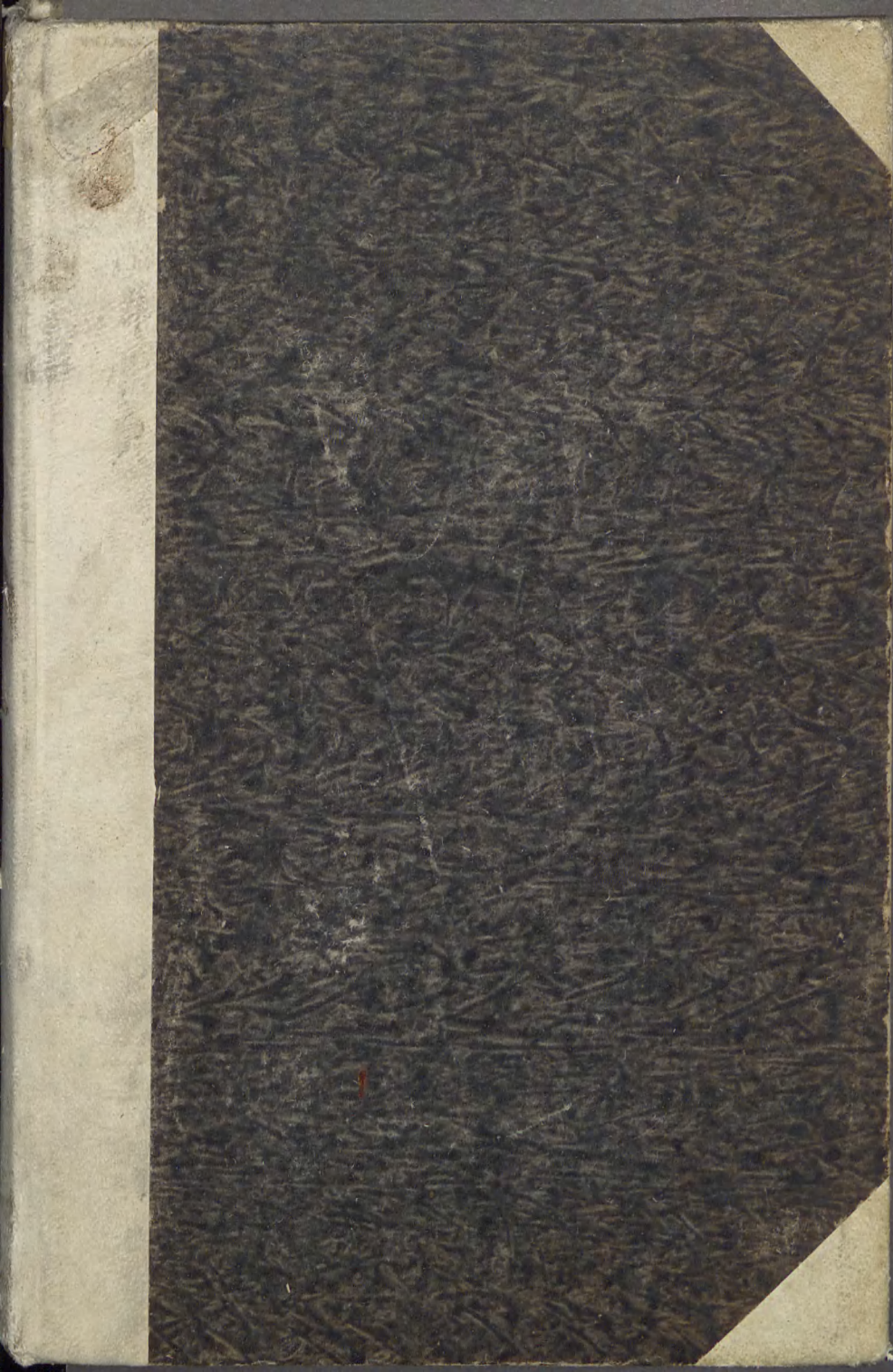




3260.

J. 13.

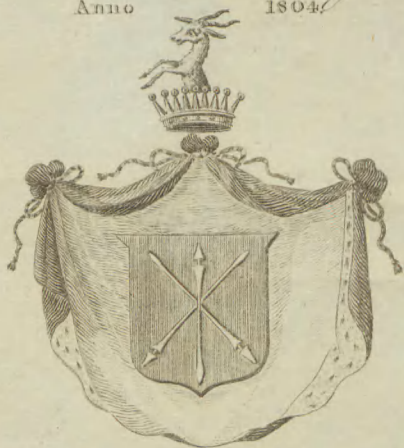
f. 1.

A. 34.

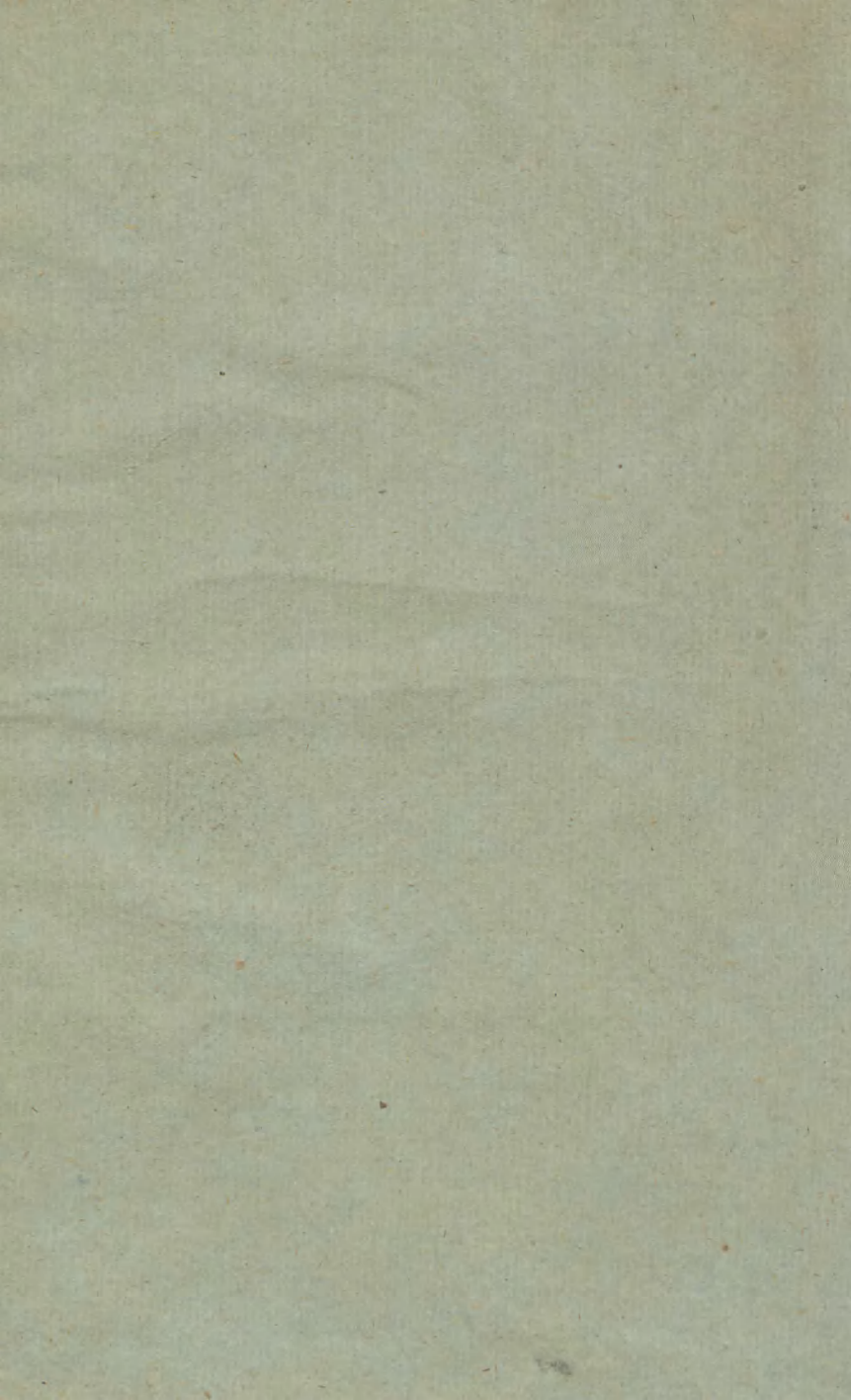
Stanislaus C. O. Lamoy ski,

Anno

1804



*Ex Bibliotheca C. O. Lamoy ski
Scolis Lamoy skiensis consacratæ.*



Dziel 4572

JEOMETRYA

D L A

SZKOŁ WOIEWODZKICH

CZĘŚĆ I

NA KLASĘ II, III, IV i V.

p. Szabrowskiego

Z OPRAWĄ W PAPIER CENA ZŁ. 5. gr. 15.



W WARSZAWIE,

NAKŁADEM I DRUKIEM N. GLÜCKSBERGA,

KSIEGARZA I TYPOGRAFA KRÓLEWSKIEGO UNIwersYTETU.

1820.

KOMMISSYA RZĄDOWA
WYZNAN RELIGIYNYCH I OSWIECENIA PUBLI-
CZNEGO.

Dzieło pod tytułem: *Jeometrya dla szkół Woiewódzkich Część I.* ułożone przez JX. Anto-
niego Dąbrowskiego, Professora Matematyki w Kró-
lewsko-Warszawskim Uniwersytecie, nowo prze-
drukowane w Warszawie roku bieżącego, iako ele-
mentarne zatwierdza i do używania w właściwych
klassach szkół publicznych przeznacza.

W Warszawie dnia 16 Sierpnia roku 1820.

Minister Prezydujący

S. POTOCKI.

Głuszyński, S. J.

*Złożywszy, stosownie do Postanowienia Xię-
cia Namiestnika Królewskiego, trzy exemplarze
niniejszego dzieła dla Bibliotek publicznych,
oświadczam, iż prawnie poszukiwać będę wszel-
kich fałszowanych edycji.*

V. Gümbel

JEOMETRYI

C Z Ę Ś Ć I.

R O Z D Z I A Ł I.

Wiadomości poprzednicze.

1. **W**SZYSTKIE rzeczy zmysłowe, zwane inaczej *ciała*, choćby też były naydrobnieysze, są zawsze *rozciąte*, to iest: mają długość, szerokość i wysokość czyli grubość. Spólna ta wszystkim ciałom własność, o której nas zmysł widzenia i dotykania przekonywa, sama iedna tylko zajmuie uwagę naszą, kiedy ciała iakiego wielkość zmierzyć, lub ią z wielkością innego ciała porównać chcemy: w ten czas bowiem nie zważając na inne ciała tego własności, do mierzenia żadnego wpływu nie mające, samą się tylko iego rozciągłością zaprzatamy. Nauka podająca sposoby mierzenia rozciągłości, nazywa się nauką *mierniczą*, czyli *Jeometryą*.

2. Rozciągłość uważa się rozmaicie, i ma rozmaite nazwiska. Jeżeli dla wymierzenia wielkości iakiego ciała uważamy razem iego długość, szerokość i wysokość, czyli grubość; rozciągłość pod temi trzema wymiarami razem wzięta, zowie

się *bryłowatością*, albo *objętością* tego ciała, *volumen*, a ciała, których wielkość pod temi trzema wymiarami uważamy, zowią się *bryły*: i tak kamień, kula, belka, budynek i t. d. są to bryły, których objętość jest miejsce wzdłuż, wszerz i wwyż rozległe, przez te bryły zajęte. Bryły podług rozmaitego kształtu są rozmaite, okrągłe, graniaste, kończate i t. d. i mają rozmaite nazwiska, iak to na swoiém miejscu wyłożymy.

3. Częstoć w mierzeniu ciał uważamy tylko ich długość i szerokość, bez żadnego względu na wysokość lub grubość. I tak dla wymierzenia pola, ogrodu, posadzki w pokoju, obicia na ścianę i t. d. dosyć jest zmierzyć ich długość i szerokość. Rozciągłość pod temi dwoma wymiarami uważana, bez względu na wysokość czyli grubość, zowie się *powierzchnią*, *superficieś*. Powierzchnia podług kształtu ciała, do którego należy, jest albo równa czyli płaska, zwana inaczej *płaszczyzna*, *planum*; iak jest powierzchnia papieru, tablicy, stołu, posadzki, jeziora, pola równego i t. d. albo nierówna czyli krzywa, to jest wklęsła lub wypukła; iak jest powierzchnia naczynia wklęsłego, kuli, armaty, góry, doliny i t. d. Tu już łatwo wniesć można, że powierzchnie równe czyli płaszczyzny różnią się tylko między sobą swoją rozległością czyli wielkością: powierzchnie zaś krzywe tak co do rozległości, iak i co do kształtu swego muszą być rozmaite.

4. Często nawet i na szerokość nie dajemy żadnego względu, lecz tylko samę długość uważamy. I tak podróżny nie pyta się o szerokość drogi, którą ma przebyć, ale tylko uważa odległość miejsca do którego dąży: probuiący dzielności strzelby mierzy tylko długość drogi, którą

kula przebiegła, i t. d. Rozciągłość taka wzdłuż tylko uważana, bez względu na szerokość i grubość, zowie się *linią*, a końce linii nazywają się *punktami*. Punkt zatem, ściśle biorąc rzeczy, nie ma żadnej rozciągłości: gdyż jest końcem linii, która nie ma ani szerokości ani grubości. Mówimy tu, *ściśle biorąc rzeczy*, gdyż punkta znaczone na tablicy lub na papierze nie mogą być bez rozciągłości, równie iako i linie, które kredą, ołówkiem, albo piórem kręcimy, muszą mieć koniecznie szerokość, choćby też były iak najcieńsze. Ale w ścisłym znaczeniu, kiedy płaszczyzna będąca końcem czyli granicą ciała iakiego, ma tylko długość i szerokość bez grubości, linia będąca granicą czyli końcem płaszczyzny, mieć tylko może długość bez szerokości i grubości; punkt zaś, iako granica czyli koniec linii, nie może mieć żadnej rozciągłości.

5. Linia jest albo prosta, albo złamana czyli z kilku prostych złożona, albo krzywa. Linia prosta jest najkrótszą drogą z iednego punktu do drugiego, iak jest linia AB. *Figura 1.* Wszelka zaś inna linia, która nie jest najkrótszą drogą z iednego punktu do drugiego, jest albo linia złamana, czyli z prostych złożona, iak jest linia ACDB; albo krzywa, iak są linie AEB, AFB, które są tém dłuższe, im się bardziéy oddalają od najkrótszégó drogi z punktu A do B, czyli od linii prostej AB.

6. Z tego cośmy dotąd o linii prostej powiedzieli, wypada iód że przez ieden punkt tyle linii prostych prowadzić można, ile się podoba: co jest przez się widoczna; że przez dwa punkta iedna tylko linia prosta przechodzić może: bo od iednego punktu do drugiego iedna jest tylko

naykrótsza droga; linii zaś krzywych i złamanych tyle przez dwa punkta prowadzić można, ile się podoba: dla tego też linie krzywe i złamane oznaczają się kilką głoskami; na oznaczenie zaś linii prostéy, dosyć iest dwóch tylko głosek, które, iezeli długość linii prostéy iest wyznaczona, kładą się przy iéy końcach; iezeli długość linii nie iest wyznaczona, kładą się w dwóch którychkolwiek iéy punktach. *3cie* że gdy zatém dwie linie proste mają dwa punkta wspólne, dwie te linie czynią iedną tylko linią prostą: bo przez dwa punkta iedna tylko linia prosta przechodzić może; *4te* że gdy się dwie linie proste z sobą przecinają, przecięciem ich iest tylko ieden punkt: bo gdyby się we dwóch punktach przecinały, na ten czas mając dwa punkta wspólne, czyniłyby iedną linią prostą. *5te* że nakoniec linie proste różnią się między sobą tylko długością swoją; lubo i ta różnica nie iest tak wielką iak się z początku zdaje, gdy zważymy, że każda linia prosta może być, w myśli przynajmniéy w obie strony tak daleko przedłużona, iak się podoba; gdy tym czasem linie złamane i krzywe tak co do długości, iako i co do kształtu swego, mogą być rozmaite.

7. Między liniami krzywemi, nayznaczniejsza iest linia kolista, zwana *okręgiem koła*, *linea circularis*, *circumferentia circuli*, iaka iest *fig. 2.* ABCDEA, która zwyczajnie kreśli się za pomocą narzędzia cyrklem zwanego, lecz którą wykreślić także można sposobem następującym: wzięwszy nitkę lub dróćik długości *np.* linii AS, i ieden iego koniec utwierdziwszy na stole lub na tablicy w punkcie S tak, aby około tego punktu mógł się obracać; do drugiego końca A, przyłożmy ołówek lub kredę, i obróćmy dróćik wraz

z kredą około punktu S tak, aby powrócił na to samo miejsce, z którego obracać się począł: ślad na tablicy od kredy zastawiony jest okręgiem. Płaszczyzna tą linią krzywą określona zowie się *kołem*, *circulus*. Część iakakolwiek okręgu AED, BCD i t. d. nazywa się *łukiem*, *arcus*.

8. Własność okręgu z samego wykreślenia wypływająca jest ta, że każdy punkt na nim wzięty znajduje się w równy odległości od punktu S: odległością bowiem tą jest dróć AS, którego długość w czasie obrotu jest nieodmienna. Punkt S zowie się dla téj przyczyny *środkiem* koła, *centrum*, a linia prosta SA, SB, i t. d. środek koła z punktem którymkolwiek na okręgu wziętym łącząca, nazywa się *promieniem*, *radius*. Wszystkie zatem promienie koła są równe: bo wszystkie punkta okręgu są w równy od środka koła odległości. Inne własności okręgu wyłożymy na swoim miejscu; tu tylko przestaiemy na tych, które nam do początkowych wiadomości o liniach prostych będą potrzebne.

9. Co się tycze innych linii krzywych, kształtem swoim i innemi własnościami od okręgu różniących się, te należą do Jeometryi dalszey, którą poprzedzić powinna wiadomość własności linii prostych, płaszczyzn i brył, co jest przedmiotem niniejszego dzieła.

R O Z D Z I A Ł II.

O Liniach prostych przecinających się, o kątach i trójkątach.

10. Miejsce nieograniczone ACB, *fig. 5* zawarte między dwiema liniami prostymi AC i BC,

które się z sobą przecinaia w punkcie C, i które mogą być tak przedłużone, iak się podoba, nazywa się *kątem*, *angulus*. Linie AC, BC, przecięciem swoim kąt tworzące, zowią się *ramionami* kąta, *crura*, a punkt C, w którym się te dwie linie przecinaia, nazywa się *wierzchołkiem* kąta, *vertex*.

11. Kąt zwyczajnie oznacza się jedną głoską iakąkolwiek, która się kładzie przy iego wierzchołku. Lecz gdy dwa lub więcéy kątów mają spólny wierzchołek, iak iest na figurze 4, na ten czas kąt oznacza się trzema głoskami, z których jedna kładzie się przy iego wierzchołku, a dwie przy końcach ramion. A że częstokroć końce ramion są wierzchołkami innych kątów, iak np. na *fig. 11*, przeto dla dokładnego oznaczania kątów, zgodzono się w wymawianiu tych głosek zachować następujący porządek: wymówić naprzód głoskę będącą przy końcu iednego ramienia, potém głoskę będącą przy wierzchołku, nakoniec głoskę będącą przy końcu drugiego ramienia. I tak *fig. 4* kąt zawarty między ramionami BC, DC iest BCD, lub DCB; kąt ACD, lub DCA iest kąt zawarty między ramionami AC, DC i t. d.

12. Ramiona kąta mogą się bardziéy lub mniéy rozchodzić: kąty téż pod tym względem są większe lub mnieysze. I tak *fig. 4*, kąt ACB iest większy od kąta DCB; gdyż ramiona pierwszego bardziéy się rozchodzą, niż ramiona drugiego. Kąty równe są te, których ramiona równie się rozchodzą, i które tém samém przystać mogą do siebie, gdy ieden na drugim będzie położony. I tak, położywszy *bc*, ramie kąta *bca*, na BC, ramieniu kąta BCA, w ten sposób, aby punkt *c* padł na C, ieżeli ramie *ac*, póydzie po ramieniu AC, kąt

bca , jest równy kątowi BCA , chociażby ramiona bc , ac , były dłuższe lub krótsze od ramion BC , AC : gdyż ramiona kąta iako linie proste mogą być podług potrzeby przedłużone. Jeżeli zaś, położymy bc na BC , ramię ac weźmie takie położenie, iak CD , lub iak CE ; kąt bca jest w pierwszym przypadku mniejszy, w drugim większy od kąta BCA , chociażby ramiona bc , ac były równe ramionom BC , AC . Wielkość zatem kąta nie zależy od długości ramion, lecz od ich roztwartości, czyli, co na iedno wychodzi, od położenia względem siebie dwóch linii przecięciem swoim kąt tworzących.

13. Gdy linia DC *fig. 5.* takie ma względem linii AB położenie, że z nią tworzy dwa kąty ACD , BCD między sobą równe; kąty te zowią się *proste, recti*, a linia DC jest *prostopadła, perpendicularis*, do linii AB . Wszelki kąt mniejszy od prostego, iak jest *np. fig. 6*, kąt ECB , zowie się *ostry, acutus*; wszelki kąt większy od prostego, iak jest *np.* kąt ACE , zowie się *roztwartym, obtusus*.

