na papiérze figurę podobną.

294. *Przestroga.* Tén sposób postępowaniá, w odrysowaniu pola, mierząc w jstocie wszystkié liniie do tego potrzebné, i czasu wielé zabiérá, i rzádko nawet tráfiá się, aby polé tak było wolné, żeby na niém sposobu tego użyć można.

Inszych zatém użyć trzeba w tym razie sposobów, któré się tu przytoczą, zaczynaiąc od łatwieyszych i prostszych. Postrzédz tu łatwo będzie można, iż używanié sposobów trudnieyszych i bardziéy zawikłanych, nie zawisło od prawideł Jeometrycznych, których grunt tenże sám iest zawsze i iednakową dokładność, ale z przyczyny niedoskonałości zmysłów naszych, i ręcznych działań.

295. *Zagádn:* Znaléźć iakiégo célu odległość nie mierząc iéy *bezśrzednie* (immediate), czyli nie udaiąc się wprost, aż do samégo célu.

Sposób 1. W którym samych się tylko żérdzi lub kołów używá.

1. Wymiérzmy podstawę iaką, którąby się z jednéy strony kończyła na punkcie, od którégo odległość célu chcémy wiedzieć. Ta podstawa (dlá większéy w praktyce dokładności) powinná bydź tym dłuższá, im odległość célu, okiém miarkowaná, zdaie się bydź znaczniejszá. Dlá téyże w praktyce dokładności, trzeba iescze takié położénié wybrać téy podstawie, aby prostopadłá, którąby do niéy od célu spuścić można, iak náybliżéy iéy śrzodka przypadła: po-

niewáż ze wszystkich inszych téyże długości podstáw, podstawa z takiém położéniém iest náywygodnieyszá.

2. Wytkniémy kołami ustawionémi od obudwóch podstawy końców, dwie liniie, ku célowi, którégo szukámy, prowadzące.

3. Zmiérzmy od iednégo końca podstawy, dwie iakiékolwiek długości, iednę na podstawie, a drugą na linii kołami, wyznaczonéy; zmiérzmy nadto, i odległość końców, tych dwóch długości iuż wymierzonych. Zróbmy to samo i z drugiégo końca podstawy.

Maiąc té na ziémi wymiary, możémy na papiérze odrysować Tróykąt podobny tému, który má za podstawę liniią na ziémi wymiérzoną, a za wiérzchołek, punkt tén, którégo odległości szukámy.

Iakoż wyraziwszy na papiérze podstawę przez liniią iakąkolwiek, można będzie przy obudwóch końcach téy linii odrysować dwa Tróykąty, których boki takby się miały do siebie, iak się maią długości na ziémi wymiérzoné (pod liczbą 3): a zatém i liniie, które się ciągnęły od końców podstawy na ziémi, do punktu, którégo odległości szukámy, będą tak do téy podstawy nachylone, iak i liniie dwie na papiérze, od końców linii wyrażaiącéy podstawę prowadzone, nachylaią się do téyże podstawy.

296. *Przestroga.* Tén sposób wielkiéy bardzo wyciągá báczności, tak w działaniach na ziémi, iako i w przenoszéniu ich na papiér. W tym razie tylko można go użyć, gdy i odległości nie są znaczné, i wielká dokładność nie potrzebná: gdy naprzykład wyobrażénié tylko chcémy sobie uczynić nieznaiomey odległości iakiégo célu; wyznaczéniè według tego sposobu położéniá punktu iakiégo niedostępnégo, od tego zawisło, aby dóyść nachyléniá iedney linii wiadomey, toiest podstawy, do dwóch inszych prowadzonych od obudwóch końców téyże podstawy, ku punktowi,

którego położéniá szukámy: ponieważ gatunek Tróykątá, témi trzéma liniiami zawartégo, a zatém i stósunek iego boków iuż wyznaczony będzie przez té nachyléniá. *Stolik Jeometryczny* (Tabula Pretoriana) i *Kątomiérz* (Graphometrum, albo Instrumentum Goniometricum) sąto dwa narzędziá szczególniéy używané do wyznaczéniá bezśrzednie takowych nachyléń.

Sposób 2. Przez stolik Jeometryczny.

297. Nie bawiąc się nad opisaniém tego narzędziá, i sztuk do niego należących (bo samo rzucénié oka, dopiéro używanié, więcéy w téy mierze nauczy, niż opis choćby téż náyobszérnieyszy), przestrzédz tylko należy, że lepiéy iest mieć przy stoliku, gdy kogo stać na to, perspektywy opatrzoné nitkami, w kąt prosty przecinaiącémi się, niżeli proste *Célowniki* (dioptrae) i że ténże stolik ustawić należy *poziémnie* (horisontaliter) iak będzie można náyrówniéy: do czego *prawidła* (Alidae) *albo* Regulae 1) z ruchomémi perspektywami, daleko są lepszé, niżeli té, przy których perspektywy lub Célowniki są nieruchomé 2).

Aby wyznaczyć przez stolik odległość tę, w któréy od iakiégo punktu niedostępnégo zostaiémy; powinná do tego wymiérzoná bydź podstawa na ziémi, z ostrożnościami wyżéy wzmiankowanémi, co do iéy położéniá i wielkości: trzeba potém postawić stolik na końcu iednym téy podstawy, i wyrazić tam iéy długość, i położénié, a to przez liniią kierowaną, przez prawidło wzdłuż téyże podstawy ustawioné. Nachylé-

---

1) Prawidło, iedno iest to, co i liniiał: że zaś przy stolikach Jeometrycznych, łączy się razém i spaia z célownikami lub perspektywami, dlá tego się odmiénnego nazwiska użyło.

2) Célowniki im są wyższé, tym lepszé, bo bez nachyleniá, lub podniesieniá stolika, można przez nie widzieć cél iaki na dole, lub w górze wystawiony.

nié podstawy do linii poprowadzoney od iéy końca ku punktowi niedostępnemu, wyrazimy na stoliku, przez liniią od końca podstawy wiedzioną przy prawidle, ku témuż punktowi zkierowanym. To zrobiwszy, przeniesiémy stolik na drugi koniec podstawy, na ziémi wymiérzoney, i podobnie sobie, iak przy piérwszym końcu podstawy postąpimy, ciągnąc znowu przy prawidle liniią od końca drugiégo podstawy na stoliku wyrażoney ku punktowi, którego odległości szukámy. Tróykąt wykréślony tym sposobém na stoliku, podobny będzie Tróykątowi na ziémi zamkniętému między podstawą wymiérzoną, i dwoma bokami, któreby od iéy końców prowadzone schodziły się w punkcie zostaiącym w odległości niedostępney; a zatém wielkości liniy na stoliku wykréślonych, i podług podziałki wymierzonych, dadzą nám poznać i wielkości liniy odpowiadaiących na ziémi. I tak niechby naprzykład długość podstawy na ziémi, była 200 sążni, którą wyrażá na stoliku liniiá zamykaiącá w sobie 200 równych części wziętych z iakiéykolwiek podziałki. leżeli drugá liniiá na tymże stoliku poprowadzoná od końca piérwszéy wyrażaiącéy podstawę, má w sobie podług téy saméy podziałki, naprzykład, 180 części: to będzie dowodém, że i liniiá odpowiadaiącá iéy na ziémi, zawiérá 180 sążni.

298. Używanié stolika nie rozciągá się, tylko do długości pomiernych. Náywiększá taká długość, do któréy ieszcze stolika użyćby można, nie powinná przechodzić 300, a náywięcéy 400 sążni. Szczupłość narzędziá tego, a zatém i linii przez które musimy na niém wyrażać liniie uważané na ziémi, czyni uchybiéniá tym znacznieyszé, im większé są té ostatnié długości. Możémy iednak używać stolika, gdy idzie tylko o wyrażénié na papiérze gruntu iakiégo nie bardzo rozległégo i prawie forémnego: albo gdy tylko wewnętrzné mieysca gruntu, chociáż obszér-

nego wyznaczyć potrzeba, którego położénié punktów znamienitszych, iuż wyznaczoné iest sposobém dokładnieyszym: który zaráz wyłożę.

299. *Sposób 3. przez Kątomiérz* 1).

Wystawiénié przed oczy tego narzędziá, a potém używanié, dá go náylepiéy poznać. Tę tylko, co i względém stolika uwágę przydadź należy, że kątomiérze z ruchomémi prawidłami, na płaszczyźnie pionowéy ustawioné, i perspektywami opatrzoné, lepszé są od tych, któré maią prawidła nieruchomé, zwłaszcza że wielé na tém zawisło, aby kątomiérz był zawsze poziémnie ustawiony: a długié i trudné iest działanié, chciec przywieśdź do iednéy płaszczyzny kąty na różnych płaszczyznach uważané.

Kątomiérz na to służy, aby przezeń stopniami wyznaczyć kąty, które tylko liniiami na stoliku oznaczoné były. Ponieważ zaś narzędzié to bywá małé, tak dla większéy wygody, iak i tanności; przeto nié można oznaczyć na iego brzegu podziałów mnieyszych od stopnia: przydaią mu zwyczaynie na to mieyscé podział inszy, któryśmy wyżéy nazwali *podziałém Nonniusza*, aby tym sposobém i minut dochodzić można, przynáymniéy do 3, 4, lub 5, według wielkości narzędziá: co dosyć iest w zwyczaynych na ziémi działaniach.

Niechby łuk koła, wzięty na brzegu prawidła ruchomégo (który łuk powinién iak náybardziéy przystáwać do brzegu Kątomiérza) i zawiéraiący w sobie naprzykład 11 stopniów, podzielony był na 12 części równych; każdy takowy podział tego łuku zawiérać będzie stopién 1, mniéy; $\frac{1}{12}$ stopnia, toiest mniéy 5 minutami;

1) Nauczyciele nié maiąc Kątomiérza, ukażą Uczniom przenośnik, który małością tylko różni się od Kątomiérza, i tém, że nié má przydanych sobie prawideł z Celownikami.

a zatém, gdy dwa podziały, iedén prawidła, a drugi stopnia zeydą się z sobą; odległości piérwszych, drugich, trzecich i t. d. podziałów, wyrażać będą: 5, 10, 15, i t. d. minut. Gdy punkt naznaczony ♀, w podziale prawidła, toiest, punkt odpowiadaiący *Osi* (Axis) prawidła, albo perspektywy, schodzi się z podziałém brzegu Kątomiérza; liczba stopniów na tym brzegu wyrażoná, zupełnie oznácza w stopniach wielkość kąta, który czynią dwa prawidła. Ale gdy tén punkt nie schodzi się z podziałém brzegu, kąt, którego szukámy, różnić się będzie 5, 10, 15, i t. d. minutami co do wielkości swoiéy, od liczby stopniów wyrażoney przy podziale náybliższym, podług tego, iaki będzie podział prawidła czy piérwszy, czy drugi, czy trzeci i t. d. który się zeydzie z podziałém brzegu.

Aby przez Kątomiérz wyznaczyć odległość punktu niedostępnégo.

Trzeba naprzód, aby była wymiérzoná podstawa, położywszy potém Kątomiérz, na końcu iednym podstawy, tak aby prawidło nieruchome przypadło na tęż podstawę, céluię drugiém prawidłém ruchomém, do punktu, którego położénié chcę wiedzieć. Toż czynię, i na drugim końcu podstawy; a tym sposobém będę miáł dwa kąty wiadome przy podstawie.

Pociągnę daléy na papiérze, iakąkolwiek liniią, którąby podstawę wyrażała, i zrobię przy niéy dwa kąty z obustron równé kątom uważanym na ziémi. Punkt tén, w którym dwa tych kątów ramiona przecinać się będą, pokáże na papiérze położénié punktu, którego szukám, i iego odległość od iednégo z końców linii wyrażaiącéy podstawę tak się mieć będzie do téyże linii, iak się má punktu niedostępnégo na ziémi odległość, od końca podstawy tamtému odpowiadaiącégo, do saméy podstawy. Piérwszy stósunek z podziałki wyznáczony będzie, a zatém wynáydzie się odległość żądaná przez pro-

porcyą: któréy trzy piérwsze wyrazy będą wiadome, toiest, iak się má liniiá wyrażaiącá podstawę na papiérze, do podstawy na ziémi; tak się má liniiá na papiérze odpowiadaiącá odległości, któréy szukámy, do téyże odległosci.

Gdyby dwa takié punkta były niedostępné, których odległości nie wiémy; możnáby każdégo z nich w szczególności wyznaczyć położénié względém linii wymiérzonéy, i wziętéy za podstawę: tak się albowiém mieć będzie liniiá na papiérze wyrażaiącá podstawę, do linii wyrażaiącéy także na papiérze położéniá punktów dwóch niedostępnych, (któryto stósunek wiadomy iest z podziałki); iak się má podstawa na ziémi wymiérzoná, do odległości na ziémi dwóch punktów niedostępnych.

Iakążkolwiek zgoła byłaby liczba punktów na ziémi, którychbyśmy położénié wyznaczyć chcieli, nie mierząc wszystkich tych odległości, któremi są té punkta oddzielone, można podobnym iak wyżéy sposobém i odległość tę wyznaczyć, i położénié każdégo z osobna punktu względém podstawy, z któréy dwóch końców wszystkié té punkta widziane bydź mogą: i według tego wyznaczyć potém na papiérze tak położéniá, iako i odległości odpowiadaiącé tamtym punktóm.

Można więc będzie tym sposobém odrysować mappę i obszérnieyszéy sztuki ziémi, któréy punkta do tego potrzebné, widzialné są z dwóch iakich inszych punktów.

Gdyby zaś nie wszystkié té punkta, których położéniá wiedzieć chcémy, były niedostępné, można w tym razie przenieść się do dostępnych, i obrać iedén z nich, lub dwa za nowé *punkta stanowiska* (puncta stationis) toiest takié, z których położénié inszych punktów, mogłoby bydź wyznaczoné; i znowu wyznáczać położéniá tych punktów, któré albo z jednégo tylko z piérwszych punktów stanowiska, albo z żadnégo nie były widzialné; biorąc zawsze za podstawę odległość

dwóch punktów, których położénié iuż wyznaczoné iest przez rysunek. Można podobnym sposobém działanié to rozciągnąć, i do odrysowaniá mieysc obszérnieyszych.

Lubo przepisy tu podané, są z siebie dokładné i iasné; atoli w wykonaniu ich, wielkiéy báczności przykładać należy: bo inaczéy, tym większé będą w rozmiarach błędy, i uchybiéniá, im odległości do mierzéniá podané, są znacznieyszé, i działaniá w nich bardziéy zawisłé iedné od drugich. Nie będziémy się tu bawić nad podáwaniém drobnieyszych w téy mierze uwág, i służących tym tylko uczniom szczególniéy, których powołanié wezwie w czasie, do pilnowaniá z Urzędu takowych działáń, znáydą ci bardzo dobré do tego się ściągaiące nauki, w różnych Xiążkach, między inszémi w trzeciéy Xiędze pod tytułém *Institutiones Mathematicae* przez X. Metzburga, w Wiédniu 1777, wydanéy.

300. Tego się szczególniéy w podobnych rozmiarach strzédz potrzeba, aby, tak té kąty, któré uważámy przy punktach stanowiska nie były bardzo ostré, iako i té, któré sobie wystawić w myśli można przy punktach, których położéniá szukámy, i które zawarté byłyby między dwiéma liniiami prowadzącémi od punktów dwóch stacyy do tamtych punktów. Dlá tego podstawa powinná bydź tym większá; im większá odległość, któréy szukámy, i położénié punktów takié, aby prostopadłé od nich spuszczoné, ilé możności, przypádały na podstawę nieprzedłużoną, albo przynáymniéy małoco przeciągnioną. Małé uchybiénié w kącie, przy podstawie, pociągá za sobą tym większé uchybiénié w bokach; im większé są nie tylko té samé boki, ale i ich kwadraty: a zatém, gdy kąty przy podstawie są bardzo ostré, albo téż, gdy ich summa nie wielé się różni od summy dwóch kątów prostych; w takim razie trzeba odmiénić iedno, lub obadwa stanowiska. A ieżeliby między punktami, których położénié

i odległość iuż iest wyznaczoná, nie znáydowały się dwa inszé takié, aby liniiá łączącá ié zdatná była do wyznaczéniá inszych punktów pozostałych, trzeba w takim razie brać punkt iakikolwiek mogący wygodnie służyć za stanowisko, z ostrożnościami wyżéy spomnionémi; choćby nám z siebie nie był potrzebny do tego célu, którysmy sobie szczególniéy założyli.

Gdy w działaniá wchodzić muszą takié wymiary, z których iedné zawisły od drugich; należy przynáymniéy bydź zapewnionym, że w tén związek działáń nie wplątały się błędy, z których rozmnożéniá urosłoby znacznieyszé iakié uchybiénié.

Przeto można w rzeczy saméy wymiérzyć odległość iednę z tych, których doszliśmy z przeniesiéniá figury na papiér, i uważać, czyli się nie różni od téy, którá wyznaczoná była przez proporcyą, któréy dwoma wyrazami były dwa boki na papiérze, trzecim podstawa na ziémi, a czwártym odległość szukaná; albo téż wynalezioną odległość dwóch punktów, wziąć za podstawę i szukać z niéy położéniá końca iednégo z dwóch, piérwszéy podstawy, tak właśnie, iak gdyby ta była nám ieszcze niewiadomá: a gdy się pokáże, że z tego powtórnégo działaniá wypadnie to położénié punktu, co z piérwszégo, albo małoco różnić się będzie, można to mieć za dowód dosyć pewny, że w ciągu działáń nie było uchybiéniá, przynáymniéy znacznieyszégo: ponieważ z dwoiakiégo takiégo działaniá, iednakowé położénié wypaśdźby inaczéy nié mogło, chyba, żeby iedén błąd poprawił, a bardziéy nagrodził drugi: co się rzádko tráfiá.

Iakążkolwiek iednak ostrożność będzie i dokładność w działaniach na gruncie, czyli to w wymierzéniu podstawy, czyli w braniu kątów; przenoszénié atoli na papiér tych działáń, będzie podlegać wielkim niepewnościóm.

Trudność ta ostatniá ztąd szczególniéy wyni-

ká, że pewną liczbę stopniów brać przychodzi na przenośniku, albo cyrklu proporcyonalnym. Na tych zaś dwóch narzędziach, ciężko iest wyznaczyć liczbę stopniów, a niepodobná wyznaczyć liczbę minut, które się pospolicie w kącie danym znáyduią. Nuż tedy uchybiénié będzie w połowie tylko stopnia, albo 30 minutach; tén nie wielki na oko błąd, pociągnie za sobą inszy większy w liniiach, których długość różnić się stąd będzie od práwdziwéy, 30stą, 20stą, a czasém i 10tą częścią tychże samych liniy: a tén błąd tym większé uchybiénié w długościach, czyli wielkościach liniy sprawi; im mnieyszá względém nich była ta liniiá, którą wzięliśmy za promień. Zrzódło to omyłek mniéy wpływać będzie w takowé uchybiéniá, gdy iuż nám skądinąd wiadomé są długości boków należących do Figur, które rysować mámy: a té długości są pospolicie zamiarém szczególnieyszym działań mierniczych. Gdyby naprzykład trafiło się, żeśmy w pół linii lub w całéy linii uchybili, biorąc na podziáłce iakąkolwiek długość: omyłka ta, która stąd wyniknie, względém położéniá na papiérze liniy, figurę iaką zamykaiących, będzie tym mnieyszá; im dłuższé były liniie, któreśmy przenosili.

Szukano więc sposobu, aby wszystkié działaniá na gruncie, tak można było przenieść na papiér, żeby té wyráżały się w takich Tróykątach, których boki byłyby nám wiadomé, toiest, żeby można odrysować na papiérze z pomocą saméy podziáłki, figury podobné tym, któréśmy na gruncie uważali. Maiąc tedy daną liczbę ilości w liniiach lub w kątach, dostateczną do wyznaczéniá całégo Tróykąta, szukano sposobów, i znaleziono ié, iakby stąd dóyść ilości pozostałych w liniiach i kątach iescze niewyznaczonych.

Część Ziémiomiérstwa, która na to przepisy dáie, nazywá się *Trygonometryą*, albo *Tróykąt-*

miérstwém: a to dlá tego, że szczególniéy rzecz tam iest o Tróykątach, iako tych, od których wyrachowaniá, wszystkich inszych wielokątów wyrachowanié zawisło. Iestto część náyznakomitszá Matematyki, nazwaney (*Mathesis pura*): przystósować ią bardzo często można do Matematyki, którą nazywać można, *Miészaną*, idąc za łacińskiém nazwiskiém (*Mathesis mixta*): iakoto do Mechaniki, albo nauki o machinach, czyli silniach: do Optyki, albo nauki o widzéniu, a náywięcéy do Astronomii, czyli nauki Gwiázdarskiéy: i dlá tego ta część szczególnieyszéy uwági i zastanowiéniá się Uczniów wyciągá.

Przygotowanié do Rozdziału następuiącego o Logarytmach.

Ponieważ o Logarytmach dokładniéy mówić się potém będzie; tu tylé tylko o nich powiémy, ilé potrzeba umieć, aby ié przystósować można do rozwiązaniá reguły trzech, i wyciągniéniá piérwiástku kwadratowégo.

301. Logarytmy, sąto liczby odpowiadaiące liczbóm cáłkowitym, i następnym: 1, 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. w tén sposób, że té piérwszé liczby, czyli Logarytmy, iedné do drugich dodané, odpowiadaią tym ostatnim, gdy są iedné przez drugié rozmnożoné.

I tak znáyduiémy w táblicach logarytmowych przy liczbach - - - - - -

	2,	i	3.
Logarytmy:	0, 301	030	0.
	0, 477	121	3.
	0, 778	151	3

Ich summa iest logarytmém liczby 6, którá się robi z rozmnożéniá 2, przez 3.

W zwyczaynych táblicach logarytmowych, logarytmy liczb:

10,	są	1
100	są	2
1000	są	3
10000	są	4.
i t. d.		i t. d.

Logarytmy liczb mnieyszych od 10, ale większych od 1, są ułomki dziesiątné, niemaiące żádnéy liczby cáłkowitéy.

I tak Logarytmy liczb:

2,	są	0, 301 030 0.
3,	są	0, 477 121 3.
4,	są	0, 602 060 0.
5,	są	0, 698 970 0.
i t. d.		i t. d.

302. Ponieważ zaś rozmnożénié iákiéy liczby przez 1, żádnéy odmiany w niéy nie sprawiá; przeto i dodanié logarytmu iedności, do logarytmu téy liczby, odmiénić tego logarytmu nie powinno: Logarytm więc iedności iest zero albo 0.

Logarytmy liczb między 10, i 100, są iedności z przydanémi ułomkami dziesiątnémi.

Logarytmy liczb między 100, i 1000, między 1000, i 10000, i t. d. są liczby cáłkowité piérwszych, 2, drugich, 3, i t. d. z przydanémi ułomkami dziesiątnémi.

Znak piérwszy logarytmu liczby cáłkowitéy iest częścią náyznakomitszą tegoż logarytmu, ponieważ daie poznać z jak wielu znaków składá się liczba cáłkowitá, któréy iest logarytmém. Tak naprzykład, znak logarytmu piérwszy: 0, 1, 2, 3, 4, i t. d. daie poznać, iż liczba, któréy odpowiadá, zawiérá się między 1, a 10, albo między 10, a 100, albo między 100, a 1000, albo między 1000, a 10000, albo między 10000, a 100000 i t. d. toiest má w sobie iedén, dwa,

trzy, cztéry, pięć, i t. d. znaków liczb całkowitych. Dlá tego też piérwszy znak Logarytmu nazywá się iego *Céchą* (Characteristica).

303. Gdy dwa logarytmy, maią iednakowé ułomki dziesiątné, 1) a cécha ich tylko iest odmiénná; w takim razie liczby im odpowiadaiącé, są 10, 100, 1000, i t. d. razy większé iedna od drugiéy, podług tego, iak cécha ich logarytmu większá będzie iedna od drugiéy, dwiéma, trzéma i t. d. iednościami. I tak logarytm liczby: 20, 200, 2000, i t. d. będzie: 1, 301 030 0. 2, 301 030 0. 3, 301 030 0. i t. d. toiest, będzie tén sám, co i Logarytm liczby 2, przydáwszy mu Log: liczb 10, 100, 1000 i t. d.

Trzeba przez kilka przykładów wprawić Ucznie w to piérwszé działanié, biorąc takié liczby, któréby nie większé były, od náywiększéy liczby táblic logarytmowych.

304. *Przykład* 1. Rozmnożyć 28 przez 32.

Log: liczby	28	-	1, 447 158 0,
		iest	
Log:	32	-	1, 505 150 0,
Summa Log:		-	2, 952 308 0.

I ta summa powinná bydź logarytmém liczby rozmnożonéy z 28 przez 32. Iakoż w táblicach logarytmowych przy logarytmie, 295 230 80, znáydziémy liczbę 896; któráto liczba wypádá w saméy rzeczy z rozmnożéniá 28 przez 32.

Przykład 2. Rozmnożyć trzy liczby: 16, 24, 26,

Log:	16,	-	1, 204 120 0.
Log:	24,	-	1, 380 211 2.
Log:	26.	-	1, 414 973 3.
Summa Log:	-	-	3, 999 304 5.

I to iest logarytm liczby 998 4, która wypádá z rozmnożéniá trzech liczb: 16, 24, 26.

---

1) Té ułomki w Logarytmie, nazywaią Autorowie piszący po Łacinie: *Mantyssa.*

305. Ponieważ kwadrat iakiéy liczby, iest ta sama liczba przez siebie rozmnożoná; więc logarytm tego kwadratu, będzie równy logarytmowi liczby z któréy kwadrat powstał, dwa razy wziętému.

Przykład 1. Log: 2, - 0, 301 030 0.

Tenże dwa razy wzięty 0, 602 060 0, będzie logarytmém kwadratu z 2, toiest 4.

Przykład 2. Log: 56 - - 1, 748 188 0.
Dwa razy wzięty: - - 3, 496 376 0.
będzie Logarytmém kwadratu z 56,
toiest: - - - 3, 136.

306. W dzieléniu, liczba podzielná równa się liczbie dzielącéy, przez wieloráz rozmnożonéy; a zatém logarytm liczby podzielnéy, równa się logarytmowi liczby dzielącéy dodanému do logarytmu wielorazu; a stąd logarytm tego wielorazu, będzie różnicą między logarytmami liczby podzieloney i dzielącéy.

Przykład 1. Podzielić 6 przez 2.
Log: 6. - 0, 778 151 3.
Log: 2. - 0, 301 030 0.
Różnica - 0, 477 121 3. iest logarytmém wielorazu, toiest 3.

Przykład 2. Podzielić 1632 przez 34.
Log: 1632 - - - 3, 212 720 2
Log: 34 - - - 1, 531 478 9
Różnica - - 1, 681 241 3 iest logarytmém wielorazu, toiest 48.