14. Kąty tak ostre iako też i roztwarte mogą się bardziéy lub mniéy przybliżać do prostego; przeto też tak ostre iako i roztwarte, co do wielkości swoich, są między sobą rozmaite. Lecz kąty proste wszystkie sobie są równe, i mogą do siebie przystać. Jakoż *fig. 5*, położymy cb ramię kąta prostego dcb , na CB ramieniu kąta prostego DCB , gdyby ramię cd nie poszło po ramieniu CD , padłoby albo z prawej strony linii CD , *np.* na linię CE ; albo z lewej strony teyże linii CD , *np.* na linię CF ; i kąt dcb w pierwszym przypadku byłby równy kątowi ECB , który jest ostry, iako mniejszy od prostego DCB ; w

drugim przypadku kąt dcb byłby równy kątowi FCB , który jest roztwarty, iako większy od prostego DCB . A że kąt dcb nie jest ani ostry, ani roztwarty; więc i ramię cd nie póydzie ani po linii CE , ani po linii CF , lecz po linii CD ; a zatem będzie kąt prosty dcb równy prostemu DCB .

15. Gdy linia CE , *fig. 6.* z linią AB tworzy dwa kąty nie równe, jeden ECB ostry, czyli mniejszy od prostego DCB , drugi ACE roztwarty, czyli większy od prostego ACD ; summa tych dwóch kątów ECB , ACE przy sobie leżących, zwanych inaczéy *przyległemi*, *adjacentes*, równa się dwom kątom prostym. Jakoż kąt ostry ECB od prostego DCB mniejszy jest kątem DCE ; kąt zaś roztwarty ACE od drugiego prostego ACD większy jest tymże samym kątem DCE : więc obadwa kąty przyległe ECB , ACE , równe są dwom kątom prostym DCB i ACD .

16. Stąd wypadają następujące wnioski: 1^o *o* *o* że kiedy jeden z dwóch kątów przyległych jest prosty, drugi także prosty być powinien; gdyż obadwa czynią dwa kąty proste;

2^o *re* Ze wszystkie kąty, *fig. 7.* ACE , ECD , DCF , FCB , leżące z jednéy strony linii AB , i mające spółny wierzchołek C , ważą dwa kąty proste: bo wystawiwszy sobie, że z punktu C jest wyprowadzona CM prostopadła do AB , summa tych wszystkich kątów równa się widocznie dwom kątom prostym ACM , BCM .

3^o *cie.* Ze gdy się dwie linie proste, *fig. 8.* AB , DE , przecinają w punkcie C , summa czterech kątów ACD , DCB , BCE , ECA , równa się czterem kątom prostym: gdyż kąty ACD i DCB iako przyległe, ważą dwa kąty proste, i kąty ACE i ECB dla téżé przyczyny ważą dwa kąty proste;

4te. Ze przez punkt C, *fig. 9.* poprowadziwszy iakąkolwiek liczbę linii prostych AC, BC, DC, EC, FC; summa wszystkich kątów ACB, BCD, DCE, ECF, FCA, mających spólny wierzchołek w punkcie C, równa się czterem kątom prostym: gdyż przedłużwszy którąkolwiek linią *np.* DC do H, summa kątów HCA, ACB, BCD, równa się dwom kątom prostym, i summa kątów HCF, FCE, ECD równa się także dwom kątom prostym, podług wniosku drugiego.

17. Uważać tu potrzeba, że kiedy dwa kąty przyległe, *fig. 6.* ACE, ECB wazą dwa kąty proste, dwa ich ramiona AC i BC są w jednéj linii; to jest, AC ramie kąta ACE, jest przedłużeniem CB ramienia kąta ECB. Kąty *np. fig. 7.* ACD i DCF nie wazą dwóch kątów prostych, chociaż leżą przy sobie, i mają spólny wierzchołek C: bo ramiona ich AC i CF nie są w jednéj linii.

18. Gdy dwie linie proste, *fig. 8.* AC, DC przecinające się w punkcie C przedłużone będą, pierwsza do B, druga do E; dwa kąty ACD, BCE mające spólny wierzchołek C zowią się kątami w wierzchołku przeciwległemi, *ad verticem oppositi.* Kąty ACE, DCB są także w wierzchołku przeciwległe, gdyż obadwa mają spólny wierzchołek C, a ramiona iednego z nich *np.* kąta ACE, są przedłużeniem ramion drugiego kąta DCB. Kąty, *fig. 9.* ACB, FCE, lubo mają spólny wierzchołek C, nie są iednak w wierzchołku przeciwległe: gdyż ramiona iednego z nich nie są przedłużeniem ramion drugiego.

19. Kąty ACD, BCE, *fig. 8.* w wierzchołku przeciwległe, są sobie równe. Jakoż summa dwóch kątów przyległych ACD i ACE, równa się

dwom kątom prostym; podobnież summa dwóch kątów przyległych BCE i ACE równa się dwom kątom prostym. Więc odiawszy obojdu summ spólny kąt ACE, zostanie kąt ACD, równy kątowi BCE.

20. Stąd wypada iód że przedłużywszy liniia DC, *fig. 10*, która z liniia AB czyni dwa kąty ACD i BCD proste, przedłużenie iéy CE utworzy z drugiey strony linii AB dwa kąty ACE, BCE proste: gdyż kąty te są wierzchołkiem przeciwegłe kątom DCB, ACD prostym;

2re. Ze kiedy liniia DE iest prostopadła do AB, wzajemnie też i liniia AB iest prostopadła do DE: bo że liniia DE iest prostopadła do AB, idzie zatém, iż kąt ACD iest równy kątowi przyległemu BCD, i że obadwa te kąty są proste (15). Lecz że kąt BCD iest prosty, idzie za tém że i kąt ACE przeciwegły wierzchołkiem iest prosty; więc kąt $ACE = ACD$, a tém samém liniia AB iest prostopadła do linii DE.

21. Mieysce trzema liniami prostemi określone zowie się *trójkątem*, *triangulum*. I tak, *fig. 11*. ACB iest trójkąt: liniie AB, AC, BC przecięciem swoim tworzące trójkąt, zwać będziemy *bokami*, *latera*. Boki te są oraz ramionami trzech kątów A, B, C. W trójkacie zatém, oprócz powierzchni, sześć rzeczy uważać należy: trzy boki i trzy kąty.

22. Summa dwóch którychkolwiek boków trójkąta, *np.* summa dwóch boków AC i BC, większa iest od boku trzeciego AB: gdyż liniia prosta AB iest naykrótszą drogą od punktu A do B (5), a tém samém krótsza iest od BAC linii złamanéy z punktu A do B poprowadzonéy. Dla

téżże przyczyny summa dwóch innych którychkolwiek boków większa jest od boku trzeciego.

25. Wziawszy wewnątrz trójkąta ACB, *fig.* 12. punkt od upodobania D, i do dwóch końców któregośkolwiek boku, *np.* AB poprowadziwszy linie proste AD, BD; będzie summa dwóch innych boków AC, BC większa od dwóch linii AD, BD. Własność ta jest wnioskiem tego, cośmy powiedzieli wyżej, (5). Można ją okazać sposobem następującym :

Przedłużwszy linią AD aż do przecięcia się z bokiem CB w punkcie F, będzie w trójkącie ACF summa dwóch boków AC i CF większa od boku trzeciego AF; czyli większa od linii AD i DF: gdyż bok AF składa się z dwóch tych linii AD i DF. Podobnie w trójkącie BDF summa dwóch boków BF i DF większa jest od boku trzeciego BD; czyli, dla krótkości w tłumaczeniu się używając skróconych znaków, w trójkącie ACF jest $AC + CF > AF$; czyli $AC + CF > AD + DF$. Podobnie w trójkącie BDF, jest $BF + DF > BD$.

W ostatnich dwóch wyrażeniach dodawszy strony odpowiadające sobie, będzie $AC + CF + BF + DF > AD + DF + BD$; czyli $AC + CB + DF > AD + DF + BD$: gdyż $CF + BF = CB$. Odiawszy poobudwu stronach DF, zostanie $AC + CB > AD + BD$ to jest: summa dwóch boków AC i CB większa od dwóch linii AD i BD.

24. Twierdzenie. *Dwa trójkąty mogą przystać do siebie, a tém samym są sobie równe, gdy dwa boki i kąt między nimi zawarty w jednym, równe są dwom bokom i kątowi między nimi zawartemu w drugim trójkącie.*

Dowodzenie. Niech będą dwa trójkąty, *fig.* 15. ABC , abc w których bok $AC = ac$, bok $BC = bc$, i kąt C zawarty między temi bokami AC , BC równy kątowi c zawartemu między bokami ac , bc ; mamy okazać, że bok $AB = ab$, kąt $A = a$, kąt $B = b$, to jest, że dwa te trójkąty przyśtana do siebie.

Jakoż wystawmy sobie, że trójkąt abc jest z miejsca swego oderwany i położony na trójkącie ABC tak, aby punkt c padł na punkt C , i bok ac poszedł po boku AC : w takim położeniu punkt a padnie na punkt A : gdyż bok $ac = AC$ z założenia; bok bc pójdzie po boku BC : gdyż kąt $c = C$ (12) punkt b padnie na punkt B : gdyż bok $bc = BC$. A gdy punkt a padł na A i punkt b padł na B ; więc i bok ab przyśtanie do boku AB : gdyż przez dwa punkta A i B jedna tylko linia prosta przechodzić może (6); a zatem i kąty a , b , przyśtana do kątów A , B , (12) i cały trójkąt abc przyśtanie do trójkąta ABC .

25. Uważać tu potrzeba, że boki równe we dwóch trójkątach leżą na przeciwko równych kątów; i odwrotnie kąty równe leżą na przeciwko równych boków. I tak bok ab równy bokowi AB , leży na przeciwko kąta c równego kątowi C ; kąt b równy kątowi B leży na przeciwko boku ac równego bokowi AC i t. d.

26. *Twierdzenie.* Dwa trójkąty mogą do siebie przystać, gdy dwa kąty i bok przy nich leżący w jednym, równe są dwom kątom i bokowi przy nich leżącemu w drugim trójkącie.

Dowodzenie. Niech będą dwa trójkąty, *fig.* 15. ABC , abc , w których kąt $A = a$, kąt $B = b$ i bok $AB = ab$; mamy dowieść że, bok AC

$= ac$, bok $BC = bc$, i kąt $C = c$, czyli że dwa te trójkąty przyftaną do siebie.

Wyftawmy sobie, że trójkąt abc iefł położony na trójkącie ABC tak, aby punkt a padł na A , i bok ab poszedł po boku AB ; ponieważ dwa te boki są równe z założenia, więc punkt b padnie na punkt B : a że kąt $a = A$, więc bok ac poydzie po boku AC (12), a tém samém punkt c padnie na którykolwiek punkt linii AC . Podobnież dla równości kątów b i B , bok bc poydzie po boku BC , a tém samém punkt c padnie na którykolwiek punkt linii BC . A zatém punkt c , który musi się znajdować razem na dwóch liniach AC i BC , padnie na wspólne ich przecięcie C : więc trójkąt abc przyftanie do trójkąta ABC .

27. Twierdzenie. *Jeżeli we dwóch trójkątach dwa boki iednego, są równe dwom bokom drugiego trójkąta, a kąty między temi bokami nie są równe, ten z boków przeciwnych tym nierównym kątom iefł większy, który leży naprzeciwko większego kąta: i odwrotnie, ten z dwóch kątów zawartych między równemi bokami we dwóch trójkątach iefł większy, który leży naprzeciwko większego boku.*

Dowodzenie. Niech będą dwa trójkąty fig. 14. ABC , abc , w których bok $AB = ab$, bok $BC = bc$, a kąt B zawarty między dwoma piewszemi większy iefł od kąta b zawartego między dwoma drugiemii bokami: trzeba dowieśdź, że bok AC przeciwny kątowi B w trójkącie ABC , większy iefł od boku ac przeciwnego kątowi b w trójkącie abc .

Położywszy trójkąt abc na trójkącie ABC tak, aby bok ab przyftał do boku AB , boki ac , bc wezmą albo takie położenie, iak na figurze

pod liczbą 1, gdzie punkt c znajduje się na boku AC ; albo takie iak na *fig. 2*, gdzie punkt c znajduje się wewnątrz trójkąta ABC ; albo na koniec takie, iak na *fig. 3*, gdzie punkt c znajduje się za trójkątem ABC .

W *1wszym* przypadku bok AC widocznie jest większy od Ac , iako całość od swojej części: a że $Ac = ac$ z wykreślenia, więc bok AC większy jest także od ac .

W *2gim* przypadku *fig. 2*. $AC + BC > Ac + Bc$; (25) czyli $AC + BC > Ac + BC$: gdyż podług założenia bok $Bc = bc = BC$.

Odiawszy po obu stronach BC , zostanie $AC > Ac$. A że $Ac = ac$, z wykreślenia, będzie więc $AC > ac$, to jest, bok AC większy jest od boku ac .

W *3cim* przypadku, *fig. 3* w trójkącie AcD , $AD + Dc > Ac$ (22); Podobnież w trójkącie BDC $DC + DB > BC$. Dodawszy strony odpowiadające sobie, będzie $AD + DC + Dc + DB > Ac + BC$; czyli $AC + Bc > Ac + BC$. (gdyż na figurze $AD + DC = AC$, $Dc + DB = Bc$) czyli $AC + BC > Ac + BC$ (gdyż $Bc = bc = BC$ z założenia). Odiawszy BC po obu stronach, będzie $AC > Ac$; czyli $AC > ac$: gdyż $Ac = ac$ z wykreślenia.

Odwrotnie. Jeżeli we dwóch trójkątach ABC , abc , *fig. 14*, bok $AB = ab$, bok $BC = bc$, a bok $AC > ac$; będzie kąt $B > b$. Jakoż gdyby kąt B nie był większy od kąta b , byłby albo mu równy, albo od niego mniejszy. W pierwszym przypadku dwa te trójkąty przyłąłyby do siebie (24), a tém samém byłby bok $ac = AC$, co być nie może, iako przeciwne założeniu. W drugim przypadku byłby bok $ac > AC$ podług pierwszej części niniejszego twierdzenia; co się także sprzecz-

wia założeniu, a tém samém być nie może. Kiedy więc kąt B nie może być ani równy kątowi b , ani od niego mniejszy, więc musi być od niego większy.

28. Twierdzenie. *Dwa trójkąty mogą do siebie przystać, gdy trzy boki iednego, równe są trzem bokom drugiego trójkąta.*

Dowodzenie. Niech będą dwa trójkąty fig. 13 ABC , abc , w których bok $AB = ab$, bok $AC = ac$, bok $BC = bc$; trzeba dowieść że kąt $A = a$, kąt $B = b$ i kąt $C = c$, czyli że dwa te trójkąty przystaną do siebie.

Gdyby *np.* kąt b nie był równy kątowi B , tedy byłby od niego albo większy albo mniejszy. W pierwszym przypadku, ponieważ boki ab , bc trójkąta abc równe są podług założenia, bokom AB , BC trójkąta ABC , bok ac , przeciwny większemu kątowi b , byłby większy od boku AC przeciwnego mniejszemu kątowi B , podług twierdzenia poprzedzającego; co być nie może, gdyż podług założenia bok $ac = AC$.

W drugim przypadku, gdyby kąt b był mniejszy od kąta B ; bok AC przeciwny kątowi B większemu, byłby większy od boku ac przeciwnego kątowi b mniejszemu (27); co byż nie może: gdyż, podług założenia, bok $AC = ac$. Kiedy więc kąt b nie może być ani większy, ani mniejszy od kąta B , musi być mu równy. Dwa zatém trójkąty ABC , abc , w których dwa boki AB , BC i kąt B między niemi zawarty w jednym, równe są bokom ab , bc i kątowi b między niemi zawartemu, w drugim trójkącie, przystaną do siebie (24).

29. Twierd. *W trójkącie mającym dwa boki równe, kąty przeciwne bokom równym są równe.*

Dowód. Niech będzie trójkąt *fig. 15. ABC* w którym bok $AC = BC$; trzeba dowieść, że kąt $B = A$.

Podzieliwszy trzeci bok AC na dwie równe części w punkcie D , i poprowadziwszy linią CD ; w dwóch trójkątach ACD , BCD , bok AC pierwszego, równy jest bokowi BC drugiego trójkąta, podług założenia; bok AD pierwszego, równy jest bokowi BD drugiego trójkąta podług wykreślenia; bok CD jest dla obudwu trójkątów wspólny: a zatem dwa te trójkąty przystają do siebie (28); a w szczególności, kąt A przystanie do kąta B ; więc dwa te kąty są równe.

30. Stąd wypada, że w trójkącie ACB , *fig. 16* mającym wszystkie trzy boki między sobą równe, wszystkie też trzy kąty są między sobą równe: gdyż kąt A równy jest kątowi B , dla równości boków AC , BC ; a że też boki AB i AC są równe, więc kąt B równy jest kątowi C .

31. Trójkąt mający trzy boki równe zowie się *równoboczny*, *aequilaterum*; trójkąt mający dwa boki równe, zowie się *równoramienny*, *aequicrurum* albo *isoscele*; trójkąt mający trzy boki nierówne, zowie się *różnoboczny*, *scalenum*.

W trójkącie równoramiennym ACB *fig. 15* trzeci bok AB zowie się zwyczajnie *podstawą*, *basis*, a kąt C przeciwny podstawie nazywa się *wierzchołkiem* trójkąta, *vertex*. W innych trójkątach którykolwiek bok można wziąć za podstawę, a kąt mu przeciwny za wierzchołek.

Powyższe zatem twierdzenie (29) możnaby tak wysłowić: *w trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe.*

32. Twierd. *W trójkącie mającym dwa kąty równe, boki przeciwne kątom równym są równe.*

Dowod. Niech będzie trójkąt ABC, fig. 17. w którym kąt $A = B$; trzeba dowieść, że bok $BC = AC$, czyli że trójkąt ten jest równoramienny.

Na okazanie tego, podzielmy bok trzeci AB w punkcie F na dwie równe części, i poprowadziwszy linią CF, przedłużmy ją do D tak, aby było $DF = CF$; poprowadziwszy potem linią AD i BD; w dwóch trójkątach AFC, BFD, bok $AF = BF$ z wykreślenia; bok $CF = DF$ z wykreślenia; i kąt $AFC = BFD$ (19); więc dwa te trójkąty przyślaną do siebie (24); a w szczególności bok $AC = BD$, i kąt $FAC = FBD$. A że kąt $FAC = FBC$ z założenia, więc i kąt $FBD = FBC$. Podobnymże sposobem dowiedzimy przez przyślanie do siebie dwóch trójkątów CFB, AFD, że kąt $FAD = FAC$. Więc dwa trójkąty ACB, ADB mające bok AB spólny, i kąty przy nim leżące przy A i B równe, przyślaną do siebie (26); a w szczególności bok $BC = BD$: a że bok $BD = AC$ podług dowiedzenia, więc i $BC = AC$.

53. Stąd wypada: że jeżeli w trójkącie wszystkie trzy kąty są równe, będą też i wszystkie trzy boki równe.

34. Twierd. *W trójkącie różnobocznym bok większy, przeciwny jest większemu kątowi, i odwrotnie kąt większy, przeciwny jest większemu bokowi.*

Dowod. 10d Niech będzie trójkąt, fig 18. ABC, w którym kąt CAB jest większy od kąta B: trzeba dowieść, że bok BC przeciwny większe-

mu kątowi CAB , jest większy od boku AC przeciwnego mniejszemu kątowi B .

Z punktu A poprowadziwszy linią AD tak, aby kąt DAB był równy kątowi B , w trójkacie równoramiennym DAB jest bok $AD = DB$ (52). W trójkacie ACD jest $CD + AD > AC$ (22); czyli $CD + DB > AC$: gdyż $AD = DB$; czyli $CB > AC$; to jest: bok CD przeciwny większemu kątowi CAB jest większy od boku AC przeciwnego mniejszemu kątowi B .

2re. W trójkacie ABC , w którym bok $BC > AC$, będzie kąt CAB przeciwny większemu bokowi BC , większy od kąta B przeciwnego mniejszemu bokowi AC .

Jakoż gdyby kąt CAB nie był większy od kąta B , byłby albo równy kątowi B ; albo od niego mniejszy. Gdyby kąt CAB był równy kątowi B , bok BC byłby równy bokowi AC (52); co się sprzeciwia założeniu. Gdyby kąt CAB był mniejszy od kąta B , bok BC przeciwny kątowi CAB mniejszemu, byłby mniejszy od boku AC przeciwnego kątowi większemu, podług pierwszêj części niniejszego twierdzenia; co się także sprzeciwia założeniu. Kiedy zatem kąt CAB nie może być ani równy kątowi B , ani od niego mniejszy, musi więc być od niego większy.

55. Dla dowiedzenia ostatnich trzech twierdzeń, trzeba było bok AB , *fig. 15 i 17* dzielić na dwie równe części, i wykreślić kąt DAB , *fig. 18* równy kątowi B . Ułatwią to następujące zagadnienia:

Zagadnienie. 1. *Mając dane dwa punkta A i B fig. 19, znaleźć punkt trzeci, któryby od obu był w jednakowêj odległości.*

Rozwiązanie. Z punktu A, promieniem jakimkolwiek, byle większym niż jest połowa odległości dwóch danych punktów, nakreślimy łuk DE, a z punktu B tymże samym promieniem nakreślimy łuk FG, który z łukiem pierwszym przecina się w punkcie C: punkt C jest punktem szukanym.

Uwaga. Uważać tu potrzeba, iż promień którym kreślimy dwa łuki przecinające się, powinien być większy, niż jest połowa odległości dwóch punktów danych: gdyż inaczej dwa łuki wykreślone przeciąćby się z sobą nie mogły, iak są np. łuki *de* i *fg*.

56. Zagad. 2. *Daną linią prostą AB, fig. 20 podzielić na dwie równe części.*

Rozwiąz. Znajdźmy, podług poprzedzającego zagadnienia, punkt C będący w jednakowej odległości od obudwu końców daney linii AB; podobnież z drugiey strony linii AB znajdziemy punkt D będący w jednakowej odległości od tychże końców. Punkt C złączmy z punktem D linią prostą CD, która daną linią AB podzieli w punkcie F na dwie części równe. Jakoż poprowadziwszy linie proste, AC, CB, BD, DA, dwa trójkąty CAD, CBD, w których bok $AC = CB$ (55) bok $AD = BD$, a bok CD spólny, przyśtana do siebie (28), a w szczególności kąty przy C są równe. Dwa zatem trójkąty ACF, BCF, w których bok $AC = BC$, bok CF spólny i kąty przy C równe, przyśtana do siebie (24), a w szczególności $AF = BF$. Więc linia AB w punkcie F podzielona jest na dwie części równe.

57. Tym samym sposobem możnaby linią AF i BF podzielić na dwie równe części, a tém samém linia AB byłaby podzielona na części ró-

wnych 4. Można by potém każdą czwartą część linii AB podzielić tymże sposobem na dwie równe części, a zatém linia AB byłaby podzielona na części równych 8 i t. d. Lecz sposób ten nie jest dostateczny do podzielenia linii daney na części równych 5, 5, 6 i t. d. Podamy na to sposób niżey

58. Zagad. 5. *Mając dane dwie linie proste, znaleźć ich spólną miarę.*

Rozwiąz. Niech będą dwie linie AB i CD *fig. 21*: mnieyszą CD przenieśmy na większą tyle razy, ile można: daymy że linia CD mieści się w linii AB trzy razy, począwszy od A do E, i że zostało część EB; będzie więc

$$AB = 3 CD + EB.$$

Niech znowu linia EB przeniesiona na linia CD mieści się w nięj cztery razy począwszy od C do F, i zostało część FD; będzie więc

$$CD = 4 EB + FD.$$

Podobnież FD przeniesiona na EB, mieści się w nięj raz od E do G, i zostało część BG; będzie więc $EB = FD + BG$.

Nakoniec BG przeniesiona na FD, mieści się w nięj trzy razy zupełnie: będzie więc

$$FD = 3 BG. \text{ A zatém}$$

$$EB = FD + BG = 3 BG + BG = 4 BG.$$

$$CD = 4 EB + FD = 16 BG + 3 BG = 19 BG.$$

$$AB = 3 CD + EB = 57 BG + 4 BG = 61 BG.$$

To jest, linia BG jest spólną miarą dwóch linii AB i CD: w pierwszey bowiem mieści się razy 61, w drugiéj razy 19; i dwie te linie AB, CD są do siebie jak dwie liczby 61 i 19.

Uwaga. Sposób ten szukania spólnéj miary dwóch linii danych, zupełnie jest podobny do tego, który podaje Arytmetyka, gdy idzie o zna-

leżenie spólnego dzielnika dwóch liczb danych, z tą tylką różnicą, że dwóch iakichkolwiek liczb ieżeli nie inna iaka liczba, to przynajmniéy ie-
dność ieft spólnym dzielnikiem, czyli spólną miarą; w szukaniu zaś spólnéy miary dwóch linii danych trafić się częstokroć może, iż się nigdy nie doydzie do takiéy części pozostatéy, któraby się w poprzedzaiący zupełnie mieściła, choćby działanie to naydaléy posunięte było. Na ten czas dwie dane linie nie mają spólnéy miary. Linie takie i wszystkie ilości nie mające spólnéy miary, nazywają się *niespółmierne, incommensurabiles*.

59. Zagad. 4. *Narysować trójkąt równy danemu trójkątowi ABC fig. 13.*

Rozwiąz. Poprowadziwszy linią $ab = AB$, z punktu a promieniem równym bokowi AC , kreślę łuk; z punktu b , promieniem równym bokowi BC , kreślę łuk drugi, z pierwszym w punkcie c przecinający się; punkt c łączę z punktem a i b , liniami prostymi ac , bc , trójkąt abc ieft szukany: gdyż dwa te trójkąty mogą do siebie przyftać (28).

40. Zagad. 5. *Mając dany kąt A fig. 22, wykreslić kąt drugi równy danemu, któregoby wierzchołkiem był punkt a na danéy linii ab.*

Rozwiąz. Na ramionach danego kąta A , biorę dwa punkta C , D od upodobania, i łączę je linią prostą CD . Na linii ab , wziąwszy $ad = AD$, z punktu a promieniem równym linii AC kreślę łuk; z punktu d promieniem równym linii CD kreślę drugi łuk z pierwszym w punkcie c przecinający się; punkt przecięcia c łączę z punktem a linią ac ; kąt cab ieft szukany: gdyż poprowadziwszy linią prostą cd , dwa trójkąty cad , CAD

przyftaną do siebie (28), a w szczególności kąt $a = A$.

41. Zagad. 6. *Maiąc dane dwie linie proste na dwa boki trójkąta, i kąt mający być między temi bokami zawarty, narysować trójkąt.*

Rozwiąz. Nakreśliwszy kąt równy danemu, mający za ramiona dwie dane linie, i końce tych ramion złączwszy linią prostą; będzie trójkąt, szukany (24).

42. Zagad. 7. *Maiąc daną linią prostą i dwa kąty, wyrysować trójkąt, w którymby dwa kąty i bok im przyległy były równe dwom danym kątom i danéj linii.*

Rozwiąz. Poprowadzić linią równą danéj, i przy obudwu iéy końcach wykreślić dwa kąty równe danym, i mające za ramie wspólne linią daną; drugie dwa ramiona tych kątów przedłużywszy, póki się z sobą nie przetną; będzie trójkąt szukany (26).

43. Zagad. 8. *Maiąc dane trzy linie na trzy boki trójkąta, narysować trójkąt.*

Rozwiąz. Poprowadziwszy linią równą którékolwiek z trzech linii danych, i wykreśliwszy na niéy trójkąt, dając mu dwa drugie boki równe dwom pozostałym liniom danym, będzie trójkąt szukany (28).

Uwaga. Ponieważ w trójkącie summa dwóch boków jest większa od trzeciego, (1). Zagadnie-

(1) Prawda ta w art. 22 przytoczona iako wniosek tego, cośmy wyżej (5) o liniach prostych i złamanych powiedzieli, może być teraz następującym sposobem okazana.

W trójkącie ACD , *fig.* 18, summa dwóch którýchkolwiek boków, *np.* summa dwóch boków

nie to w ten czas tylko może być rozwiązane, kiedy każda z danych linii mniejsza jest od dwóch innych razem wziętych.

44. Zagad. 9. *Wykreślić trójkąt równoramienny, mając daną linią na podstawie i kąt mający być przy niej; albo też mając dany kąt przy wierzchołku i jedno ramie.*

Rozwiąz W pierwszym przypadku poprowadziwszy linią równą daną i przy obu dwu jej końcach nakreśliwszy dwa kąty równe między sobą i kątowi danemu; ramiona tych kątów przedłużam póki się z sobą nie zeydą, będą miał trójkąt szukany (52).

W drugim przypadku, nakreśliwszy kąt równy danemu, dając mu za ramiona linie równe ramieniu danemu; końce tych linii złączywszy linią prostą, będzie trójkąt szukany (29).

45. Zagad. 10. *Na daney linii wystawić trójkąt równoboczny.*

Rozwiąz. Na daney linii wykreśliwszy trójkąt, dając mu dwa inne boki równe linii daney, trójkąt ten będzie szukany.

46. Zagad. 11. *Dany kąt A fig. 22 podzielić na dwie równe części.*

Rozwiąz. Na ramionach kąta danego wzięwszy $AF = AE$, i z punktów F, E jakimkolwiek

CD i AD, jest większa od boku trzeciego AC. Jakoż przedłużywszy bok CD do B tak, aby było $DB = AD$, i punkt B złączywszy z punktem A linią prostą AB; w trójkącie ABC kąt BAC jest większy od kąta B równego kątowi BAD (19), który jest częścią kąta BAC; a tém samém bok $CB > AC$ (54), czyli $CD + DB > AC$, czyli $CD + AD > AC$.

promieniem nkreśliwszy dwa łuki w punkcie B przecinające się, prowadzę linią AB; linia ta podzieli kąt A na dwie równe części: gdyż poprowadziwszy linie BF, BE, dwa trójkąty ABF, ABE mają bok AB spólny; bok $AF = AE$ i bok $BF = BE$ z wykreślenia: więc dwa te trójkąty przyśtana do siebie (28); a w szczególności kąt $BAF = BAE$.

A zatem dany kąt można podzielić na części równych 4, 8, 16 i t. d. dzieląc każdą połowę na dwie równe części.

R O Z D Z I A Ł III.

O Liniach prostopadłych, pochyłych i równo odległych.

47. *Twierd.* Ze wszystkich linii prostych, fig. 25. które z punktu C wziętego za linią AB do téj linii prowadzić można, najkrótsza jest prostopadła CD; inne zaś linie CA, CF, CB i tym podobne, które zwać będziemy *pochyłemi*, *obliquæ*, tém są dłuższe, im się bardziéj oddalają od punktu D, w którym prostopadła przecina się z linią AB, i który zwać będziemy *spodkiem* prostopadłéj; i te tylko między pochyłemi są sobie równe, które są równie od spodka prostopadłéj oddalone.

Dowod. 10d Przedłużywszy CD do E tak, aby było $ED = CD$, i poprowadziwszy linią FE; w dwóch trójkątach CDF, EDF bok $CD = ED$ z wykreślenia, bok FD spólny, kąty przy D między temi bokami zawarte równe iako proste, (14) więc dwa te trójkąty przyśtana do siebie podług

twierdzenia 1wszego o przystawianiu trójkątów (24), a w szczególności bok $FE = FC$. W trójkącie CFE iest

$$CF + FE > CE \quad (22); \text{ czyli}$$

$$CF + FE > CD + ED, \text{ czyli}$$

$CF + CF > CD + CD$. (gdyż $FE = CF$ z dowiedzenia, $ED = CD$ z wykreślenia). Czyli

$$2CF > 2CD: \text{ więc}$$

$CF > CD$: to iest, iakakolwiek pochyła CF większa iest od prostopadłej CD, a tém samém prostopadła iest naykrótsza.

2re Wziawszy $AD > FD$, będzie pochyła AC bardziéy od spodka prostopadłej oddalona większa, niż iest pochyła FC. Na okazanie, że pochyła pierwsza iest większa od drugiéy, poprowadźmy linią AE. Dwa trójkąty CAD, EAD, w których bok AD iest spółny, bok $CD = ED$ z wykreślenia, i kąty przy D między temi bokami zawarte równe iako proste, przyftaną do siebie podług twierdzenia piérwszego o przyftawianiu trójkątów; a w szczególności $AC = AE$. W trójkącie CAE iest

$$AC + AE > FC + FE \quad (23); \text{ czyli}$$

$AC + AC > FC + FC$: gdyż $AE = AC$, $FE = FC$ z dowodzenia; czyli $2AC > 2FC$: więc

$AC > FC$: to iest: pochyła AC bardziéy od spodka D prostopadłej CD oddalona, większa iest od pochyłej FC mniéy od tegoż spodka oddalony.

3cie Wziawszy $DB = DF$, i poprowadziwszy liniie CB, CF, dwie te pochyłe równe od spodka prostopadłej oddalone, będą równe. Jakóż w dwóch trójkątach CDB, CDF bok CD iest spółny, bok $DB = DF$ z założenia; kąty przy D między temi bokami zawarte równe iako proste:

więc dwa te trójkąty przyślaną do siebie, a w szczególności $CF = CB$: to jest, dwie pochyłe równie od spodka prostopadłej oddalone są równe.

48. *Wnioski.* Stąd wypada *16d.* Ze dwie linie pochyłe z jednego punktu do linii trzeciej poprowadzone, jeżeli sobie są równe, nie mogą obie dwie znajdować się z jednéj strony prostopadłej CD ; lecz iedna z nich musi znajdować się ze strony A , druga ze strony B , w równy odległości od spodka prostopadłej.

49. *2re* Ze z punktu C do linii prostej AB nie można poprowadzić trzech linii równych między sobą: gdyż dwie z nich musiałyby znajdować się z jednéj strony prostopadłej CD ; co być nie może.

50. *3cie.* Ze ze środka D linii AB *fig. 24.* wyprowadziwszy prostopadłą CD do linii AB , każdy punkt wzięty na téj prostopadłej *np.* punkt F jest w równy odległości od obudwu końców linii AB : gdyż poprowadziwszy linie pochyłe FA , FB , pochyłe te są sobie równe (47). Każdy zaś punkt wzięty za tą prostopadłą *np.* punkt E nie jest w równy odległości od końców A i B linii AB : gdyż poprowadziwszy linie EA , EB , w trójkącie BFE .

$BF + FE > EB$ (22) więc

$AF + FE > EB$: gdyż $AF = BF$ z dowodzenia; czyli $AE > EB$; to jest, odległość punktu E od punktu A jest większa, niż od punktu B .

51. Prostopadła z punktu C do linii AB spuszczone, iako najkrótsza ze wszystkich linii które z tegoż punktu do linii AB mogą być poprowadzone, oznacza prawdziwą odległość punktu C od linii AB . Przeto też prostopadła z pun-

ktu iakiego do danéy linii spuszczoia, zowie się *odległością* tego punktu od danéy linii.

— 52. Twierd. *Dwa trójkąty ABC , abc , fig. 25. w których kąty A i a są proste, boki tym kątom przeciwne BC i bc równe, i boki tymże kątom przyległe AC i ac równe, mogą przyśtać do siebie.*

Dowod. Dwa te trójkąty przyśtałyby do siebie, gdyby bok trzeci ab był równy bokowi trzeciemu AB . Daymyż, ieżeli być może, iż ieden z nich *np.* AB ieść większy od ab , i że linia AF mnieysza od AB , ieść równa bokowi ab . Poprowadziwszy linią CF , w dwóch trójkątach ACF , acb , bok $AC = ac$ z założenia; bok $AF = ab$ z przypuszczenia; kąt $A = a$, bo są obadwa proste: więc dwa te trójkąty przyśtałyby do siebie (24), a w szczególności bok CF byłby równy bokowi cb ; a że podług założenia $cb = CB$; więc i linia CF , byłaby równa CB ; co być nie może: gdyż pochyłe te obiedwie znayduią się z jednéy strony prostopadłéy CA (48), a zatém z dwóch boków AB i ab nie może być ieden od drugiego większy: więc boki te są sobie równe; a tém samém trójkąty ABC , abc przyśtań do siebie (28).

55. Zagad. *Z punktu D danego na linii prostej AB , fig. 26. wyprowadzić prostopadłą do téj linii.*

Rozwiąz. Wziąwszy $DF = DB$, i z punktu B i F iakimkolwiek promieniem nakreśliwszy dwa łuki w punkcie C przecinające się, punkt C łącząc z punktem D linią prostą CD : ta linia ieść szukana: gdyż poprowadziwszy linie CB i CF , w dwóch trójkątach CDB , CDF bok CD ieść spólny; bok $DB = DF$ z wykreślenia; bok $BC = CF$, więc dwa te trójkąty przyśtań do siebie (28),

a w szczególności kąt $CDB = CDF$: więc kąty te są proste (13); a tém samém linia CD jest prostopadła do linii AB .

54. Zagad. Z punktu C danego za linią AB fig. 27. spuścić prostopadłą do téj linii.

Rozwiż. Z punktu C promieniem jakimkolwiek, byle większym niż jest odległość punktu tego od linii daney, kręślę łuk przecinający linią AB w punktach B i F ; z drugiey strony linii AB znalazłszy punkt G równie od punktów B i F odległy (35), punkt C z punktem G łączę linią prostą CG , która linią AB przecina w punkcie D : linia CD jest szukana: gdyż w trójkątach CBG , CFG bok CG jest spółny; bok $CB = CF$, i $BG = FG$ z wykręślenia: więc dwa te trójkąty przyśtana do siebie (28), a w szczególności kąty przy C są równe. W dwóch trójkątach CDB , CDF , bok CD jest spółny; bok $CB = CF$, i kąty przy C równe; więc dwa te trójkąty przyśtana do siebie (24), a w szczególności kąty przy D są równe, a tém samém linia CD jest prostopadła do linii AB (15).

55. Wnioski. Stąd wypada iód, że z punktu C danego za linią AB , nie można spuścić więcej prostopadłych do téj linii, tylko iedną CD : gdyż linie pochyłe CB i CF iako sobie równe, powinny być równie oddalone od spodka D prostopadłéy CD (48); a zatém prostopadła do linii AB z punktu C spuszczone powinna przechodzić przez środek D linii BF : a przez dwa punkta C , D iedna tylko linia prosta przechodzić może (6). Dla téjże przyczyny z punktu D danego na linii AB nie można wyprowadzić więcej prostopadłych do téj linii, tylko iedną CD .

+ 56. 2re. Dwa trójkąty ABC , abc , *fig. 25.* w których kąty A i a są proste, boki tym kątom przeciwne BC i bc równe, i kąty B i b równe, przyftaną do siebie: gdyż położywszy trójkąt abc na trójkącie ABC tak, aby kąt b przyftał do kąta B , i bok ab poszedł po AB , bok bc przyftanie do boku CB i punkt c padnie na punkt C , gdyż dwa te boki są sobie równe: gdyby bok ac nie przyftał do boku AC , lecz wziął odmienne położenie, natenczas z punktu C , możnaby było do linii AB poprowadzić dwie prostopadłe, iedną będącą ramieniem kąta prostego A , drugą będącą ramieniem kąta prostego a ; co być nie może (55).

+ 57. 5cie Z tego też twierdzenia wypada, że dwie linie, *fig. 28.* CH , FI , prostopadłe do trzeciéy linii AB , nigdy się z sobą nie zeydą, choćby też naydaléy były przedłużone, tak w górę ku x , iako też na dół ku y : bo gdyby się z sobą zeszły, z punktu ich przecięcia się możnaby było spuścić dwie prostopadłe do linii AB ; co być nie może (55).

58. Dwie linie proste na iedneyże płaszczyźnie poprowadzone tak, że się z sobą zeyść nie mogą, choćby naydaléy były przedłużone, zowią się *równoodległe*, *paralellæ*. A zatém dwie linie prostopadłe do trzeciéy są od siebie równoodległe: gdyż się z sobą zeyść nie mogą, choćby naydaléy były przedłużone.

59. Lecz ieżeli linia IK z linią AB tworzy kąt AIK mniejszy od prostego CHB , linie te, IK pochyła i CH prostopadła do AB zeydzie się powyżéy linii AB , gdy obiedwie dostatecznie będą przedłużone: ieżeli zaś linia IL , z linią AB tworzy kąt AIL więkzy od prostego CHB , dwie

te linie IL pochyła i CH prostopadła do AB zeydą się z sobą poniżej linii AB , gdy obiedwie dostatecznie będą przedłużone. Własność ta linii tak jest sama przez się widoczna, że żadnego dowodzenia nie potrzebuje.

60. *Wnioski.* Stąd wypada *1ód*, że gdy z dwóch linii jedna jest prostopadła do trzeciéy, a druga tworzy z trzecią kąt ostry lub roztwarty; dwie pierwsze linie dostatecznie przedłużone, zeydą się z sobą z jednéy lub drugiéy strony linii trzeciéy.

61. *2re* Ze gdy dwie linie DH , GI są prostopadłe do trzeciéy AB , każda linia, iak jest np . DG , prostopadła do iednéy z nich, jest razem i do drugiéy prostopadłą: bo gdyby linia DG prostopadła do DH w punkcie D , nie była prostopadła do linii GI w punkcie G ; kąt G byłby ostry lub roztwarty, a tém samém dwie linie DH , GI , z których pierwsza tworzy z linią DG kąt prosty, druga z tą samą linią DG tworzy kąt ostry lub roztwarty, dwie mówię, te linie dostatecznie przedłużone, zeszłyby się z sobą; co być nie może: gdyż obiedwie podług założenia, są prostopadłe do linii trzeciéy AB .

62. *3cie* Ze dwie linie AB , CD *fig. 29.* równoodległe od trzeciéy EF , są także i między sobą równoodległe: gdyż poprowadziwszy linią GH prostopadłą do EF , linia AB iako równoległa od EF , będzie także prostopadłą do GH ; i linia CD iako równoległa od EF , będzie prostopadła do GH : a zatem dwie linie AB , CD , prostopadłe do trzeciéy GH , są od siebie równoległe (58).

63. *4te.* Stąd nakoniec wypada, że gdy dwie linie EH , FG *fig. 30.* są prostopadłe, pierwsza

do linii AC, druga do linii BC przecinaiący się z linią AC w punkcie C; dwie te prostopadłe EH, FG zeydą się z sobą, gdy będą dostatecznie przedłużone: gdyż inaczej byłyby od siebie równoległe (58); a że iedna z nich *np.* FG iest prostopadła do CB, więc i druga EH byłaby także do CB prostopadła: dwie zatém linie AC, BC z jednego punktu C wyprowadzone byłyby do iednędzy linii EH prostopadłe, co być nie może (55).

64. *Twierd. Gdy dwie linie fig. 51. AB, CD przecięte od trzeciéy EF, tworzą z nią dwa kąty AGF, CHF równe; linie te AB, CD są od siebie równoległe; i odwrotnie*

Dowod. Podzieliwszy linią GH w punkcie I na dwie równe części, i przez punkt I poprowadziwszy linią KL prostopadłą do AB; w dwóch trójkątach LGI, HIK, bok GI = HI z wykręślenia; kąty przy I równe (19); kąt KHI = CHF, a kąt CHF = AGF z założenia; więc i kąt AGF czyli LGI = KHI: a zatém dwa te trójkąty przystaną do siebie (26), a w szczególności kąt GLI = HKI: a że kąt GLI iest prosty z wykręślenia, więc i kąt HKI iest prosty, a tém samém linia CD iest prostopadła do KL; że zaś i linia AB iest prostopadła do KL z wykręślenia, więc dwie te linie AB, CD prostopadłe do trzeciéy KL są równoległe (58).