307. W proporcyi: średnie liczby, iedna przez drugą rozmnożoné, równé są skraynym podobnie rozmnożonym, iako się to w Arytmetyce i w Rozdziále o proporcyach wywiodło. Przeto iednę z skraynych liczbę znáyduiémy, dzieląc średnié liczby w tén, iak wyżéy, sposób rozmnożoné, przez drugą liczbę skrayną: a zatém i logarytm liczby iednéy skrayney wynáydziémy, odiąwszy od summy logarytmów

dwóch liczb średnich, logarytm drugiéy liczby skrayney.

Przykład 1. 35 Robotników, zrobiło 45 sążni pewnéy roboty, ileż w tym samym czasie zrobi 42 robotników, z równą usilnością pracuiących?

Log: 42	-	-	1, 623	249 3.
Log: 45	-	-	1, 653	212 5.
Summa	-	-	3, 276	461 8.
Log: 35	-	-	1, 544	068 0.
Różnica	-	-	1, 732	393 8.

iest logarytmem żądanym, liczby 54.

308. Zamiast odeymowaniá, któréby należało czynić w logarytmach, używá się wygodnie dodáwaniá w ten sposób: Logarytm liczby dzielącéy, a bardziéy iego cécha, odeymuie się od liczby całkowitéy 10, i reszta dodaie się do logarytmu liczby podzielnéy, a od summy, znowu się 10 odcina.

Defin: Różnica logarytmu liczby iakiéy od 10, nazywá się *dopełnieniem* (complementum) tego logarytmu.

Przykład. Podzielić 6 przez 2.

Log: 6	-	-	0, 778 151 3.
Log: 2, 030 103 00 Dopełnienie tego logarytmu	-		9, 698 970 0.
Summa	-		10, 477 121 3
Log: wielorazu	-		0, 477 121 3.

iest Log: 3.

Podzielić 1632 przez 34.

Log: 1632	-	-	3, 212 720 2.
Log: 34, 1, 531 478 9. Dopełn:			
Log: 34,	-	-	8, 468 521 1.
Summa	-	-	11, 681 241 3.
Log: wielorazu			1, 681 241 3.

iest Log: 48.

Ten sposób postępowaniá osobliwiéy iest wygodny w Regule Trzech, gdzie odeymowanie następuiące, po dodáwaniu, mogłoby w długich

zwłásoza rachunkach, omyłki iakiéy dadź okazyą. Można zaś i niewielką nawet w rachowaniu maiąc wprawę, na pamięć czynić to odeymowanié, które potrzebné iest do otrzymaniá dopełniénia logarytmu, które się potém dodaie na mieyscé logarytmu odeymować się maiącego.

Przykład 1. 35 Robotników, zrobiło 45 sążni, ileż zrobi 42 rob:?

Log:	42	1, 623 249 3.
Log:	45	1, 653 212 5.
Dopełniénié Logar:	35	8, 455 932 0.
Summa, któréy cécha zmnieyszoná liczbą	10	1, 732 393 8.

Przykład 2. Bok iedén prostokąta má 1344, a drugi 1445 łokci. Trzeba go zamiénić na inszy prostokąt iému równy, którégo bok iedén má zawiérać 1440 łokci?

Log: 1344	-	3, 128 399 3.
Log: 1445	-	3, 162 863 0.
Summa	-	6, 291 262 3.
Log: 1440	-	3, 158 362 5.
Różnica	-	3, 132 899 8. iest Logarytmém liczby, któréy szukaliśmy, toiest 1358.

309. Ponieważ Logarytm Kwadratu, dwa razy iest większy, niż Logarytm piérwiástku; przeto Logarytm piérwiástku, iest połową logarytmu kwadratu. Aby tedy wyciągnąć z liczby piérwiástek kwadratowy; trzeba wziąć połowę logarytmu téy liczby.

Przykład 1. Wyciągnąć piérwiástek kwadratowy z 4.

Log: 4	-	0, 602 060 0.
Połowa	-	0, 301 030 0. iest logarytmém piérwiástku, toiest 2.

Przykład 2. Wyciągnąć piérwiástek kwadratowy z 7569.

Log: 7569 - 3, 879 038 5.
Połowa - - 1, 939 519 2. iest logarytmém piérwiástku, toiest 87.

Przykład 3. Boki prostokąta są: 378, i 672, iakiż będzie bok kwadratu iému równégo w powiérzchni?

Log: 378 - 2, 577 491 8.
Log: 672 - 2, 827 369 3.
Summa - - 5, 404 861 1.
Połowa - - 2, 702 430 5. iest logarytmém liczby szukanéy, toiest 504.

310. *Co się tycze logarytmów ułomków dziesiątnych.*

Niech będzie liczba np. 1764, któréy logarytm: 3. 246 498 6. Podzieliwszy tę liczbę przez 10, logarytm wielorazu powinien mieć iedną iednością mniéy w césze swoiéy (303). Logarytm tedy liczby 176, 4, będzie - 2. 246 498 6. Podobnie log: 17, 64, będzie - 1. 246 498 6. Log: 1, 764 - 0, 246 498 6.

Dzieląc 1764, przez 1000, logarytm wielorazu, toiest liczby 1, 764, má cechę mnieyszą 3 iednościami, niżeli miał logarytm liczby 1764, niepodzieloney. Gdyby tedy przyszło, 1764 dzielić przez 10 000, 100 000, 1 000 000, i t. d. Logarytmy wielorazów, toiest ułomków dziesiątnych: 0, 1 764. 0, 0 1 764, 0,001 764 i t. d. powinnyby mieć 4, 5, 6, i t. d. iednościami mnieyszą cechę, niżeli miał logarytm liczby 1764, niepodzieloney. Ze zaś cécha logarytmu liczby 1764, iest 3, a céchy logarytmów liczb: 10 000, 100 000, 1 000 000, i t. d. są: 4, 5, 6, i t. d. toiest liczby większé od 3, od których iéodeymować przypádá; więc dlá większéy w odeymowaniu wygody uważá się, iakoby cécha 3, powiększoná była 10 iednościami, i dopiéro od tak powiększoney odeymuią się céchy liczb dzielących: 10 000, 100 000, 1 000 000 i t. d. toiest céchy: 4, 5, 6, i t. d. pamiętaiąc zawsze na to przydanié i zmnieyszaiąc znowu resztę, toiest,

logarytm wielorazu tąż liczbą 10; będzie więc log. $\frac{1764}{1000}$, albo 0, 1 764=13, 246 498 6—4 1)= 9, 246 498 6, toiest dla dodanych 10, do céchy 3, będzie w saméy rzeczy = 9, 256 498 6—10: Tak też Log: 0,01 764, będzie=8,246 498 6—10. log. 0. 001 764 będzie = 7, 246 498 6 — 10. i t. d.

Przykład 1. Rozmnożyć 24 przez 0, 5.

Log: 24=1,380 211 2.
Log: 0,5=9,698 970 0.— 10.

Summa=1,079 181 2.=Log: 12, toiest liczby wypádaiącéy z rozmnożéniá 24 przez 0,5.

Przykład 2. Rozmnożyć 24 przez 0,05.

Log: 24=1,380 211 2.
Log: 0,05=8,698 970 0.—10.

Summa=0,079 181 2. iest logarytmém liczby rozmnożonéy.

Tén logarytm nie znáyduie się w táblicach logarytmowych z céchą 0, ale się znáyduié z céchą 1, i odpowiadá mu liczba 12; a zatém liczba, któréy szukaliśmy, będzie 10 razy mnieyszá, toiest 1, 2.

Przykład: 3. Podzielić 32 przez 0, 5.

Log: 32 = 1,505 150 0.
Log: 0,5= 9,698 970 0. — 10.

Reszta 1,806 180 0 iest logarytmém wielorazu, toiest liczby 64.

Odeymuiąc 9.698 970 0, od 1,505 150 0, odeymowalibyśmy 10 razy więcéy, niż potrzeba; więcby to 10 do reszty przydadź należało. Na iedno zaś wyydzie, gdy té 10, któremi iest powiększoná liczba maiącá się odeymować, przydámy téż i do liczby, od któréy ią odeymować

1) Znak — kładzie się przed tą ilością np. przed tą liczbą, która má bydź od drugiéy odiętą.

przypádá, toiest, gdy odeymuiémy 9,698 970 0 od 11,505 150 0.

Przykład 4. Podzielić 144, przez 0, 06.

Log: 144 = 2,158 362 5.
Log: 0,06, = 8,778 151 3. — 10.

Różnica - - 3,380 211 2. iest logarytmém wielorazu, toiest liczby 2400.

Co do ułomków zwyczaynych.

311. Ponieważ ułomek uważać można, iako oznáczaiący dzielénié licznika iego przez mianownika; będzie zatém logarytm ułomka równy różnicy między logarytmém licznika iego i mianownika.

Niech będzie naprzykład ułomek niewłáściwy $\frac{7}{5}$.

Log: 7. - 0,845 098 0.
Log: 5 - 0,698 970 0.

Różnica - - - 0,146 128 0 = Log: $\frac{7}{5}$

Można się o tém przekonać używszy ułomka dziesiątnégo zamiást ułomka $\frac{7}{5}$, będzie albowiém $\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1,4$.

Log: 14 - 1.146 128 0.
A zatém Log: 1,4 - 0.146 128 0.

312. Gdyby ułomek był właściwy, toiest gdyby licznik iego był mnieyszy od mianownika; w takim razie logarytm licznika byłby téż mnieyszy od logarytmu mianownika. Aby więc można odiąć logarytm mianownika od logarytmu licznika; pożyczámy 10 temu logarytmowi iak wyżéy (310) w podobnym przypádku.

Przykład 1. Niech będzie ułomek $\frac{2}{5}$.

Log: 2 = 0,301 030 0.
Log: 5 = 0,698 970 0.

Log: $\frac{2}{5}$ = 9,602 060 0. — 10.

Przykład 2. Trzeba znaléźć Log: $\frac{7}{15}$.

Log: 7 = 0,845 098 0.
Log: 15 = 1,176 091 3.

Log: $\frac{7}{15}$ = 9,669 006 7. — 10.

Przykład: Trzeba znaleźć log: $\frac{1}{25}$.

Log: 1 = 0,000 000 0.
Log: 25 = 1,397 940 0.

Log: $\frac{1}{25}$ = 8,602 060 0. — 10.

Zdaie się, iżby przystało używać odmiennego iakiego znaku cechy, gdy ta należy do logarytmu odpowiadaiącego ułomkowi, aby ią zaraz na weyrzénié rozeznać można od cechy logarytmu, który liczbie całkowitéy odpowiadá.

313. Kiedy logarytm iaki, nie znáyduie się w Táblicach, można wtedy liczbę, któréy odpowiadá, wyznaczyć; albo z zupełną dokładnością albo z małém uchybiéniém.

Przykład 1. Iakiż iest wieloráz 5, przez 4 podzielonych?

Log: 5 - - 0.698 070 0.
Log: 4 - - 0.602 060 0.

Różnica - - 0.096 910 0.

Logarytm ostatni oznáczaiący różnicę dwóch piérwszych logarytmów, nie znáyduie się w Táblicach ani z cechą 0, ani z cechą 1; ale się znáyduie z cechą 2; liczba onému odpowiadaiącá, iest 125: ale że tén logarytm má cechę 2; więc nasz będzie odpowiadáł liczbie 100 razy mnieyszéy, toiest 1,25.

Przykład 2. Trzeba znaleźć kwadrat z 299, maiąc tylko Táblice Log: nie daléy rozciągaiącé się, iak do 10000, toiest takié, których náywiększy Log: iest: 4 000 000 0.

Log: 299 - - 2.475 671 2.
Tenże podwoiony - 4.951 342 4.

Drugiégo tego logarytmu w táblicach zwyczaynych nie znáyduiémy. Zmnieyszmy więc iednością cechę iego: tén Logarytm zmnieyszony 3.951 342 4, lubo co do wszystkich liczb swoich, nie znáyduie się w táblicach; znáyduiémy go iednak co do piérwszych, i máloco większy iest od Log: 3.951 337 5. a mnieyszy od 3,951 386 1.

Piérwszy z tych logarytmów znáyduiących się zupełnie w Táblicach: iest Log: liczby 8940, a drugi Log: liczby - - - - 8941,

A zatém liczba, któréy szukámy, będzie między 8 940 0 - - - - - - - 8 941 0.

Logarytm dany przewyższá logarytm piérwszy Táblicowy liczbą 49; mnieyszy zaś iest od drugiégo logarytmu Táblicowégo liczbą 437. Ta tedy któréy szukámy liczba, powinná daleko więcéy zbliżać się do 8 940 0, niż do 8 941 0.

Widzimy z tablic, że kilka logarytmów, któré następuią po logarytmach liczb 8940, i 8941, maią tę samę, co i té logarytmy różnicę, toiest 486, tak, iak i różnica liczb im odpowiadaiących iest taż sama, toiest 1: a zatém ieżeli różnica między logarytmém danym i logarytmém Táblic iému náybliższym, iest naprzykład połową, lub trzecią częścią, lub czwártą, i t. d. różnicy między tymże náybliższym logarytmém, i drugim, zaráz po nim następuiącym, to też i różnica między liczbą odpowiadaiącą logarytmowi danému, a liczbą odpowiadaiącą logarytmowi náybliższému, będzie prawie połową, trzecią częścią, czwártą i t. d. iedności, któráiest różnicą między dwiéma liczbami naturalnémi, po sobie idącémi. Ze tedy różnica 49, iest prawie $\frac{1}{10}$ częścią różnicy 486; więc i różnica liczby szukanéy dla dodatku liczbie 8940, będzie dziesiątą częścią iedności, toiest 0, 1; a zatém liczba odpowiadaiącá logarytmowi 3,951 342 4, będzie prawie 8940, 1, liczba zaś odpowiadaiącá Log: 4,951 342 4, będzie, 8 940 1, toiest kwadrat, którégo szukaliśmy.

Ponieważ w tym przykładzie szczególnym zakończénié liczby 299 pokazuie, iż kwadrat iéy má się kończyć na 1, można było bez tak długiégo rozumowaniá dóyśdź téyże liczby kwadratowéy: 8 940 1.

314. Czému różnica dwóch logarytmów po sobie następuiących iest tym mnieyszá, im są większé liczby, którym oné odpowiadaią, można to tak wyłożyć.

Różnica logarytmów dwóch liczb: 19 i 9, iest 4 575 75.

Różnica logarytmów dwóch liczb: 100 i 90, iest ta sama: (ponieważ $\frac{100}{90} = \frac{10}{9}$:) ale ta rozkłádá się na dziesięć inszych mnieyszych różnic między logarytmami liczb 90 i 91, 91 i 92, 92 i 93 - - - 99 i 100.

Różnica między logarytmami liczb 900, i 1000, iest znowu ta sama, co i między logarytmami liczb 10 i 9 (ponieważ $\frac{1000}{900} = \frac{10}{9}$): ale ta rozkłádá się na 100 mnieyszych daleko różnic między logarytmami liczb 900 i 901, 901 i 902, 902 i 903, 999 i 1000.

Podobnie i różnica logarytmów liczb 9000, i 10000, lubo ta sama iest, co między logarytmami liczb 9 i 10; ale się rozkłádá na 1000 inszych różnic mnieyszych, i t. d.

315. Używanié logarytmów iest bardzo przydatné w wyciąganiu piérwiástków z Jlości nie spółmiernych.

Przykład 1. Trzeba wyciągnąć przybliżony piérwiástek kwadratowy z 2.

Log: 2. - 0.301 030 0.

Połowa tego Log: - - 0.150 515 0.

Szukáymy téy połowy z céchą 3. Logarytm náybliższy w táblicach będzie: 3,150 449 4, który odpowiadá liczbie 1414. A że ten logarytm iest mnieyszy od 3,150 515 0; więc liczba odpowiadaiącá logarytmowi danému będzie między 1,414 i 1,415. Kwadraty zaś tych ostatnich liczb są: 1,994 476; i 2,002 305.

Aby piérwiástek bardziéy ieszcze przybliżyć do práwdziwégo, weźmy różnicę 656, między logarytmém danym, i náybliższym z táblic: i znowu weźmy drugą różnicę 3070 między dwoma táblic logarytmami, danému náybliższémi.

Ułomek $\frac{656}{3070}$ na dziesiątne części obrócony, będzie miał piérwsze dwa znaki liczebne: 21; a zatém piérwiástek bardziéy przybliżony będzie 1,414 21. Możnaby i więcéy, gdyby kto chciał znaków liczebnych przydadź w tym piérwiástku; kończąc daléy dzielénié, a tém więcéy piérwiástek tén byłby do prawdziwégo przybliżony.

Przykład 2. Trzeba znaléźć liczbę przybliżoną do następuiącégo wyrazu: $\frac{r\,5}{r\,2}$

Log: 5 - 0.698 970 0; $\frac{1}{2}$ Log: 5 - 0.349 485 0.
Log: 2 - 0.301 030 0; $\frac{1}{2}$ Log: 2 - 0.150 515 0.

Różnica - - - - 0.198 970 0.

Ostatni logarytm oznáczaiący różnicę, odpowiadá prawie w táblicach z céchą przydaną 3, liczbie 1,581, a zatém $\frac{r\,5}{r\,2}$ równá się prawie 1,581.

ROZDZIAŁ XII.

O Trygonometryi.

316. Wystáwmy sobie Tróykąt w koło wpisany. Boki tego Tróykąta byłyby ciénciwami łuków przeciwnych iego kątom. A że miarą tych kątów są połowy tychże łuków; więc boki tego Tróykąta będą ciénciwami łuków dwa razy większych, niżeli są té, których ważność w stopniach ta sama iest, co i kątów im przeciwnych.

Idzie zatém, że gdybyśmy mieli ułożoną z figury dokładnéy, lub z rachunku Táblicę ciénciw do łuków wszystkich koła, zacząwszy naprzykład od łuku iednéy minuty aż do 180 stopniów (którégoto ostatniégo łuku ciénciwa iest

náywiększá) iuż tém samém i stósunek boków Tróykąta znaleźlibyśmy z danych kątów iego: i wzaiémnie (lubo nie tak prosto) doszlibyśmy ważności w stopniach kątów, z danych boków Tróykąta.

317. Aby uniknąć braniá połowy, lub wedwóynasób kątów Tróykąta, szukám zamiást ciénciw inszych liniy, do których boki Tróykąta byłyby proporcyonalné, i takich, któréby się właściwie ściągały do kątów tegoż Tróykąta. Kąt we śrzodku koła opisanégo na Tróykącie, zamykaiący ramionami swémi tén łuk, którégo ciénciwą iest bok iedén tegoż Tróykąta, kąt mówię taki, dwa razy iest większy od tego, który przy okręgu koła naprzeciw stoi tegoż boku Tróykąta; a zatém gdybyśmy tén kąt we śrzodku przecięli liniią na dwie równé części, iedna takowá część byłaby równá tamtému kątowi Tróykąta. Bok ténże Tróykąta byłby prostopadły do linii przecinaiącéy kąt na dwie równé części: a ta liniia przecięłaby go na dwie także równé części. Toż samo przystósować można i do inszych dwóch boków tego Tróykąta. W tén sposób wystawiono sobie boki Tróykąta, względém kątów im przeciwnych.

318. *Defin.* Wziąwszy łuk koła iakikolwiek, ieżeli od iednégo końca tego łuku, spuścimy prostopadłą na promień przechodzący przez drugi koniec tegoż łuku; ta prostopadłá má nazwisko *Sinus* 1) a po polsku nazwać ią można *Wstawą*

1) Wyráz tén *Sinus* ztąd podobno má swóy początek: Po łacinie *Ciénciwa* nazywá się *Inscripta*; a połowa ciénciwy *semissis Inscriptae*, dlá skrócénia pisano może dáwniéy *S. Ins.* Przepisuiący iakié dzieło Matematyczné, nie wiedząc znaczénia wyrazu tego skróconégo, opuścił punkt oddzielaiący té dwá wyrazy, i dáwszy słowy *Sins* zakończénié łacińskié, napisáł *Sinus*, i ztąd potém wzięté podobno było to nazwisko.

tego łuku, że się wstawią między końcém iednym łuku, kąt mierzącégo, i między promiéniém przez drugi koniec tegoż łuku przechodzącym.

Tá. 18. *Fig.* 1. Niech będzie AB łuk koła; prostopadłą BD, spuszczoną od końca B tego łuku, na promień CA, przechodzący przez drugi iego koniec A, nazywać będziémy *wstawą* tego łuku.

319. *Wniosek* 1. Wstawa łuku równá się połowie ciénciwy łuku inszégo, dwa razy większégo: iak naprzykład Wstawa BD, łuku BA, równá się połowie ciénciwy BE, łuku dwa razy większégo BAE.

320. *Wniosek* 2. Wstawy łuków rosną od 0, aż do 90°, a ponieważ wstawa stopniów 90, równá się promiéniowi, i iest náywiększą, nazywá się dlá tego *Wstawą całą* (Sinus totus).

321. *Wniosek* 3. Wstawy łuków większych od czwártéy części okręgu koła, zmnieyszaią się coráz bardziéy zacząwszy od 90° aż do 180°, tak dalece, że Wstawá stopniów 180° równá się 0. Wstawa zaś każdégo łuku większégo od 90°, a mnieyszégo od 180° iest ta sama, którá i łuku mnieyszégo od 90°, a spełniaiącégo łuk piérwszy do 180°. I tak naprzykład Wstawa łuku 100°, taż sama iest co i łuku 80°: wstawa łuku 120° ta sama, co i łuku 60° i t. d. Takowé *spełniénié* łuku do 180° albo do półokręgu koła, nazywá się po łacinie *Supplementum arcus.*

Co się tycze łuków większych od półokręgu koła, o tém nié ma potrzeby mówić w tych początkach.

322. *Wniosek* 4. Ponieważ promień naprzykład CF, iest Wstawą náywiększą ze wszystkich, czyli Wstawą stopniów 90°, Wstawa zaś od łuku AFb, większégo od czwártéy części tego okręgu, iest ta sama, co i łuku ab, mnieyszégo od czwártéy części tegoż okręgu; (któryto łuk ostatni spełniá piérwszy do półokręgu), idzie

zatém, że do ułożéniá Táblicy na wstawy łuków dosyć wyznaczyć wstawy tych łuków, które są mnieyszé od 90°.

323. *Wniosek* 5. Wstawy łuków podobnych, w kołach odmiennych, tak się maią do siebie, iak tychże kół promiénie. Ieżeli tedy mámy Táblicę wstáw podług promiénia podzielonego na pewną liczbę części równych, wynáydziémy przez regułę trzech i wstawy podobnych łuków, podług innégo promiénia.

324. *Wniosek* 6. Ponieważ kąt we śrzodku, naprzykład ACB, tyle stopniów w sobie zamyká, co i łuk AB, który go mierzy, i iest mu proporcyonalny; będzie więc wstawa łuku AB, Wstawą także i kąta ACB.

Wstawa tedy kąta, iest prostopadłá, spuszczoná od punktu iakiégo w jednym z ramion iego, do drugiégo ramiéniá, biorąc za promień odległość tego punktu od wiérzchołka kąta. Cokolwiek zatém powiedziało się o wstawach łuków, wszystko to przystósować można i do wstáw kątów. I tak, Wstawy kątów rosną od °, aż do wstawy 90°; którá się równá promiéniowi, zmnieyszaią się znowu zacząwszy od wstawy 90°, aż do wstawy 180 (która iest = o); i wstawa kąta roztwartégo, ta sama iest, co i kąta ostrégo, który tamtégo spełniá, do 180°.

Wstawy równych kątów, są do siebie, iak liniie wzięté za promiénie.

A ieżeli dwie liniie są wstawami dwóch kątów, względém tegoż samégo promiénia, czyli Wstawy całéy; té liniie tak się do siebie mieć będą, iak Wstawy tychże dwóch kątów.

325. *Twiérdz.* 1. W każdym Tróykącie boki tak się maią do siebie, iak wstawy kątów przeciwnych tymże bokóm.

Niech będzie Tróykąt ABC, bok iego naprzy- Tá. 18.
kład AC, tak się má do boku BC = iak wstawa *Fig.* 2.
kąta B, do wstawy kąta A.

Dowod: z wykréśleniém. Na danym Tróy-

kącie opiszmy koło, i poprowádźmy śrzednicę CD, i ciénciwy DA, DB, kąty: BDC, BAC są równé, bo są w okręgu, i zamykaią ramionami swémi iednakowy łuk BC. Dlá téyże przyczyny równé są także i kąty: ADC, ABC. Oprócz tego, kąty: CBD, CAD są prosté, bo są w półkole; więc Liniie CB, CA, będą wstawami kątów: CDB, CDA względém téyże saméy wstawy całéy, czyli promiénia CD: a zatém tak się mieć będą do siebie té liniie, iak wstawy kątów A i B.

Możná iescze i następuiącym sposobém tego samégo dowieśdź.

Opisáwszy koło na danym Tróykącie, połowy boków iego, będą wstawami połowy kątów we śrzodku im przeciwnych; a zatém będą téż i wstawami kątów Tróykąta przeciwnych tymże bokóm, (biorąc za Wstawę całą, promiéń tego koła). Są tedy do siebie połowy tych boków, iak wstawy kątów im przeciwnych: a że połowy tak się maią do siebie, iak ich całości; więc téż i całé boki Tróykąta, tak się do siebie mieć będą, iak wstawy kątów przeciwnych tymże bokóm.

326. *Wniosek.* Za pomocą Táblicy na Wstawy ułożonéy podług promiénia iakiégokolwiek, możná dóyśdź stósunku boków Tróykąta, któ-rego kąty są nam iuż wiadomé: a zatém, gdy iescze i bok iedén tegoż Tróykąta iest wiadomy; będzie możná znaléźć i dwa inszé iego boki.

327. Iakoż rachowano i ułożono Táblicę Wstáw podług promiénia podzielonégo np. na 100 000 części równych. Tén a nie większy podział, zwłáscza w táblicach do zwyczaynieyszégo używaniá ułożonych, znáyduie się. Żeby zaś rachunek krótszym i łatwieyszym uczynić; przydano i táblicę logarytmów, Wstáw tychże. W takowych iednak táblicach, gdzie i logarytmy wstáw znáyduią się, uważano promiéń, albo wsta-

wę całą, iak gdyby na 10 000 000 000 części równych była podzieloną, a zatém, iak gdyby logarytm iéy, miáł za céchę czyli początkową liczbę 10, która oznáczá, iż wstawa zawiérá w sobie liczbę części równych złożoną z znaków liczebnych iednym więcéy; tak, iak cécha logarytmu wstawy całéy, toiest, liczba 10, oznáczá, iż wstawa całá zamyká w sobie znaków liczebnych 11, zamykaiąc części równych: 10 000 000 000.

Nie wykładá się teráz iak ułożone są té táblice; podany tylko będzie sposób ich używaniá. W táblicach tych znáyduiémy na dwóch kartach iednéy obok drugiéy, w dwóch różnych słupach czyli kolumnach, Wstawy dwóch kątów, których summa czyni kąt prosty, albo 90°. Táblica tych wstáw po lewéy ręce kart, rozciągá się od °, aż do 45,°. Táblica zaś po prawéy ręce idzie wspak od 90°, aż do 45. Té kąty, których stopnie wyrażone są po prawéy ręce, nazywaią się *dopełniéniém* tamtych (complementum) do 90°; a ich wstawy *wstawami dopełniéniá* (sinus complementi) czyli krócéy, *Dostawami* (Cosinus).

328. Summa kwadratów, z Wstawy, i z dostawy łuku, albo kąta równá się kwadratowi promiénia, czyli wstawy całéy.

Bo ponieważ dwa łuki, np. AB, i FB, (albo dwa kąty: ACB, i FCB) są dopełniéniém iedén drugiégo; Wstawa BG, łuku FB, równá iest linii CD; kwadrat zaś linii CD z kwadratém wstawy BD równá się kwadratowi promiénia BC: więc i summa kwadratów z BG i BD, równá będzie kwadratowi promiénia BC. Tá. 18. *Fig.* 1.

329. *Przystósowanié.* Maiąc na polu wymiérzoną podstawę, i kąty które czyni podstawa z dwiéma liniiami wykierowanémi ku iednému célowi, znaléźć tych ostatnich dwóch liniy długość?

T. 18. *Fig.* 3. Niechby Tróykąt ABC, wyrażáł Tróykąt na polu zawarty między podstawą wymiérzoną i dwiéma liniiami dążącémi ku iednému célowi.

Niech będzie AB = 1200
A = 50°
B = 72°
więc A+B = 122°
a zatém — 180° — (A+B) = 58° = C
Wstawa kąta C: Wstawy kąta A = AB: BC
wsta: C: wsta: B = AB: AC
Log: AB = 3,079 181 2.
Log: wst: A = 9,884 254 0.
Summa = 12,963 435 2.
Log: wst: C = 9,928 420 5.
Różnica = Log: BC = 3,035 014 7.
A zatém bok BC = prawie 1084.

Z piérwszéy tedy proporcyi znáydziémy bok BC, dodaiąc do siebie logarytmy wstawy A, i boku AB, a odiąwszy od ich summy, logarytm wstawy C: różnica albowiém dwóch logarytmów ostatnich, pokazuie logarytm boku BC, który bok w táblicy osobnéy logarytmów liczb, znáydziémy przy tymże logarytmie = 1083, 96 toiest prawie = 1084.

Podobnym sposobém znáydziémy z drugiéy proporcyi, i drugi bok AC = 1 345, 76.

Dlá skrócéniá rachunku, można z początku záraz odiąć logarytm wstawy kąta C, od logarytmu liczby wyrażaiącéy bok AB, dodáwszy do céchy tego drugiégo logarytmu liczbę 10 (co na pamięci mieć potrzeba): Powszechnie zaś dodaiąc osobno logarytmy wstáw kątów A i B, do logarytmu liczby wyrażaiącéy bok AB, dochodzimy dwóch boków inszych.

Można także wygodnie użyć w rachunkach Trygonometrycznych dodáwaniá, zamiást odeymowaniá, kładąc dopełniéniá logarytmów 1)

1) Dopełniéniém logarytmu nazywá się ta liczba, która z nim razém czyni logarytm promiénia, iak na-

na mieyscé tych, które przez nich są dopełnioné.

I tak w piérwszym przykładzie, ponieważ wstawa kąta C, iest piérwszym wyrazém proporcyi, z któréy szukámy boków AC, albo BC; podstawa zaś AB iest iednym z wyrazów śrzednich, a drugim wstawa kąta A, lub B: ieżeli tedy do logarytmu podstawy AB, dodámy dopełniénié logarytmu wstawy kąta C; ta summa dodaná iescze do logarytmu wstawy kąta A, lub B, będzie logarytmém boku BC, albo AC, odiąwszy tylko logarytm promiénia.

Przykład. Dopełniénié logarytmu wstawy
- - - C=0,071 579 5.
Log: AB=3,079 181 2.
Log: wst: A=9,884 254 0.

Summa zmnieyszoná liczbą 10. - =3,035 014 7 = Log: BC.

Więcéy iescze podobnych przykładów Uczniom podadź należy.

330. *Przyst:* 2. Maiąc dané kąty, i bok iedén Tróykąta, znaléźć powiérzchnią iego przez iednę proporcyą.

Niech będzie tén sám, co wyżéy, Tróykąt, którego wiadomé nám są kąty i podstawa AB: szukáymy powiérzchni tego Tróykąta, spuściwszy prostopadłą CD.

Wst. C: Wst. A = AB: BC.
Promiéń: Wst. B = BC: CD.
Więc Pr. + Wst. C: wst. A + wst. B
- - = AB: CD.
= AB^2: AB + CD
= AB^2: 2. Powiérzchni

przykład 0,071 579 5 z logarytmém wstawy C 9,928 420 5 = 10, 000 000 00.

A zatém, 2 Pr. + wst. C : wst. A +
- - wst. B = AB^2: Powierzchni,
Log: AB = 3. 079 181 2.

Logarytm ten dwa razy wzięty =
Log: - Ab^2 = 6, 158 362 4.
Log: Wst. A = 9, 884 254 0.
Log: Wst. B = 9, 978 206 3.

Summa = 26,020 822 7.
Log: 2 = 0, 301 030 0.
Log: Wst. C = 9, 928 420 5.
Log. Pr. = 10,000 000 0.

Summa = 20,229 450 5.

Różnica tych dwóch summ 5, 791 372 2, iest logarytmém liczby, która oznaczy powiérzchnią, a ta będzie = 6 185 46 blizko.

Proporcyá ta, z któréy doszliśmy powiérzchni Tróykąta, tak się wyráżá: Prostokąt z Wstawy całéy, czyli z promiénia, i z wstawy kąta przeciwnégo iednému bokowi, tak się má do prostokąta wstáw dwóch kątów przy tym boku; iak się má ténże sám bok, do prostopadłéy nań spuszczonéy od wiérzchołka kąta przeciwnégo: albo też, prostokąt z promiénia, i z wstawy kąta przy wiérzchołku, tak się má do prostokąta z wstáw dwóch kątów przy podstawie; iak się má podstawa do wysokości Tróykąta.

331. *Przyst.* 2. Maiąc dané w liczbach dwa boki Tróykąta, i kąt między niémi zawarty, znaléźć powiérzchnią tego Tróykąta przez iednę proporcyą.

Niechby W Tróykącie ABC, znané były boki: AB, AC, i kąt A.

Spuśćmy na podstawę AB, prostopadłą CD; będzie
Pr. Wst. A = AC : CD.
= AC × AB : CD × AB.
= AC × AB : 2 powiérzchni

A zatém
Pr. Wst. A = AC × AB : powiérzchni.

Toiest: tak się má promień do wstawy iednego z kątów Tróykąta, iak połowa prostokąta z dwóch ramion kąta danego, do powierzchni Tróykąta.

Niech będzie AB=384.
AC=405.
A= 50°.

Log. $\frac{1}{2}$ AB=Log. 192=2,283 301 2.
Log: AC= - - - 2,607 455 0.
Log.Wst.50°= - - - 9,884 254 0.
Summa zmnieyszoná liczbą 10 (toiest logarytmém promiénia) = 4,775 010 2: a zatém powiérzchniá któréy szukaliśmy = 5 976 7.

332. *Przystós.* 4. Maiąc dany Tróykąt prostokątny, którégo wiadomá iest przeciwprosto-kątná i iedno ramié kąta prostégo, znaleźć inszé dwa kąty, i bok trzeci. Tá. 18. *Fig.* 4.

Wziąwszy w tym Tróykącie przeciwprostokątną za promién, ramiona kąta prostégo, będą oráz wstawami kątów im przeciwnych: a zatém gdyby daná przeciwprostokątná była wyrażoná przez 100 000, i znaczyła promién na tyle części równych podzielony; szukaiąc w táblicach między wstawami, lub dostawami, znaleźlibyśmy liczbę wyrażaiącą bok drugi dany, a liczba stopniów odpowiadaiącá téy wstawie, pokázałaby ważność w stopniach, kąta przeciwnégo bokowi danému.

Gdyby zaś przeciwprostkątná, przez inszą liczbę była wyrażoná, a nie przez tę, któráby się równała wstawie całéy w táblicach znáyduiącéy się; w takim razie użyćby trzeba następuiącéy proporcyi:

BC: AC = Pr. wst. B.
Niech będzie BC = 1548.
AC = 1248.
Log: AC = 3, 096 214 6.
Przydáwszy log. Pr. = 13, 096 214 6.
Log. BC = 3, 189 771 0.
Różnica = 9, 906 443 6. = Log.

Wst: B

$B = 53°, 44', -$ toiest, 53 stopniów, i coś mniéy niż 44 minut.

$C = 36°, 16', +$ toiest 36 stopniów, i coś więcéy niż 16 minut.

Pr. wst. $C = BC : AB.$

Log. $BC = 3,189\ 771\ 0.$

Log. wst. $C = 9,771\ 987\ 2+$

Odiąwszy Log: promiénia będzie tych dwóch Logarytmów Summa $= 2,961\ 758\ 2+ =$ Log. AB: a zatém $AB = 915,7+$

Ieśli tylko samégo boku AB, znaleziénié iest potrzebné, można skrócić rachunek, biorąc summę logarytmów summy i różnicy przeciwprostkątnéy, i boku danégo, i dzieląc tę summę przez 2: któréto działanié na tém się zasádzá, że kwadrat boku AB, równá się różnicy kwadratów przeciwprostkątnéy BC, i boku drugiégo AC, albo (co na iedno wychodzi) prostokątowi z summy ich i z różnicy, toiest prostokątowi z summy $BC + AC$ i z różnicy: $BC - AC$. Summa tedy logarytmów summy: $BC + AC$, i różnicy $BC - AC$ będzie logarytmém kwadratu, AB^2, a zatém połowa téy summy logarytmów, będzie logarytmém Piérwiástku, toiest boku AB.

$BC + AC = 279\ 6.$

$BC - AC = 300.$

Log. $(BC + AC = 3,446\ 537\ 2.$

Log. $(BC - AC) = 2\ 477\ 121\ 3.$

Summa $= 5,923\ 658\ 5.$

Połowa $= 2,961\ 829\ 2 =$ Log. AB.

A zatém bok $AB = 915,8+.$

Porównywaiąc z sobą tę ważność dwoiaką boku AB, któráz dwóch odmiénnych rachunków wypádá, postrzegámy różnicę mnieyszą niż $\frac{1}{9000}$ całéy ważności; któráto różnica, ztąd pochodzi, że w piérwszym rachunku braliśmy kąty B i C

w samych stopniach i minutach piérwszych nie szukaiąc minut drugich.

333. *Przystós:* 5. Maiąc dany w Tróykącie roztwartokątnym kąt roztwarty, bok iému przeciwny, i iedno z dwóch ramion iego, znaléźć drugié ramié i dwa inszé kąty?

Niech będzie Tróykąt ACB, którégo dany iest kąt roztwarty CAB, bok CB iému przeciwny, i ramié iedno AC; znaléźć inszé kąty: B i C, i bok AB. Tá. 18. *Fig.* 5.

Sposób 1 postępowaniá. Z téy proporcyi, BC: AC = Wst. A: wst. B; dóydziémy kąta B, a odiąwszy od 180°, summę kątów A i B, reszta pokáże kąt C.

Z drugiéy proporcyi, wst. A: wst. C = BC: AB, wiadomy będzie bok AB.

Sposób 2. Spuśćmy prostopadłą CD, na bok przedłużony BA.

W Tróykącie prostokątnym ACD, którégo bok AC i kąt A iest wiadomy, można dóyśdź dwóch boków CD i AD, ze dwóch następuiących proporcyy.

Pr. Wst. A = AC: CD.

Pr. Dostawy A = AC: AD.

Maiąc wiadomą w Tróykącie prostokątnym BCD, przeciwprostkątną BC, i iedno kąta prostégo ramié. CD, będzie można dóyśdź (332.) boku BD, od którégo odciąwszy AD, znáydziémy bok AB.

Przykłady wyżéy podané iuż dosyć obiaśnić były powinny, iak daléy sobie w tém działaniu postąpić.

Podobnégo sposobu użyć należy gdy kąt ostry iest dany, i bok iému przeciwny większy od drugiégo boku danégo. Ta tylko iest różnica, że w drugim sposobie postępowaniá, liniiá AB, będzie summą, a nie różnicą linii BD, AD. T. 18. *Fig.* 6.

Gdy zaś bok CB, przeciwny kątowi danému A, mnieyszy iest od boku danégo AC, który służy za ramié témuż kątowi; w takim razie Tá. 18. *Fig.* 7.

wstawa kąta B wynaleziona z proporcyi: CB: AC = wst. A: wst. B może bydź równie wstawą dwóch kątów B, B, iednego ostrego, a drugiego roztwartego, i tamtén spełniaiącego do 180°. Podług drugiego sposobu postępowaniá, liniiá AB, AB może bydź summą, albo różnicą linii AD, BD, albo BD: co daie dwa odmiénné Tróykąty: ACB, ACB: które lubo maią w sobie dwa boki dané i kąt ostry także dany; różnią się iednak trzecim bokiém, i dwoma inszémi kątami. Zgádzá się to zupełnie z tém, co się iuż w Jeometryi okázało w Rozdz. II.

334. *Przystósowanié* 6. Maiąc daną liczbę boków w wielokątach foremnych, wyznaczyć ważność ich boków względém promiénia koła, w które też wielokąty mogą bydź wpisané.

Rozwiązanié. Połowa boku każdego w foremnym wielokącie, w koło wpisanym, iest wstawą połowy kąta we śrzodku tegoż wielokąta, wziąwszy za promién, promién koła na tym wielokącie opisanégo.

Liczba boków Wielokąta.	*Połowy kątów we śrzodku kątów*	*Wst: Połowy we śrzodku*
3	60°	86602.
4	45°	70711
5	36°	58779
6	30°	50000
7	$25°\frac{5}{7}$	43388
8	$22°\frac{1}{2}$	38671
9	20°	34202
10	18	30902
11	$16°\frac{4}{11}$	28171
12	15°	25882
15	12°	20791
16	$11°\frac{1}{4}$	19509
20	9°	15643
24	$7°\frac{1}{2}$	13053
i t. d.	i t. d.	i t. d.

Té wstawy, dwa razy wzięté, są bokami wie-

lokątów wpisanych w koło, którego promień = 100 000.

Niechby był Tróykąt prostokątny, którego wiadomé są dwa ramiona kąta prostégo; trzeba znaléźć przeciwprostkątną i dwa inszé kąty.

Iuż się wyżéy pokázało, że maiąc dané dwa boki w Tróykącie prostokątnym, znáyduie się przeciwprostkątná, dodáwszy do siebie dwa kwadraty tychże boków, i z summy wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy. Ale gdy liczby oznáczaiące wielkości boków danych, są bardzo wielkié; nié mało czasu trzebaby na podniesiénié tych liczb do kwadratu: a że i summa tych kwadratów będzie bardzo wielká, iż z niéy piérwiástku kwadratowégo wyciągnąć przez logarytmy nié możná, a wyciągać go zwyczaynym sposobém długáby prácá była; przeto dlá większéy wygody, w téy i wielu inszych okolicznościach, wyrachowano w tablicach logarytmów, i inszé iescze, oprócz wstáw, liniie.

335. *Defin:* Niech będzie łuk koła iakiégo, a od iednégo końca, tego łuku niech będzie prowadzoná styczná, tak daleko, aż się spotká z promiéniém przedłużonym, i przechodzącym przez drugi koniec tego łuku. Ta część styczney zamkniętá między punktém dotknięciá koła, i promiéniém przedłużonym nazywá się *Styczną Tróykątmiérską* (Tangens Trigonometrica) albo tylko *Styczną* tego łuku. Liniiá zaś zawartá między środkiém koła, i między punktém, gdzie promień przedłużony przecinà styczną, nazywá się *Sieczną Tróykątmiérską* (Secans Trigonometrica) albo tylko *Sieczną* tego łuku.

I tak liniie AT, CT są, piérwszá styczną, a drugá sieczna łuku AB. Iest także piérwszá liniiá styczną, a drugá sieczna kąta ACB, biorąc za promień liniią CA. Ponieważ łuk FB, iest dopełniéniém do 90°, łuku AB: ieżeli tedy poprowadzimy styczną FP, aż do iéy spotkaniá się z promiéniém CA przedłużonym; liniiá FP, Tá. 18. *Fig.* 1.

będzie styczną, a CP sieczną dopełniénia łuku AB, a inaczéy ieszcze piérwszá nazywá się *Dostyczną* (cotangens) drugá zaś *Dosieczną* (Consecans) łuku AB.

Iak względém wstáw, tak względém stycznych i siecznych, uważano w táblicach, iedné łuki tylé przewyższaiącé 45°, ilé drugié nie dochodzą 45°; uważano zatém i co do stycznych, i co do siecznych, dopełniéniá iednych łuków względém drugich.

336. *Naprzykład:* Tróykąty DCB, ACT są podobné; więc

1. DC: DB=AC: AT, toiest dostawa tak się má do wstawy, iak promiéń do stycznéy.

2. DC: CB=AC: CT, czyli dostawa do promiénia, iak promiéń do siecznéy.

Tak téż dlá podobiéństwa Tróykątów: BCG, PCF będzie

1. Wstawa do dostawy iak promiéń do dostycznéy.

2. Wstawa do promiénia, iak promiéń do dosiecznéy.

Maiąc styczné, łatwo można wyrachować dostyczné. Bo, ponieważ podobné są Tróykąty ACT, FPC, będzie, AT: AC = CF: FP, toiest, promiéń będzie śrzednim Jeometrycznym między styczną i dostyczną: Logarytm tedy promiénia dwa razy wzięty, równá się summie logarytmów stycznéy i dostycznéy.

337. Styczné rosną, zacząwszy od 0°, aż do stycznéy 45°, którá się równá promiéniowi, (bo w tym razie Tróykąt ACT będzie równoramiénnym) i daléy ieszcze rosną aż do 90°, których styczná będąc od promiénia CF równoodległą, nigdzie się z nim nie zeydzie: a zatém większą iest, od wszelkiéy długości, którąby wyznaczyć można.

Sieczné podobnym także iak i styczné rosną sposobém.

338. Niechby był Tróykąt iakikolwiek pro- Tá. 19. stokątny, naprzykład CAB, którego wiémy w licz- *Fig.* 1. bach dwa ramiona kąta prostego CAB.

Wziąwszy za promień, naprzykład liniią CA, liniiá AB będzie styczną, a liniiá CB, siecząą kąta C.

Gdybyśmy tedy mieli liniią CA, toiest, promień wyrażony w táblicach przez 100000; liczba stopniów, przy któréy znaleźlibyśmy liczbę wyrażaiącą liniią AB, czyli styczną, pokázałaby ważność kąta C: i znowu liczba między siecznémi odpowiadaiącá kątowi C, oznaczyłaby ważność linii CB.

Gdyby zaś liniiá AC, nie była w tych liczbach wyrażoná, w których wyrażoná iest wstawa całá, czyli promień táblic, w takim razie trzeba zrobić dwie proporcye, piérwszą AC: AB = Pr. stycznéy C, z któréy dóydziémy ważności kąta C, drugą Pr: Siecz. C = AC: CB.

Przykład. Niech będzie AC = 8464,
AB = 5678.

Logarytm AB z przydanym Log: promié- - - - nia iest - - 13, 754 195 4.
Log. AC - 3, 927 575 7.

Różnica, czyli Log. stycznéy - - - - - - - - - - - - - C = 9, 826 619 7.
a zatém kąt C = 33°, 51.
Log. AC = 3, 927 575 7.
Log. siecz: C (odciąwszy Log. Pr.) = 0, 080 661 0.
Summa - 4, 008 236 7 =
Log: CB; więc CB = 10191. +

339. *Uwága.* Gdyby przyszło wyciągnąć piérwiástek kwadratowy z summy kwadratów $AC^2 + AB^2$, znaleźlibyśmy ważność przeciwprostkątnéy BC, większą niż 10192, a mnieyszą niż 10193; a zatém nie zgádzaiącą się z ważnością wyżéy znalezioną, 10191 +: co stąd pochodzi, że wyznaczaiąc ważność kąta C, opuściły się minuty drugié, i przestało się na samych stopniach

i minutach piérwszych: i to opuszczénié sprawiło, że ważność BC, mnieyszá iednością prawie wypadła: ale uchybiénié takowé iest bardzo małé, gdyż od prawdziwéy ważności różni się tylko mało co więcéy iak $\frac{1}{10000}$.

Poprawa téy omyłki taká bydź może.

Ponieważ różnica między logarytmém stycznéy C, znalezionym, i logarytmém táblic nayblizszym, iest 874, a różnica dwóch logarytmów táblic mnieyszégo i większégo od logarytmu znalezionégo, iest 2730°, więc będzie, 2730: 874 = 60″: 19″, a zatém kąt C = 33° 51′ 19″

Log. - AC = 3, 927 575 7.

Log. siecz. - C

(odciąwszy Log. P.) = 0, 080 688 0.

Summa czyli Log. BC = 4, 008 263 7.

więc BC = 10 192 + = 10 192, 1.

330. *Przystósowanié.* W Tróykącie, w którym wiadomé są dwa boki, i kąt zawarty między niémi, znaléźć bok trzeci, i dwa inszé kąty?

T. 19. *Fig.* 2. Niech będzie Tróykąt ACB, w którym dané są dwa boki AC, BC, i kąt C, trzeba stąd dóyść boku AB, i dwóch inszych kątów.

Rozwiązanié. Spuściwszy prostopadłą BD, na bok AC, w Tróykącie prostokątnym BCD wiémy przeciwprostkątną BC, i kąt dany C, a zatém dóydziémy dwóch boków BD, DC: a że wiadomá także iest podstawa AC; więc odiąwszy CD od AC znáydziémy AD: i znowu w Tróykącie prostokątnym ADB z wiadomych dwóch ramion kąta prostégo, dóyśdź będzie możná (338) inszych dwóch kątów, i przeciwprostkątnéy AB.

Tén sposób w tém iest niewygodny, że trzeba cztéry uczynić proporcye, aby dóyśdź boku AB. Iako zaś to, co z każdéy z piérwszych trzech proporcyy wypádá, wchodzi w czwártą proporcyą, tak i omyłki tam popełniané, tu wpływaią.

A żeby więc w tém, co z ostatniéy proporcyi

wypadnie, uniknąć uchybienia, należy iak náydokładnieyszy rachunek czynić w trzech pierwszych. I to ieszcze przydadź potrzeba, że w tym sposobie działaniá szukać się musi dwóch odcinków AD i DC, iako też i wysokości BD, lubo o nié niè masz zapytaniá.

341. Gdyby przyszło dochodzić saméy tylko linii AB, w tym razie możnáby użyć następuiącego sposobu.

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times CD.$

A że iest BC: CD = Pr: Dostawy BCD

więc $2AC \times BC : 2AC \times CD = Pr: Dost.\ BCD.$

a zatém $2AC \times CD = 2AC \times BC \times \frac{Dost.\ BCD.}{Pr.}$

A stąd $AC^2 = AC^2 \times BC^2 - 2AC \times BC \times \frac{Dost.\ BCD.}{Pr.}$

Że zaś téy ostatniéy ilości nié można zawsze rozłożyć na inszé mnożące ią ilości; więc przez samé logarytmy działaniá tego wykonać w tym razie nié możemy.

W takowym tedy przypádku, używá się pospolicie następuiącéy proporcyi.

342. *Twierdzi:* 2. Summa dwóch boków Tróykąta, tak się má do różnicy tychże boków; iak styczná połowy summy dwóch kątów przeciwnych tym bokóm, do styczney połowy różnicy tychże kątów.

Trzeba tu naprzód wyłożyć uczniom, co się rozumié, przez wyrazy téy proporcyi: a w szczególności pokázać im, że stósunek między stycznémi połowy dwóch kątów, albo dwóch łuków nie iest tén sám, co między stycznémi całych tych kątów albo łuków. Widocznie się to okázuie w táblicach Trygonometrycznych.

Niech będzie Tróykąt ABC, w którym bok AB, mnieyszy iest od boku AC; w tym Tróy- T. 19. *Fig.* 3.
kącie będzie

$AC+AB : AC-AB = \text{styczn.}\frac{B+C}{2} : \text{stycz.}\frac{B-C}{2}$

Dowodz: Wziąwszy $AD = AB$, i pociągnąwszy BD Tróykąt równoramiénny ABD, i Tróykąt nie równoramiénny ABC, maią kąt spólny A. Więc summa kątów ABD, ADB, równá się summie kątów ABC, ACB; a zatém iedén z kątów Tróykąta równoramiénnégo, np. kąt ABD, równá się połowie summy dwóch kątów ABC, ACB Tróykąta ABC. Kąt ABC, większy z dwóch kątów ABC, ACB, składá się z połowy summy, i z połowy różnicy tychże dwóch kątów: a że kąt ABD, iest połową ich summy; więc kąt CBD będzie połową ich różnicy.

Liniiá DC iest różnicą dwóch boków AC, AB; przeciąwszy ią na dwie równé części w punkcie E, liniiá CE będzie połową różnicy dwóch boków AC, AB. A że bok większy AC, równá się połowie summy wráz z połową różnicy tychże dwóch boków; więc AE będzie połową ich summy, gdy CE iest połową różnicy: a zatém liniie AE, CE tak się maią do siebie, iak połowa summy boków AC, AB, do połowy ich różnicy. Na tém więc całé działanié rozchodzi się, aby pokázać, iż styczné kątów ABD, CBD, tak się maią do siebie, iak liniie: AE, CE.

Z Punktu A, spuśćmy na BD, prostopadłą AF, przedłużywszy ią aż do G. Ponieważ Tróykąt BAD iest równoramiénnym; liniie BF, FD będą równé: a że téż są równé liniie DE, CE; więc pociągnąwszy liniią FE, podobné będą Tróykąty: BDC, FDE, i liniie FE, BC równoodległé; a zatém i Tróykąty AFE, AGC są podobné, będzie więc AE: CE = AF: FG. Ze zaś wziąwszy za promiéń liniią BF, liniie FA, FG, będą stycznémi kątów: FBA, FBG, albo ABD, CBD; więc AE: CE = stycz. ABD: stycz. CBD, albo

$$\frac{AC+AB}{2}:\frac{AC-AB}{2}=\text{stycz.}\frac{B+C}{2}:\text{stycz.}\frac{B-C}{2}$$

albo nakoniec,

$$AC+AB:AC-AB=\text{stycz.}\frac{B+C}{2}:\text{stycz.}\frac{B-C}{2}.$$

343. *Przystósowanie* 1. Gdy dwa boki AC, AB, są wiadomé, będzie wiadomá ich summa AC + AB, i ich różnica AC — AB: gdy także wiémy kąt A, wiedzieć tém samém będziémy summę i połowę summy dwóch inszych kątów B i C, a zatém i styczną połowy téy summy; więc i czwártégo wyrazu proporcyi poprzedzaiącéy, toiest styczney połowy różnicy tych dwóch kątów dóydziémy: a stąd wiadomá nám będzie i połowa różnicy tych dwóch kątów. Wiedząc zaś połowę ich summy, i połowę różnicy, gdy połowę summy do połowy różnicy dodámy, znáydziémy kąt większy B, a odiąwszy połowę różnicy od połowy summy, okáże się kąt mnieyszy C. Znáydziémy nakoniec i bok trzeci BC.