Odwrotnie. Gdy dwie linie AB, CD od siebie równoległe przecięte są od trzeciéy linii EF; kąty AGF, CHF będą sobie równe. Gdyż podzieliwszy linią GH w punkcie I na dwie równe części, i przez punkt I poprowadziwszy linią KL prostopadłą do linii AB, a tém samém i do linii CD równoległéy od AB; w dwóch trójkątach LGI, HKI, kąty przy I, są równe; kąt GLI = HKI,

bo są obadwa proste; bok $GI = HI$ z wykreślenia, więc dwa te trójkąty przystaną do siebie (56); a w szczególności kąt $LGI = KHI$: a że kąt $KHI = CHF$, więc i kąt LGI , czyli $AGF = CHF$.

65. Ponieważ w dalszym ciągu Jeometrii: często wypada używać linii równoodległych; dla łatwiejszego tłumaczenia się, ponadawano szczególne nazwiska kątom utworzonym przez dwie linie równoodległe przecięte od trzeciéy, którą zwać będziemy *sieczną*, *secans*.

I tak kąty zawarte między równoległemi AB , CD fig. 52. i częścią GH siecznéy EF , zowią się *wewnętrzne*, *interni*: iakie są, AGF , CHE , BGF , DHE .

Kąty zawarte między równoległemi i częściami EG , HF siecznéy EF , zowią się kąty *zewewnętrzne*, *externi*, iakie są: AGE , BGE , CHF , DHF .

Kąty leżące po iednéy stronie siecznéy, zowią się *iednostronne*, *ad eandem partem positi*; i tak kąty AGE , AGF , CHE , CHF z jednéy strony siecznéy leżące, są iednostronne: podobnież kąty BGE , BGF , DHE , DHF leżące z drugiéy strony siecznéy, są także iednostronne.

Dwa kąty iednostronne, iak są *np.* kąty CHF , AGF , których ramiona rozchodzą się w tę samę stronę, zowią się kąty iednostronne *odpowiadające sobie*, *correspondentes*. Kąty AGE , CHE są także iednostronne odpowiadające sobie: toż mówić o kątach BGE , DHE , i o kątach DHF , BGF .

Dwa kąty iednostronne AGF , CHE , tudzież BGF , DHE , zowią się iednostronne *wewnętrzne*.

Dwa kąty iednostronne AGE , CHF , tudzież BGE : DHF , zowią się iednostronne *zewewnętrzne*.

Dwa kąty, których ramiona rozchodzą się w strony przeciwne, zowią się kąty *naprzemianległe* wewnętrzne lub zewnętrzne *alterni*: i tak dwa kąty AGF, DHE, są kąty naprzemian-ległe wewnętrzne; toż mówić o dwóch kątach CHE, BGF. Dwa kąty CHF, BGE; są kąty naprzemian-ległe zewnętrzne; toż mówić o kątach AGE, DHF.

66. Stosownie do tych nazwisk powyższe twierdzenie takby można wysłowić: *gdy dwa kąty AGF, CHF, iednostronne odpowiadające są równe; dwie linie AB, CD są od siebie równoległe; i odwrotnie gdy dwie linie AB, CD są od siebie równoległe; dwa kąty AGF, CHF, iednostronne odpowiadające są sobie równe.*

67. Twierd. *Gdy dwie linie AB, CD, od siebie równoodległe przecięte są od trzeciéy EF, będą 10d, kąty iednostronne odpowiadające sobie równe; 2re Kąty naprzemianległe wewnętrzne równe; 3cie kąty naprzemianległe zewnętrzne równe; 4te Kąty wewnętrzne iednostronne równe dwom kątom prostym; 5te kąty zewnętrzne iednostronne równe dwom kątom prostym: 6te gdy którakolwiek z tych pięciu własności iest dowiedziona, można będzie dowieśdź i innych czterech.*

Dowod. Co do 1. Równość kątów iednostronnych odpowiadających sobie AGF, CHF, iest okazana wyżéy (64). Po okazaniu zaś równości tych kątów, łatwo iest dowieśdź równości innych kątów iednostronnych odpowiadających. I tak biorąc np. dwa kąty odpowiadające sobie DHF, BGF fig. 32, kąt CHF z kątem DHF ważą dwa kąty proste, bo są przyległe. Kąt AGF z kątem BGF ważą dwa kąty proste, dla téżé przyczyny. Więc

$$CHF + DHF = AGF + BGF.$$

w tém równaniu odiawszy z jednéj strony kąt CHF, a z drugiéj kąt AGF, które sobie są równe, zostanie $DHF = BGF$.

Podobnież dwa kąty iednostronne odpowiadające BGE, DHE są równe: gdyż są przeciwległe w wierzchołku (19) kątom AGF, CHF, których równość iest dowiedziona. Dla téżże przyczyny i kąty CHE, AGE są sobie równe, iako przeciwległe w wierzchołku kątom DHF, BGF. równym z dowiedzenia.

2re. Kąty naprzemianległe wewnętrzne AGF, DHE, są sobie równe: gdyż kąt $AGF = CHF$ (66).
 $DHE = CHF$ iako wierzchołkiem przeciwległe: więc $AGF = DHE$.

Podobnymże sposobem dowieść można równości drugich dwóch kątów na przemianległych wewnętrznych CHE i BGF.

3cie Kąty na przemianległe zewnętrzne CF i BGE są równe: gdyż kąt $CHF = DHE$ (19)
 $BGE = DHE$ iako iednostronne odpowiadające: więc $CHF = BGE$.

Tymże sposobem okazać można równość drugich dwóch kątów na przemianległych zewnętrznych DHF, AGE.

4te Kąty iednostronne wewnętrzne AGF, CHE ważą dwa kąty proste: gdyż kąt $AGF + AGE =$ dwom kątom prostym (15), a że kąt $AGE = CHE$, iako iednostronne odpowiadające; więc $AGF + CHE =$ dwom kątom prostym.

Toż mówić o drugich dwóch kątach iednostronnych wewnętrznych BGF, DHE.

5te Kąty iednostronne zewnętrzne AGE, CHF równe są dwom kątom prostym: gdyż kąt

$AGE + AGF =$ dwom kątom prostopadłym (15). A że
 kąt $AGF = CHF$ (66) więc

$AGE + CHF =$ dwom kątom prostopadłym.

Toż mówić o kątach BGE, DHF .

6te Naoftatek, gdy którakolwiek z tych pięciu własności jest dowiedziona, można będzie dowieść innych czterech, i linie AB, CD będą równoległe. Bo jeżeli *np.* równość kątów iednostronnych odpowiadających sobie jest dowiedziona, linie AB, CD są równoległe, iakośmy to już okazali wyżej.

Jeżeli kąty naprzemianległe wewnętrzne AGF, DHE są równe, będzie kąt $CHF = DHE$; a zatem i kąt $AGF = CHE$: więc dwie linie AB, CD są od siebie równoległe (66).

Jeżeli kąty naprzemianległe zewnętrzne CHF, BGE są równe, będzie kąt $BGE = AGF$ (19), a zatem i kąt $CHF = AGF$: więc dwie linie AB, CD są od siebie równoległe (66).

Gdy kąty iednostronne wewnętrzne AGF, CHE są równe dwom kątom prostopadłym; będzie
 $CHE + CHF =$ dwom kątom prostopadłym (15), a że
 z założenia

$AGF + CHE =$ dwom kątom prostopadłym; więc
 $CHE + CHF = AGF + CHE$.

W tém równaniu odiawszy po obu dwu stronach kąt CHE , zostanie $CHF = AGF$: więc linie AB, CD są od siebie równoległe.

Gdy kąty iednostronne zewnętrzne AGE, CHF są równe dwom kątom prostopadłym, będzie $AGE + AGF =$ dwom kątom prostopadłym (15): a że z założenia

$AGE + CHF =$ dwom kątom prostopadłym; więc $AGE + AGF = AGE + CHF$.

W tém równaniu odiawszy AGE po obudwu stronach, zostanie $AGF = CHF$: więc linie AB, CD są równoodległe.

68. Zagad. Przez punkt C wzięty za linią daną AB, fig. 33. poprowadzić równoległą od téj linii.

Rozwiąz. Z punktu C prowadzę linią CD, któraby się z linią AB przecinała pod jakimkolwiek kątem CDB. Na linii CD przy punkcie C kręślę kąt $DCF = CDB$. Linią EF będzie szukana: gdyż kąty CDB, DCF wewnętrzne naprzemianległe są równe.

69. Zagad. Przez punkt C wzięty za linią AB fig. 34. poprowadzić linią CE któraby z daną linią AB czyniła kąt BEC równy danemu.

Rozwiąz. Przy punkcie którymkolwiek A wziętym na danéj linii AB, kręślę kąt DAB równy danemu, i przez punkt C prowadzę linią CE równoległą od AD, aż do przecięcia się z linią AB w punkcie E: kąt BEC jest szukany.

70. Twierd. Dwa kąty ACB, acb, fig. 35. których ramiona AC i ac, tudzież BC i bc są między sobą równoodległe, i rozchodzą się w jedną stronę, są sobie równe.

Dowód. Przedłużywszy ac aż do przecięcia się z ramieniem CB w punkcie D; będzie kąt $AC = aDB$, bo są jednostronne odpowiadające sobie względem siecznéj CB i dwóch równoległych AC i aD: kąt $aDB = acb$, bo są jednostronne odpowiadające sobie względem siecznéj aD, i dwóch równoległych DB, cb; a zatem kąt $ACB = acb$. Podobne byłoby dowodzenie, gdyby ramiona dwóch kątów ACB, acb miały takie położenie, iakie jest pod liczbą 2.

Łatwo byłoby dowieść równości tych kątów

innym sposobem, poprowadziwszy w obudwu figurach przez wierzchołki tych kątów linią prostą CE .

71. *Uwaga.* W powyższém twierdzeniu dodaiemy, że ramiona tych dwóch kątów rozchodzą się w jedną stronę: gdy bowiem ramiona te rozchodzą się w strony przeciwne, kąty między nimi zawarte nie zawsze są równe. I tak dwa kąty ACB , acb fig. 56. których ramiona AC i ac BC i bc są między sobą równoległe, lecz rozchodzą się w strony przeciwne, nie są równe. Jakkż kąt $ACB = aDB$, bo są iednostronne odpowiadające; kąt $aDB = bcF$, bo są zewnętrzne naprzemianległe względem siecznéy aF , i dwóch równoległych CB i cb ; a zatém i kąt $ACB = bcF$; więc gdy kąt ACB iest ostry, będzie też i kąt bcF ostry, a tém samém przyległy mu kąt bca rozwarty (15): będzie więc kąt $bca > BCA$.

Lecz dwa kąty BCA , bcF , lubo ramiona ich rozchodzą się w strony przeciwne, są sobie iednak równe, iakośmy wyżéy okazali. Gdy więc ramiona dwóch kątów są między sobą równoległe, a rozchodzą się w strony przeciwne; kąty te mogą być albo równe sobie, iak są dwa kąty ACB , bcF ; albo też nie równe, iak są dwa kąty ACB , acb .

72. *Twierd.* Gdy dwie linie fig. 57. EF , GH od siebie równoległe, przecięte są od dwóch drugich linii IK , LM od siebie równoległych; części AB i CD dwóch pierwszych linii zawarte między dwiema drugimi, tudzież części AC , BD dwóch drugich linii zawarte między dwiema pierwszymi równoodległemi, są między sobą równe: i odwrotnie, iezeli części te są równe, linie, do których te części należą, będą równoległe.

Dowód. Poprowadziwszy linią prostą CB , w dwóch trójkątach ACB , DCB , bok CB iest spól-

ny; kąt $ABC = BCD$, gdyż są wewnętrzne naprzemianległe względem siecznéj BC , i dwóch równoległych EF , GH ; kąt $ACB = CBD$, gdyż są wewnętrzne naprzemianległe względem siecznéj CB i dwóch równoodległych IK , LM , więc dwa te trójkąty przyftaną do siebie (26): a w szczególności $AB = CD$, i $AC = BD$, iako przeciwne kątom równym (25).

Odwrotnie. Jeżeli $AB = CD$, i $AC = BD$; będzie linia EF równoodległa od GH , i linia IK równoodległa od LM .

Gdyż poprowadziwszy linią CB , dwa trójkąty ACB , DCB , w których trzy boki w jednym równe są trzem bokom w drugim trójkącie, przyftaną do siebie (28), a w szczególności kąt $ABC = BCD$, i $ACB = CBD$, iako przeciwne bokom równym (25), a że kąty ABC , i BCD są wewnętrzne naprzemianległe względem siecznéj BC i dwóch linii EF i GH ; kąty ACB i CBD są także wewnętrzne naprzemianległe względem siecznéj BC i dwóch linii IK i LM ; więc linia EF jest równoległa od GH a linia IK równoodległa od LM (67).

+ 75. *Wniosek* 1. Jeżeli AB i CD są sobie równe i od siebie równoodległe, będą także AC i BD równe i równoodległe: gdyż w dwóch trójkątach ACB , BCD , bok BC jest spółny; bok $AB = CD$ z założenia, i kąt $ABC = BCD$, iako wewnętrzne naprzemianległe względem siecznéj CB i dwóch równoległych AB , CD : więc dwa te trójkąty przyftaną do siebie (24), a w szczególności bok $AC = BD$, i kąt $ACB = CBD$; a że dwa te kąty są wewnętrzne naprzemianległe względem siecznéj BC i dwóch linii AC , BD , więc linie te są od siebie równoległe (67).

74. *Wniosek 2.* Gdy dwie linie AB, CD fig. 58. są od siebie równoodległe, poprowadzwszy linie EF, GH, IK i t. d. prostopadłe do tych dwóch linii; prostopadłe te, iako od siebie równoległe (58), będą sobie równe (73); a że prostopadłe te oznaczają odległość linii AB i CD (51), a zatem dwie linie równoodległe zachowują wszędzie iednakową między sobą odległość.

R O Z D Z I A Ł IV.

O wielokątach w powszechności, a w szczególności o ich kątach.

75. Płasczyzna określona iakąkolwiek liczbą linii prostych, zowie się *wielokątem* lub *wielobokiem*, *polygonum*. Wielokąty mają rozmaite nazwiska, podług rozmaitej liczby boków, lub kątów. Itak trójkąt iest wielokątem mającym trzy boki, czyli trzy kąty; *czworokąt*, *quadrilaterum*, *pięciokąt*, *pentagonum*, *sześciokąt*, *hexagonum*, *siedmiokąt*, *heptagonum*, *ośmiokąt*, *octogonum*, *dziwięciokąt*, *enneagonum*, *dziesięciokąt*, *decagonum*, *dwunastokąt*, *dodecagonum*, *piętnastokąt*, *pentedecagonum* i t. d. są wielokąty mające 4, 5, 6, 7, 8 i t. d. boków lub kątów. ABCDE fig. 59. iest pięciokąt; ABCDEF fig. 40. iest sześciokąt i t. d.

76. Lubo wielokąty zwyczajnie oznaczają się tylą głoskami, ile mają kątów, dla krótkości iednak oznaczać ie można dwiema tylko głoskami naydaléj od siebie leżącemi: i tak, czworokąty ABCD fig. 41, 42, 43. mogą być oznaczone dwiema głoskami AC, lub BD: Podobnież sześciokąt

ABCDEF *fig. 40.* może być oznaczony dwiema głoskami *np.* EB. lub FC i t. d.

77. Kąt taki iak iest FAB *fig. 45.* zowie się *wklesły*, dla różnicy od innych kątów B, C, D, E, F, które się zowią *wyskakujące*.

W wielokacie iakimkolwiek przedłużwszy którykolwiek bok AB *fig. 40.* kąt CBH zawarty między bokiem CB i przedłużeniem boku AB zowie się kątem *zewnątrznym*, *externus*, dla różnicy od kątów ABC, BCD i t. d. które się nazywają kątami *wewnętrznymi*, *interni*. Linia prosta łącząca wierzchołki dwóch kątów wielokąta, zowie się *przekątnią*, *diagonalis*, iakie są *fig. 40.* AC, AD, AE.

78. Kiedy wielokąt ma wszystkie boki i kąty równe, iak iest *fig. 40, 43*, i t. d. zowie się *foremny*, *regulare*: kiedy zaś boki i kąty są nierówne, iak iest *fig. 59, 45.* i t. d., zowie się *nieforemny*, *irregulare*.

79. Między czworokątami niektóre mają boki przeciwne równoodległe; iak iest *np.* czworokąt BD *fig. 41.* w którym bok AB iest równoodległy od boku CD i bok AD równoodległy od boku BC. Czworokąt taki zowie się *równoległobokiem*, *parallelogrammum*.

Z tego cośmy powiedzieli wyżej (72, 75) wypada:

1^{da} Ze przekątnia AC, dzieli równoległobok na dwa trójkąty równe:

2^{re} Ze boki przeciwne w równoległoboku są sobie równe;

3^{cie} Ze gdy w czworokacie boki przeciwne są sobie równe, taki czworokąt iest równoległobokiem;

4te Ze gdy w czworokącie dwa boki przeciwne są sobie równe i od siebie równoległe, taki czworokąt jest równoległobokiem.

80. *Uwaga.* Może być czworokąt taki, w którym dwa boki przeciwne są od siebie równoodległe, lecz nierówne, iak jest czworokąt *abcd* fig. 46. w którym boki *cd*, *ab* są od siebie równoodległe, lecz nierówne; taki czworokąt nie jest równoległobokiem: gdyż drugie dwa boki *ad* i *cb* nie są od siebie równoodległe. Czworokąt taki zowie się po łacinie *trapezium*; po polsku możnaby go nazwać równoległobok niezupełny.

81. Równoległobok *AC* fig. 42. mający wszystkie kąty proste, zowie się *prostokątem*, *rectangulum*.

Prostokąt *AC* fig. 45. mający wszystkie boki równe zowie się *kwadratem*, *quadratum*.

Równoległobok *ac*, fig. 44. mający wszystkie boki równe, lecz kąty nierówn, zwać się może kwadratem ukośnym, *rhombus*.

82. Chcąc zatem na daney linii *AB*, fig. 45. wykreślić kwadrat, trzeba z obudwu ięć końców *A* i *B*, wyprowadzić dwie linie *AD* i *BC* prostopadłe do *AB*, i równe linii daney *AB*: końce tych dwóch linii *C* i *D* złączysz linią prostą *CD*, czworokąt *ABCD* będzie kwadratem szukanym.

Chcąc wykreślić prostokąt, którego by boki równe były liniom danym, trzeba poprowadzić linią *AB*, fig. 42. równą iedney linii daney, i z dwóch ięć końców *A* i *B* wyprowadzić linie *AD* i *BC* prostopadłe do *AB* i równe drugiey linii daney: końce tych dwóch linii *C* i *D* złączysz linią prostą *CD*, czworokąt *ABCD* będzie prostokątem szukanym.

Chcąc wykreślić równoległobok, którego boki równe były dwom liniom danym, i kąt równy kątowi danemu, trzeba poprowadzić linią *AB* fig. 41. równą iednέy linii danέy, z końca *A* wyprowadzić linią *AD* równą drugέy linii danέy tak: aby kąt *BAD* był równy kątowi danemu; poprowadziwszy potέm z punktu *B* linią *BC* równą linii *AD*, i od niέy równoodległą, końce *D* i *C* złączyć linią prostą *DC*; czworokąt *ABCD* będzie równoległobokiem szukanym.

Dowodzenie we wszystkich trzech przypadkach iest łatwe mając wzgląd na to, cośmy powiedzieli o liniach równoodległych (58, 75).

83. W każdym wielokącie uważać będziemy *10d* kąty; *2re* boki, które razem wzięte zowią się *obwodem* wielokąta, *perimeter*; *3cie* płaszczyznę obwodem określona, która się zowie *powierzchnią* wielokąta.

84. Twier. *W* każdym trójkącie *summa* trzech kątów *waży* dwa kąty proste.

Dowodz. W trójkącie *ACB*, fig. 47. przedłużwszy którykolwiek bok *np.* *AB* do *D*, i z punktu *B* wyprowadziwszy linią *BF* równoodległą od boku *AC*; będzie kąt $CBF = C$, gdyż są naprzemianległe wewnętrzne względem siecznέy *BC*, i dwóch równoodległych *AC*, *BF*. Kąt $FBD = A$, gdyż są iednostronne odpowiadaiące sobie względem siecznέy *AD* i dwóch równoodległych *AC*, *BF*. Do kątów *CBF* i *FBD*, czyli co na iedno wychodzi, do kąta *CBD* dodawszy kąt *CBA*, wypadnie *summa* równa dwom kątom prostym (15). Wiέc i do kątów *C* i *A* dodawszy tenże kąt *CBA*, wypadnie *summa* kątów *C*, *A* i *CBA*, to iest, *summa* trzech kątów trójkąta, równa

dwom kątom prostym. Czyli, kąt $CBF = C$. Kąt $FBD = A$. Więc

$$CBF + FBD = C + A; \text{ czyli}$$

$$CBD = C + A.$$

Dodawszy po obu stronach kąt CBA , będzie

$$CBD + CBA = C + A + CBA.$$

A że kąty CBD i CBA iako przyległe ważą dwa kąty proste; więc też i kąty C , A i CBA , to jest trzy kąty trójkąta, ważą dwa kąty proste.

85. *Wnioſki.* 1. Ponieważ w trójkącie kąt zewnętrzny CBD równy jest dwom kątom wewnętrznym C i A naprzeciwko niego leżącym, iako się w poprzedzającym twierdzeniu okazało, więc od iednego z nich *np.* od kąta A jest większy.

86. 2. W trójkącie równobocznym, którego wszystkie kąty są między sobą równe (50), każdy kąt jest trzecią częścią dwóch kątów prostych, czyli dwiema trzecimi iednego kąta prostego.