Przykł: Niech będzie

AC = 2452, AC + AB = 4296.
AB = 1844, AC — AB = 608.
A = 44° B + C = 136°.
$\frac{B+C}{2}$ = 68°.

$$4296:608=\text{stycz. }68°:\text{stycz.}\frac{B-C}{2}$$

Log: stycz. 68° = 10, 393 590 4,
Log. 608 = 2, 783 903 6,
Summa - - 13, 177 494 0.
Log. 4296 = 3, 633 064 3.
Różnica = 9, 544 429 7. =
Log: stycz: 19. 18′ + toiest i ooś więcéy

$$\frac{B - C}{2} = 19°.\ 18'.+$$

A że $\frac{B + C}{2} = 68°$ więc

$B = 87°.\ 18',+$
$C = 48°.\ 42'.-$

Wst. C: wst. A = AB: BC
Log. AB = 3, 265 760 9.
Log. wst. A = 9, 841 771 3.
Summa = 13, 107 532 2.
Log. wst. C = 9, 875 792 7.—
Reszta, toiest Log: BC = 3, 231 729 5+
BC = 170 5+

Aby się przeświádczyć o dokładności tego działaniá szukáymy BC, i przez drugą proporcyą: wst. B: wst. A = AC: BC.

Log. AC = 3, 389 520 5.
Log. wst. A = 9, 841 771 3.
Summa = 13, 231 291 8.
Log. wst. B = 9, 999 517 6+
Reszta = 3, 231 774 2—
więc BC = 1705, 2—

344. *Przystósowanié* 2. Wyznaczyć przez rachunek odległość dwóch mieysc niedostępnych.

Widzieliśmy (w Rozdz: XI.) że do tego trzeba było wymiérzyć podstawę i wyznaczyć kąty, które przy końcach podstawy czynią dwie linie wykierowané ku dwóm punktóm, których odległości szukámy. Można dóyśdź i przez rachunek żądanéy odległości.

Tá. 19. *Fig.* 4. Niech będzie AB podstawą wymiérzoná, i wyznaczoné kąty: XAB i AB, XBA, i BA.

Ponieważ w Tróykącie XAB, wiémy dwa kąty przy podstawie; odiąwszy więc ich summę od dwóch kątów prostych, albo od 180°, reszta pokáże kąt trzeci AXB.

Podobnym sposobém dóydziémy i kąta AYB.

W Tróykącie AXB, maiąc wiadomą podsta-

wę AB, i wszystkié kąty, można dóyśdź dwóch inszych boków, a w szczególności linii AX.

Podobnie i w Tróykącie AYB z wiadomégo boku AB, i wszystkich kątów, można wyznaczyć dwa inszé boki, a w szczególności liniią AY.

W Tróykącie nakoniec XAY znaiąc dwa boki AX, AY, i kąt XAY między niémi zawarty, (który iest różnicą między kątém wyznaczonym XAB, YAB;) można dóyśdź linii XY, toiest, żądanéy odległości.

Uwága. Ponieważ wyznaczénié linii XY, zawisło od linii AX, AY; dokładność téż w wyznaczéniu linii XY, zawisła od téy dokładności, z którą dwie tamté liniie były wyznaczoné.

Przykład. Niech będzie

XAB = 77° więc AXB = 49°.
YAB = 42° AYB = 36°.
YBA = 102° XAY = 35°.
XBA = 54°.
AB = 1200.

Wst. AXB: wst. XBA = AB: AX.
Log: AB = 3, 079 181 2.
Log: wst. XBA = 9, 907 957 6.
Summa = 12, 987 138 8.
Log. wst. AXB = 9. 877 779 9.
Reszta = 3,109 358 9, = Log: AX
AX = 1286, 35.

Wst. AYB: Wst. ABY = AB: AY.
Log. AB = 3, 079 181 2.
Log. Wst. ABY = 9, 990 404 4.
Summa = 13, 069 585 6.
Log. Wst. AYB = 9, 769 218 7.
Reszta = 3, 300 366 9. = Log: AY.
Więc AY = 1996, 95.

Znalazłszy bok AX = 1286, 35.
AY = 1996, 95.
Kąt między témi bokami zawarty XAY = 35.

Będzie - - $AX + AY = 3283,30.$
$AY - AX = 710,60$
$AXY + AYX = 145°.$
$\frac{AXY + AYX}{2} = 72°\frac{1}{2}.$

Więc (podług Twiérdz: 2. §. 342)
3283, 3: 710, 6 = Stycz: $72\frac{1}{2}$: Stycz: - - -
- - $\frac{AXY - AYX}{2}$

Log. Stycz: $72\frac{1}{2}$ = 10, 501 277 7.
Log. 710, 6 - - = 2, 851 625 2.
Summa = 13, 352 902 9.
Log. 3, 283 3 = 3, 516 310 6.
Różnica = 9. 836 592 3. = Log. Stycz. 34° 28′.

Więc $\frac{AXY - AYX}{2} = 34\ 28'.$

A że iest $\frac{AXY + AYX}{2} = 72\ 30.$

Więc AXY = 106 58.
AYX = 38 2.

Maiąc wiadomé wszystkié Kąty w Tróykącie XAY, i prócz tego dwa boki: AX, AY; znáydziémy bok trzeci XY, toiest odległość, któréy szukámy: a to przez iednę z tych dwóch proporcyy.

Wst. AYX: Wst. XAY = AX: XY
Albo, Wst. AXY: Wst. XAY = AY: XY.

Szukáymy boku XY, przez piérwszą naprzykład proporcyą; będzie

Log. - - AX = 3, 109 358 9.
Log. Wst. XAY = 9, 758 591 3.
Summa = 12, 867 950 2.
Log. Wst. AYX = 9, 789 665 2.
Różnica = 3, 078 285 0 = Log. XY.

Więc XY = 1197, 525.

Zostaie ieszcze do rozwiązaniá tén przypádek,

w którym z trzech boków danych w Tróykącie, szukámy kątów iego.

Sposób zwyczaynie używany, zawisł na tém, aby szukać dwóch odcinków podstawy oddzielonych przez prostopadłą, na tę podstawę spuszczoną, od wiérzchołka kąta iéy przeciwnégo.

345. *Twiérdz: przybrané.* Podstawa Tróykąta, tak się má do summy dwóch boków iego, iak różnica tychże boków, do różnicy odcinków podstawy.

Niech będzie Tróykąt ABC, w którym z wiérz- Tá. 19.
chołka C, spuszczoná iest prostopadłá CD, na pod- *Fig.* 5.
stawę AB; w tym Tróykącie, AB: BC + AC = BC — AC: BD — AD.

Od punktu C, iak od śrzodka, promiéniém CA nakréślmy koło, które przetnie podstawę AB w punkcie G, bok BC, w punkcie F, a ténże przedłużony, w punkcie E.

Będzie zatém

BE = BC + AC (bo AC = CE;)
BF = BC — AC (bo AC = CF:)
BG = BD — AD (bo AD = DG:)

A ponieważ sieczné BA, BE od iednégo punktu B wychodzą; więc (231) BA: BE = BF: BG, toiest, tak się má podstawa BA do summy dwóch boków = BE; iak się má różnica tychże boków = BF, do różnicy BG odcinków, które czyni prostopadłá CD spuszczoná z wiérzchołka kąta C na Podstawę.

346. *Przystósowanié.* Ponieważ odcinków BD, AD, wiémy summę i różnicę; wiedzieć będziémy i każdy z nich z osobna, iako to iuż się wyżéy pokázało: będzie albowiém większy odcinek BD = $\frac{AB + BG}{2.}$, a mnieyszy AD = $\frac{AB - BG}{2.}$

A że, BC: BD = Pr. Dost: B.
A zaś AC: AD = Pr. Dost: A.
Więc dóydziémy i kątów B, i A.

Przykład. Niech będzie - - -
AB = 1200.
BC = 935.
AC = 612.
BC + AC = 1547.
BC − AC = 323.
Log: BC + AC = 3, 189 490 3.
Log: BC − AC = 2, 509 202 5.
Summa = 5, 698 692 8.
Log: AB = 3, 079 181 2.
Reszta = 2, 619 511 6.
Więc BD − AD = 416, 4. bardzo blizko.
AB = 600.
2.
BD − AD = 208, 2
2
Summa = 808, 2. = BD.
Różnica = 391, 8. = AD.
BC: BD = Pr. Dost: B.
Log: BD z przydanym Log: Pr. = - - -
- - - 12, 907 518 8.
Log: BC = 2, 970 811 6.
Reszta = 9, 936 707 2 = Log. Dost. B.
Więc Kąt B. = 30° 11′ 15″.
AC: AD = Pr. Dost. A.
Log. AD = 2, 593 064 4.
Log. Pr. = 10, 000 000
Summa = 12, 593 064 4.
Log. AC = 2, 786 751 4.
Reszta = 9, 806 313 0. = Log. Dost. A
więc Kąt A = 50° 11′ 37″.
C = 99 37 8.

Dlá zapewniénią się o tém, można szukać, ieżeli stósunek Wstáw Kątów: A, i B, równá się, iak powinién, stósunkowi boków im przeciwnych; będzie zaś w saméy rzeczy równáć się, gdy w proporcyi, któréy trzéma piérwszémi wyrazami będą: BC. AC. Wst. A. za czwárty wy-

ráz wypadnie Wstawa Kąta B, téyże saméy, co wyżéy ważności.

Log. Wst. A = 9, 885 481 1.
Log: AC = 2, 786 751 4.
Summa = 12, 672 232 5.
Log. BC = 2, 970 811 6.
Reszta = 9, 701 420 9. = Lo. Wst. B.

Kąt B, odpowiadaiący tému Logarytmowi różni się mniéy niż ½° od wyżéy znalezionégo.

347. *Uwága.* Nie trzeba opuszczać takowych doświádczéń, zwłaszcza, gdy rachunki zawisły iedné od drugich.

W tym ostatnim razie, náylepiéy iest wziąć za podstawę bok náywiększy Tróykąta: bo tak z zupełną pewnością wiedzieć będziemy, iż kąty przy téy podstawie są ostré.

PRZYDATEK I.

Przystósowaniá Trygonometryi do różnych działań na gruncie.

348. *Przystósowanié* 1. Wyznaczywszy na gruncie, a potém wyrachowáwszy położéniá i odległości dwóch punktów, względém iednéy podstawy, wziętá była za drugą podstawę odległość tych dwóch punktów i użyto iéy do wyznaczéniá położéń innych Punktów, które z piérwszych stanowisk, albo były niewidzialné, albo téż od nich bardzo odległé. Trzeba teráz wyrachować położéniá tych ostatnich punktów względém piérwszéy podstawy.

Niech AB wyráżá piérwszą podstawę; XY, dwa punkta, których położéniá, i odległości wyznaczoné iuż są względém téy podstawy, przez wymiérzénié kątów przy A i B. Weźmy potém XY za drugą podstawę dlá wyznaczéniá położénia punktu Z, niewidzialnégo z piérwszych sta- T. 20. Fig. 1.

nowisk: A i B, albo od nich bardzo odległego. Iakże to położénié punktu Z, wyznaczymy, względém piérwszéy podstawy AB?

Sposób postępowaniá przez rachunek.

1. W Tróykącie AXB wyznaczymy AX.
2. W Tróykącie AYB wyznáczmy AY.
3. W Tróykącie XAY, wiadomé maiąc: AX, AY, i kąt XAY, wyznáczmy XY, i kąt AXY.
4. W Tróykącie XZY, wiadomą maiąc podstawę, i kąty wszystkié, wyznáczmy XZ.

W Tróykącie AZX wiadomé maiąc: AX, ZX, i kąt AXZ wyznáczmy AZ.

Podobnie można wyznaczyć BZ.

349. *Uwága.* Tym sposobém postępuiąc można także sprawdzać działaniá iedné przez drugié czynioné z różnych punktów stanowisk.

350. *Przystósowanié* 2. Do iakiéykolwiek linii czyniącéy kąt wiadomy z podstawą stósować położéniá punktów wyznaczonych iuż względém téy podstawy.

Tá. 20. *Fig.* 2 Niech będzie AC liniiá czyniącá kąt wiadomy z podstawą AB, i niech X, będzie punktém, którégo położénié iuż iest wyznaczoné względém podstawy AB; trzeba stąd dóyśdź położéniá tego punktu względém linii AC.

Dóydziémy tego, spuściwszy prostopadłą XP na liniią AC, i wyznaczywszy wielkość téy prostopadłéy, iako téż iéy odległość AP od punktu A.

Sposób postępowaniá przez rachunek.

W Tróykącie AXB można było wyznaczyć liniią AX, kąt XAB iest téż wiadomy; więc znáydziémy kąt CAX, który iest różnicą kątów CAB, XAB. W Tróykącie tedy PAX, maiąc

wiadomé kąty, i przeciwprostkątną AX, można będzie wyznaczyć liniie: AP, i PX.

351. *Przyst:* 3. Wyznaczyć promień koła, maiąc daną ciénciwę odcinka iego, i kąt tegoż odcinka.

Niech będzie AB liniiá daná, na którey na- Tá. 20. kréślić trzeba odcinek koła mogący zawiérać *Fig.* 3. w sobie kąt dany; wyznáczmy promień tego koła.

Niech będzie C, śrzodek koła szukanégo; poprowádźmy liniią CD do śrzodka linii AB, ta będzie prostopadłą do AB. W Tróykącie ACD, kąt ACD równá się kątowi odcinka danému, bo miarą iego, iest połowa łuku AB; kąt CAD, iest iego dopełniéniém. Wziąwszy AD za promień, będzie AC, sieczną kąta CAD, a zatém można wyznaczyć promień koła szukanégo, z téy proporcyi: iak się má promień do dosiecznéy kąta danégo, tak się má połowa ciénciwy danéy do promiénia koła, którégo szukámy.

352. *Uwága.* Stósunek AD do CD, równy iest stósunkowi wstawy całéy, czyli promiénia, do stycznéy kąta CAD.

A że, ieżeli AB iest bokiém wielokąta forémnégo, będzie CD promiéniém koła wpisanégo w tén wielokąt; więc maiąc dany bok wielokąta forémnégo, i wiedząc liczbę boków iego, można wyznaczyć promień koła wpisanégo i opisanégo, przez dwie następuiące proporcye.

1. Wstawa całá, tak się má do dostycznéy połowy kąta we śrzodku koła, iak połowa boku wielokąta do promiénia koła wpisanégo.

2. Wstawa całá tak má się do dosiecznéy połowy kąta we śrzodku, iak połowa boku wielokąta, do promiénia koła opisanégo.

353. *Przystósowanié* 4. Wyznaczywszy trzy boki Tróykąta na gruncie iakim uważanégo, i znaiąc kąty, pod któremi widzimy té trzy boki z jednégo punktu, trzeba wyznaczyć odle-

głość tego punktu, od trzech wiérzchołków Tróykąta.

Tá. 20. *Fig.* 4. Niech ABC wyráżá Tróykąt, którego wszystkich boków iuż doszliśmy; niech X, będzie punktém, z którego uważaliśmy kąty, pod któremi dały nám się widzieć liniie: AB, BC, AC; trzeba iescze wyrachować liniie: AX, BX, CX.

Niech będą D, i E, śrzodki kół, których odcinki nakréślone na liniiach AB, i BC mogą zawiérać w sobie kąty równe tym, pod którémi widzieliśmy liniie AB i BC. Punkt X będzie w przecięciu tych dwóch kół.

Dwa promiénie BD, BE, mogą bydź wyrachowane tak, iak w przystósowaniu 3.

W Tróykącie ABC, w którym wszystkié boki są wiadomé, można wyrachować kąt ABC. Kąt ABD iest wiadomy, bo iest dopełniéniém kąta wiadomégo AXB; więc wiadomy iest także i kąt CBD. A że wiémy i kąt CBE, który iest dopełniéniém kąta CXB; więc wiedzieć będziémy i kąt DBE: a zatém w Tróykącie DBE, wiémy dwa boki: BD, BE, i kąt DBE, między niémi zawarty; a zatém można wyznaczyć wysokość BE, która iest połową linii szukanéy BX; albo, (co krócéy iescze będzie) można w tym Tróykącie wyrachować kąty D, i E. Że zaś kąt we śrzodku D, równa się kątowi XAB, wspiéraiącému się na łuku dwa razy większym: a kąt we śrzodku E, iest spełniéniém (w téy figurze) kąta XCB, więc kąty, BAX, BCX są wiadomé: a zatém w Tróykątach: BAX, BCX, wiémy kąty wszystkié, i boki: BA, BC; skąd będzie można wyznaczyć liniie: AX, BX, CX, których szukámy.

Iedén prawie iest sposób postępowaniá na iakiékolwiek położénié punktu X. W tém tylko bywá odmiénny, że czasém trzeba dodáwać, a czasém odeymować kąty znáyduiącé się przy B; i że czasém kąty D i E, równé są kątóm przy A i C, a czasém są ich spełniéniém.

354. Rachunek ten może bydź ieszcze skróconym w niektórych przypádkach szczególnych.

Przykład 1. Niech punkt X, znáyduie się na przedłużéniu iednégo z boków Tróykąta ABC, np. na przedłużéniu boku AB. Tá. 21. *Fig.* 1.

W Tróykącie CAX, wiadomé są kąty A, X, i bok CA; więc będzie można wyrachować boki: AX, CX.

Przykład 2. Niech trzy punkta: A, B, C, będą na iednéy linii. T. 21. *Fig.* 2.

Prostokąty AX × CX, i BX × CX są równé, piérwszy prostokątowi z prostopadłéy spuszczonéy od X, na AB i ze śrzednicy koła opisanégo na Tróykącie AXC; drugi prostokątowi z téyże prostopadłéy, i ze śrzednicy koła opisanégo na Tróykącie CXB; więc piérwszé dwa prostokąty tak się maią do siebie, iak i dwa drugié. A że piérwszé tak się maią do siebie, iak liniie AX, BX, a drugié tak się maią do siebie, iak dwie śrzednice; więc stósunek AX do BX iest wiadomy, bo iest równy stósunkowi śrzednicy koła opisanégo na Tróykącie ACX, do śrzednicy koła opisanégo na Tróykącie BCX albo równy stósunkowi promiéni tych dwóch kół. Szukaiąc tedy podstawy w Tróykącie, któryby miał kąt w wiérzchołku równy kątowi AXB, a zatém wiadomy, i dwa ramiona równé dwóm wyżéy spomnionym promiéniom: gdybyśmy tę podstawę znaleźli równą linii AB; liniie téż AX, BX, byłyby równé tym promiéniom. Gdyby zaś ta znaleziona podstawa nie była równá linii AB; tedy z dwóch następuiących proporcyy dóydziémy boków: AX, BX.

1. Iak się má podstawa znaleziona, do podstawy AB, tak się má promiéń piérwszy do AX.

2. Iak się má podstawa znaleziona, do podstawy AB; tak się má promiéń drugi do BX.

Tym sposobém możémy téż doświádczać,

czyli działaniá naszé czynioné na ziémi, były dokładné.

355. *Przystós.* Niech będzie daná liniiá prostá na gruncie: wyznaczyć bez mierzénia odległość i położéniá względém téy linii, dwóch punktów, z których widzimy obadwa iéy końce.

T 21. *Fig.* 3. Niechby wiadomá była np. liniiá AB, niech będą dwa punkta: C, i D, z których każdégo widzieć można końce A, i B, téy linii; wyznaczyć odległości, i położéniá tych dwóch punktów: C, i D, tak względém siebie, iak i względém linii AB, nie mierząc piérwéy żádnéy z tych odległości.

Z punktów C, i D, wyznáczmy kąty: ACB, DCB, ADB, ADC, a zatém i kąty: ACD, BDC.

Dáwszy iakąkolwiek ważność linii CD, możnáby z niéy dochodzić ważności liniy: CA, CB, DA, DB, i AB.

Gdybyśmy przypádkiém ważność téy ostatniéy linii AB, znaleźli równą práwdziwéy iéy ważności, którą wiémy; byłoby to dowodém, żeśmy natrafili na práwdziwą ważność linii DC, a zatém i inszych liniy.

Gdyby zaś znalezioná ważność linii AB, nie była równá ważności iéy wiadoméy; tedy następuiącą trzeba uczynić proporcyą: iak się má ważność mniemaná linii AB, do ważności iéy práwdziwéy, tak się má ważność mniemáná linii CD, do ważności iéy práwdziwéy.

Przystósowaniá do miár wysokości.

Mogą Nauczyciele namiénić tylko o sposobach wyznaczén á wysokości iakiéy, czyli to przystępnéy, czyli też niedostępnéy przez samé żérdzie, albo przez odbiianié promiénia światła padaiącégo na powiérzchnią iaką płaską i sposobną odbiianiá, albo nakoniec przez wielkość ciénia

rzuconégo od tego przedmiotu (*obiectum*) któ-régo wysokość wyznaczyć mámy.

Piérwszy z tych sposobów, iako w przepisach swoich i z przyczyny łatwości, iest bardzo dobry, tak w używaniu bardzo nie doskonały. W ogólności nawet mówiąc, należy zawsze powątpiéwać o działaniach, choćby téż z náylepszémi narzędziami czynionych, gdy idzié o wyznaczénié iakiéy wysokości; iednostayná albowiém w sobie wysokość, np. góry iakiéy, może się wydáwać czasém większą, a czasém mnieyszą, podług niciednakowégo stanu, w którym się znáydować zwykła nasza *Powiétrzniá* (atmosphera); iako o tém obszérniéy będzie w Fizyce.

356. *Przystós.* 1. Niech będzie iaká Wysokość niewiadomá, do któréy iednak można przystąpić; trzeba wyznaczyć iéy wielkość, z punktu iakiégo oddalonégo od téyże wysokości.

Wymiérzmy podstawę od punktu na gruncie obranégo, aż do spodku téy wysokości: od tegoż punktu uważáymy iaki kąt czynią na płaszczyznie pionowéy dwie liniie, iedna ku wiérzchołkowi téy wysokości, a drugá poziémnie wykierowaná. Znáydziémy wielkość téy wysokości nad liniią poziémną (którą perspektywa poziémnie ustawioná pokazuie) przez następuiącą proporcyą: iak się má wstawa całá do stycznéy kąta uważonégo, tak się má podstawa wymiérzoná do wysokości szukanéy. Dodáwszy do téy wysokości, wysokość narzędziá, znáydziémy całą wysokość, któréy szukaliśmy 1).

357. *Uwága.* Rzádko się tráfiá, aby wcale przystąpić można do spodku wysokości, którą

---

1) W dalszych przykładach trzeba zawsze na to pamiętać, aby wysokość narzędziá dodáwać do wyrachowanéy Trygonometrycznie wysokości: co lubo się wyraźnie kłaśdź nie będzie, samé iednak okoliczności dostatecznie potrzebę tego okážą.

wyznaczyć przypádá. Tak naprzykład, maiąc wyznaczyć wysokość wiérzchołka wieży iakiéy, baszty i t. d. nié można wymiérzać podstawy, tylko aż do spodku iéy murów; można iednak zmiérzyć całą grubość wieży, baszty i t. d. a stąd wnieść położénie iéy, śrzodka, a zatém i długość, którą dodadź potrzeba do podstawy wymiérzonéy.

358. *Przystós:* 2. Niech będzie wiadomá wysokość 1) z któréy wiérzchołka wyznaczyć przypádá odległość punktu położonégo na gruncie, a widzialnégo z mieysca stanowiska.

Ustawiwszy kątomiérz na płaszczyznie pionowéy, iak wyżéy, naznáczmy kąt, który czyni perspektywa iedna w poziémném położéniu, a drugá wykierowaná ku punktowi, którégo odległości szukámy. Zróbmy potém tę proporcyą: iak się má wstawa całá do dostyczněy kąta naznaczonégo, tak się má wysokość daná do odległości szukanéy.

Uwága. Można tym sposobém wyznaczyć odległość od spodku wysokości iakiéy, tylu punktów, ilé zechcemy; maiąc iuż wiadomą wysokość, z któréy wiérzchołka wyznáczać przypádá té odległości. Uważaiąc zaś, i znacząc kąty, które zrobi perspektywa 2) kierowaná do tych

---

1] Wysokości wieży, lub iakiégo podobnégo budynku łatwo dóyśdź można, spuściwszy z góry na dół sznur, który potém zmierzony, dá poznać tę wysokość. Trzeba iednak mieć báczność na to, aby sznur iednakowo wszędzie był wyciągniony. Obácz między innémi Dzieło iuż wyżéy zaléconé. *P. de Luc. Tom.* 2. §. 516.

2) Té kąty ściśle mówiąc, nie tak czyni perspektywa coraz do innego punktu na gruncie położonégo, kierowaná, iako bardziéy płaszczyzny pionowé przechodzące przez perspektywę za każdém celowaniém. Náywygodniéy się to działanié wykoná: gdy kątomiérz będzie miał połkolé prostopadłé do reszty narzędzia i opatrzoné perspektywą ruchomą.

różnych punktów, będzie można wyznaczyć i położenié ich, iednych względém drugich.

359. *Przystos:* 3. Maiąc wiadomą odległość punktu iakiego od spodku wysokości, na którey się stoi, wyznaczyć tę wysokość.

Uważywszy kąt tak iak wyżey, zróbmy tę proporcyą. Iak się má wstawa całá do styczney kąta uważonego, tak się má odległość daná do wysokości szukaney.

360. *Przystos:* 4. Niech będzie wysokość niedostępná, trzeba ią wyznaczyć.

Sposób postępowaniá náypospoliciey używany, zawisł na tém, aby wymiérzyć podstawę iaką wprost téy wysokości, którey szukámy, i naznaczyć kąty, pod którémi z obudwóch końców téy podstawy, widzimy wysokość szukaną. Można stąd dóyść, tak wysokości, iako téż i odległości iey spodká, od obudwóch końców podstawy.

Niech SP wyráżá wysokość, a AB podstawę wymiérzoną wprost ku téy wysokości. Wyznáczmy kąty A i B przez perspektywy, iednę poziémnie ustawioną, drugą ku wiérzchołkowi S, wykierowaną. T. 21 *Fig.* 4.