87. 3. Kiedy w trójkącie ieden kąt jest prosty, lub roztwarty, drugie dwa muszą być ostre: gdyż inaczey summa trzech kątów trójkąta, ważyłaby więcej niż dwa kąty proste: co jest przeciwne twierdzeniu powyższemu. Kąt zatem prosty lub roztwarty jest w trójkącie największy, a tém samym i bok przeciwny kątowi prostemu lub roztwartemu jest w trójkącie największy (54).

88. Trójkąt mający kąt prosty, zowie się *prostokątny*, *rectangulum*; trójkąt mający kąt roztwarty, zowie się *roztwartokątny*, *obtusangulum*; trójkąt mający wszystkie kąty ostre, zowie się *ostrokątny*, *acutangulum*. Bok przeciwny kątowi prostemu, zowie się *przeciwprostokątną*, *hypothenuſa*: bok przeciwny kątowi roztwartemu nazywać można *przeciwroztwartokątną*, bok przeciwny kątowi ostremu, *przeciwostrokątną*.

89. 4. Z twierdzenia poprzedzającego wypada także, że gdy dwa kąty w jednym trójkącie, równe są dwom kątom w drugim trójkącie, trzeci kąt pierwszego równy jest także trzeciemu kątowi drugiego trójkąta: gdyż ten trzeci kąt przydany do dwóch pierwszych w obudwu trójkątach, czyni dwa kąty proste.

90. A stąd wypada, że twierdzenie wyżej podane (56), podług którego dwa trójkąty ABC , abc , *fig. 25.* mające kąty A i a proste, kąt $B = b$, i bok $BC = bc$, mogą do siebie przyrastać; do trójkątów także ostrokątnych i rozwartokątnych może być zastosowane: bo jeżeli *fig. 48.*, dwa kąty A i B w jednym trójkącie, równe są dwom kątom a i b w drugim trójkącie, będzie też i trzeci kąt C pierwszego równy trzeciemu kątowi c drugiego trójkąta; a gdy jeszcze i bok $CB = cb$ z założenia, dwa te trójkąty przyrastają do siebie podług twierdzenia drugiego o przyrastawaniu trójkątów.

91. Podobnież twierdzenie podane wyżej (52), podług którego dwa trójkąty, *fig. 25.* ACB , acb , mające kąty A i a proste, bok $BC = bc$, i bok $AC = ac$ przyrastają do siebie, do niektórych także innych trójkątów zastosować można. Jakoż niech będą dwa trójkąty, *fig. 48.* ABC , abc , w których kąty ostre A , a są równe, boki tym kątom przeciwne BC , bc równe, i boki tymże kątom przyległe AC , ac równe; dwa te trójkąty przyrastają do siebie: gdyż z punktów C i c spuściwszy linie CD i cd pierwszą prostopadłą do AB , drugą prostopadłą do ab , w dwóch trójkątach CDA , cda , kąt $A = a$ z założenia, kąt $D = d$ iako proste, a tém samém i trzeci kąt $ACD = acd$ (89); a że i bok $AC = ac$ z założenia, więc dwa te

trójkąty przyftaną do siebie (26), a w szczególności bok $CD = cd$, bok $AD = ad$. Dwa zatem trójkąty CDB , cdb , w których kąty przy D i d są proste z wykręślenia, bok $CD = cd$ z dowodzenia, i bok $CB = cb$ z założenia, przyftaną do siebie (52), a w szczególności bok $DB = db$. A kiedy $AD = ad$, i $DB = db$; więc $AD + DB = ad + db$, czyli $AB = ab$. Dwa zatem trójkąty ABC , abc , w których bok $AC = ac$ z założenia, bok $AB = ab$ z dowodzenia, i kąt $A = a$ z założenia, przyftaną do siebie podług pierwszego twierdzenia o przyftawianiu trójkątów.

92. Mogą jednak być dwa takie trójkąty, które nie przyftaną do siebie, chociaż w nich będzie kąt jednego równy katowi drugiego trójkąta, i bok przeciwny i przyległy temu katowi w jednym, równy bokowi przeciwnemu i przyległemu w drugim trójkącie. Trafic się to może w ten czas, kiedy boki przeciwne kątom równym mniejsze są od boków przyległych tymże kątom. Jakoż niech będą *fig. 49.* dwa trójkąty ABC , abc , w których kąt $A = a$, bok $BC = bc$, i bok $AB = ab$, lecz w obudwu trójkątach boki BC , bc przeciwne kątom równym, mniejsze są od boków AB , ab przyległych tymże kątom.

Z wierzchołka kąta b spuściwszy db prostopadłą do ac , będzie linia ad większa od linii cd ; czego łatwo można dowieść zważając, że linia ad nie może być ani równą linii cd , ani od niej mniejsza: gdyż w pierwszym przypadku pochyła ab byłaby równa pochyłej bc , w drugim pochyła ab byłaby mniejsza od pochyłej bc (47), co się sprzeciwia założeniu. Na linii zatem ad wzięwszy $dc = dc$, i poprowadziwszy bc , będzie $bc = bc$. A że $bc = BC$ z założenia, więc i $bc = BC$.

A zatem trzy trójkąty ABC , abc , $ab'c$ mają kąty A , a równe, boki tym kątom przeciwne BC , bc , $b'c$, równe, i boki tymże kątom przyległe AB , ab równe. Lecz jeżeli trójkąt abc przyślanie do trójkąta ABC podług poprzedzającego wniosku, tedy trzeci trójkąt $ab'c$, będący częścią trójkąta drugiego abc nie może przyślać do trójkąta ABC .

95. W tych więc tylko przypadkach dwa trójkąty mogą do siebie przyślać: 1^od gdy dwa boki i kąt między nimi zawarty w jednym równe są dwom bokom i kątowi między nimi zawartemu w drugim trójkącie; 2^ore gdy dwa kąty i bok im przyległy w jednym równe są dwom kątom i bokowi im przyległemu w drugim trójkącie; 3^ocie gdy trzy boki jednego równe są trzem bokom drugiego trójkąta; 4^ote gdy kąt prosty, bok mu przeciwny i przyległy w jednym równe są kątowi prostemu i bokom przeciwnemu i przyległemu w drugim trójkącie. Przypadek ten lubo może być zastosowany i do niektórych innych trójkątów, iednakże ponieważ czasem zayść może wątpliwość, czy dwa trójkąty nieprostokątne mogą do siebie przystać, iakośmy to okazali wyżej, używać go w dziele ninieyszém nie będziemy, na okazanie równości dwóch trójkątów nieprostokątnych. Co się tycze twierdzenia podanego wyżej (56, 90) twierdzenie to iuż nam więcéy potrzebne nie będzie, bo w takim przypadku dwa trójkąty przyślaną do siebie podług twierdzenia drugiego o przyślawaniu trójkątów, iakośmy to okazali wyżej, (90).

94. Gdy dwa trójkąty mogą do siebie przyślać, tém samém powierzchnia iednego iest równa powierzchni drugiego trójkąta. Niżej obaczymy, że dwa trójkąty mogą mieć równe powierzchnie, chociażby nie mogły do siebie przyślać.

95. Twierd. *Summa kątów wewnętrznych wielokąta iakiegokolwiek waży kątów prostych dwa razy tyle ile wielokąt ma boków, mniéy 4: czyli, liczbę boków wielokąta rozmnożywszy przez 2, i od tak rozmnożonéy odiawszy 4, reszta okaże ważność kątów wewnętrznych wielokąta w kątach prostych.*

Dowód. Wziąwszy wewnątrz iakiegokolwiek wielokąta AD, *fig. 59.* punkt S od upodobania, i z punktu tego poprowadziwszy linie SA, SB, SC i t. d. łączące wszystkie wierzchołki kątów wielokąta z punktem S, utworzą się trójkąty ASB, BSC, CSD i t. d. których spólnym wierzchołkiem iest punkt S, a z których każdy ma za podstawę bok ieden wielokąta, i dwa przy niéy kąty należące do kątów wielokąta. Linie więc te AS, BS, CS i t. d. podziela wielokąt na tyle trójkątów, ile wielokąt ma boków. A że w każdym trójkącie summa trzech kątów waży dwa kąty proste (84); więc wszystkie te trójkąty ważyć będą kątów prostych dwa razy tyle, ile wielokąt ma boków. Ze zaś kąty przy punkcie S będące, ważą 4 kąty proste (16); a nie należą do kątów wewnętrznych wielokąta, więc od podwoionéy liczby boków wielokąta odiawszy 4, reszta okaże ważność kątów wewnętrznych wielokąta w kątach prostych.

To samo twierdzenie możnaby okazać następującym sposobem: z wierzchołka kąta któregokolwiek w wielokącie FC *fig. 40, 45. np.* z wierzchołka kąta A, poprowadziwszy do wierzchołków wszystkich innych kątów przekątne AC, AD i t. d. przekątne te podziela wielokąt na tyle trójkątów, ile ma wielokąt boków, mniéy 2; gdyż do wierzchołka dwóch kątów B i F przyległych ramionom

kąta A, przekątnych poprowadzić niemożna. A że summa trzech kątów trójkąta waży dwa kąty proste (84), więc summa kątów we wszystkich tych trójkątach, czyli, co na iedno wychodzi, summa wszystkich kątów wewnętrznych wielokąta, ważyć będzie kątów prostych dwa razy tyle, ile wielokąt ma boków, mniéy 4.

96. *Wniosek.* Gdy iest wielokąt foremny (78), wszystkie iego kąty wewnętrzne są między sobą równe; a tém samém i kąty zewnętrzne są między sobą równe: gdyż każdy kąt zewnętrzny, np. kąt CBH: *fig.* 4o. z przyległym sobie wewnętrznym CBA, waży dwa kąty proste. A zatem mając wiadomą liczbę boków wielokąta foremnego, można doysć ważności kąta iego wewnętrznego i zewnętrznego. I tak w pięciokacie np. foremnym, summa wszystkich kątów wewnętrznych, równa iest liczbie boków iego rozmnożonéy przez 2, i zmniejszonéy 4; czyli równa $5 \times 2 - 4 = 6$: więc każdy iego kąt ważyć będzie piątą część sześciu kątów prostych, czyli $\frac{6}{5}$ iednego kąta prostego: a zatem kąt zewnętrzny pięciokąta foremnego ważyć będzie resztę do dwóch kątów prostych, to iest $\frac{4}{5}$: gdyż $\frac{6}{5} + \frac{4}{5} = \frac{10}{5} = 2$ kątom prostym.

Podobnież w sześciokacie foremnym summa wszystkich kątów wewnętrznych $= 6 \times 2 - 4 = 8$ kątom prostym; więc każdy iego kąt wewnętrzny ważyć będzie $\frac{8}{6}$ czyli $\frac{4}{3}$ kąta prostego: a zatem kąt zewnętrzny ważyć będzie $\frac{2}{3}$ kąta prostego, gdyż $\frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$ kątom prostym i t. d.

97. *Twierd.* W wielokacie mającym wszystkie kąty wyskakujące, przedłużywszy w jednę stronę wszystkie boki, iak iest na *fig.* 5o. sum-

ma wszystkich kątów zewnętrznych FAK , GBF i t. d. waży 4 kąty proste.

Dowód. Każdy kąt zewnętrzny np. CBF z przyległym sobie wewnętrznym GBA , waży dwa kąty proste: wszystkie zatem kąty zewnętrzne z wewnętrznymi ważyć będą kątów prostych dwa razy tyle ile wielokąt ma boków. A że same wewnętrzne ważą kątów prostych dwa razy tyle ile wielokąt ma boków mniéy 4 (95), więc same zewnętrzne ważą 4 kąty proste.

98. *Wniosek.* Gdy iest wielokąt foremny, kąty iego zewnętrzne są między sobą równe; a że wszystkie zewnętrzne ważą 4 kąty proste, więc 4 podzieliwszy przez liczbę boków, iloraz będzie wartością kąta zewnętrznego w wielokącie foremnym. I tak w pięciokącie np. foremnym ponieważ 5 kątów zewnętrznych ważą 4 kąty proste, więc 1 waży piątą część 4 kątów prostych, czyli $\frac{4}{5}$ jednego prostego: a tém samém kąt wewnętrzny iako mu przyległy, ważyć będzie resztę do dwóch kątów prostych; to iest $\frac{6}{5}$ kąta prostego. Podobnież w sześciokącie foremnym ieden kąt zewnętrzny waży $\frac{4}{6}$ czyli $\frac{2}{3}$ kąta prostego; a tém samém kąt wewnętrzny ważyć będzie $\frac{4}{3}$ kąta prostego. W siedmiokącie foremnym kąt zewnętrzny waży $\frac{4}{7}$, a wewnętrzny $\frac{10}{7}$ kąta prostego i t. d.

99. *Uwaga.* Postrzegamy tu, że im więcéy ma boków wielokąt foremny; tém kąty iego zewnętrzne są mniejsze, a wewnętrzne większe.

Inne własności wielokątów ściągające się do ich powierzchni i obwodu, wyłożymy na swoim miejscu.

ROZDZIAŁ V.

O liniach prostych i o kole.

100. Powiedzieliśmy wyżej (7), że część okręgu zowie się łukiem. Liniia prosta CD fig. 51. łącząca dwa końce łuku CGD zowie się *cięciwą, chorda*.

Uważać tu potrzeba iód, że cięciwa każda np. CD łączy końce dwóch łuków: iednego CGD, drugiego CHD, których summa czyni okrag koła; ieżeli więc ieden z nich mnieyszy iest od pół okręgu, drugi tém samém będzie większy; *zre* że każda cięciwa dzieli koło na dwie części zwane *odcinkami, segmenta*, ieden DCG, drugi DCH, których summa czyni koło; i ieżeli ieden z nich mnieyszy iest od półkola, drugi tém samém większy być musi.

101. Gdy cięciwa przechodzi przez środek koła iak iest AB, nazywa się *średnicą, diameter*.

Uważać tu potrzeba iód, że średnica równa iest dwom promieniom: gdyż promień, iakośmy powiedzieli wyżej (7), iest linią prostą od środka koła do iakiego punktu na okręgu poprowadzoną; a zatém średnica AB równa iest dwom promieniom SB i SA. *zre* Ze tém samém wszystkie średnice w jednémże kole są sobie równe: gdyż każda z nich równa iest dwom promieniom, które są między sobą wszystkie równe; *scie* że średnica iest większa, niż iakakolwiek inna cięciwa: gdyż końce iakiéykolwiek cięciwy CD złączywszy ze środkiem koła liniami prostymi SC, SD, w trójkącie SDC summa dwóch boków $SC + SD > CD$ (22), to iest, summa dwóch promieni, czyli średnica, większa iest od cięciwy; *4te* że średnica

AB dzieli koło i jego okrąg na dwie części równe: gdyż złożywszy figurę wzdłuż linii AB, gdyby część okręgu AHB, nie przystała do części okręgu AGB, punkta iednéy z nich byłyby mniéj lub więcéy od środka koła oddalone, niż punkta drugiéy: co być nie może (7).

102. Tym samym sposobem dowieść można, że dwa koła nakreślone iednymże promieniem są sobie równe, i mogą do siebie przystać, gdy iedno na drugiém będzie położone tak, aby środek iednego padł na środek drugiego koła.

103. Linia prosta EF, przecinająca koło, którą *sieczną* koła, *secans circuli* zwać będziemy, dwa tylko punkta C i D wspólne z okręgiem mieć może: bo gdyby miała *np.* trzy punkta wspólne, trzy te punkta iako znajdujące się na okręgu, byłyby w równéy od środka koła odległości (7); a tém samym z punktu danego S do linii prostej EF można by było poprowadzić trzy linie równe: co być nie może (49).

104. Gdy linia prosta ma tylko ieden punkt wspólny z okręgiem, to iest, gdy się okręgu w jednym tylko punkcie dotyka, a w drugim punkcie dotykać się nie może, choćby była przedłużona; taka linia zowie się *styczną* koła, *tangens circuli*. I tak linia IK w jednym tylko punkcie H dotykająca się okręgu, iest stycznią: linią zaś HL lubo w jednym tylko punkcie H dotyka się okręgu, przecięż dostatecznie przedłużona, przecięłaby go w punkcie drugim, a zatem nie iest stycznią.

105. *Twierd.* Wziawszy dwa iakiegokolwiek łuki iednegoż koła, albo dwóch kół równych, i położywszy ieden na drugim tak, aby ich wklęsłości obrócone były w jedną stronę, i aby dwa iakiegokolwiek punkta iednego, padły na dwa pun-

ka łuku drugiego; łuk mniejszy zeydzie się zupełnie z łukiem większym.

Dowód. Jakoż przeniosłszy łuk *ac* fig. 52. na łuk *AE* tak aby punkt *a* padł na *A*, i punkt *c* na *C*, cięciwa *ac* przyftanie zupełnie do cięciwy *AC*: a że promienie *sa*, *sc*, są podług założenia równe promieniom *SA*, *SC*, więc dwa trójkąty *sca*, *SCA*, przyftaną do siebie (28); a w szczególności punkt *s* padnie na *S*: a zatém wszystkie punkta łuku *ac* padną na punkta łuku *AC*: gdyż punkta te są równie oddalone od środków *s*, *S*, które są w jednym punkcie: a tém samém łuk *ac* zeydzie się zupełnie z łukiem *AE*.

106. *Wnios.* Stąd wypada, że dwa łuki iednegoż koła, albo dwóch kół równych, są równe, gdy ich cięciwy są równe; i odwrotnie, byleby łuki te były iednegoż gatunku, to iest, obadwa mniejsze, lub obadwa większe od pół okręgu. Jakoż cięciwę iedną położywszy na drugiey, dwa końce pierwszey padną na dwa końce drugiey cięciwy, a tém samém i dwa końce iednego łuku, padną na dwa końce drugiego: więc dwa te łuki podług twierdzenia poprzedzającego, zeydą się z sobą, i ieden do drugiego zupełnie przyftanie, a zatém są sobie równe.

Odwrotnie, ieżeli dwa łuki iednegoż koła albo dwóch kół równych, są równe; będą też równe i ich cięciwy: gdyż łuki te iako równe przyftaną do siebie podług wniosku poprzedzającego; a tém samém końce iednego padną na końce drugiego łuku; więc i cięciwy ich przyftaną do siebie: przez dwa bowiem punkta, iedna tylko liniia prosta przechodzi.

107. Zagad. *Mając dane dwa łuki AB, CD, fig. 53. iednegoż koła, albo dwóch kół równych, znaleźć spólną ich miarę.*

Rozwiąz. Zagadnienie to rozwiązać można tym samym sposobem, któregośmy użyli w podobnym przypadku z liniami prostemi (58); z tą tylko różnicą, że zamiast przenoszenia łuków mniejszych na większe, przenosić będziemy ich cięciwy które gdy są równe, łuki ich są także równe (106).

Cięciwa łuku CD może być na łuk AB dwa razy przeniesiona od A do E, z pozostałą resztą EB; będzie więc łuk $AB = 2CD + EB$.

Cięciwa łuku EB może być na łuk CD raz przeniesiona od C do F, z pozostałą resztą FD; będzie więc łuk $CD = EB + FD$.

Nakoniec cięciwa łuku FD może być na łuk EB 4 razy przeniesiona, bez żadney reszty: będzie więc łuk

$$EB = 4 FD. \quad \text{A zatem}$$

$$CD = EB + FD = 4 FD + FD = 5 FD.$$

$AB = 2CD + EB = 10FD + 4FD = 14FD$. to jest: łuk FD jest spólną miarą dwóch danych łuków AB, CD, i mieści się w pierwszym łuku 14 razy, w drugim 5 razy. Dwa więc łuki dane są do siebie iak dwie liczby 14 i 5.

Uwaga. Mogą być dwa dane łuki takie, że spólnéy ich miary znaleźć nie można, choćby powyższe działanie było iak naydaléy posunięte: łuki więc takie będą ilościami niespółmiernemi, iakośmy wyżej powiedzieli (58).

108. Twierd. *Promień SM, fig. 54. prostopadły do cięciwy AB, dzieli tę cięciwę w punkcie C i łuk AMB w punkcie M na dwie równe części.*

Dowód. 108. Poprowadziwszy promienie SA, SB, promienie te względem prostopadłej SC są dwiema pochyłemi równemi, a tém samém muszą być równie oddalone od spodka C prostopadłej SC (48); więc $AC=BC$.

2re Ponieważ SM jest prostopadłą ze środka C linii AB wyprowadzona, więc każdy punkt na téj prostopadłej wzięty np. punkt M jest w równy odległości od końców linii AB (50); a zatem linia $AM=BM$. Ze zaś linie te są cięciwami łuków AM, BM, więc i łuki te są sobie równe (106). A zatem promień SM, prostopadły do cięciwy AB dzieli ją w punkcie C, i ięć łuk AMB w punkcie M na dwie równe części.

109. *Wnioſki.* Z tego twierdzenia okazuje się 108, że trzy te punkta, środek koła S, środek cięciwy C, i środek ięć łuku M znajdują się na iednój linii SM prostopadłej do cięciwy: a że na oznaczenie linii prostej dosyć jest dwóch tylko punktów; więc kiedy linia prosta przechodzi przez dwa punkta którekolwiek z trzech punktów wymienionych, przejdzie tém samém i przez punkt trzeci, i będzie prostopadłą do cięciwy.

2re Ponieważ z punktu wziętego na linii prostej, nie można więcej prostopadłych do téj linii wyprowadzić, tylko iedną (55), więc prostopadła ze środka cięciwy wyprowadzona przechodzi przez środek koła, i dzieli łuk do téj cięciwy należący na dwie równe części.