W Tróykącie ASB, zachodzi ta proporcyá:
Wst. ASB: wst. A = AB: BS.
W Tróykącie BSP, iest
Wst. całá: wst. B = SB: SP.
Więc wst. całá × wst. ASB: wst. A × wst. B = AB: SP.

361. *Uwágá* 1. Tego sposobu używaiąc, można náprzód uchybić w braniu takiey podstawy, którąby przedłużoną prosto prowadziła, do wysokości podaney do wymiérzeniá: ponieważ zaś w wielu przypádkach trudno iest utrafić na takié podstawy położénié; będzie więc i wysokość stąd wyrachowaná, nie pewná. Powtóré, gdy podstawa AB, iest bardzo nachyloná względém linii AS, BS, kąt ASB, pod którym pokazuie się ta podstawa AB, iest

bardzo mały względém kąta ASP, a zatém i podstawa AB wymiérzoná iest bardzo małá względém całéy podstawy AP: skąd także wyznaczénié wysokości PS będzie mniéy dokładné.

362. *Uwága* 2. Gdy narzędzié, którego używámy, opatrzoné iest w półkolé pionowé; to będzie służyć do daniá tak dobrégo podstawie położéniá, iakiégo tylko grunt pozwoli.

T. 21 *Fig.* 5. Niech liniiá AB wyráżá iakąkolwiek podstawę wymiérzoną, a liniiá SP, niech wyráżá wysokość, któréy szukámy.

Ustawiwszy półkolé pionowé tak, aby Prawidło ruchomé zmiérzało ku punktowi S, a zatém, aby liniiá SP, wpádała na płaszczyznę tego półkola; uważámy kąt SAP na płaszczyznie pionowéy, i kąt PAB wyznaczony na płaszczyznie kątomiérza poziémnie ustawionégo. Zróbmy to samo i na drugiém stanowisku, przy punkcie B.

W Tróykącie PAB, gdzie wiadomá iest podstawa, i wszystkié kąty, będzie

Wst. APB: wst. ABP = AB: AP.

W Tróykącie prostokątnym SAP, iest

Pr: styczny SAP = AP: SP.

Więc Pr. × wst. ABP: wst. APB × stycz. SAP = AB: SP.

Gdyby nawet dlá iakiéy zawady nié można razém brać kątów pionowych, i kątów poziémnych; tedy iednak wyznaczaiąc ciąg linii AP, BP, możnáby osobno wymiérzyć kąty poziémné: PAB, PBA. Ztémwszystkiém wyznaczénié tego ciągu z wielką częstokroć prácą przychodzi.

363. *Przystós:* 5. Niech będzie daná liniiá na iakim gruncie, i niech będzie wysokość niewiadomá, z któréy wiérzchołka można widzieć końce téy linii danéy. Trzeba wyznaczyć odległość tych dwóch końców, od spodka wysokości niewiadomey, i tęż samę wysokość.

1. Uważámy z wiérzchołka wysokości, kąty na płaszczyznie pionowéy, zawarté między liniią pionową, albo nitką z ciężarém zawieszoną, i mię-

dzy perspektywą wykierowaną następnie do dwóch końców linii daney. Odległości tych końców, od spodka wysokości, tak się do siebie mieć będą, iak styczne kątów uważanych: (będą zaś té odległości stycznémi kątów tych wyznaczonych, gdy wysokość za promień wzięta będzie,) a zatém stósunek tych odległości będzie wiadomy. Uważáymy i tén kąt, który się zrobi na płasczyznie poziemnéy kątomiérza, przez płasczyzny pionowé, na których znáydować się będzie perspektywa następnie do tych dwóch punktów kierowaná. Tén kąt równy kątowi zawartému między dwiéma liniiami prowadzonémi od końców podstawy do spodka wysokości, będzie kątém w wiérzchołku Tróykąta, maiącego wiadomą podstawę i wiadomy stósunek ramion, a zatém można tén Tróykąt zupełnie wyrachować.

Uwága. Gdy narzędzié tak iest zrobioné, że go nié można użyć do mierzéniá kąta zawartégo między liniiami, któréby od spodka wysokości prowadzoné były do dwóch końców Podstawy; w takim razie, trzeba mieć wiadomą wszystkich tych trzech punktów odległość: wyiąwszy, gdyby dwa końce podstawy, były w jednéy linii z spodkiém wysokości 1).

PRZYDATEK II.

Piérwsze początki równoważéniá.

W piérwszych początkach, na których się równoważénié (*libellatio*) zasádzá, można uważać ziémię, iakoby ta zupełnie miała figurę kuli.

---

1) Gdyby nie było sposobności czynić na gruncie działáń wyrażonych w tych ostatnich przystósowaniach; tedy dlá łatwieyszégo Uczniów poięciá, można działania té na figurach wyrobionych z drewna wykonywać.

Różnica zachodząca między tą mniemaną, a prawdziwą iéy figurą (spłaszczoną w końcach osi) bardzo mało wpływa w działaniá, o których tu mówić się będzie; wiadomości zaś potrzebné do czyniénia w rachunkach, poprawy z przyczyny niezupełnéy ziémi okrągłości, byłyby teráz niewczesné i nad poięcié Uczniów.

364. Uważaiąc ziémię, iak gdyby zupełnie była okrągłą, i przeciąwszy ią płaszczyzną przez środek iéy przechodzącą; przecięcié to byłoby kołém, którégo promień byłby tenże sám, co i promień ziémi. Na okręgu tego koła podzielonym na 360 stopniów, rachuiąc mil Niémieckich 15, (które się nie wiele różnią od Polskich) na iedén stopień; cały tén okrąg zawiérać w sobie będzie mil Niémieckich 5400, a zatém śrzednica iego, toiest śrzednica ziémi mieć będzie długości mil prawie 1719, albo, rachuiąc okrągło: 1720.

Tę długość na mnieyszé miary Polskié z Niémieckich zamiéniaiąc (sposobém w Arytmetyce podanym) będzie śrzednica ziémi, więcéy cokolwiek niż

21 000 000, łokci Polskich.
7 000 000, sążni
2 800 000, prętów
280 000, sznurów.

365. Mówi się, że dwa mieysca są do *równowági* (ad libellam) gdy równą maią od śrzodka ziémi odległość. I tak powiérzchniá wody stoiącéy, wszystkié punkta má do równowági.

Gdy liniiá iaká prostopadłą iest w punkcie powiérzchni ziémi do iéy promiénia, przez tén punkt przechodzącégo; ta liniiá, prócz iednégo tego punktu spólnégo z promiéniém, którégo odległość od śrzodka, równá się promiéniowi ziémi, wszystkié inné swoié punkta, dalszé mieć będzie w rzeczy saméy od śrzodka ziémi: ale że

przy takiéy wielkości promiénia ziémi, różnica położéniá téy linii, okazuiącéy *równowágę pozorną* (libella apparens) od położéniá wody stoiącéy, którá okazuie *równowágę práwdziwą* (libella vera), ta, mówię różnica tak iest małá, że chyba w znaczney bardzo odległości dá się postrzédz, przeto w zwyczaynieyszych działaniach, można na tę różnicę względu nié mieć, i równowágę pozorną za równowágę brać práwdziwą.

W odległości 900 łokci, albo 300 sążni, różnica ta nie dochodzi 1 cála.

Iakoż niech promiéń CA, wyráżá promiéń ziémi, liniiá AB, niech wyráżá styczną do końca tego promiénia prowadzoną, a bardzo małą względém niego. Niech BDCd wyráżá liniią, ciągnioną przez punkt B, i przez śrzodek ziémi, spotykaiącą iéy powiérzchnią w punktach: D. i t. d. Będzie $AB^2 = DB \times Bd$: a że liniiá BD iest bardzo małá względém linii Bd, będzie práwie $AB^2 = Dd \times BD$; a $BD = \frac{AB^2.}{Dd.}$. Niechby AB, zawiérała w sobie łokci 900, znáydziémy BD mnieyszą od $\frac{1}{24}$ części łokcia, toiest mnieyszą od cála. T. 21. Fig. 6.

Liniiá ta BD iest prawie proporcyonalną kwadratowi linii AB; a zatém w odległościach, 2,3,4,5, i t. d. razy mnieyszych od 900 łokci, będzie 4, 9, 16, 25, i t. d. razy mnieyszą od cála.

366. Lubo nierówności na powiérzchni ziémi, są bardzo małé względém wielkości całéy ziémi, a zatém można na nié względu nié mieć w niektórych okolicznościach; té iednak nierówności wiele się przykładaią do odmián, które na ziémi postrzegámy. Gdyby np. ziémia była Matematyczną kulą, toiest zupełnie okrągłą; wody wszystkié na iéy powiérzchni znáyduiące się byłyby stoiącémi; nie byłoby ani rzék, ani strumyków, ani zrzódeł wytryskuiących i sztu-

ką tylko możnaby wody z jednego mieysca na inné sprowádzać.

367. Przez działaniá równowáżéniá, wyznáczaią się té nierówności, czyli różnica, która zachodzi między odległością od śrzodka ziémi, dwóch albo więcéy punktów. Przeto dochodzénié iakiéykolwiek wysokości, możnaby sobie wystawić pod ogólném tém wyobrażéniém działań równowáżéniá; zwyczaynie iednak działaniá té daléy się nie rozciągaią, iak do wyznaczéniá pomnieyszych wysokości, a szczególniéy do sprowadzéniá wód z jednego mieysca na drugié: co obszérniéy zwykło się wykładać w Fizyce.

W działaniach równowáżéniá, używané są niektóré narzędziá, służące do wyznaczéniá linii prostéy ukazuiącéy równowágę pozorną. Tych wszystkich narzędzi opisanié, wieléby tu mieysca zabrało, 1) wyrażą się iednak potrzebnieyszé.

368. Równowága wodná, iedna z náyprościeyszych, składá się z rurki mosiężnéy, albo blaszanéy, i z dwóch butelek szklanych iak náyprzezroczystszych, przy końcach téyże rurki przyprawionych: Woda w tych butelkach zawartá przechodzi przez rurkę, i w równéy w obudwóch butelkach utrzymuie się wysokości. Osadzoná bywá taká równowága na nodze drewnianéy, podobnie iak stolik mierniczy, albo kątomiérz.

369. Używanié iéy na tém się zasádzá, że woda przez otwarcié iakié łączące dwa lub więcéy naczyniá, przechodzącá z jednego do dru-

1) Dokładné i obszérné opisanié tych narzędzi, znayduie się w Xiążce P. Pikarda o równowáżéniu; która z wielą przydatkami wyłożoná iest z Francuzkiégo na Niémiecki ięzyk przez P. Lamberta. Wiele także doczytać się można w Xiążce napisanéy w téy materyi przez P. Le Febure.

giégo, układá się do równowági. Z wielką iednak ostrożnością używać potrzeba, téy tu opisanéy równowági, gdy bez pomocy perspektyw, gołém okiém do powiérzchni wody przystawionem, céluiémy do iakiégo mieysca.

370. Układ równowági powietrznéy zasádzá się na własności powietrza, ilé lekszégo od wody. Przez tę własność, powietrzé w rurce wráz z wodą zamknięté wychodzić nad wodę musi.

Iestto iedén z náylepszych sposobów do ustawiéniá, podług równowági, prawidła, albo raczéy perspektywy do niego przyprawionéy.

Równowági powietrzné do wielkiéy doskonałości można przyprowadzić, iakoto, opisuiąc równowágę Brandera, obszérnie wywodzi P. Lambert w przydatkach swoich do Xiążki Pikarda. Robią iescze i równowági próżné, toiest takié, z których powietrzé iest wyciągnioné.

Te równowági, za świadectwém X. Fontany, náymnieyszą nawet nierówność poznać dáią.

371. Do wykierowaniá linii, prawidła, lub perspektywy, podług położéniá poziémnégo, służy też i nić, która przez ciężár w końcu iéy zawieszony do pionu się układá.

Ta nić ponieważ iest prostopadłą do linii iakiéykolwiek poziémnéy, na téy więc zasadzie robić zwykli, innégo iescze gatunku równowági, nazwané równowágami *Pikarda*, *Huyghensa* i t. d.

372. Do działáń równoważéniá, potrzebny także iest pręt podzielony na łokcie, cále i t. d. na który wkłádá się znak z papiéru grubégo, lub inny podobny, mogący się posuwać wzdłuż pręta; a na śrzodku tego znaku má bydź cél wyrażony, któryby i z daleka rozeznać można.

373. Niech będą dwa iakiékolwiek mieysca, których różność równowági trzeba znaléźć.

Postáwmy narzędzié, na iedném z tych mieysc, a na drugiém pręt na łokcie, cále i t. d. po-

dzielony. Perspektywę poziémnie, czyli do równowági ustawioną kieruymy ku prętowi: do którégo znak przyprawiony, má bydź przez inną osobę spuszczany, lub podnoszony póty, póki śrzodek tego znaku nie przypadnie w linii prostéy, którą poziémné perspektywy położénié wyznáczá. Ieżeli wysokość tego śrzodka znaku, od spodka pręta rachowaná, będzie równá wysokości perspektywy rachowanéy od spodka nogi, na którey całé narzędzié z perspektywą iest wsparté; tedy dwa té mieysca będą do równowági. Ieżeli zaś wysokość śrzodka znaku będzie większá, lub mnieyszá od wysokości perspektywy; tedy spodek pręta będzie tylé niższy lub wyższy od spodka nogi narzędzia: ila iest różnica między témi dwiéma wysokościami.

Tego sposobu równoważéniá używać tylko można w odległościach na 100, a náywięcéy na 200 sążni.

W większych odległościach, uchybiéniá byłyby znacznieyszé, tak z przyczyny zboczéniá światła łámiącégo się w powietrzu, iako z niedokładności narzędziá, któré w większych odległościach większé téż sprawuie uchybiénié, a nakoniec i z przyczyny różnicy, zachodzącéy między práwdziwą i pozorną równowágą.

374. Po części można się ustrzédz tych uchybień, a raczéy oné zmnieyszyć, stawiaiąc narzędzié w równéy, ilé bydź może, odległości, między dwoma mieyscami, które równoważyć mámy. Obudwóch tych mieysc trzeba wyznaczyć równowágę względém tego śrzedniégo stanowiska. Ponieważ zaś różnica wysokości śrzodka znaku na dwóch tych mieyscach postawionégo, iest różnicą tychże mieysc wysokości, iednéy względém drugiéy; tą więc różnicą będzie wyższé od drugiégo to mieyscé, w którém znak niżéy iest położony.

Przez to dwoiakié działanié, można z jednégo stanowiska równoważyć dwa iakié mieyscą, któ-

rych odległość zawiérałaby np. 300 sążni, a zatém iużby nadto wielká była, aby się w niéy piérwszégo do równoważéniá sposobu użyć godziło.

375. Gdy mieysca do równoważéniá wyznaczoné, są iescze odległeyszé, np. na iednę, lub dwie mile dalekié, iedno od drugiégo, można tę przywiększą odległość podzielić na części, z których każdá zawiérałaby około 300 sążni: a dopiéro z pośrzodka każdéy téy mnieyszéy odległości, równoważyć iéy końcé, czyli granice.

Przez piérwszé takowé działanié, znáydziémy różnicę piérwszégo punktu wysokości od drugiégo następuiącégo. Przez drugié działanié znáydziémy różnicę wysokości tego drugiégo punktu od trzeciégo, i tak daléy, aż na koniec znáydziémy różnicę wysokości przedostatniégo punktu od ostatniégo, który kończy całą odległość, a tém samém dóydziémy téż i różnicy wysokości piérwszégo punktu od ostatniégo, toiest, dóydziémy różnicy wysokości między iednym i drugim końcém całéy odległości.

376. Gdyby się zdarzyło, że postępuiąc od każdégo punktu podziału, do innégo iemu nayblizszégo, każdy taki punkt następny byłby wyższy lub niższy od poprzedzaiącégo, z którym się w równoważéniu porównywá: tedy summa różnic wysokości między iednym i drugim punktém następnym pokázałaby całą różnicę między wysokością dwóch punktów kończących całą odległość. Ale ieżeli té punkta następné, są na przemiany iedné wyższé, a drugié niższé względém tych, z którémi się przy każdém działaniu porównywaią; tedy wziąć trzeba summę różnic wysokości punktów wszystkich, które przy każdém następném działaniu są wyższé od tych, z którémi ie porównywámy (postępuiąc zawsze od iednégo końca całéy odległości, do drugiégo). Trzeba iescze wziąć i summę różnic wysokości punktów wszystkich, które przy każdém

działaniu następném są niższé od tych, z któremi się porównywaią (w tę samę stronę co i piérwéy postępuiąc).

Ieżeli té dwie summy będą rowne; znakiém to będzie, że obadwa całéy odległości końce są do równowági. Ieżeli zaś té dwie summy będą nierówne; tedy ostatni koniec odległości, tyle wyższy, lub niższy będzie od piérwszégo, ile piérwszá summa większá lub mnieyszá iest od drugiéy.

377. Aby nie bydź obowiązanym porównywać przy każdém stanowisku, wysokości dwóch punktów przypádaiących do równoważéniá; lepiéy iest, że dway pomocnicy rachować będą wysokość znaku, i onę dlá pamięci zapisywać po każdém szczególném działaniu. Iedna z tych wysokości naznaczonych, będzie służyć do porównaniá iéy z inną następną, którá ieszcze nie iest znalezioná. Ci dway pomocnicy postępować będą po każdém szczególném działaniu, ku drugiému końcowi całéy odległości; tén, który wprzód póydzie, stanie przy następuiącym punkcie podziáłu, a drugi stanie przy punkcie od piérwszégo opusczonym.

Po skończonych tych wszystkich szczególnych działaniach, zbierze się wráz summa wysokości od piérwszégo pomocnika naznaczonych, i podobnie w jednę summę zbiorą się wysokości naznaczoné od drugiégo pomocnika. Różnica tych dwóch summ, będzie różnicą wysokości dwóch punktów skraynych, któréśmy równoważyć postanowili. Tén zaś punkt będzie wyższy od drugiégo, którému odpowiadaiącá summa będzie mnieyszá.

378. Co się tycze równoważéniá mieysc położonych w Kraiach bardzo odległych; iak np. gdyby trzeba wyznaczyć różnicę wysokości mieysc położonych przy brzegach morza śrzódziémnégo, od wysokości mieysc innych w śrzód Polski położonych, albo przy brzegach morza Balty-

ckiégo; rozumiém, że pewnie o tém mowa będzie w Fizyce. Można w téy mierze czytać między innémi dzieło wielkié P. De Lue o różnych umiarkowaniach powietrzni otaczaiącéy ziémię (sur les modifications de l' Atmosphere).

ROZDZIAŁ XIII.

O kwadrowaniu koła, czyli o wynalezieniu Powiérzchni Koła.

379. Obwody Wielokątów forémnych podobnych sobie, tak się do siebie maią, iak promiénie kół w nié wpisanych, lub na nich opisanych. Powiérzchnie tychże Wielokątów, równaią się Tróykątóm maiącym za wysokość promiénie kół wpisanych, a za podstawę obwód Wielokątów. Téż powiérzchnie Wielokątów forémnych podobnych do siebie, tak się maią do siebie, iak kwadraty promiéni kół wpisanych, i t. d. Wszystkié té Twiérdzéniá nie zawisły od liczby boków w Wielokątach, i zawsze są práwdziwé, chociażby náywiększá była liczba boków.

380. Stąd zdaie się, że práwdziwé będą té wszystkié Twiérdzéniá, gdyby nawet liczba boków tak wielká była w wielokątach, żeby ich od kół rozeznać nie podobná, i gdyby promiénie kół wpisanych i opisanych różnicy między sobą nié miały, ale się iednym promiéniém wydáwały 1).

1] Takowé rozumowanié, przywiedło Jeometrów, że do koła uważánégo za granicę między wielokątém wpisanym i opisanym, przystósowali té Twiérdzéniá, które o wielokątach stanowili. Dosyć podobno będzie przy pierwszém czytaniu téy Xiążki, wystawić Uczniom koła, pod tą postacią. Ieżeli iednak przez

381. *Twiérdzénié przybrané.* Można zawsze chociaż myślą podzielić ilość iaką na tyle części równych, aby każdá ta część w szczególności mnieyszá była, niżeli inná iakákolwiek ilość naznaczoná.

Dowodz: Pomnóżmy tę drugą ilość naznaczoną, tyle razy, ile potrzeba, aby się stała większą od piérwszéy ilości danéy; na tyleż części równych podzielmy ilość piérwszą, ile razy była pomnożoná ilość drugá: każdá takowá część ilości piérwszéy, mnieyszá będzie od ilości drugiéy naznaczonéy.

W szczególności mówiąc, gdy się weźmie połowa ilości iakiéy skończonéy, i téy połowy połowa, toiest czwártá część całéy ilości, i znowu téy ostatniéy połowy połowa, toiest osmá część całéy ilości: daléy połowa téy osméy części, toiest część szesnástá i t. d; dóydzie się naostatek do takiéy części, którá mnieyszą będzie od wszelkiéy ilości naznaczonéy 1).

382. *Twiérdzénié* 1. Można opisać na kole

ćwiczéniá poprzedzaiące, ducha dokładności i smaku w niéy nabyli, przeciwną rzeczą zapewné zdáwać im się będzie, przechodzić od wielokąta, choćby z náy-większą liczbą boków, do koła uważanégo pod postacią wielokąta takiégo, którégo liczba boków większá byłaby od iakiéykolwiek liczby naznaczoney. Postrzegą oni, i postrzédz powinni skok niezmierny w takowém przechodzeniu: gdy ściśle mówiąc: liniiá krzywá nié może bydź uważaná, iako zbiór wielu liniy prostych bardzo małych, do siebie nachylonych. Należy przeto rzecz tę z większą dokładnością wyłuszczyć tak dla zabieżéniá wielu trudnościom, któ-ré w téy mierze zarzucać zwykli niektórzy o świetle rozumu swégo i przenikniéniu nadto uprzedzéni; a ledwie w rzeczy saméy piérwsze Matematyki początki znaiący, iako też i dla wprawieniá młodzi zawczasu w dokładność Matematyczną.

1) Przestrzegać będą Nauczyciele Uczniów, aby zamiást słowa: *naznaczoná*, nie używali tego drugiégo słowa *naznaczyć się mogącá*, i dadzą im poznać różnicę tych dwóch wyrazów.

danem i wpisać weń foremné dwa takié wielokąty podobné, aby stósunek ich obwodów przybliżał się bardziéy do stósunku równości, niżeli iakikolwiek inny stósunek nierówności naznaczony.

Przykład. Można wpisać w koło i na niém opisać dwa wielokąty foremné podobné, takié, którychby różnica obwodów mnieyszá była od dziesiątéy naprzykład części obwodu, iednégo z nich.

Niech będzie CA promień koła, podzielony na dziesięć części równych, i niech AB iedną taką część wyrażá. Tá. 22. *Fig.* 1.

Przez B przeciągnieymy DBd prostopadłą do promiénia, i spotykaiącą okrąg koła w punktach D, i d. Podzielmy okrąg koła na 2, 4, 8, 16 i t. d. części równych, póty, póki nie dóydziemy do części koła mnieyszéy od łuku DAd. Niechby naprzykład łuk EAe był iedną z tych części mnieyszych od łuku DAd: i punkt A, niechby go dzielił na dwie części równé EA, Ae. Pociągnieymy liniią Ee, (która będzie prostopadłą do AC). Przez punkt A niech przechodzi styczná FAf, i niechay dwa promiénie CE, Ce, schodzą się z tą styczną w punktach F, f. Liniie Ee, Ff, są bokami dwóch wielokątów foremnych podobnych, iednégo w koło wpisanégo, a drugiégo na kole opisanégo; a zatém obwody tych dwóch wielokątów będą, iak boki Ee, Ff, albo iak liniie CG, CA. Więc różnica obwodów tych dwóch wielokątów, będzie do obwodu większégo wielokąta, iak liniiá AG, do linii CA. A że liniiá AG mnieyszá iest od linii AB, toiest od dziesiątéy części linii CA; więc i różnica dwóch obwodów mnieyszá będzie, niżeli dziesiątá część obwodu wielokąta na kole opisanégo.

Gdyby liniiá AB była $\frac{3}{17}$ linii BC, albo $\frac{3}{17}$ linii AC, możnaby podobnym sposobém dowieśdź, że różnica dwóch obwodów, tak się má

do obwodu wielokąta w koło wpisanégo; iak liniiá AG do linii CG. A że AG mnieyszá iest od AB: więc tém samém mnieyszá iest od $\frac{1}{10}$ téy części linii BC, a tém bardziéy mnieyszá będzie od 10téy części linii CG. Różnica tedy między dwoma obwodami wielokątów mnieyszá byłaby od 10téy części obwodu wielokąta w koło wpisanégo 1).

383. *Wniosek* 1. Można w koło wpisać wielokąt iedén forémny, i drugi podobny na niém opisać, tak, aby stósunek obwodu koła do obwodu iednégo z dwóch wielokątów bardziéy był przybliżony do stósunku równości, niżeli iakikolwiek inny stósunek naznaczony.

Przykład. Niechby opisany na kole był iedén wielokąt, a drugi podobny w koło wpisany, i niechby różnica ich obwodów mnieyszá była od $\frac{1}{10}$ części obwodu wielokąta wpisanégo.

Różnica obwodu wielokąta opisanégo, od obwodu koła mnieyszá będzie niż różnica obwodu tegoż wielokąta od obwodu wielokąta wpisanégo; to iest, mnieyszá niżeli $\frac{1}{10}$ część obwodu wielokąta wpisanégo, a tém bardziéy mnieyszá od $\frac{1}{10}$ części obwodu koła.

Różnica także obwodu koła od obwodu wielokąta wpisanégo mnieyszá iest, niżeli różnica między obwodami dwóch wielokątów, a zatém mnieyszá od $\frac{1}{10}$ części obwodu wielokąta wpisanégo, a dopiéroż mnieyszá od $\frac{1}{10}$ części obwodu koła.

384. *Wniosek* 2. Maiąc daną liniią prostą, wziętą za równą okręgowi koła danégo, wpisać w to koło, i opisać na niém wielokąty, których

---

1] Daie się tu przykład liczebny dla łatwieyszégo poięcia. Że iednak té rozumowania uważane w sobie nie zawisły od tych liczb, i mogą bydź przystósowane do wszystkich innych; przeto dowodzénié naszé nie iest dla tego szczególnégo przystósowania, ani mniéy dokładném, ani mniéy ogólném.

obwodów różnica od obwodu koła mnieyszá byłaby, niżeli liniiá daná iakiéykolwiek małości.