110. 5cie Z tego też twierdzenia wypada, że chcąc podzielić łuk na dwie równe części, trzeba ze środka cięciwy tego łuku wyprowadzić prostopadłą, aż do przecięcia się z łukiem danym; albo też w kole daném przez środek cięciwy łuku danego do podzielenia poprowadzić promień, albo

nakoniec poprowadzić promień prostopadły do cięciwy łuku danego. Tymże sposobem postępując można będzie łuk podzielić na części równych, 4, 8, 16 i t. d.

111. Zagad. Wykreślić koło, któregoby okrąg przechodził przez trzy punkta *A*, *B*, *C* dane nie w prostej linii. fig. 55.

Rozwiąz. Złączysz punkt *A* z punktem *B*, i punkt *B* z punktem *C* liniami prostymi *AB*, *BC*, i linią *AB* w punkcie *D*, linią *BC* w punkcie *E* podzieliwszy na dwie części równe; z punktu *D* i *E* wyprowadźmy dwie prostopadłe *DF*, *EG*, pierwszą do *AB*, drugą do *BC*: dwie te prostopadłe, podług tego cośmy powiedzieli wyżej (65), dostatecznie przedłużone, zeydą się z sobą w punkcie *S*: punkt *S* będzie środkiem, a odległość jego od któregokolwiek z trzech punktów danych, będzie promieniem koła szukanego: gdyż punkt *S* uważany na prostopadłej *DF*, jest w równy odległości od dwóch punktów *A* i *B* (50): tenże sam punkt *S* uważany na prostopadłej *EG*, jest w równy odległości od dwóch punktów *B* i *C*. Trzy więc odległości, *AS*, *BS*, *CS* są między sobą równe: a zatem ze środka *S* promieniem *AS* nakreśliwszy koło, okrąg tego koła przejdzie przez punkta *A*, *B*, *C*.

112. Uwaga. 1. Ponieważ linie *AB*, *BC* są w kole szukaném cięciwami w punktach *D* i *E* na dwie równe części podzielonemi, środek tego koła powinien się znajdować tak na prostopadłej *DF*, iako też na prostopadłej *GE* (109), to jest, na spólném tych dwóch linii przecięciu *S*: a że linie proste w jednym tylko punkcie przecinać się mogą, więc tylko jeden jest punkt *S* mogący być środkiem koła szukanego. Toż samo koło nie

może mieć innego promienia, tylko linią AS: bo wzięwszy za promień linią krótszą lub dłuższą od AS, i z punktu S promieniem tym nakręliwszy koło, okrąg tego koła nie przejdzie przez punkta A, B, C: co jest przez się widoczne.

A stać wypada iód, że przez trzy dane punkta iednego tylko koła okrąg przechodzić może; 2re, że gdy okręgi dwóch kół mają trzy punkta wspólne, dwa te koła są iednymże kołem; 3cie, że zatém okręgi dwóch kół nie mogą się z sobą przecinać tylko we dwóch punktach.

Uwaga. 2. Gdyby trzy punkta A, B, C, dane były w linii prostéy, na ten czas dwie prostopadłe DF, EG byłyby od siebie równoodległe (58), a tem samém zeyśćby się z sobą nie mogły: a że punkt ich zeyścia się jest środkiem, a iego odległość od któregokolwiek z trzech punktów danych, jest promieniem koła szukanego; w tym więc przypadku, nie mogąc mieć ani środka, ani promienia, byłoby rzeczą niepodobną wykreślić koło szukane. A zatém przez trzy: punkta dane w linii prostéy, okrąg iednego koła przechodzić nie może. Co i z tego względu jest rzeczą widoczną, że linia prosta z okręgiem koła trzech punktów wspólnych mieć nie może (103).

115. Zagad. *Mając dane koło, znaleźć iego środek.*

Rozwiqz. Na okręgu danego koła wzięwszy trzy punkta od upodobania A, B, C, fig. 55. i złączywszy je liniami prostemi AB, BC, ze środków tych linii D i E, wyprowadzam dwie prostopadłe DF, EG, pierwszą do AB, drugą do BC, przecinające się z sobą w punkcie S: punkt S będzie środkiem szukanym danego koła.

114. *Twierd.* Z punktu któregokolwiek C fig. 56. wziętego na okręgu koła poprowadziwszy CA prostopadłą do promienia SC, przez ten punkt C przechodzącego, *prostopadła ta do promienia będzie styczną koła.* I odwrotnie, *styczna z któregokolwiek punktu wziętego na okręgu poprowadzona, jest prostopadła do promienia przechodzącego przez punkt zetknięcia się styczney z kołem.*

Dowód. Wziąwszy iakiekolwiek punkta D, E i t. d. na prostopadłey AB, i złączywszy je ze środkiem koła S liniami prostymi DS, ES, linie te iako pochyłe do linii AB są dłuższe od prostopadłey SC (47). A że punkt C znajduje się na okręgu; więc punkta D, E i t. d. znajdować się muszą za okręgiem. Linia zatem AB, ieden tylko punkt C ma z okręgiem spólny: inne zaś wszystkie iey punkta są za okręgiem: więc linia ta jest styczną z kołem (104).

Odwrotnie. Styczna z kołem AB jest prostopadła do promienia SC przechodzącego przez punkt zetknięcia się C: Gdyż ponieważ styczna AB ma tylko ieden punkt C na okręgu, inne zaś wszystkie iey punkta są za okręgiem; więc ze wszystkich liniy prostych, które z punktu S do styczney AB prowadzić można, naykrótszy jest promień SC: ten bowiem kończy się na okręgu, gdy tymczasem inne wszystkie, iak są np. SD, SE, wychodzą za okrąg. Gdyby więc promień SC nie był prostopadły do styczney AB, tedy inna którakolwiek linia z punktu S do linii AB poprowadzona, dłuższa od promienia SC, byłaby do linii AB prostopadłą, co być nie może (47).

115. *Wniosek.* Stąd wypada iód, że przez punkt C dany na okręgu koła, nie można wię-

céy styczney wyprowadzić, tylko jedną: gdyż styczną ta powinna być prostopadłą do promienia SC, przez dany punkt przechodzącego: a z punktu C do linii SC nie można wyprowadzić dwóch prostopadłych, różnych od siebie (55); *2re* Ze przez dany punkt na okręgu koła, chcąc wyprowadzić styczną z kołem, trzeba z danego punktu wyprowadzić prostopadłą do promienia przez tenże dany punkt przechodzącego.

116. *Twierd. Dwa łuki iednegoż koła zawarte między dwiema cięciwami od siebie równo-odległemi, lub zawarte między cięciwą i styczną od niéy równoległą, są sobie równe.*

Dowod. 10d. Niech będą dwie cięciwy AB, CD, *fig.* 57. od siebie równoległe: poprowadziwszy promień SG prostopadły do cięciwy CD, promień ten będzie razem prostopadły i do cięciwy AB iako równoległéy od CD (61), i punkt G będzie środkiem tak łuku CGD, iako też łuku AGB (108): będzie zatem łuk $CG = DG$, łuk $AG = BG$: odiawszy stron równania drugiego, od stron równania pierwszego, zostanie $CG - AG = DG - BG$; czyli $CA = DB$; to jest, łuki zawarte między dwiema cięciwami od siebie równoległemi, są sobie równe.

2re Niech będzie cięciwa IK równoległa od styczney EF: przez punkt zetknięcia się H, poprowadziwszy promień SH, promień ten będzie prostopadły do styczney EF (114), i do cięciwy IK iako równoległéy od EF; a tém samém łuk KHI jest podzielony w punkcie H, na dwie równe części (108); będzie więc łuk $IH = KH$, to jest, łuki zawarte między styczną i cięciwą od niéy równoległą są równe.

117. *Twierd.* Wierzchołki S, s , dwóch kątów równych ASB, asb fig. 58. wzięwszy za środek koła, i jakimkolwiek promieniem nakręśliwszy łuk ACB przecinający ramiona kąta ASB , w punktach A i B , i tymże samém promieniem nakręśliwszy łuk acb przecinający ramiona kąta asb w punktach a i b ; łuki ACB, acb zawarte między ramionami tych dwóch kątów równych, będą sobie równe; i odwrotnie, jeżeli łuki kątów równych zawarte między ramionami dwóch kątów mających swoje wierzchołki w środku kątów, są sobie równe; kąty te będą także równe.

Dowód. Poprowadziwszy cięciwy AB, ab , w dwóch trójkątach ASB, asb : kąt $S = s$, boki AS, BS , równe bokom as, bs , iako promienie, z założenia; więc dwa te trójkąty przystaną do siebie (24), a w szczególności cięciwa $AB = ab$; a zatem i łuki ACB, acb są równe (106).

Odwrot. Jeżeli łuk $ab = AB$, będzie kąt $asb = ASB$: bo ponieważ łuki te są równe, więc i cięciwy ich AB, ab są równe (106), a że i promienie SA, SB, sa, sb , są między sobą równe z założenia, więc dwa trójkąty ASB, asb przystaną do siebie (28), a w szczególności kąt $ASB = asb$.

118. *Twierd.* Wierzchołki O, o , fig. 59. dwóch jakichkolwiek kątów AOB, aob wzięwszy za środek, i iednymże promieniem nakręśliwszy dwa łuki, któreby przecinały ramiona dwóch danych kątów w punktach A, B, a, b ; będzie stosunek kąta AOB do kąta aob , równy stosunkowi łuku AB do łuku ab ; to jest, tyle razy kąt ieden będzie większy lub mniejszy od drugiego, ile razy łuk zawarty między ramionami kąta pierwszego, jest większy lub mniejszy od łuku zawartego mię-

dzy ramionami kąta drugiego: czyli, będzie $AOB: aob = AB: ab$.

Dowód. Mogą tu być dwa przypadki, albo łuki AB , ab są ilościami spółmiernymi, albo nie spółmiernymi. 1^o Jeżeli łuki AB , ab , są ilości spółmierne, daymy, że łuk AB ma takich części 4, iakich łuk ab ma 2. Podzieliwszy łuk ab na dwie części równe w punkcie c , a łuk AB na cztery części równe w punktach C , D , E , i poprowadziwszy promienie oc ; OC , OD , OE , kąty aoc ; cob , AOC , COD , DOE , EOB , są między sobą równe, podług twierdzenia poprzedzającego. A zatem kąt AOB , składa się ze czterech takich kątów, z jakich dwóch składa się kąt aob : więc kąty te mają się do siebie, iak 4 do 2. Czyli, $AOB: aob = 4: 2$. A że podług założenia, łuk $AB: ab = 4: 2$; więc $AOB: aob = AB: ab$, to iest, kąt AOB do kąta aob ma się iak łuk AB zawarty między ramionami 1^{go}, do łuku ab zawartego między ramionami kąta 2^{go}.

2^{re} Jeżeli łuki AB , ab , *fig.* 60. są niespółmierne, będzie także

$$AOB: aob = AB: ab . — . — . — A.$$

Jeżeli ta proporcya iest fałszywa, tedy ostatni wyraz ab iest albo zamały, albo zawielki do uczynienia proporcyi: trzy bowiem pierwsze wyrazy proporcyi, mogą być iakiekolwiek.

Weźmyż naprzód łuk $as > ab$, i niech będzie, iezeli być może

$$AOB: aob = AB: as$$

Podzielmy łuk AB na części równych 2, 4, 8 i t. d. (110), aż póki nie dojdziemy do części mniejszych od łuku bs . Przenieśmy potém części te mniejsze od łuku bs na łuk ab , poczynając od punktu a ku b ,

Ponieważ łuki ab , AB są niespółmierne, więc punkt podziału nie może przypaść na punkt b , lecz padnie albo z prawej strony punktu b , *np.* w punkcie c , albo z lewej strony, *np.* w punkcie $é$. Poprowadziwszy promień oc , kąty aoc , AOB obejmujące ramionami swemi łuki ac , AB spółmierne z wykreślenia, mają się do siebie iak te łuki, podług 1szej części niniejszego twierdzenia; to jest, $aoc : AOB = ac : AB$. A że podług przypuszczenia $AOB : aob = AB : as$; więc rozmnożywszy przez siebie wyrazy odpowiadające w tych dwóch proporcjach, będzie $aoc \times AOB : AOB \times aob = ac \times AB : AB \times as$.

Podzieliwszy dwa pierwsze wyrazy przez AOB a dwa drugie przez AB , będzie

$$aoc : aob = ac : as.$$

Lecz kąt $aoc > aob$; łuk zaś $ac < as$ z wykreślenia; to jest, w ostatniej proporcji poprzednik 1go stosunku, większy jest od swego następnika; poprzednik zaś 2go stosunku mniejszy jest od swego następnika: a zatem proporcja ta jest fałszywa. Proporcja ta powstała ze złożenia dwóch proporcji poprzedzających, z których 1wsza $aoc : AOB = ac : AB$ jest dowiedziona w 1szej części niniejszego twierdzenia; druga zatem $AOB : aob = AB : as$, w której łuk as wzięliśmy większy od ab , musi być fałszywa. W proporcji więc oznaczony głośką A ostatni wyraz ab nie może być za mały; obaczmy czy nie jest zawięliki.

Weźmy łuk $as < ab$ i niech będzie, jeżeli być może, ta proporcja prawdziwa:

$$AOB : aob = AB : as.$$

Podzielmy łuk AB na takie części równe, aby przeniosłszy je na łuk ab zaczynając od punktu a , jedna takowa część skończyła się między punkta-

mi $s i b$, np. w punkcie c . Poprowadziwszy promień oc , dwa kąty aoc , AOB obeymujące ramionami swoimi łuki ac , AB spółmierne z wykreślenia, mają się do siebie iak te łuki, podług 1szej części niniejszego twierdzenia; to iest, $aoc: AOB = ac: AB$; a że podług przypuszczenia $AOB: aob = AB: as$; więc

$$aoc \times AOB: AOB \times aob = ac \times AB: AB \times as.$$

Podzieliwszy dwa pierwsze wyrazy przez AOB , dwa drugie przez AB , będzie

$aoc: aob = ac: as$; co być nie może: gdyż kąt $aoc < aob$; łuk zaś $ac > as$ z wykreślenia: więc i proporcya ta: $AOB: aob = AB: as$, w którą wzięliśmy łuk $as < ab$, iest fałszywa.

W proporcyi zatem A ostatni wyraz ab nie może być ani zamały, ani zawielki do uczynienia proporcyi; a tém samém wyraz ten iest takim, iakim być powinien; to iest, proporcya ta $AOB: aob = AB: ab$, iest prawdziwa.

Czy więc łuki są spółmierne, czy nie spółmierne, zawsze kąty mają się do siebie, iak łuki zawarte między ich ramionami.

119. *Wniosek 1.* Ponieważ stosunek łuków AB , ab , równy iest stosunkowi kątów AOB , aob ; więc gdy się kąty AOB , aob powiększą lub zmniejszą w iakimkolwiek stosunku, łuki także AB , ab powiększą się, albo zmniejszą w tymże samym stosunku; i odwrotnie, za powiększeniem lub zmniejszeniem łuków AB , ab , kąty także AOB , aob powiększą się albo zmniejszą. Łuki więc te mogą być użyte za miarę wielkości kątów. Przeto też miarą kąta iest łuk między jego ramionami zawarty, należący do koła, którego środek iest wierzchołkiem tego kąta.

Byłoby wprawdzie rzeczą przyzwoitszą dochodzić wielkości kątów, za pomocą kąta iakiego wziętego za iedność, niżeli za pomocą łuków. I tak *np.* wzięwszy kąt prosty za 1, kąt ostry, iako mniejszy od prostego, byłby mniejszym od iedności, kąt roztwarty iako większy od prostego, byłby większym od iedności. Lecz takowy sposób mierzenia kątów lubo nayprzyzwoitszy, w użyciu iednak nie iest wygodny, dla téy naybardziéy przyczyny, że łatwiéy iest brać równe łuki danym łukom, niż równe kąty danym kątom. W takowym sposobie mierzenia kątów, mówić *np.* że łuk AB iest miarą kąta AOB , iest to samo co mówić, że kąt AOB taką iest częścią kąta iakiego wziętego za 1, iaką częścią iest łuk AB łuku zawartego między ramionami kąta wziętego za 1, i który iest częścią okręgu koła maiącego swój środek w wierzchołku tegoż kąta.

120. *Wniosek 2.* Miarą kąta prostego, któryby nayprzyzwoiciéy było wziąć za iedność do mierzenia kątów, iest czwarta część okręgu: gdyż wierzchołek S *fig.* 56. kąta prostego FSG wzięwszy za środek i promieniem iakimkolwiek *np.* SG nakręśliwszy koło; przedłużmy FS do H ; będzie FH średnica tego koła (101); a zatém FGH iest połową okręgu: a że kąt $GSF = GSH$ iako proste, więc i łuk $FG = GH$ iako miary kątów równych. Łuk przeto FG iest połową pół okręgu FGH , czyli czwartą częścią okręgu całego.

Miarą zatém kąta ostrego będzie łuk mniejszy od czwartéy części okręgu: miarą kąta roztwartego będzie łuk większy od czwartéy części okręgu.

121. *Wniosek 5.* Z twierdzenia poprzedzającego wypada także, że chcąc dany kąt podzielić

na iakąkolwiek liczbę części równych, dosyć iest łuk służący mu za miarę podzielić na tyleż części równych, i punkta podziału połączyć liniami prostemi wierzchołkiem kąta: linie te podzielą kąt dany na części szukane.

Uwaga. Widzieliśmy wyżej (110), że łuk dany podzielić można na części równych 2, 4, 8, 16 i t. d. Więc na te same części równe można także podzielić dany kąt, iak to już innym sposobem okazaliśmy wyżej (46). Co się tycze dzielenia łuku na inne części równe, iak np. na 3, 5, 6 i t. d. do tego potrzeba wyższych wiadomości, niżeli są te, które w Jeometrii elementarnéy mogą być umieszczone: i kąt więc na takie części równe ieometrycznie dzielonym być nie może, wyłączywszy tylko nie wielką liczbę przypadków szczególnych, które później wymienimy.

122. Twierd. *W dwóch kołach równych lub w jednymże kole łuk większy, ma większą cięciwę; i odwrotnie: (byleby łuki, o których mowa, były mniejsze od półokręgu).*

Dowód. Niech będzie fig. 61. łuk $CB > BA$, trzeba dowieśdź, że cięciwa $CB > BA$. Jakoż poprowadziwszy promienie SA , SB , SC , w dwóch trójkątach BSC , BSA , boki BS , CS pierwszego równe są bokom BS , AS drugiego trójkąta: a że kąt $BSC > BSA$, bo miarą pierwszego iest łuk BC z założenia większy od łuku BA , który iest miarą kąta drugiego; więc i bok BC przeciwny kątowi większemu iest większy od boku AB przeciwnego kątowi mniejszemu (27); czyli, cięciwa $BC > BA$.

Odwrotnie. Jeżeli cięciwa $BC > AB$, będzie łuk $BC > AB$: gdyż w dwóch trójkątach BCS , ABS , boki BS , CS pierwszego równe są bokom BS , AS

drugiego trójkąta; a że bok trzeci $BC > AB$ z założenia, więc i kąt $BSC > ASB$ (27), a tém samym i łuk $BC > AB$.

123. *Uwaga.* Twierdzenie to ma tylko miejsce wtenczas, gdy łuki są mniejsze od półokręgu; łuki zaś większe od półokręgu, mają przeciwną własność, to jest im większy jest łuk, tém jest mniejsza cięciwa, i odwrotnie: i tak łuk $AFCB > AFC$: a cięciwa pierwszego AB mniejsza jest od AC cięciwy drugiego łuku.

124. *Twierd.* *Dwie cięciwy równe są w równy od środka koła odległości: a z dwóch cięciw nierównych mniejsza jest w większy od środka koła odległości.*

Dowod. 1^o Niech będzie fig. 62. cięciwa $AB = CD$: ze środka S spuściwszy dwie prostopadłe SE , SG , 1wszą do AB , 2gą do CD , i poprowadziwszy promienie SA , SC , w dwóch trójkątach SAE , SCG prostokątnych, jest bok $SA = SC$, iako promienie; bok $AE = CG$, iako połowy dwóch cięciw równych (108); a zatem dwa te trójkąty przytłaną do siebie (52), a w szczególności $SE = SG$: a że SE , SG są odległością środka S od cięciw AB , CD (51); więc cięciwy te są w równy odległości od środka S .

2^o Niech będzie cięciwa $CF > AB$; łuk CF jest większy od łuku AB (122). Na łuku CF wzięwszy łuk $CD = AB$, i poprowadziwszy cięciwę CD , tudzież ze środka S spuściwszy dwie prostopadłe SH , SG , 1wszą do cięciwy CF , 2gą do cięciwy CD ; w trójkącie SHI prostokątnym przy H , jest $SI > SH$ (87), a tém bardziej $SI + IG > SH$; czyli $SG > SH$: a że $SG = SE$ podług 1szej części niniejszego twierdzenia; więc i $SE > SH$; to jest, odległość mniejszy cięciwy od środka koła

jest większa, niż odległość większey cięciwy od tegoż środka.

125. Twierd. *Kąt mający swój wierzchołek na okręgu koła, ma za miarę połowę łuku zawartego między ramionami.*

Dowód. 10d. Niech będzie kąt ACB, fig. 65. mający wierzchołek C na okręgu, i którego iedno ramie CB przechodzi przez środek koła S. Poprowadziwszy średnicę DE równoodległą od drugiego ramienia AC, będzie kąt ACB = DSB iako iednostronne odpowiadające względem siecznéy CB i dwóch równoodległych AC, DE. A że miarą kąta DSB jest łuk DB (119), więc i miarą kąta ACB jest łuk DB. Łuk DB = CE, iako miary kątów DSB, CSE równych; łuk CE = AD: gdyż są zawarte między cięciwami równoodległemi: więc i łuk DB = AD; to jest, łuk AB podzielony jest w punkcie D na dwie równe części; a tém samém łuk DB, będący miarą kąta ACB jest połową łuku AB zawartego między ramionami tegoż kąta.

2re Gdy środek koła S znajduje się między ramionami kąta ACF mającego wierzchołek C na okręgu, średnica BC, dzieli kąt ACF na dwa inne ACB i BCF, których spólném ramieniem jest średnica BC. A zatém podług przypadku 1szego miarą kąta ACB jest połowa łuku AB; miarą kąta BCF jest połowa łuku BF: więc miarą kątów ACB + BCF, jest połowa łuków AB + BF; czyli miarą kąta ACF jest połowa łuku AF zawartego między jego ramionami.

3cie Gdy środek koła S jest za ramionami kąta HCA mającego wierzchołek C na okręgu, kąt HCA = HCB — ACB. Miarą kąta HCB jest połowa łuku HB, podług przypadku 1szego. Miarą kąta ACB jest połowa łuku AB. Więc miarą ką-

ta $\text{HCB} - \text{ACB}$ iest $\frac{1}{2}\text{HB} - \frac{1}{2}\text{AB}$; czyli miarą kąta HCA iest $\frac{1}{2}\text{HB} - \frac{1}{2}\text{AB}$. A że łuk $\text{HB} - \text{AB} = \text{AH}$, a tém samém $\frac{1}{2}\text{HB} - \frac{1}{2}\text{AB} = \frac{1}{2}\text{AH}$; więc miarą kąta HCA iest $\frac{1}{2}\text{AH}$.

To samo twierdzenie może być dowiedzione sposobem następującym:

Poprowadziwszy promień SA fig. 64. w trójkącie ACS kąt zewnętrzny ASB , równy iest dwóm wewnętrznym ACS i SAC naprzeciwko leżącym (85). A że kąt $\text{SAC} = \text{ACS}$: gdyż trójkąt ACS iest równoramienny; więc kąt $\text{ASB} = 2\text{ACS}$; czyli kąt $\text{ASB} = 2\text{ACB}$: więc połowa kąta $\text{ASB} = \text{ACB}$. A tém samém i połowa miary kąta ASB , czyli połowa łuku AB iest miarą kąta ACB .

Tegoż samego dowodzenia użyć można w dwóch innych przypadkach, uważając, że kąt ACF iest równy summie dwóch kątów ACB , BCF mającym za wspólne ramie średnicę CB , kąt zaś HCA równy iest różnicy dwóch kątów HCB i ACB mających za wspólne ramie średnicę BC .

126. *Wnioski* 1. Kąt GCH zawarty między styczną i cięciwą, ma także za miarę połowę łuku CH zawartego między ramionami: gdyż kąt $\text{GCH} = \text{GCB} - \text{HCB}$. Miarą kąta GCB iako prostego (114), iest połowa półokręgu CHB ; miarą kąta HCB iest połowa łuku HAB (125). Więc miarą kąta GCH będzie połowa łuku CHB , mniej połową łuku HAB : że zaś łuk $\text{CHB} - \text{HAB} = \text{CH}$; a tém samém $\frac{1}{2}\text{CHB} - \frac{1}{2}\text{HAB} = \frac{1}{2}\text{CH}$; więc miarą kąta GCH będzie połowa łuku CH zawartego między ramionami.

Wnios. 2. Kąt HCM zawarty między cięciwą CH i przedłużeniem cięciwy CF , ma za miarę połowę summy łuków należących do tych dwóch cięciw, to iest, połowę łuku CH więcej połową

łuku CF: gdyż kąt HCM równy dwóm kątom prostym mniey kątem HCF, będzie miał za miarę półokręgu mniey połowę łuku HF; że zaś cały okrąg mniey łukiem HF równa się dwóm łukom CH i CF, a tém samém połowa okręgu mniey połowa łuku HF, równa się połowie dwóch łuków CH i CF; więc miarą kąta HCM będzie połowa łuków CH i CF. *Albo tak:* kąt HCM = HCG + GCM; czyli, kąt HCM = HCG + FCI: gdyż kąt FCI = GCM. A że miarą kąta HCG jest połowa łuku CH, a miarą kąta FCI jest połowa łuku CF podług wniosku poprzedzającego; więc też i kąta HCM będzie miarą połowa summy tychże łuków.

127. *Wnios. 5.* Kąty E, H, I, *fig. 65.* mające wierzchołki na okręgu, a ramionami swoimi obejmujące tenże sam łuk FCG, są sobie równe: gdyż wszystkich miarą jest połowa łuku FCG.

128. *Wnios. 4.* Kąt ACB mający wierzchołek na okręgu, a którego ramiona przechodzą przez końce średnicy AB, jest prosty: gdyż ma za miarę połowę półokręgu AEB: czyli czwartą część okręgu całego; co także można okazać sposobem następującym:

Poprowadziwszy promień SC, w dwóch trójkątach równoramiennych ACS, BCS, jest kąt SCA = CAS; kąt SCB = CBS: więc SCA + SCB = CAS + CBS: czyli, kąt ACB = CAS + CBS. To jest, w trójkącie ABC, kąt ACB równy jest summie dwóch innych kątów CAS i CBS; a tém samém kąt ACB jest połową summy wszystkich trzech kątów trójkąta ABC: a że wszystkie trzy kąty trójkąta ważą dwa kąty proste (84), więc kąt ACB waży połowę dwóch kątów prostych, czyli waży jeden kąt prosty.

Własność ta zwyczajnie tak się wyraża: *kąt w półkolu jest prosty.*

Uwaga. W dowodzeniu pierwszym sposobem poprzedzającego twierdzenia wyprowadziliśmy ważność kąta mającego wierzchołek na okręgu za pomocą prawdy wyżey okazaney, że dwa łuki zawarte między dwiema cięciwami równoodległemi są równe. Wzajemnie prawdę tę możnaby teraz okazać za pomocą twierdzenia poprzedzającego: gdyż *fig. 65.* jeżeli dwie cięciwy AB, FG, są od siebie równoodległe, poprowadziwszy cięciwę FB, kąty ABF, BFG mają za miarę połowy łuków AF i BG: a że kąty te są równe, iako naprzemian leżące wewnętrzne, więc i miary ich są równe; a tém samém łuk $AF = BG$.

129. Twierd. *Kąt ACB fig. 66. mający wierzchołek w kole między okręgiem i środkiem koła, ma za miarę połowę łuku AB zawartego między ramionami, więcęcy połowę łuku DE zawartego między przedłużeniami ramion.*

Dowod. Z punktu D poprowadziwszy cięciwę DF równoodległą od BC, będzie miarą kąta ADF połowa łuku AF (125). Łuk $AF = AB + BF$, czyli, łuk $AF = AB + DE$, gdyż łuk $DE = BF$ (116), a tém samém $\frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}DE$: więc miarą kąta ADF jest $\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}ED$. A że kąt ADF $= ACB$ (67), więc miarą kąta ACB jest połowa łuku AB więcęcy połowa łuku ED.

130. Twierd. *Kąt ACB fig. 67. mający wierzchołek za kołem, a ramionami swemi obeymujący dwa łuki AB, ED, ma za miarę połowę różnicy tychże łuków. to jest, ma za miarę połowę łuku AB, mniej połową łuku DE.*

Dowod. Z punktu D poprowadziwszy cięciwę DF równoodległą od BC, będzie miarą kąta

$ADF = \frac{1}{2} AF$. A że łuk $AF = AB - BF$, czyli łuk $AF = AB - DE$, gdyż łuk $DE = BF$; a tém samém $\frac{1}{2} AF = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} DE$; więc miara kąta $ADF = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} DE$: że zaś kąt $ADF = ACB$ (67), więc miara kąta $ACB = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} DE$.

Ostatnie trzy twierdzenia, mogą być także następującym sposobem dowiedzione:

Kąt ACB *fig.* 68. mający wierzchołek wewnątrz koła *fig.* 1, lub za kołem, *fig.* 2. lub na okręgu *fig.* 3; w 1szym przypadku ma za miarę połowę summy dwóch łuków AB , ab : w 2gim przypadku połowę różnicy dwóch łuków AB , ab : w 3cim przypadku połowę łuku AB .

Dowód. We wszystkich trzech figurach poprowadziwszy średnice Dd , Ee równoodległe pierwsze od ramion AC , drugie od ramion BC ; będzie we wszystkich trzech przypadkach kąt $DSE = dSe$, iako wierzchołkiem przeciwległe; kąt $ACB = DSE$ (70). Więc łuk DE będący miarą kąta DSE (119), będzie oraz miarą kąta ACB . Idzie więc tylko o wynalezienie ważności łuku DE we wszystkich trzech figurach.

W przypadku 1wszym, *fig.* 1.

Łuk $DE = AB - AD - BE$;

łuk $de = ab + ad + be$.

W tych dwóch równaniach dodawszy stroną odpowiadające sobie, będzie

$$DE + de = AB + ab - AD + ad - BE + be.$$

Ze zaś łuk $DE = de$, iako miary równych kątów DSE , dSe , łuk $AD = ad$, i łuk $BE = be$, iako zawarte między cięciwami równoodległemi; więc powyższe równanie zamieni się w następujące:

$2DE = AB + ab$. Podzieliwszy obie strony przez 2, będzie

$$DE = \frac{AB + ab}{2} . - . - . - . - A.$$

To jest, łuk DE, będący miarą kąta ACB mającego wierzchołek wewnątrz koła, równy jest połowie summy dwóch łuków AB, *ab*.

W przypadku 2gim, *fig. 2*.

$$\text{Łuk } DE = AB - AD - BE:$$

$$\text{Łuk } de = ad + be - ab. \text{ A zatem}$$

$$DE + de = AB + ad - AD + be - BE - ab; \text{ czyli}$$

$$2DE = AB - ab; \text{ a zatem}$$

$$DE = \frac{AB - ab}{2} . - . - . - . - B.$$

To jest, łuk DE będący miarą kąta ACB który ma wierzchołek za kołem, równy jest połowie różnicy łuków AB, *ab*.

W przypadku 3cim, *fig. 3*.

$$\text{Łuk } DE = AB - AD - BE; \text{ łuk } de = Cd + Ce: \text{ więc}$$

$$DE + de = AB + Cd - AD + Ce - BE; \text{ czyli}$$

$$2DE = AB: \text{ gdyż } Cd = AD, Ce = BE: \text{ więc}$$

$$DE = \frac{AB}{2}. \text{ To jest, łuk DE będący miarą kąta}$$

ACB, który ma wierzchołek na okręgu, równy jest połowie łuku AB.

Uwaga. Równania oznaczone głoskami A i B różnią się tylko znakiem ostatniego wyrazu, który jest w równaniu A dodayny, w równaniu B odjemny. Dwa więc te równania możnaby tak wy-

$$\text{razić: łuk } DE = \frac{AB \pm ab}{2}.$$

Ze zaś w przypadku 3cim nie masz łuku *ab*. czyli, co na iedno wychodzi, łuk $ab = 0$; więc w przypadku tym ostatni wyraz $\pm ab = 0$; będzie

$$\text{więc łuk } DE = \frac{AB}{2}.$$

131. Zagad. Z końca daney linii AC , fig. 65, wyprowadzić prostopadłą, nie przedłużając daney linii, iak wymaga sposób podany wyżej (53).

Rozw. Z punktu któregokolwiek S wziętego za daną linią nakręślić koło, któregooby okrag daną linią przecinał w punkcie A ; przez punkta A i S poprowadzić linią prostą AB , przecinającą się z okręgiem w punkcie B ; punkta B i C złączywszy linią prostą BC , linia ta będzie prostopadła do AC : gdyż kąt ACB iest prosty (128).

Zagad. 2. Z punktu A fig. 69. danego za kołem poprowadzić styczną koła.

Rozw. Środek danego koła S złączywszy z punktem A linią prostą SA , i podzieliwszy ją w punkcie C na dwie części równe, z punktu C iako ze środka, promieniem CS wykreślić koło, którego okrag z okręgiem koła danego, przecina się w punktach R , T . Punkt R lub T złączywszy linią prostą z punktem A , linia ta będzie styczną szukaną: gdyż poprowadziwszy promień ST , kąt STA iest prosty (128), a zatem linia AT iest prostopadła do promienia ST , a tém samém iest styczną danego koła (114).

152. Twierd. Okręgi dwóch kół przechodzące przez ieden punkt A , fig. 70. linii AS która łączy ich środki, mają tylko ten ieden punkt A spólny, w którym się stykają. i odwrotnie: gdy się okręgi dwóch kół stykają, środki ich i punkt zetknięcia się są na iednój linii.

Dowod. Środki tych kół mogą być albo z jednéj strony punktu zetknięcia się A , iak są S , s ; albo ieden z jednéj, drugi z drugiey strony tego punktu, iak są S , s . W 1wszym przypadku na okręgu koła większego, wzięwszy iakikolwiek punkt

C, i z punktu tego do środków S, s dwóch kół poprowadziwszy linie proste CS, Cs; w trójkącie CSs, iest.

$Ss + Cs > CS$ (22), czyli $Ss + Cs > AS$; czyli $Ss + Cs > Ss + As$. Odiąwszy po obu stronach Ss, zostanie $Cs > As$. To iest, linia Cs większa iest od As, promienia koła mniejszego, a tém samém punkt C musi być za okręgiem tego koła.

W przypadku 2gim, kiedy środki S, s są po obu stronach punktu A, na okręgu koła wykreślonego promieniem AS, wzięwszy którykolwiek punkt C, i poprowadziwszy linie proste CS, Cs; w trójkącie CSs, iest $Cs + CS > Ss$; czyli $Cs + AS > As + AS$: a zatém $Cs > As$. To iest: linia Cs dłuższa iest od promienia As; a tém samém punkt C musi być za okręgiem koła wykreślonego promieniem As.

Odwrotnie. Jeżeli okręgi dwóch kół stykaia się z sobą w punkcie A, środki ich i punkt zetknięcia się, są na iednéj linii: gdyż z punktu zetknięcia się A wyprowadziwszy styczną AT, linia ta prostopadła będzie do promieni AS, As, As (114) i wzajemnie promienie te będą w punkcie A prostopadłe do linii AT. A że z punktu A wziętego na linii AT nie można więcéj prostopadłych do niéy wyprowadzić, tylko iedną (55); więc wszystkie trzy promienie, a tém samém i środki kół S, s, s znajdować się muszą na iednéjże linii, przez punkt A przechodzącéj.

155. *Uwaga.* W przypadku 1szym iest $Ss = AS - As$; czyli $Ss + As = AS$. W przypadku 2gim, $Ss = AS + As$. Gdyby w przypadku 1szym, $Ss > AS - As$, a tém samém $Ss + As < AS$; na ten czas okręgi dwóch kół, nie mogłyby się z sobą zetknąć, lecz okrąg koła mniejszego, byłby zawarty w okręgu koła większego. Gdyby zaś $Ss >$

$AS - As$, a tém samym $Ss + As > AS$; na ten czas okręgi dwóch kół, przecięłyby się z sobą w punktach C, c , iak iest na *figurze 71*.

W przypadku 2gim, gdyby $Ss > AS + As$, rzeczą iest widoczną, iż okręgi dwóch kół nie mogłyby się z sobą zetknąć. Lecz gdyby była linia $Ss < AS + As$ iak iest na *fig. 71*; na ten czas okręgi dwóch kół, przecięłyby się z sobą w punktach F, f .

To iest, okręgi dwóch kół nie mogą się z sobą przeciąć; *1ód*, gdy odległość ich środków powiększona iednym promieniem, albo się równa promieniowi drugiemu, albo iest od niego mniejsza; *2re*, gdy odległość środków iest albo równa summie dwóch promieni, albo od niéy większa. Gdy zaś odległość środków powiększona promieniem mniejszym, większa iest od promienia drugiego; albo gdy odległość środków, mniejsza iest od summy dwóch promieni; na ten czas okręgi dwóch kół mogą się z sobą przeciąć, byleby w drugim przypadku promień ieden nie był większy od summy promienia drugiego i odległości środków.

Widzieliśmy wyżej, że kréśląc tróykąt, kiedy są dane trzy linie proste mające być iego bokami, iedna z nich bierze się za podstawę, dwa iéy końce za środki, a dwie inne linie dane za promienie dwóch łuków, których przecięcie się oznaczy wierzchołek szukanego tróykąta. Lecz przecięcie się tych dwóch łuków, w tych tylko przypadkach nastąpić może, któreśmy dopiéro wymienili, a które wychodzą na to samo, cośmy iuż wyżej powiedzieli (45), że trzy dane linie na boki tróykąta, takie być powinny, aby każda

z nich mniejsza była od summy dwóch pozostałych.

154. Zagad. *Wykreślić koło, któregooby okrąg zetknął się z daną linią AT w punkcie A fig. 70. i przeszedł przez punkt B , dany za tą linią AT .*

Rozw. Z punktu A wyprowadziwszy AE prostopadłą do AT , punkt A z punktem B łączę linią prostą AB , którą w punkcie D podzieliwszy na dwie równe części, i z punktu D wyprowadziwszy prostopadłą do AB przecinaiającą się w punkcie s z linią AF , punkt s będzie środkiem, a linia As promieniem koła szukanego. Jakoż środek tego koła powinien się znajdować tak na linii AE , która jest w punkcie A prostopadła do styczney AT (152), iako też na linii Ds (109), która jest prostopadłą ze środka cięciwy AB wyprowadzona: więc środek ten znajdować się będzie na spólném tych dwóch linii przecięciu, którem jest punkt s .

155. Zagad: *Maiąc dane koło AFH , fig. 70. i punkt za niem B , wykreślić drugie koło, któregooby okrąg przeszedł przez punkt B , i zetknął się z okręgiem koła danego w daném punkcie A .*

Rozw. Punkt A z punktem B złączywszy linią prostą AB , i ze środka D linii AB wyprowadziwszy Ds prostopadłą do AB , przez środek s danego koła i przez punkt A prowadzę linią prostą sA , aż do przecięcia się z linią Ds w punkcie s ; punkt s będzie środkiem, a linia As promieniem koła szukanego: gdyż tak prostopadła Ds ze środka cięciwy AB wyprowadzona, iako też i linia As środek danego koła z punktem A łącząca powinny przechodzić przez środek koła

szukanego: środek zatem ten należąc do obudwu linii, znajdować się musi na spólném ich przecięciu, którem iest punkt ϵ .

136. Zagad. *Na linii daney AB fig. 72. wykreślić odcinek koła w którymby się zmieścił kąt równy danemu.*

Rozw. Przez punkt A , linii AB prowadzę linią AD , którąby z linią AB czyniła kąt DAB równy danemu. Kreślę potem koło, którego-
by okrąg przeszedł przez punkt B i zetknął się z linią AD w punkcie A (154) odcinek ABE iest szukany: gdyż kąt BAD zawarty między cięciwą AB i styczną AD mający za miarę połowę łuku AFB (126), równy iest kątowi ACB umieszczonemu w odcinku koła ABE i mającemu za miarę połowę tegoż łuku AFB (125).

R O Z D Z I A Ł VI.

o Powierzchni wielokątów.

157. W trójkacie iakimkolwiek ACB fig. 75. z wierzchoła kąta C przeciwnego podstawie AB , spuściwszy CD prostopadłą do AB , prostopadła ta zowie się wysokością tego trójkąta.

Prostopadła ta CD , może paść albo wewnątrz trójkąta, iak iest na fig. 1; albo zewnątrz na przedłużenie podstawy AB , iak iest na fig. 2; albo też na sam koniec A podstawy AB , iak iest na fig. 3; a w tym przypadku bok CA iest wysokością trójkąta.

W Równoległoboku $ABCD$ fig. 74. wzięwszy którykolwiek bok, np. AB za podstawę, i z któregokolwiek punktu wziętego na boku CD przeciwnym podstawie spuściwszy prostopadłą FE do podstawy AB , prostopadła ta nazywa się wysokością równoległoboku.

Ponieważ kwadrat i prostokąt ma wszystkie kąty proste (81) więc wzięwszy którykolwiek ich bok za podstawę, bok drugi przyległy podstawie będzie wysokością kwadratu lub prostokąta. A że kwadrat ma wszystkie boki równe; więc wysokość kwadratu równa jest jego podstawie.

158. Twierd. *Dwa iakiekolwiek równoległoboki mające równe podstawy i wysokości, mają równe powierzchnie.*

Dowód. Wystawmy sobie, że równoległobok ABEF *fig.* 75. jest położony na równoległoboku ABCD, tak aby ich podstawy do siebie przystały: ponieważ te dwa równoległoboki mają równe wysokości, więc bok EF równoodległy od podstawy AB drugiego, padnie na bok CD równoodległy od podstawy AB pierwszego równoległoboku (74); inne zaś dwa boki AF, BE, wezmą położenie albo takie iak jest na *fig.* 1; albo iak jest na *fig.* 2; albo też iak jest na *fig.* 3.

W przypadku 1: w dwóch trójkątach ADF, BCF, bok $AD = BC$, bok $AF = BE$; iako boki przeciwne w równoległobokach (79). Nadto kąt $DAF = CBE$, gdyż ramiona ich są równoodległe i rozchodzą się w jedną stronę: więc dwa te trójkąty przystaną do siebie, a tém samym powierzchnie ich są równe; czyli trójkąt $BCE = ADF$: więc $ABED - BCE = ABED - ADF$; czyli $ABCD = ABEF$.

To samo jest dowodzenie w drugich dwóch przypadkach.