Pomnóżmy ostatnią tę liniią tylé razy, aż większą będzie od linii wziętéy za równą okręgowi koła. Niechby naprzykład 10 razy powiększoná była ta liniiá. Wpiszmy w koło i opiszmy na niém dwa wielokąty foremné podobné, którychby różnica obwodów mnieyszá była od $\frac{1}{10}$ części obwodu iednégo z nich. Będzie zatém różnica obwodu koła od obwodu którégokolwiek z tych dwóch wielokątów mnieyszá niżeli $\frac{1}{10}$tá część obwodu, iednégo z tychże wielokątów, naprzykład obwodu wielokąta wpisanégo; a dopiéroż mnieyszá niżeli $\frac{1}{10}$tá część okręgu koła, a ieszcze mnieyszá, niż liniiá daná wyznaczonéy małości.

385. *Twiérdz:* 2. Okręgi kół tak się maią do siebie, iak ich promiénie.

Niech będą dwa koła C i c, a tych okręgi O i o, promiénie zaś P i p; będzie zatém O : o = P : p.

Gdyby ta proporcyá w czém chybiała; tedy piérwszy stósunek byłby większy lub mnieyszy od drugiégo. W piérwszym razie trzebaby powiększyć okrąg o, a w drugim okrąg O, aby naprawić proporcyą; a zatém w obudwóch razach trzeba powiększyć iedén z okręgów dlá zrobiénia proporcyi.

Niechby liniiá prostá L większá była od okręgu O, i niechby było (ieżeli podobná) L : o = P : p.

Opiszmy na kole C wielokąt foremny, którégoby różnica obwodu, od obwodu koła, mnieyszá była, niż li różnica L od O. Na drugiém także kole c, opiszmy wielokąt foremny podobny piérwszému. Obwody tych dwóch wielokątów tak się mieć będą do siebie, iak promiénie P i p, kół C i c; albo iak L do o, (ponieważ miało bydź L : o = P : p.) A że obwód piérwszégo wielokąta, mnieyszy iest niżeli L;

więc i obwód drugiégo, mnieyszyby bydź powinién niżeli o, toiest mnieyszy niżeli okrąg koła, na którym iest opisany: co bydź nie może.

Więc stósunek promiéni dwóch kół, nie iest większy ani mnieyszy do stósunku ich okręgów: a zatém równy iest témuż stósunkowi.

386. *Wniosek* 1. Idzie zatém, że stósunek okręgu koła iednégo, do swégo promiénia ténże sam iest, co i stósunek którégokolwiek innégo koła, do swégo także promiénia.

Przeto gdyby można znaléźć stósunek iakiégokolwiek koła, do iego promiénia, już témsamém byłby znaleziony stósunek każdégo innégo koła do swégo promiénia.

387. *Wniosek* 2. Dwa prostokątnè Tróykąty są do siebie podobné, gdy maią za wysokości, promiénie dwóch kół, a za podstawy liniie wzięté za równé okręgóm tychże kół: a zatém takié dwa Tróykąty będą do siebie w stósunku dwumnożnym ich boków, naprzykład promiéni dwóch kół.

388. *Twiérdz.* 3. Powiérzchniá koła równá się powiérzchni Tróykąta, maiącégo za wysokość promiéń tego koła, a za podstawę, iego okrąg.

Dowodz. Gdyby tén Tróykąt nie był równy powiérzchni koła; byłby od niéy większy, albo mnieyszy: a zatém koło byłoby równé innému Tróykątowi téyże saméy wysokości, za podstawę zaś maiącému liniią większą, albo mnieyszą od okręgu koła.

Nazwiémy okrąg koła O, a tę liniią, większą albo mnieyszą od okręgu nazwiémy L.

W piérwszym razie, w którym ta liniia L, większá byłaby od okręgu koła, opiszmy na nim wielokąt foremny, którégo obwód mniéyby się różnił od okręgu koła, niżeli się różni od niego liniiá L: a zatém liniiá L, większáby była od obwodu wielokąta. Powiérzchniá tego

wielokąta byłaby mnieyszá od powiérzchni Tróykąta maiącégo za wysokość promiéń koła, a za podstawę, liniią L, toiest byłaby taż powiérzchniá wielokąta, mnieyszá od powiérzchni koła, na którém wielokąt iest opisany: co bydź nié może.

W drugim razie, w którym liniiá L, mnieyszà byłaby od okręgu koła, wpiszmy w koło wielokąt foremny, którégo obwód mniéyby się różnił od okręgu koła, niżeli liniiá L, a zatém obwód wielokąta byłby większy od linii L. Wpiszmy w to samo koło wielokąt inny foremny, tylé dwoie, co piérwszy, boków zawiéraiący.

Powiérzchniá tego drugiégo wielokąta, równałaby się Tróykątowi, maiącému za wysokość promiéń koła, a za podstawę obwód piérwszégo wielokąta (268), toiest liniią większą od L.

A zatém powiérzchniá tego wielokąta wpisanégo w koło, większá byłaby niżeli powiérzchniá koła: co bydź także nié może.

Więc powiérzchniá koła, ani iest większá, ani mnieyszá od powiérzchni Tróykąta, maiącégo za wysokość promiéń tego koła, a za podstawę iego okrąg; a zatém równá iest powiérzchni tego Tróykąta.

389. *Wniosek* 1. Powiérzchnie kół są do siebie w stósunku dwumnożnym ich promiéni, albo śrzednic: przeto, gdyby promiénie kół były iak liczby: 1, 2, 3, 4, 5, i t. d. powiérzchnie tychże kół byłyby iak kwadraty: 1, 4, 9, 16, 25, i t. d.

390. *Wniosek* 2. Powiérzchnia koła, tak się má do powiérzchni wielokąta na niém opisanégo; iak okrąg koła do obwodu wielokąta. A w szczególności powiérzchniá koła, tak się má do powiérzchni kwadratu na niém opisanégo, albo, co na ieduo wychodzi, do kwadratu śrzednicy, iak się má okrąg koła do obwodu tego kwadratu:

toiest, iak się má okrąg koła, do swoiéy śrzednicy cztéry razy wziętéy, czyli do linii tak długiéy, iak cztéry śrzednice.

Stąd porównanié dokładné powiérzchni koła, z powiérzchnią kwadratu, a zatém i porównanié koła z powiérzchnią iakiéykolwiek figury prostokréślnéy, zawisło od porównaniá okręgu koła z liniią iaką prostą: albo, (co ná iedno wychodzi) *kwadrowanié* koła, zawisło od *wyprostowaniá* iego okręgu, czyli od wynaleziénia linii prostéy równéy okręgowi koła.

391. *Wniosek* 3. Wszystkié sposoby postępowaniá, które się wyżéy podáwały, do zrobiénia kwadratu równégo summie, albo różnicy dwóch innych kwadratów danych, końcém powiększéniá lub zmnieyszéniá kwadratu w danym stósunku, mogą bydź równie i do kół przystósowané, czyniąc na ich promiéniach lub śrzednicach, té samé działaniá, któréby się na nich czyniły, gdyby były bokami kwadratów, na których podobné odmiany czynić przypádało.

A w szczególności, chcąc podzielić powiérzchnią koła danégo, na pewną liczbę części równych, przez *koła spółśrzodkowé* (circuli concentrici); trzeba podzielić promiéń iego na tyléż części równych, zacząwszy od śrzodka, tak, aby odległości punktów podziáłu coráz dalszych od tegoż śrzodka, były do siebie iak kwadraty liczb następnych: 1, 2, 3, 4, 5, i t. d. Niechby np. przypádało podzielić koło na 7 części równych przez koła spółśrzodkowé. Podzielmy promiéń na 7 części równych: śrzednie Jeometryczné między odległościami punktów podziáłu od śrzodka, i całym promiéniém, będą promiéniami kół spółśrzodkowych, przez które podzieloná będzie powiérzchniá koła danégo, na 7 części równych.

392. Wyznaczénié powiérzchni wycinków, i odcinków kół, zawisło także od wyznaczéniá okręgu koła. Iakoż w saméy rzeczy

1. Powiérzchniá wycinka tak się má do powiérzchni koła, do którégo tén wycinek należy; iak się má łuk wycinka, do okręgu koła: toiest, iak się má Tróykąt, którégo wysokością iest promień, a podstawą tén łuk, do Tróykąta maiącégo za wysokość téżże promień, a za podstawę okrąg koła. A że tén ostatni Tróykąt byłby równy powiérzchni koła; więc i piérwszy Tróykąt równy iest powiérzchni wycinka.

2. Odcinek mnieyszy od półkola, iest różnicą między wycinkiém maiącym téżże sám łuk, co i odcinek, i między Tróykątém równoramiénnym, maiącym spólną z wycinkiém podstawę, wiérzchołek zaś we śrzodku koła.

A że powiérzchniá wycinka, równá się Tróykątowi, maiącému za wysokość promień, a za podstawę łuk wycinka: a powiérzchniá Tróykąta, o którym mowa (wziąwszy w nim za podstawę iedén z promiéni, toiest z ramión iego, a za wysokość wstawę łuku, należącégo do wycinka), równá się Tróykątowi, maiącému za wysokość promień, a za podstawę wstawę łuku; więc powiérzchniá odcinka mnieyszégo od półkola równać się będzie Tróykątowi maiącému za wysokość promień, a za podstawę różnicę łuku wycinka od wstawy tegoż łuku. Arytmetycznie ta powiérzchniá wyráżá się rozmnożéniém liczby oznáczaiącéy połowę promiénia, przez inną liczbę oznáczaiącą różnicę łuku wycinka od wstawy tegoż łuku.

Powiérzchniá odcinka większégo od półkola, iest summą z wycinka zawiéraiącégo między swémi ramionami tén sám łuk, większy od półkola, i Tróykąta, w którym, wziąwszy za podstawę promień, wysokością byłaby wstawa łuku czyniącégo z łukiém piérwszym okrąg cały: a zatém powiérzchniá tego odcinka, równá się Tróykątowi maiącému za wysokość promień, a za podstawę summę z łuku odcinka tego, i z wstawy łuku, który spełnieniém iest piérwszégo łuku

do całego okręgu, albo, (co na iedno wychodzi,) z wstawy różnicy między łukiém odcinka, i półokręgiém.

393. *Defin:* W kołach nieiednakowégo promiénia, wycinki i odcinki podobné, té są, których łuki są do siebie podobné, toiest, równą stopniów liczbę w sobie zamykaią: a té łuki tak się maią do siebie, iak całé okręgi, a zatém iak promiénie tychże kół.

394. *Twiérdz:* 4. Wycinki i odcinki podobné w kołach nieiednakowégo promiénia, tak się maią do siebie, iak koła, do których należą.

T. 22. Fig. 2. 1. Niech będą dwa wycinki podobné ABCDA, abcda, té dwa wycinki są do siebie iak koła, do których należą.

Dowodz: Wycinek ACBDA, tak się má do koła, do którégo należy; iak łuk ADB, do okręgu ADBEA, albo (393) iak łuk adb, do okręgu adbda, toiest, iak wycinek acbda, do koła, do którégo należy. Więc té dwa wycinki są do siebie iak koła, do których należą, toiest w stósunku dwumnożnym promiéni tychże kół.

Niech będą dwa odcinki: ABDA, abda, podobné, té dwa odcinki tak się maią do siebie, iak koła, do których należą.

Dowodz: Wycinki: ACBDA, acbda, maią się do siebie w stósunku dwumnożnym promiéni CA, ca, toiest, iak CA^2, do ca^2. Tróykąty podobné: ACBA, acba, w tymże samym iedén do drugiégo są stósunku; więc té dwa wycinki ténże sám do siebie maią stósunek, co i té dwa Tróykąty. Więc różnica (albo summa) piérwszégo wycinka, i piérwszégo Tróykąta, toiest odcinek ABDA, tak się má do różnicy (albo do summy) drugiégo wycinka i drugiégo Tróykąta, toiest do odcinka abda, iak się má piérwszy wycinek do drugiégo: toiest, w stósunku dwumnożnym promiéni kół, do których té odcinki należą.

395. *Defin:* Niech będą dwa koła spółśrzodkowé, mieyscé zawarté między ich okręgami, nazywá się *Koroną.*

396. *Twiérdz:* 5. Powiérzchniá iednéy takiéy korony równá iest prostokątowi maiącému wysokość równą szérokości téy korony, a podstawę równą okręgowi koła, którégo promień równáłby się połowie summy promiéni okręgów dwóch, koronę tę zawiéraiących.

Niech będą CA, CB, promiénie dwóch kół spółśrzodkowych; przedzielmy AB na dwie równé części w F: liniiá CF, będzie połową summy dwóch promiéni CA, CB należących do dwóch kół spółśrzodkowych: korona zawartá między témi kołami, równá iest prostokątowi maiącému szérokość AB téy korony za wysokość, a za podstawę okrąg, którégo liniiá CF byłaby promiéniém. Poprowádźmy AD prostopadłą do AC, i dáymy, że AD równá się okręgowi którégo promiéniém iest CA. Złączmy punkta C i D, liniią CD, a przez punkta B i F pociągniémy dwie liniie równoodległé od AD, aż do ich spot[illegible]á się z liniią CD, w punktach E i G. Tá. 22. *Fig.* 3.

Ponieważ CA : CB = AD : BE

i CA : CB = okrąg CA : okręgu CB.

więc AD : BE = okrąg CA : okręgu CB.

A że AD wziętá iest za liniią równą okręgowi, którégo CA iest promiéniém; więc i BE = okręgowi CB.

Podobnym sposobém dowieśdź można, że liniiá FG, równá iest okręgowi, którégo promiéniém byłaby liniiá CF.

Powiérzchnie kół, których promiéniami są CA, i CB, równaią się Tróykątóm, CAD, i CBE; a zatém powiérzchniá korony równá będzie czworokątowi ABED. Przez G poprowádźmy równoodległą od AB, którąby spotkała AD w H, a BE w J; Tróykąty prostokątné GDH, GEJ, maią boki GH, GJ równé, i kąty równé,

więc mogą przystać do siebie: a zatém summa z Pięciokąta BEGHA, i z Tróykąta GEI, toiest Prostokąt ABIH równá się summie z Pięciokąta BEGHA, i z Tróykąta GDH, toiest, równá się czworokątowi BEDA. A że tén czworokąt równy iest powiérzchni korony; więc táż korona równá będzie prostokątowi ABIH, toiest prostokątowi, który má szérokość korony za wysokość, a za podstawę okrąg, w którym, promiéniém iest śrzedniá arytmetycznie proporcyonalná między dwoma promiéniami, czyli połowa summy tychże dwóch promiéni.

3. 7. Podobnie i różnica w kołach spółśrzodkowych, wycinków dwóch, zawartych między témiż samémi promiéniami, równá się Prostokątowi maiącému za wysokość różnicę dwoch promiéni, a za podstawę łuk podobny łukóm wycinków dwóch danych, i należący do okręgu, którégo promień, iest śrzedniim arytmetycznym między promiéniami tych dwóch wycinków.

1. Pokázawszy, iż kwadrowanié koła lub części iego, zawisło od wyprostowaniá iego okręgu; przystąpmy do szukaniá tego sprosto[illegible]niá.

Zadanié to, aż nazbyt wsławioné, zatrudniło wielu przypisuiących sobie nazwisko Jeometrów, którym ledwie początki Matematyki były znaiomé, a i zadaniá nawet samégo nie rozumieli. W czém było omylné ich rozumiénié; bawić się nad tém, nie sądzę bydź rzeczą potrzebną. Mogą Nauczyciele, chcący mieć obszérnieyszą w téy mierze wiadomość, czytać Montukli przemowę do *Historyi o dochodzéniu kwadrowaniá koła* (Histoire des recherches sur la quadrature du Cercle). Dosyć będzie powiedzieć, że treść tego zadaniá na tém zawisła, aby wynaléźć liniią prostą równą okręgowi koła podanégo. Nie rozumié się tu zaś równość pozorná, i zmysłowá (iak ci mniémaią, którzy koło z drewna lub z kruszcu wyrobioné tocząc po iakiéy płaszczyznie, mierzą długość linii, którą punkt iedén tego ko-

ła przebiegł; albo, którzy koło iakié nicią okręcaią, i biorą potém długość téy nici, albo nakoniec, którzy ważą takowé koło, i ono porównywaią z kwadratém podobnéy materyi i iednakowéy z kołém grubości:) ale się rozumié równość umysłową, czyli taką, o któréy możnáby się przeświádczyć przez rozumowaniá podobné tym, iakich używáliśmy do dowiedzieniá práwd, w tym przeciągu dzieła, wyłuszczonych.

398. Archimedes trzysta lát blizko przed Narodzeniém Chrystusa, znalázł stósunek okręgu do śrzednicy, tak blizki práwdziwému, że we zwyczaynych zdarzéniach iest dostatecznym, a przytém, i w używaniu wygodnym. Doszedł on, że oznaczywszy śrzednicę koła przez 1, okrąg iego większy będzie niż $3\frac{10}{71}$, a mnieyszy niż $3\frac{10}{70}$, albo, że wyraziwszy długość śrzednicy przez 497, okrąg będzie większy niż 1561, a mnieyszy niż 1562; uchybienié zatém byłoby náywięcéy w części $\frac{1}{1561}$ całégo okręgu: a któregokolwiek ze dwóch stósunków używszy, np. ostatniego, tén wypadłby na stósunek 7 do 22.

Poźniéy po Archimedesie, wynaleziono sposoby krótsze, któremi dochodzi się stósunków bardziéy ieszcze zbliżonych do práwdziwych. Do téy nawet dokładności iuż przyszło, że wyraziwszy śrzednice koła przez 1, z zerami 127 przydanémi, wynaydzie się okrąg w liczbie złożonéy z tyluż znaków liczebnych, z uchybieniém mnieyszém od iedności ostatniego, a náymniéy wyrażaiącego znaku téyże liczby. Sposób iednak dochodzeniá z tą dokładnością ważności okręgu koła, nie może bydź w tych początkach Uczniom wykładany. Przytoczymy iednak stósunki niektóré wygodnieysze śrzednicy koła do okręgu, wyięté z Xięgi sławnego *P. Huyghens* o wynalázkach wielkości koła (*de circuli magnitudine inventa*). Używaiąc Dwunástokąta wpisanégo w koło, i na kole opisanégo, można wynaléźć dokładnieysze stósunki śrzednicy koła do okręgu,

niżeli té, których doszedł *Archimedes* przez wielokąty o 96 bokach, wpisané w koło i na niém opisané; ale na to mieyscé rachunek *Archimedesa* mniéy wyciągá poprzedzaiących podán, niżeli rachunek na dwunastokącie czyniony.

399. Stósunki śrzednicy do okręgu koła przybliżone do práwdziwych są następuiącé:

7 do 22.
100 do 314.
106 do 333.
113 do 355. 1)

Ponieważ stósunek powiérzchni koła, do kwadratu śrzednicy iego, tén sám iest, co stósunek okręgu koła do śrzednicy cztéry razy wziętéy; więc stósunki powiérzchni koła do kwadratu śrzednicy będą następuiącé:

22 do 28, albo, 11, do 14.
314 do 400, albo, 157, do 200.
333 do 424.
355 do 452.

Czyniąc przybliżeniá dokładnieyszé, lecz bardziéy zawiłé, i używaiąc sposobów krótszych, ale początkowé wiadomości przechodzących, znaleziono, iż okrąg koła zawiéra w sobie śrzednicę, razy 3, 141 592 653 $\frac{5}{6}+$

Stąd wyniká stósunek powiérzchni koła, do kwadratu śrzednicy, albo stósunek okręgu koła do śrzednicy iego, cztéry razy wziętéy, równy stósunkowi 3, 145 926 53 $\frac{5}{6}+$ do 4, albo 3 141 592 653 $\frac{5}{6}+$ do 4 000 000 000 0.

Z cztérech powyżéy wyrażonych stósunków śrzednicy do okręgu koła, piérwszy daie okrąg koła większy razy

3, 142 8 + od śrzednicy,

---

1) Napisáwszy trzy piérwszé nieparzystè liczby 1. 3. 5 po dwa razy, iednę przy drugiéy, tak: 113355: liczba 113, zawiéraiącá trzy piérwszé znaki, wyráżać będzie śrzednicę; liczba zaś 355, zawiéraiącá trzy ostatnié znaki, wyrazi ią małém uchybieniém okrąg koła.

drugi 3, 140 0.
trzeci 3, 141 509, +
czwarty 3, 141 529 92 +

Widzimy tu, iż stósunek piérwszy, daié okrąg koła nadto wielki, drugi i trzeci daie tén okrąg nadto mały, a czwarty, znowu nadto wielki; trzeci iednak i czwarty stósunek dokładnieyszy iest od dwóch piérwszych, a zwłaszcza czwarty, który iescze w miliionowych cząstkach daie okrąg koła nieróżniący się od ważności iego wyżéy podaney 1) a iak náyściśléy wyrachowaney.

400. Z tego, co poprzedzało, łatwo iest rozwiązać przez przybliżénié, następuiącé zagádnienia.

1. Maiąc daną śrzednicę koła, znaléźć iego okrąg.

2. Maiąc dany okrąg koła, znaléźć iego śrzednicę.

3. Maiąc daną śrzednicę koła, znaléźć iego powiérzchnią.

4. Maiąc daną powiérzchnią koła, znaléźć iego śrzednicę.

5. Znaléźć bok kwadratu równégo kołu danému.

Znáyduiémy, iż stósunek śrzednicy koła do boku kwadratu równégo tému kołu, iest 200000, do 177245 +

Tén stósunek przybliżá się bardzo do stósunków następuiących

35	do	31.
44	do	39.
123	do	109.
157	do	148.

1] W drugiéy Xiędze *Pamiętników* (Memoires) Matematycznych P. Lamberta, znáyduie się wyborná *Rozprawa* [*Dissertatio*] o kwadrowaniu koła. Dowodzi tam (§. 9.) Autor, że ieżeli możnáby wyznaczyć

6. Maiąc dany promień koła, i ważność kątową łuku, (toiest w stopniach) znaleźć długość tego łuku, i powierzchnią wycinka, proporcyonalną temu łukowi.

7. Maiąc dany promień koła, i ważność kątową łuku, znaleźć odcinek między tym łukiem i cięciwą iego.

Náyłatwiéy i náyprościéy rozwiążémy to ostatnié zagádnienié, gdy w Tróykącie, który iest różnicą między wycinkiém i odcinkiém wspiéraiącym się na tymże samym łuku, weźmiemy za podstawę ieden z promieni, a za wysokość wstawę łuku danego: maiąc albowiém tę proporcyą, że powierzchniá koła, tak się má do powierzchni odcinka (mnieyszego od półkoła) iak się má okrąg cały do różnicy między łukiém odcinka, i wstawą tego koła; i ułożywszy sobie táblicę łuku, podług promienia táblic Trygonometrycznych, łatwo przyydzie rozwiązać to zagádnienié 1).

8. Znaleźć przez przybliżénié ważność kątową łuku równaiącego się promieniowi koła.

Przystósowanié tego zagádnienia często bywá używane w wyższych częściach Matematyki.

---

stósunek dokładny, okręgu koła do średnicy iego, tedy liczby, któreby go wyrażały, większeby bydź powinny od następuiących, które ten stósunek przybliżony wyrażaią, toiest: 101 951 448 609 914 6 do 324 511 540 032 945.

1) Co się tycze sposobu ułożenia takowych táblic, obácz przykłady dane w Arytmetyce.

1290452
LUBLIN
200645-2

SŁOWNICZEK JEOMETRYCZNY,

Zamykaiący w sobie słowa nowé, albo mniéy znané, użyté w téy Xiędze, z przydanémi obok słowami Łacińskiémi toż samo w używaniu Matematyków znaczącémi. 1)

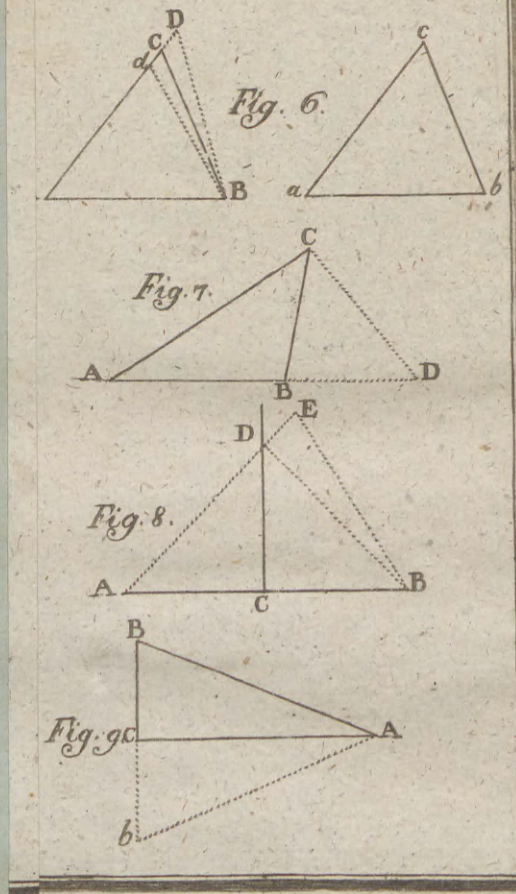
Bezśrzednie	*Immediate*
Bok	*Latus*
Cécha	*Characteristica*
Célowniki	*Dioptrae*
Ciénciwa	*Chorda*
Czworokąt	*Quadrilaterum*
Dopełniénié	*Complementum*
Dostawa	*Cosinus*
Dosieczná	*Cosecans*
Dostyczná	*Cotangens*
Dowodzénié	*Demonstratio*
Forémny	*Regularis*
Ilość	*Quantitas*
Kąt	*Angulus*
Kąt ostry	*Angulus acutus*
Kąt prosty	*Angulus rectus*
Kąt roztwarty	*Angulus obtusus*
Kąt wewnętrzny	*Angulus internus*
Kąt zewnętrzny	*Angulus externus*
Kąt wyskakuiący	*Angulus saliens*
Kątomiérz	*Graphometrum*
Kąty na przemián	*Anguli alterni*
Kąty przyległé	*Anguli adjacentes*
Kąty przeciwné w wiérzchołku	*Anguli ad verticem oppositi.*

1) W niektórych mieyscach, w wykładzie słów łacińskich na swoyskié nie trzymaliśmy się słownego tłumaczénia, ale mieliśmy wzgląd na wyráz i bliższy do dokładnego rzeczy wystawiénia, i stósownieyszy do mowy Oyczystéy.

Koło	*Circulus*
Kołowy	*Circularis*
Kwadrat	*Quadratum*
Kwadrat ukośny	*Rhombus*
Kwadrowanié	*Quadratura*
Łuk	*Arcus*
Następnik	*Consequens*
Na odwrot, *albo* odwrotnie	*Inverse* albo *in ratione inversa*
Niespółmierny	*Incommensurabilis*
Obwód	*Perimeter*
Odcinek	*Segmentum*
Odwrotny	*Inversus*
Okrąg	*Circumferentia*
Opisać	*Inscribere*
Oś	*Axis*
Ostrokątny	*Acutangulum*
Pamiętnik	*Memoriale*
Pierwiástek	*Radix*
Pięciokąt	*Pentagonum*
Pion	*Perpendiculum*
Pionowy	*Verticalis.*
Podanié	*Propositio*
Podstawa	*Basis*
Podziáłka	*Scala*
Poprzednik	*Antecedens*
Pośrednie	*Mediate*
Powiérzchniá	*Superficies*
Powietrzniá	*Atmosphera*
Poziémnie	*Horizontaliter*
Poziomy	*Horizontalis*
Prawidło	*Alidada*, albo *Regula*
Promiéń	*Radius*
Prostokąt	*Rectangulum*
Prostokątny	*Rectangulum* np. *Triangulum*
Prostokréślny	*Rectilineus*
Prostopadle	*Perpendiculariter*
Prostopadły	*Perpendicularis*
Przeciwprostkątná	*Hypothenusa*

Przedmiot	*Obiectum*
Przekątná	*Diagonalis*
Przenośnik	*Transportator*
Przypuszczénié	*Suppositio*
Przystáwanié	*Convenientia*
Ramié kąta	*Crus Anguli*
Rozprawa	*Dissertatio*
Roztwartokątny	*Obtusangulum*
Równoboczny	*Æquilaterum*
Równoległobok	*Parallelogrammum*
Równoodległá	*Parallela*
Równoodległé	*Parallelae*
Równowága	*Libella*
Równoważénié	*Libellatio*
Różnoboczny	*Scalenum*
Rozwiązanié	*Solutio*
Sieczná	*Secans*
Skrayny	*Extremus*
Spełnienié	*Supplementum*
Spółmierny	*Commensurabilis*
Spółśrzodkowy	*Concentricus*
Srzednica	*Diameter*
Srzodek	*Centrum*
Stanowisko	*Statio*
Stolik Ieometryczny	*Tabula Praetoriana*
Stopień	*Gradus*
Stósunek	*Ratio*
Stósunek dwudzielny	*Ratio subduplicata*
Stósunek dwumnożny	*Ratio duplicata*
Stósunek składany	*Ratio composita*
Styczná	*Tangens*
Sześciokąt	*Hexagonum*
Tosamość	*Identitas*
Trójkąt	*Triangulum*
Twiérdzénié	*Theorema*
Twiérdzénié przybrané	*Lemma*
Ukośny	*Obliquus*
Warunek	*Conditio*
Wiérzchołek	*Vertex*

Wieszadło	*Pendulum*
Wniosek	*Corollarium*
Wpisać	*Inscribere*
Wstawa	*Sinus*
Wykładnik	*Exponens*
Wyprostowanié	*Rectificatio*
Zasada	*Principium*
Zagádnienié	*Problema.*


D
C
d
B
Fig. 6.
c
a
b
C
Fig. 7.
A
B
D
E
D
Fig. 8.
A
C
B
B
Fig. 9.
A
b

Tab. I.

Fig. 1.

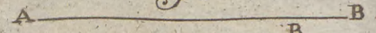


Fig. 2.

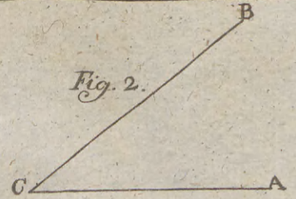


Fig. 3.

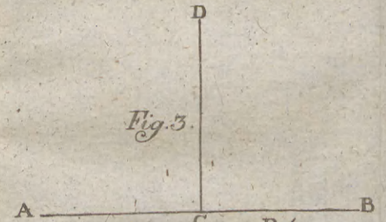


Fig. 4.

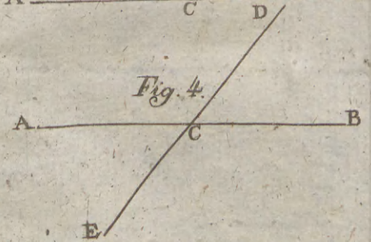


Fig. 5.

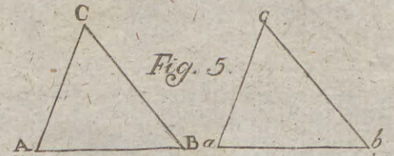


Fig. 6.

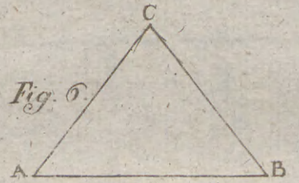
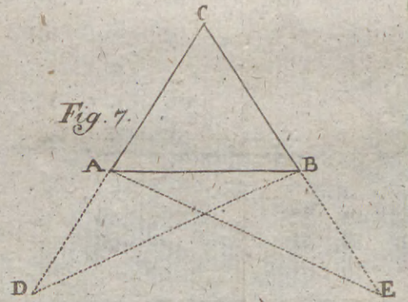


Fig. 7.



Tab. II.

Fig. 1.

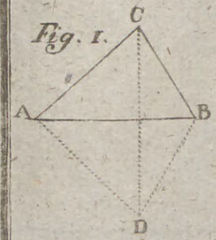


Fig. 2.

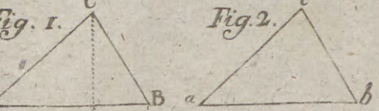


Fig. 3.



Fig. 4.

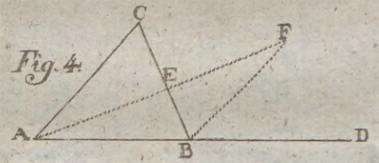


Fig. 5.

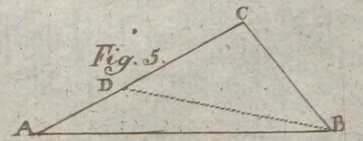


Fig. 6.

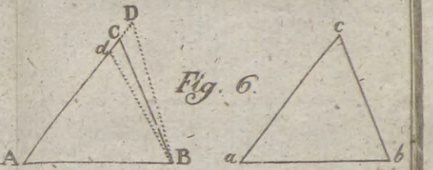


Fig. 7.

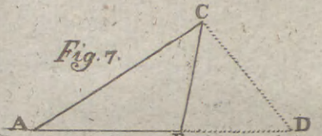


Fig. 8.

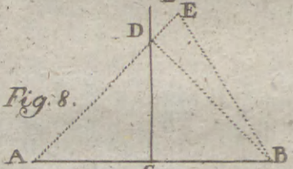
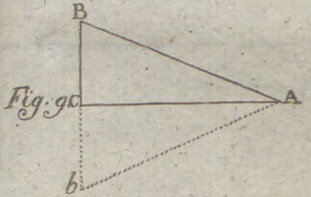


Fig. 9.



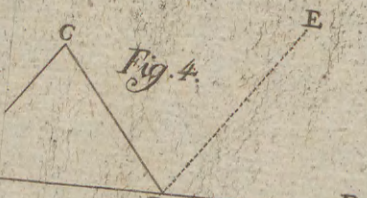
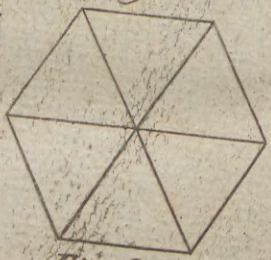


Fig. 4.

Fig. 5.



E

Fig. 6.



Fig. (

I

I

Tab. III.

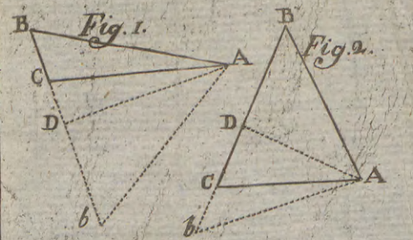
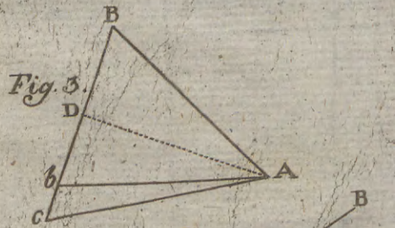
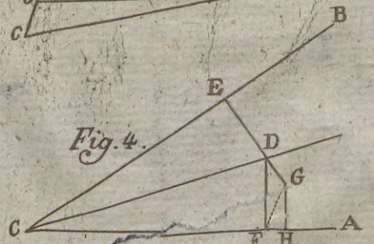
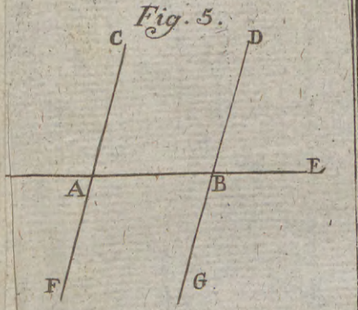
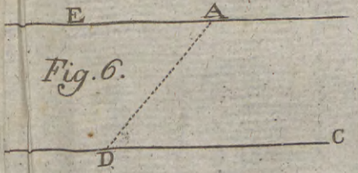

Fig. 1.
B
C
D
A
b

Fig. 2.
B
D
C
A
b


Fig. 3.
B
D
b
A
c


Fig. 4.
B
E
D
G
C
F
H
A


Fig. 5.
C
D
A
B
E
F
G


E
A
Fig. 6.
D
C

Tab. N.

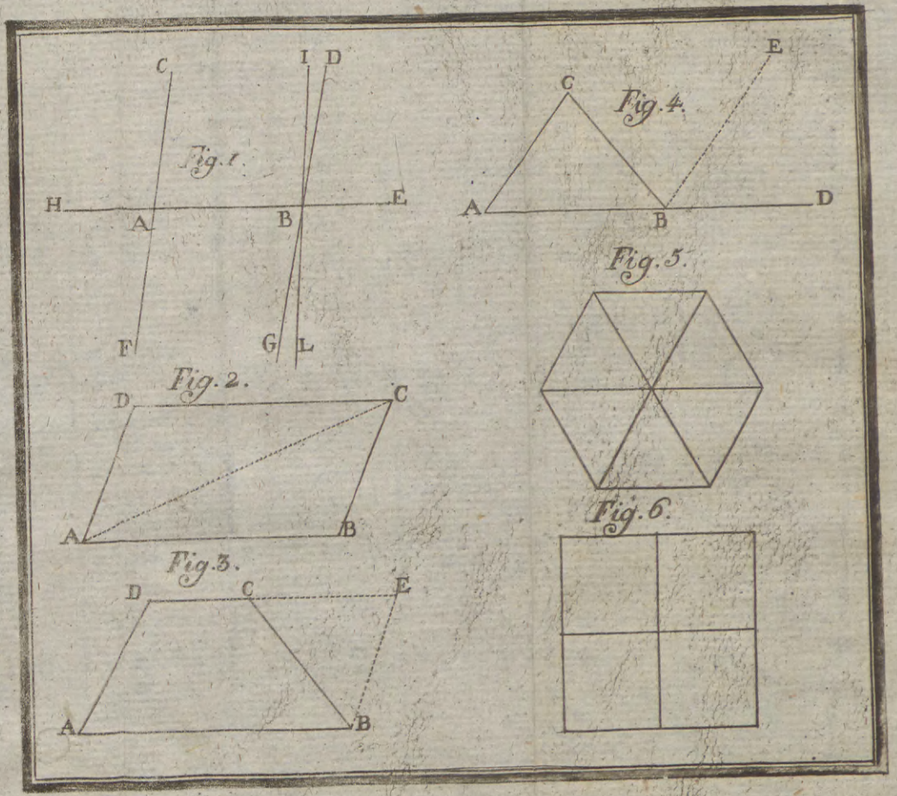

Fig. 1.
C
I
D
H
A
B
E
F
G
L
Fig. 2.
D
C
A
B
Fig. 3.
D
C
E
A
B
Fig. 4.
C
E
A
B
D
Fig. 5.
Fig. 6.

Fig. 4.

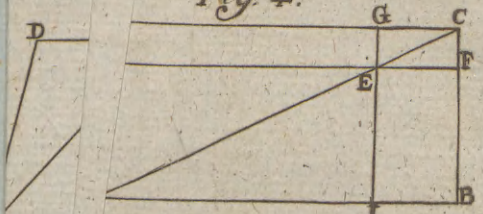


Fig. 5.

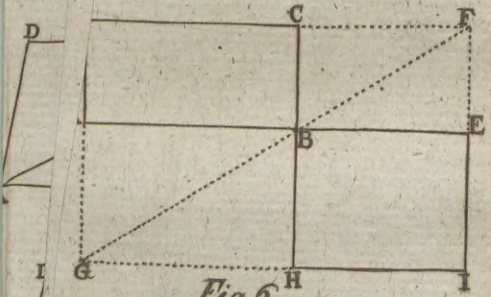
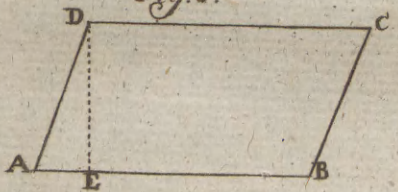


Fig. 6.



Tab. V.

Fig. 1.



Fig. 2.

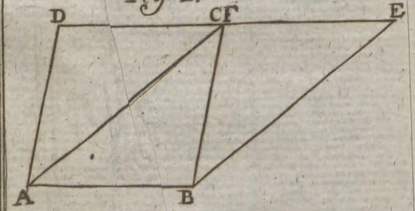


Fig. 3.

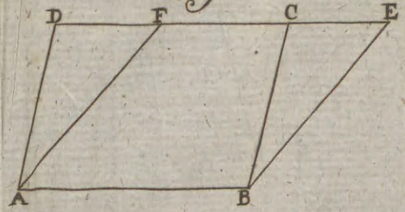


Fig. 4.

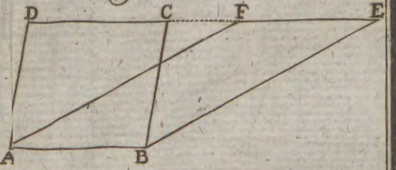
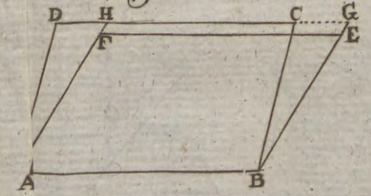


Fig. 5.



Tab. VI.

Fig. 1.

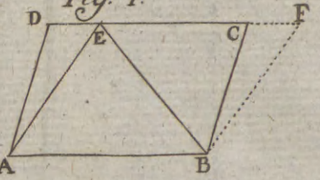


Fig. 2.

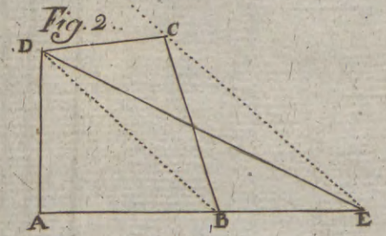


Fig. 3.

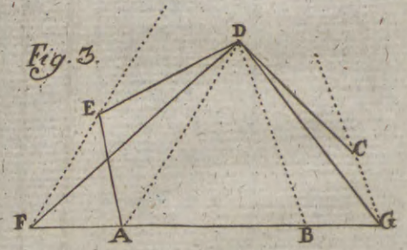


Fig. 4.

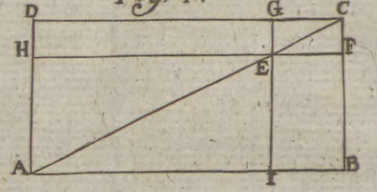


Fig. 5.

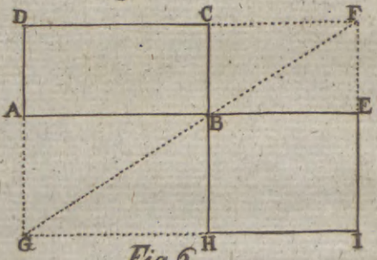


Fig. 6.

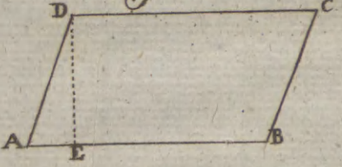
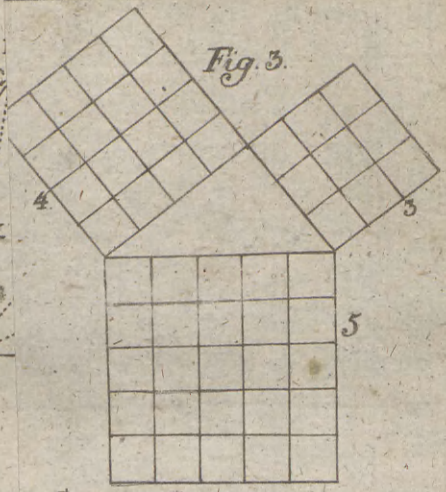




Fig. 3.



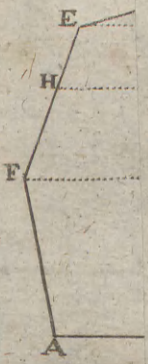
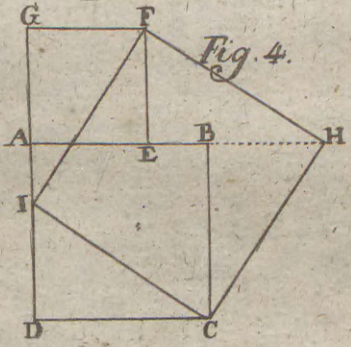


Fig. 4.



Tab. VII.

Fig. 1.

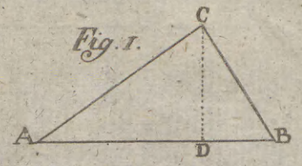


Fig. 2.

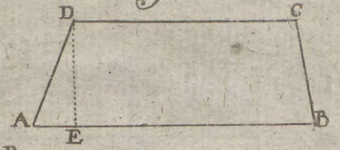


Fig. 3.

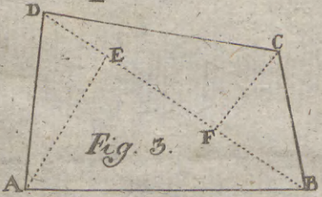


Fig. 4.

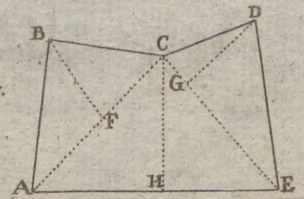


Fig. 5.

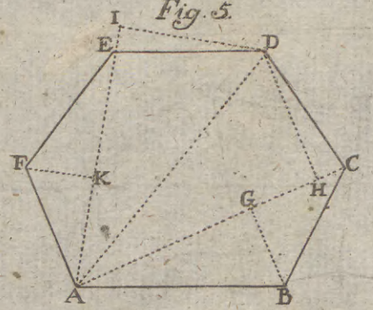
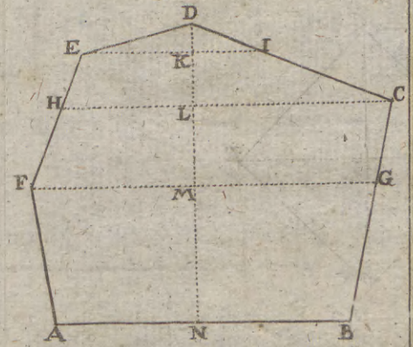


Fig. 6.



Tab. VII.

Fig. 1.

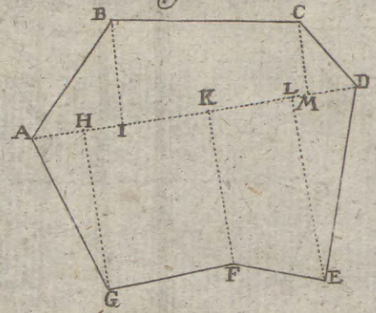


Fig. 2.

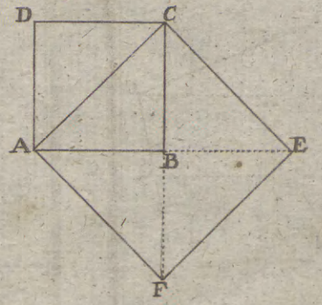


Fig. 3.

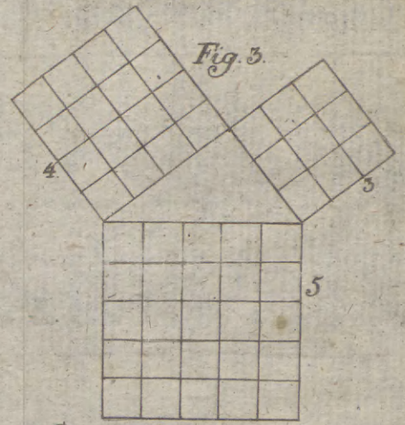
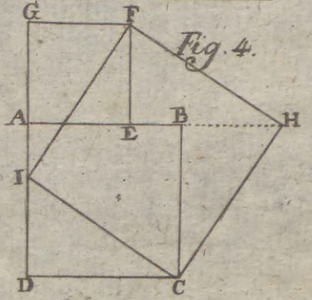


Fig. 4.



I

E

Fig

C

K

L

Fig. 4.

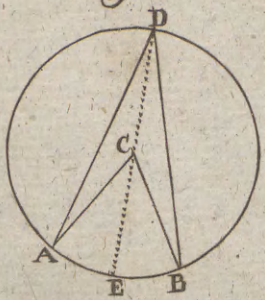


Fig. 5.

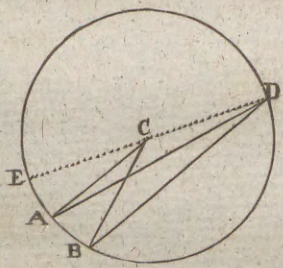
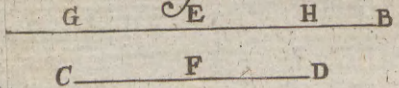


Fig. 6.



Tab. IX.

Fig. 1.

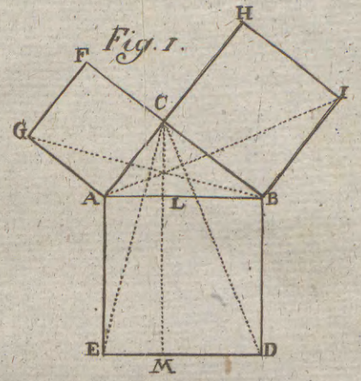


Fig. 2.

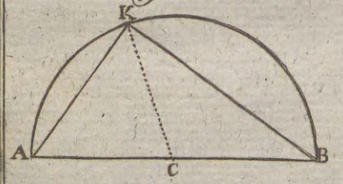


Fig. 3.

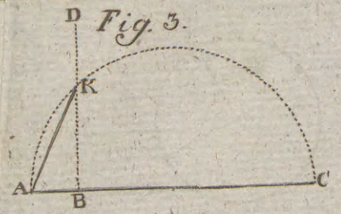


Fig. 4.

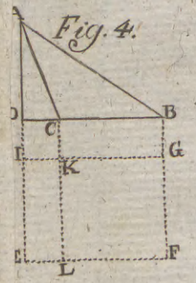
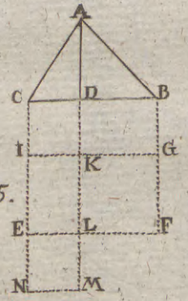


Fig. 5.



Tab. X.

Fig. 1.

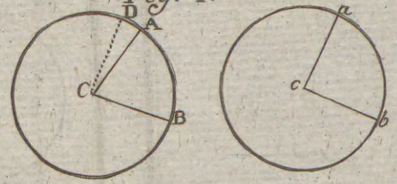


Fig. 2.

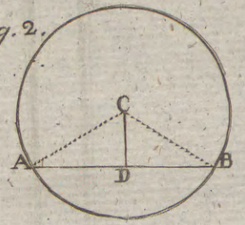


Fig. 3.

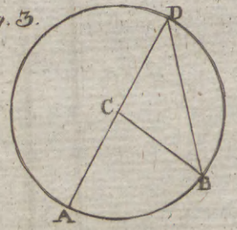


Fig. 4.

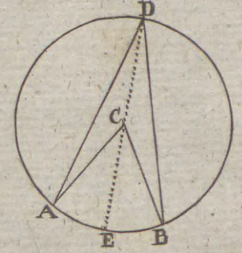


Fig. 5.

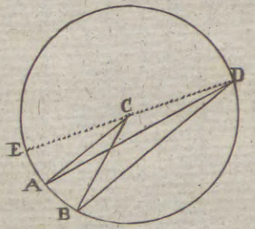


Fig. 6.

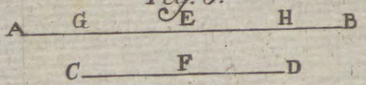


Fig. 4.

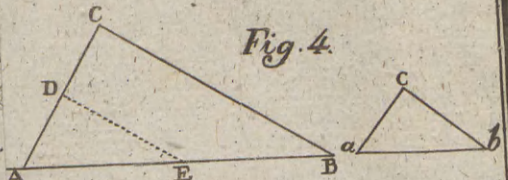


Fig. 5.

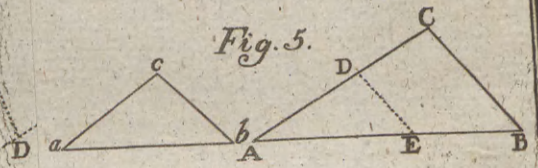
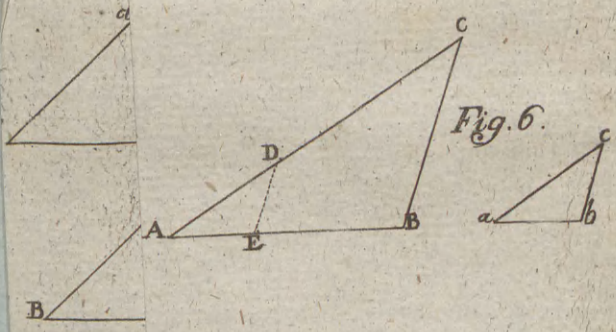
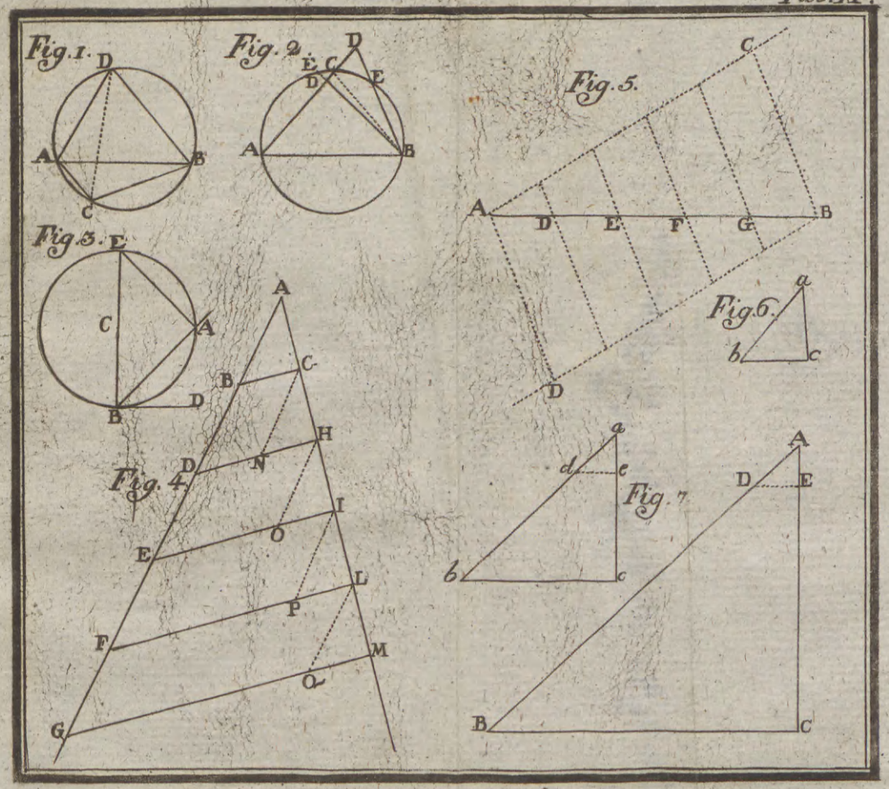


Fig. 6.



Tab. XI.



Tab. XII.

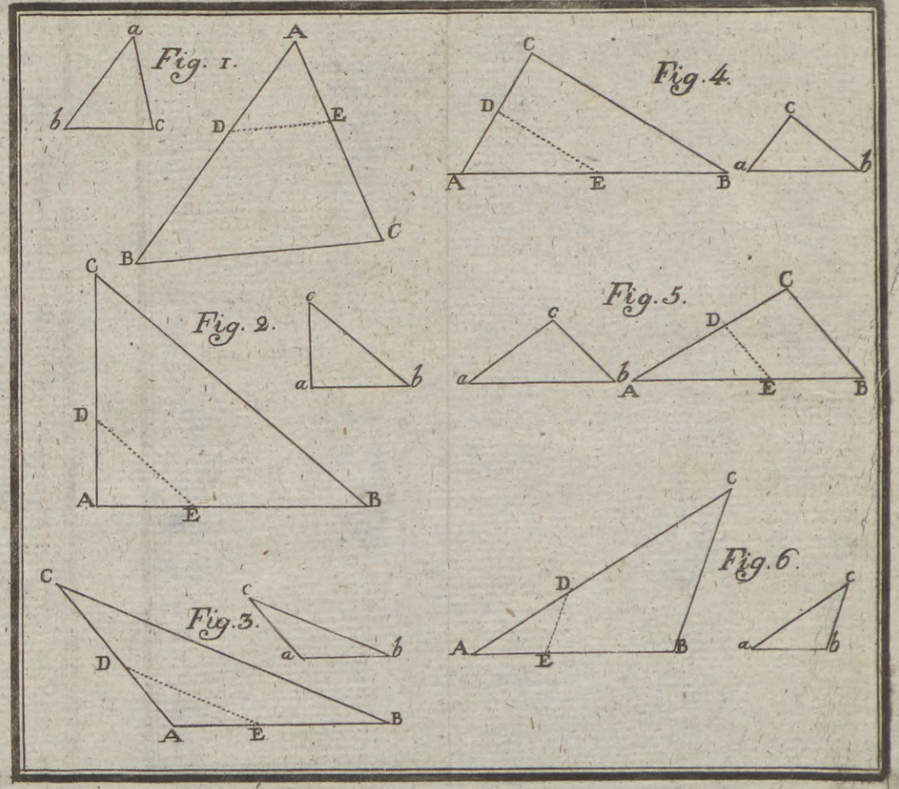


Fig. 4.

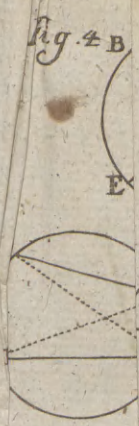
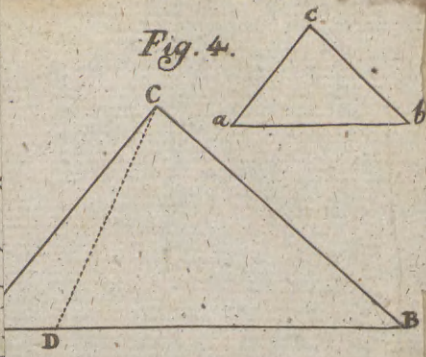


Fig. 4.



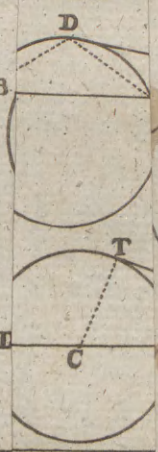
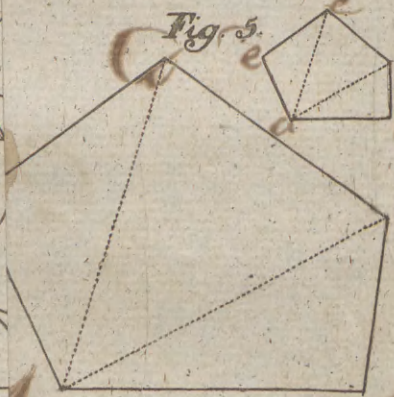


Fig. 5.



Turcf Dat. Culp.

Tab. XIII.

Fig. 1.

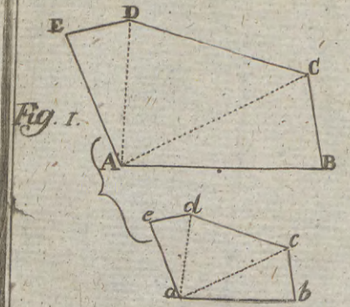


Fig. 2.

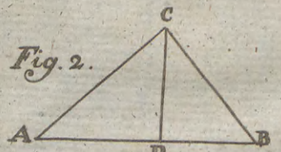


Fig. 3.

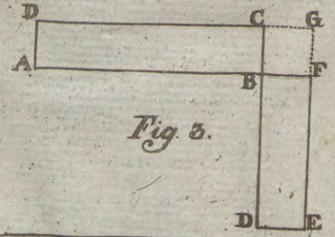


Fig. 4.

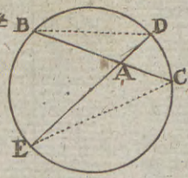


Fig. 5.

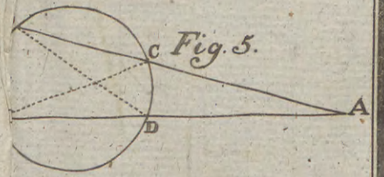


Fig. 6.



Fig. 7.



Tab. XIV.

Fig. 1.

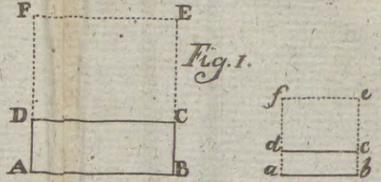


Fig. 2.



Fig. 3.

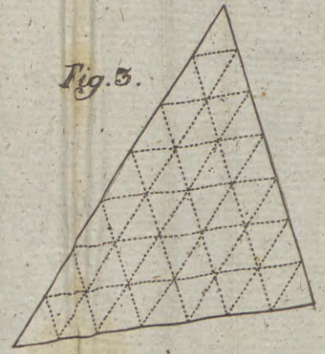


Fig. 4.

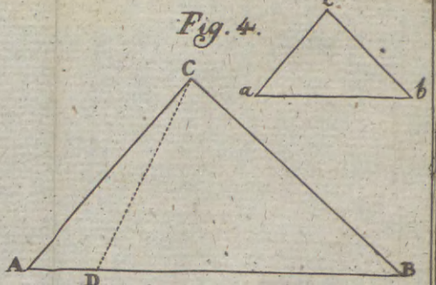


Fig. 5.

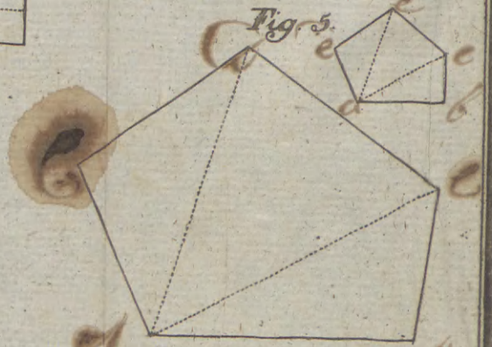


Fig. 3.

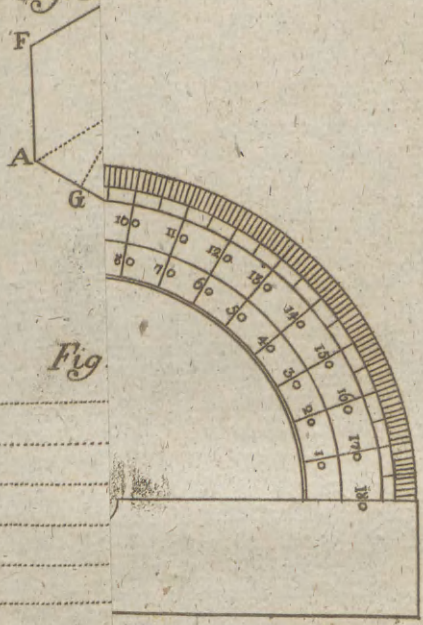


Fig.

Tab. XV.

Fig. 1.



Fig. 2.

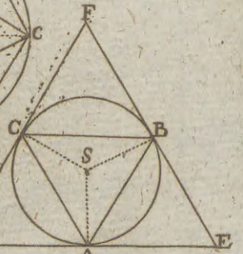


Fig. 3.

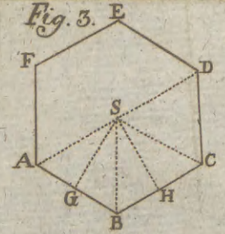


Fig. 4.

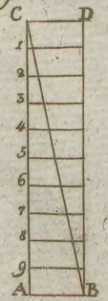


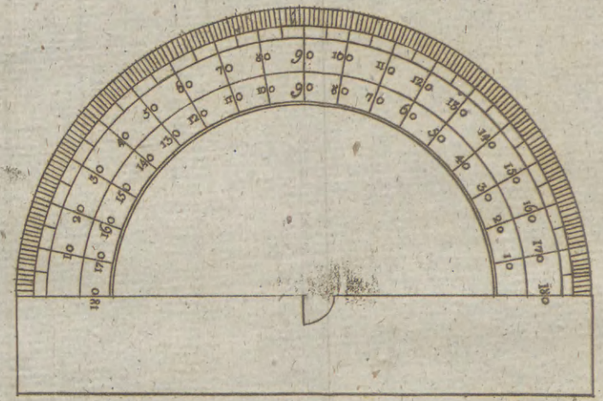
Fig. 5.



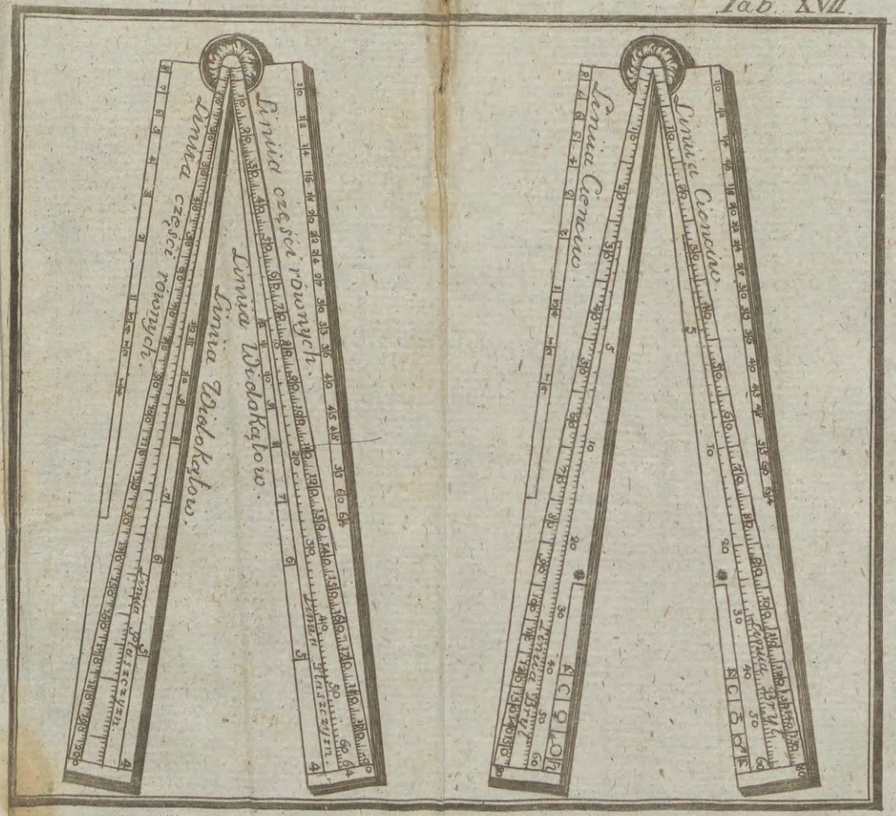
Fig. 6.



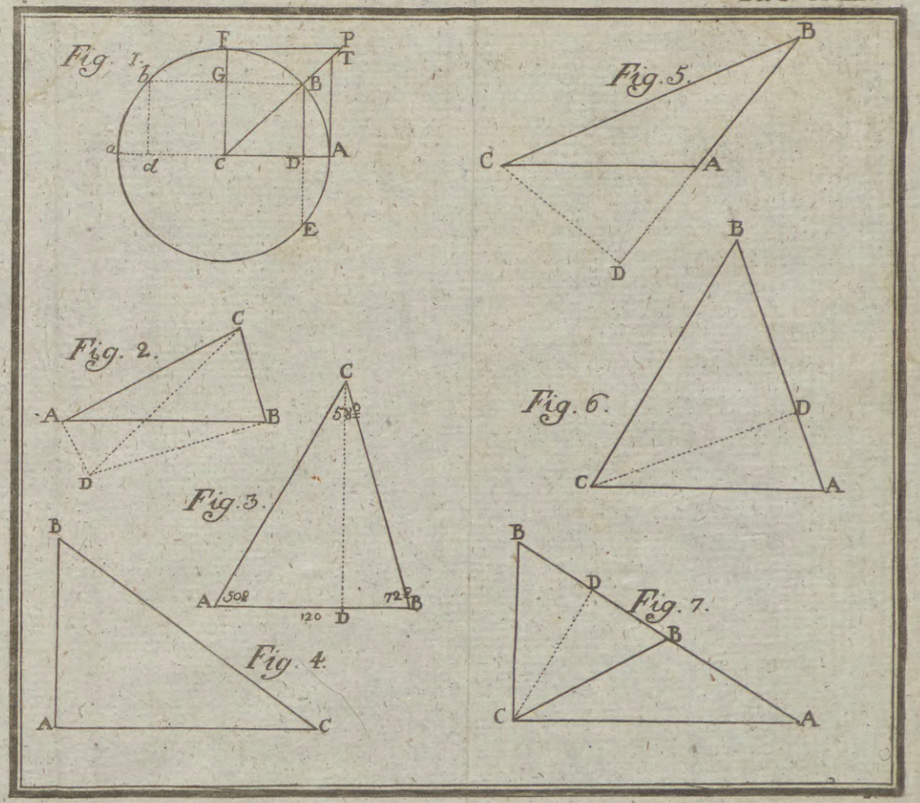
Tab. XVI.



Tab. XVII.



Tab. XVIII.



Tab. XVIII.

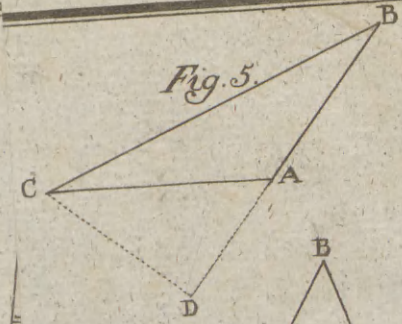


Fig. 5.

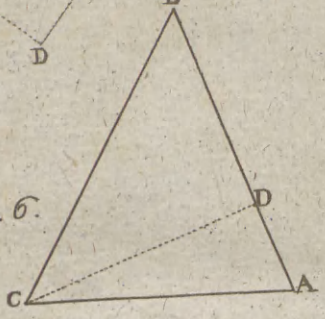


Fig. 6.

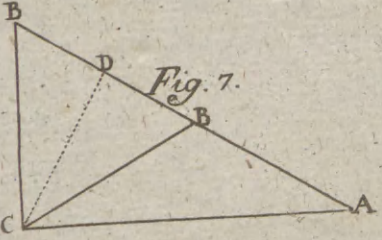


Fig. 7.

B

Tab. XIX.

Fig. 1.



Fig. 2.

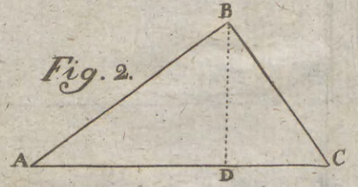


Fig. 3.

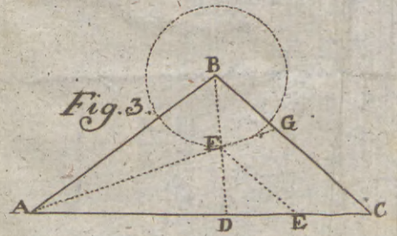


Fig. 4.

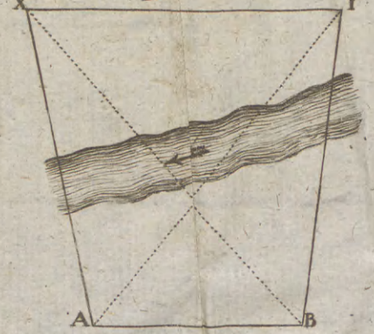
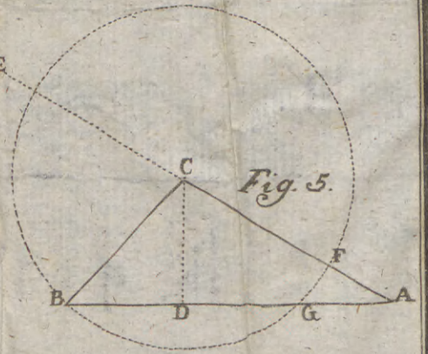


Fig. 5.



Tab. XX.

Fig. 1.

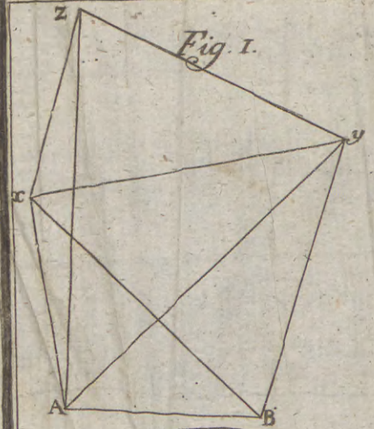


Fig. 3.

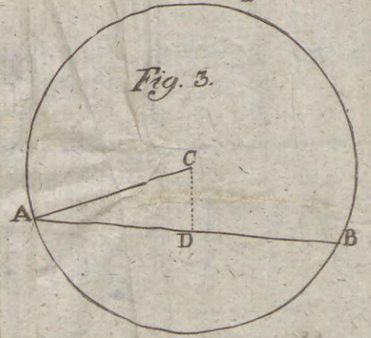
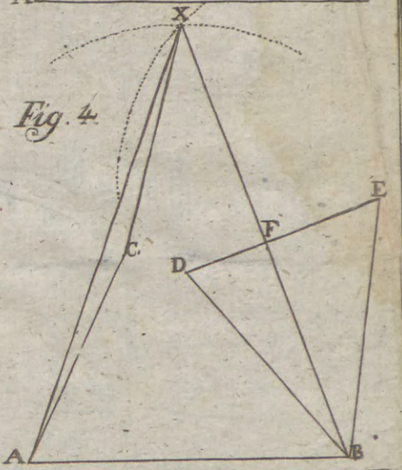


Fig. 2.



Fig. 4.



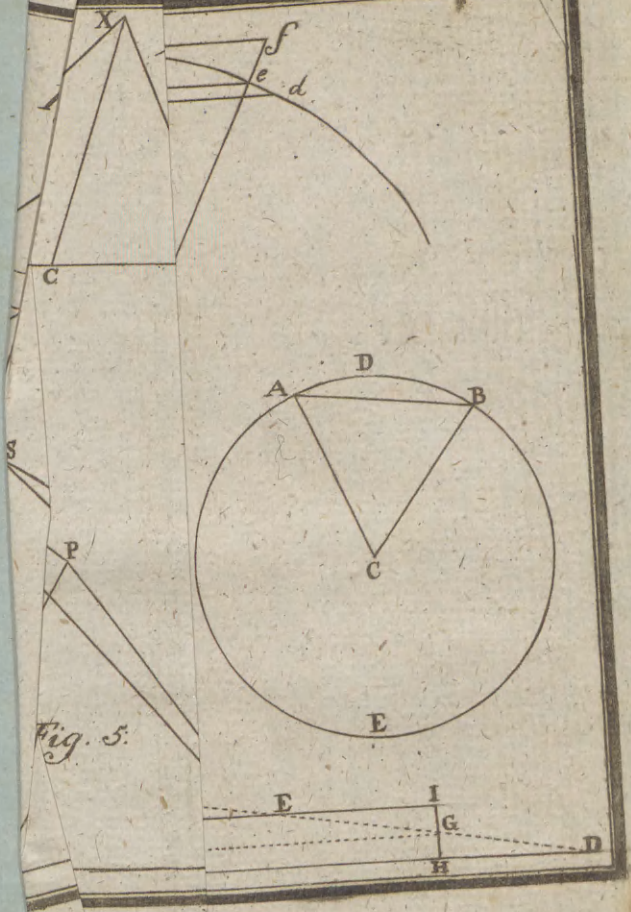
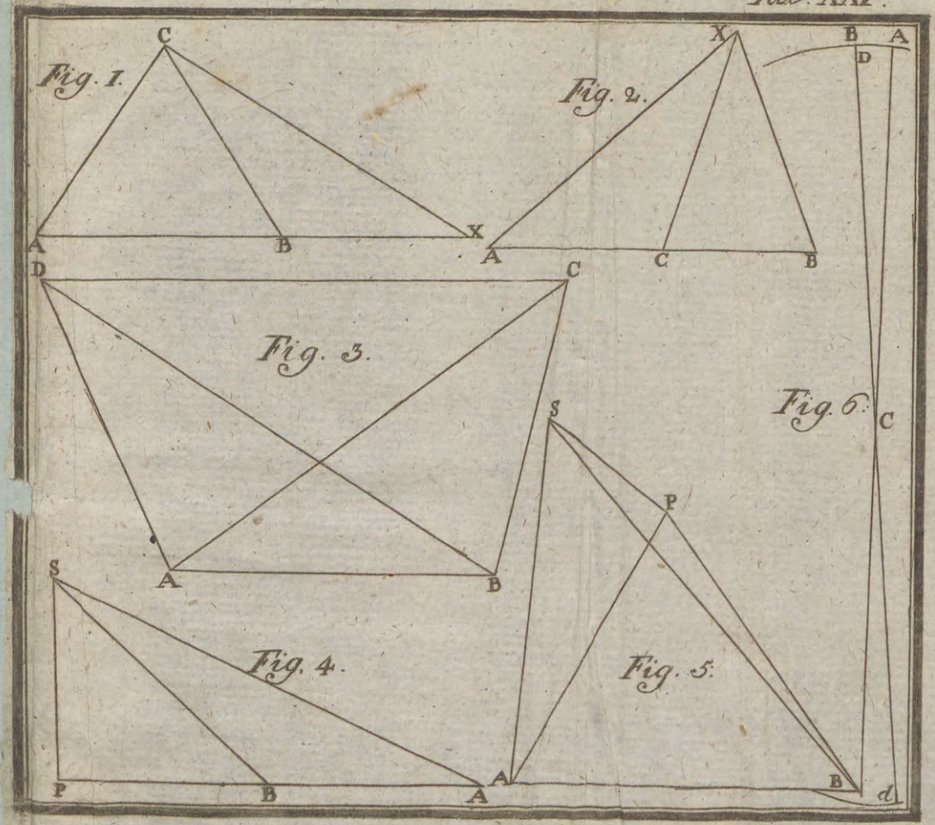
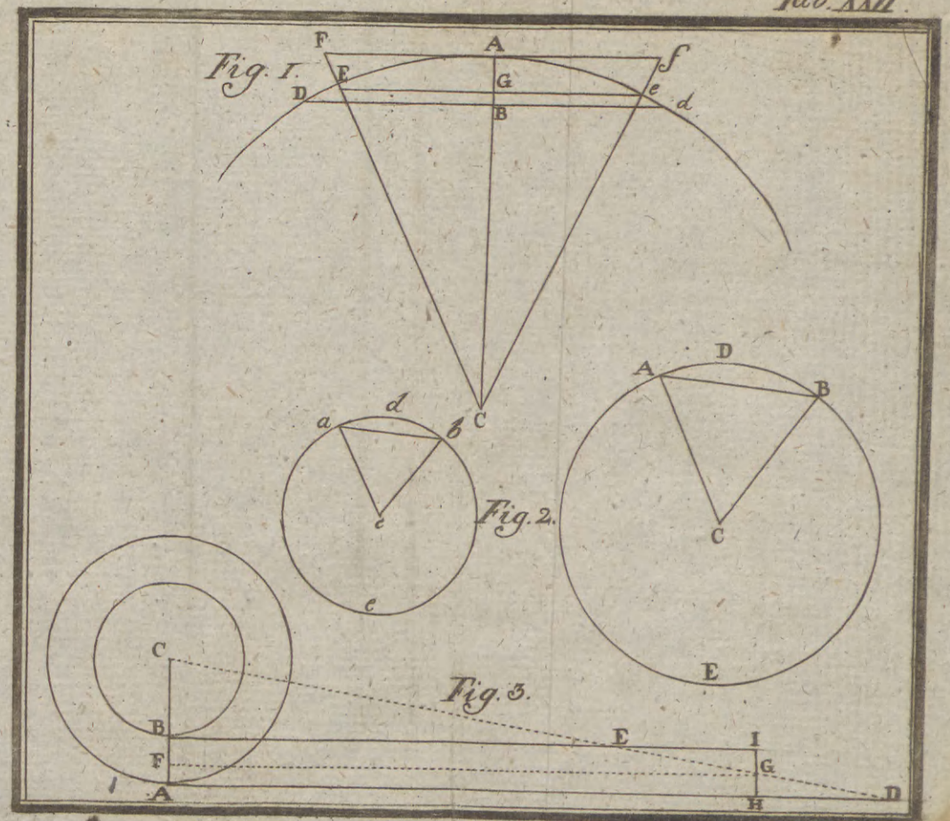


Fig. 5.

Tab. XXI.



Tab. XXII.



KSIĘGOZBIÓR
MARCINA ZAMOYSKIEGO
7376 -KZ

Biblioteka im. Hieronima
Łopacińskiego w Lublinie
200645