159. Twierd. *Trójkąt iakikolwiek ABC fig. 76. jest połową równoległoboku AD mającego tę samą podstawę i wysokość.*

Dowód. Z punktu B wyprowadziwszy BF równoległą od AC, aż do przecięcia się w pun-

kie F z przedłużonym bokiem ED, czworokąt ABFC jest równoległobokiem; a zatem przekątna BC dzieli go na dwa trójkąty ABC, BCF mogące do siebie przystać, a tém samém równe co do powierzchni (79); więc ieden z nich *np.* trójkąt ABC, jest połową powierzchni obudwu, czyli jest połową powierzchni równoległoboku AF: a że równoległobok AF równy jest co do powierzchni równoległobokowi AD (158), więc trójkąt ACB jest połową powierzchni równoległoboku AD.

140. *Wniosek.* Stąd wypada, że dwa trójkąty mające równe wysokości i podstawy są równe co do powierzchni; gdyż każdy z nich jest połową równoległoboku mającego też samę wysokość i podstawę co i trójkąty.

141. *Zagad.* *Dany wielokąt zamienić na inny równy danemu co do powierzchni, i któryby miał boków mniej iednym, niż wielokąt dany.*

Rozwiqz. Niechby wielokąt dany był pięciokątem AD *fig.* 77. który zamienić trzeba na czworokąt równy mu w powierzchni. Przez wierzchołki dwóch kątów E i C poprowadziwszy linią EC, w trójkącie EDC przez wierzchołek kąta D poprowadźmy linią DF równoodległą od EC, aż do spotkania się w punkcie F z przedłużonym pięciokąta bokiem AE. Poprowadziwszy linią CF, czworokąt ABCF będzie szukany: gdyż trójkąty ECD, ECF podług poprzedzającego wniosku są równe co do powierzchni, iako mające tę samę podstawę i wysokość (74); a zatem

$$ABCE + ECD = ABCE + ECF; \text{ czyli } ABCDE = ABCF.$$

Gdyby w pięciokącie danym $ABCDE$ fig. 78. kąt D był wklęsły, wykreślenie byłoby zupełnie to samo co wyżej; lecz w dowodzeniu zachodzi nieiaka odmiana; okazawszy bowiem że trójkąt $ECD = ECF$, będzie.

$ABCE - ECD = ABCE - ECF$; czyli
 $ABCDE = ABCF$.

142. *Wniosek.* Tymże samym sposobem postępując, można czworokąt $ABCF$ zamienić na trójkąt równy mu co do powierzchni; i w ogólności każdy wielokąt zamienionym być może na trójkąt równy mu co do powierzchni. I tak sześciokąt zamieniwszy naprzód sposobem wyżej podanym na pięciokąt, zamienilibyśmy potem pięciokąt na czworokąt, a czworokąt na trójkąt.

143. *Twierd.* Dwa prostokąty AC , EG , fig. 79. których wysokości są równe, mają się do siebie iak podstawy; to iest, prostokąt ieden tyle razy iest większy lub mniejszy od drugiego, ile razy podstawa pierwszego iest większa lub mniejsza od podstawy drugiego; czyli

$$ABCD : EFGH = AB : EF.$$

Dowód. Podstawy AB , EF , mogą być spółmierne lub niespółmierne. W 1szym przypadku daymy że AB zamyka takich części 8, iakich EF zamyka 4. Podzieliwszy AB na 8, EF na 4 części równe (57), i z punktów podziału wyprowadzwszy prostopadłe do tych podstaw, aż do przecięcia się z bokami DC , HG przeciwnymi podstawom AB , EF ; prostopadłe te podziela prostokąt AC na 8, prostokąt EG na 4 prostokąty równe między sobą (158), gdyż wszystkie mają równe podstawy i wysokości. Będzie więc $ABCD : EFGH = 8 : 4$. A że $AB : EF = 8 : 4$; więc $ABCD : EFGH = AB : EF$.

W 2gim przypadku, kiedy podstawy AB , EF *fig. 80.* są niespółmierne, będzie także $ABCD: EFGH = AB: EF$ A.

Jakoż gdyby proporcya ta była fałszywa, ostatni iéy wyraz EF , byłby albo zamały, albo za wielki do uczynienia proporcyi, trzy bowiem pierwsze wyrazy mogą być iakiekolwiek. Daymyż nato, iezeli być może, że ta proporcya iest prawdziwa:

$ABCD: EFGH = AB: Es$, w którój $Es > EF$.

Podzielimy AB na części równych 2, 4. 8. i t. d., aż póki nie dojdziemy do części mniejszych od linii Fs . Przenieśmy potem części te mniejsze od linii Fs na linią EF zaczynając od punktu E ku F . Ponieważ linie AB , EF są niespółmierne, więc punkt podziału nie może przypaść na punkt F , lecz padnie albo z prawej strony *np.* w punkcie c , albo z lewej strony, *np.* w punkcie e . Z punktu c wyprowadziwszy *co* prostopadłą do Es , aż do przecięcia się z przedłużonym bokiem GH w punkcie o , prostokąty $EcoH$, $ABCD$ mają podstawy Ec , AB spółmierne z wykreślenia, będzie więc podług 1szej części niniejszego twierdzenia.

$EcoH: ABCD = Ec: AB$. A że podług przypuszczenia

$ABCD: EFGH = AB: Es$, więc rozmnożywszy w tych dwóch proporcjach wyrazy sobie odpowiadające, będzie

$EcoH \times ABCD: ABCD \times EFGH = Ec \times AB: AB \times Es$.

Podzieliwszy dwa pierwsze wyrazy przez $ABCD$, dwa drugie przez AB , będzie $EcoH: EFGH = Ec: Es$. W téj proporcji 1wszy poprzednik większy iest od swego następnika, 2gi zaś poprzednik mniejszy iest od swego następnika podług wykreślenia: proporcya więc ta iest

fałszywa. Proporcya ta powstała ze złożenia dwóch proporcyy poprzedzających, z których pierwsza iest wypadkiem iwszëy części ninieyszego twierdzenia: druga więc, w którëy ostatni wyraz Es wzięliśmy więksy od EF, musi być fałszywa. A zatém w proporcyi A ostatni wyraz EF nie może być zamały: obaczmy czy nie iest zawieli. Daymy że ta proporcya iest prawdziwa:

$ABCD: EFGH = AB: E\acute{s}$, w którëy $E\acute{s} < EF$.

Podzielimy AB na takie części równe, aby przeniosłszy ie na EF zaczynając od E ku F, ieden punkt podziału padł między $\acute{s}$ i F, np. w punkcie $\acute{e}$. Zpunktu $\acute{e}$ wyprowadziwszy $\acute{e}\acute{o}$ prostopadłą do EF aż do przecięcia się z bokiem HG w punkcie $\acute{o}$; prostokąty $E\acute{e}\acute{o}H$, ABCD mają podstawy spółmierne z wykręślenia: będzie więc

$E\acute{e}\acute{o}H: ABCD = E\acute{e}: AB$; a że podług przypuszczenia

$ABCD: FFGH = AB: E\acute{s}$; będzie wiec

$E\acute{e}\acute{o}H \times ABCD: ABCD \times EFGH = E\acute{e} \times AB: AB \times E\acute{s}$. Więc

$E\acute{o}\acute{e}H: FFGH = E\acute{e}: E\acute{s}$.

W téy proporcyi piérwszy poprzednik mniejszy iest od swego następnika, drugi zaś poprzednik większy iest od swego następnika z wykręślenia. Proporcya zatém ta iest fałszywa; a więc i proporcya ią poprzedzająca, w którëy ostatni wyraz $E\acute{s}$ wzięliśmy mniejszy od EF, musi być fałszywa. W proporcyi zatém oznaczonëy głoską A wyraz EF nie może być zawieli.

Kiedy więc wyraz ten EF nie iest ani zamały, ani zawieli do utworzenia proporcyi A; proporcya zatem ta iest prawdziwa, to iest, *dwa prostokąty z równemi wysokościami, mają się iak podstawy, choćby podstawy były niespółmierne.*

144. Tymże samym sposobem dowieść można, że dwa prostokąty, których podstawy są równe, mają się iak wysokości. Jakoż wzięwszy wysokości ich za podstawy, a podstawy za wysokości, twierdzenie to niczem nie będzie się różniło od poprzedzającego..

145. Twierd. Dwa iakiekolwiek prostokąty, $AC: EG$ fig. 81 mają się iak iloczynny ich podstaw, przez wysokości: to iest, będzie $ABCD: EFGH = AB \times BC: EF \times FG$.

Dowód. Na wysokości FG prostokota EG wzięwszy $FI = BC$, i poprowadziwszy IK równo-odległą od EF ; dwa prostokąty AC , EI , mające równe wysokości, są do siebie iak podstawy; podobnież dwa prostokąty EI , EG , mające równe podstawy, są do siebie iak wysokości, to iest.

$$ABCD: EFIK = AB: EF.$$

$$EFIK: EFGH = FI: FG.$$

W tych dwóch proporcjach rozmnożywszy wyrazy sobie odpowiadające, cztery iloczynny będą w proporcyi, to iest

$$ABCD \times EFIK: EFIK \times EFGH = AB \times FI: EF \times FG.$$

Podzieliwszy dwa pierwsze wyrazy przez $EFIK$, i w 3cim wyrazie zamiast FI położywszy BC , będzie $ABCD: EFGH = AB \times BC: EF \times FG$.

146. Wnioski. 1. Niech będzie prostokąt AC i kwadrat ac fig. 82. w których bok AB ma 8 stop, bok BC ma 4 stopy, bok ab ma iedną stopę i bok bc 1 stopę. Podług twierdzenia poprzedzającego iest $ABCD: abcd = AB \times BC: ab \times bc$. Zamiast boków położywszy liczby wyrażające ich ważność w stopach, będzie $ABCD: abcd = 32: 1$,

W téy proporeyi ponieważ poprzednik 2go stosunku iest 52 razy większy od swego następnika; więc i poprzednik 1go stosunku iest 52 razy większy od swego następnika; to iest, powierzchnia prostokąta ABCD zamyka w sobie 52 kwadratów równych kwadratowi ac : i gdyby powierzchnia kwadratu ac wzięta była za iedność do mierzenia powierzchni prostokątów, mając dany iakikolwiek prostokąt, łatwoby znaleźć można, ile razy powierzchnia iego zamyka w sobie powierzchnią kwadratu ac wziętego za iedność. Na tenkoniec dosyćby było zmierzyć danego prostokąta podstawę AB i wysokość BC w stopach mierniczych, i rozmnożyć liczbę stóp podstawy, przez liczbę stóp wysokości: iloczyn okaże ile razy powierzchnia danego prostokąta zamyka w sobie powierzchnią kwadratu ac wziętego za iedność; czyli, co na iedno wychodzi, ile powierzchnia danego prostokąta zamyka w sobie stóp kwadratowych: kwadrat bowiem którego bok ma stopę mierniczą, zowie się stopą kwadratową.

Gdyby kwadrat wzięty za iedność do mierzenia powierzchni prostokątów, był łokciem, prętem lub sznurem kwadratowym; podstawę i wysokość danego prostokąta zmierzylibyśmy przez łokcie, pręty lub sznury miernicze; a w ten czas iloczyn podstawy przez wysokość okazałby, ile powierzchnia danego prostokąta zamyka w sobie łokci, prętów lub sznurów kwadratowych. A stąd wypada, że *powierzchnia prostokąta równa iest iloczynowi iego podstawy przez wysokość.*

Prawdę te naocznie okazać można sposobem następującym: Niech będzie prostokąt AC którego powierzchnią zmierzyć mamy. Daymy że podstawa AB zamyka w sobie bok ab kwadratu $abcd$

wziętego za iedność 8 razy; wysokość zaś BC zamyka w sobie tenże bok ab 4 razy. Podzieliwszy AB na 8 części równych, BC na 4 części równe, i przez punkta podziału poprowadziwszy linie równoodległe od BC i AB , powierzchnia prostokąta AC podzieloną zostanie przez te linie równoodległe na 4ry rzędy kwadratów równych kwadratowi ac , a każdy rząd zamyka 8 takich kwadratów: liczba zatem wszystkich kwadratów w powierzchni prostokąta AC zawartych iest 4 razy 8, czyli 32.

Gdyby wysokość BC zamykała w sobie 5, 10, 15 i t. d. razy bok ab kwadratu $abcd$; powierzchnia prostokąta AC byłaby podzielona na 5, 10, 15 i t. d. rzędów, z których każdy zamykałby 8 kwadratów równych kwadratowi ac ; a tém samém powierzchnia ta zamykałaby 5, 10, 15 i t. d. razy 8 takich kwadratów, iak iest ac ; to iest, powierzchnia byłaby równa iloczynowi podstawy przez wysokość.

147. *Wniosek.* 2. Ponieważ w kwadracie wysokość równa iest podstawie, a zatem dla znalezienia powierzchni kwadratu dosyć iest zmierzyć iego podstawę, i znalezioną liczbę stóp, łokci, lub prętów i t. d. rozmnożyć przez siebie samę, czyli podnieść liczbę tę do drugiego stopnia.

148. *Wniosek.* 3. Powierzchnia równoległoboku iakiegokolwiek równa iest także iloczynowi iego podstawy przez wysokość: gdyż równoległobok równy iest w powierzchni prostokątowi mającemu tę samą podstawę i wysokość (158).

149. *Wniosek.* 4. A zatem równoległoboki mające równe wysokości, są do siebie iak podstawy: gdyż nazwawszy ieden równoległobok R , drugi r , podstawę pierwszego P , wysokość W , podstawę

drugiego p , wysokość W ; będzie powierzchnia pierwszego $P \times W$, powierzchnia drugiego $p \times W$: a zatem będzie R : $r = P \times W : p \times W$. W téj proporcyi dwa wyrazy drugiego stosunku podzieliwszy przez W , będzie R : $r = P : p$.

Tymże samym sposobem okazać można, że dwa równoległoboki mające równe podstawy, są do siebie iak wysokości; mające różne podstawy i wysokości, są do siebie iak iloczynyny podstaw przez wysokości.

150. *Wniosek*. 5. Ponieważ trójkąt iest połową równoległoboku mającego tę samą podstawę i wysokość (159); więc powierzchnia trójkąta równa iest połowie iloczynu iego podstawy przez wysokość; albo, co na iedno wychodzi, równa iloczynowi iego podstawy przez połowę wysokości, albo też równa iloczynowi iego wysokości, przez połowę podstawy.

151. *Wniosek*. 6. A zatem trójkąty mające równe wysokości są do siebie iak podstawy: gdyż oznaczywszy ieden trójkąt głóską T , drugi t , podstawę pierwszego P , wysokość W , podstawę drugiego p , wysokość W : będzie powierzchnia 1go $P \times \frac{1}{2} W$, powierzchnia 2go $p \times \frac{1}{2} W$: a zatem T : $t = P \times \frac{1}{2} W : p \times \frac{1}{2} W$. Podzieliwszy dwa drugie wyrazy przez $\frac{1}{2} W$, będzie T : $t = P : p$.

Tymże sposobem okazać można, że trójkąty mające równe podstawy są do siebie iak wysokości; mające różne podstawy i wysokości, są do siebie iak iloczynyny podstaw przez wysokości.

152. *Wniosek*. 7. Chcąc znaleźć powierzchnią iakiegokolwiek wielokąta, trzeba go na-przód podzielić przekątnemi na trójkąty (95), potem wyrachować powierzchnią każdego trójkąta podług wniosku 5: summa powierzchni wszystkich

kich trójkątów będzie powierzchnią danego wielokąta.

153. *Twierd. Powierzchnia czworoboku ABCD, fig. 83. w którym dwa tylko boki AB, CD są równoodległe, równa jest iloczynowi jego wysokości EF, przez połowę summy dwóch boków równoodległych.*

Dowod. Poprowadziwszy przekątną AC, powierzchnia tego czworoboku podzieloną będzie na dwa trójkąty ACB, ACD, w których boki AB i CD wzięwszy za podstawy, wysokość pierwszego będzie prostopadła z punktu C spuszczone na AB, wysokość drugiego będzie prostopadła z punktu A spuszczone na CD. Dwie te prostopadłe są sobie równe (74), i równe wysokości czworoboku ABCD: będzie zatem powierzchnia trójkąta ACB $= EF \times \frac{1}{2} AB$, powierzchnia trójkąta ACD $= EF \times \frac{1}{2} CD$ (150): więc

$$ACB + ACD = EF \frac{1}{2} \times AB + EF \times \frac{1}{2} CD: \text{czyli}$$

$$ABCD = EF \left(\frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} CD \right); \text{czyli}$$

$$ABCD = EF \left(\frac{AB + CD}{2} \right).$$

154. *Twierd. W czworoboku ABCD ieden z boków nie równoodległych, np. bok CB podzieliwszy w punkcie M na dwie części równe, i z punktu M poprowadziwszy MP równoległą od AB; będzie połowa summy dwóch boków równoodległych AB i CD równa linii MP.*

Dowod. Przez punkt M poprowadziwszy linią GH równoodległą od AD, aż do przecięcia się w punkcie G z przedłużonym bokiem CD; w dwóch trójkątach CGM, BHM, bok CM = BM z wykreślenia; kąty przy M równe iako wierzchołkiem przeciwległe, kąt MCG = MBH (67), więc dwa te trójkąty przystaną do siebie podług

twierdzenia 2go o przystawianiu trójkątów, a w szczególności $CG = BH$. Ze zaś linie AH , PM , DG , są między sobą równe (72) więc $2 PM = AH + DG$. W tém równaniu z drugiey strony dodawszy BH , a odiawszy CG , przez co się równanie nie odmieni, gdyż dwie te linie są sobie równe z dowiedzenia, będzie.

$2 PM = AH + BH + DG - CG$; czyli, $2 PM = AB + DC$; a zatem

$$PM = \frac{AB + CD}{2}$$

155. *Wniosek* 1. A zatem powierzchnia czworoboku $ABCD$ równa jest wysokości jego EF rozmnożonéy przez linią PM ,

Wniosek. 2. Można więc powierzchnią wielokąta iakiegokolwiek AD fig. 84. wynaleźć także sposobem następującym: przez wierzchołki kątów E , C , F poprowadziwszy linie EI , CH , GF równoodległe od AB , powierzchnia wielokąta AD podzieloną będzie na czworoboki AG , FC , HI , i na trójkąt EDI . Znaląwszy więc powierzchnią tych czworoboków którymkolwiek z dwóch sposobów podanych wyżej, i dodawszy ie do powierzchni trójkąta EDI , summa ta równa będzie powierzchni danego wielokąta.

156. Zagad. *Dany trójkąt zamienić na prostokąt lub iakikolwiek równoległobok równy trójkątowi co do powierzchni.*

Rozwiqz. Wykryślmy prostokąt lub równoległobok, dając mu podstawę równą podstawie danego trójkąta, a wysokość równą połowie wysokości tegoż trójkąta; albo też dając mu podstawę równą połowie podstawy danego trójkąta, a wysokość równą wysokości tegoż trójkąta: prostokąt ten lub równoległobok będzie szukany (139).

157. Zagad. *Dany prostokąt AC fig. 85. lub równoległobok iakikolwiek zamienić na prostokąt lub równoległobok inny, równy danemu co do powierzchni, któryby miał za podstawę linią daną BG.*

Rozw. Podstawę AB danego prostokąta lub równoległoboku przedłużmy do G tak aby przedłużenie to było równe linii daney BG; z punktu G poprowadźmy GH równoodległą od BC, aż do przecięcia się z przedłużonym bokiem AD w punkcie H. Poprowadziwszy przekątną BH, i przedłużymy ją aż do zeyścia się z przedłużonym bokiem AD w punkcie I, z punktu I poprowadźmy FI równoległą od AG, która z przedłużonymi bokami CB, HG spotyka się w punktach E, F: równoległobok BF jest szukany.

Gdyż równoległobok DF przez przekątnią HI podzielony jest na dwa trójkąty IDH, IFH, równe (79). Trójkąt IDH składa się z równoległoboku AC, z trójkątem BCH, i trójkątem ABI; trójkąt IFH składa się z równoległoboku BF, z trójkątem BGH, i z trójkątem IBE: a że trójkąt BCH = BGH, i trójkąt ABI = IBE, więc i równoległobok AC = BF.

Albo tak: trójkąt CBH = BGH; trójkąt ABI = EBI; więc
 $CBH + ABI = BGH + EBI$. Trójkąt IDH = FHI. od stron tego równania odiawszy strony równania poprzedzającego, zostanie

$IDH - CBH - ABI = FHI - EBI$; czyli $AC = BF$.

Uwaga. Tym samym sposobem postąpić należy, chcąc dany kwadrat zamienić na prostokąt równy kwadratowi co do powierzchni, i któryby podstawę miał równą linii daney.

158. Zagad. *Mając dane dwa prostąkaty lub iakiekolwiek równoległoboki, wykreślić ści któregoby powierzchnia równa była summie lub różnicy powierzchni dwóch równoległoboków danych.*

Rozwiąz. Dwa dane równoległoboki mają albo równe podstawy a wysokości różne; albo równe wysokości, a różne podstawy; albo i podstawy i wysokości różne.

W przypadku 1szym nazwiemy ieden równoległobok R , drugi r , podstawę 1go P , wysokość W , podstawę 2go P' , wysokość w .

Ponieważ powierzchnia równoległoboku, równa jest iloczynowi jego podstawy przez wysokość (148), będzie więc $R = P \times W$; $r = P' \times w$. Strony dwóch tych równań, naprzód dodawszy, potem odiawszy od siebie, będą dwa następujące równania:

$$R + r = P \times W + P' \times w; R - r = P \times W - P' \times w. \text{ Czyli}$$

$R + r = P (W + w); R - r = P (W - w)$. To jest, snmma powierzchni obudwu równoległoboków równa jest iloczynowi podstawy iednego z nich przez summę wysokości obudwóch: różnica powierzchni obudwu równoległoboków równa jest iloczynowi podstawy iednego z nich przez różnicę wysokości obudwu.

A zatem chcąc wykreślić równoległobok równy co do powierzchni dwóm danym; trzeba mu dać za podstawę linią równą podstawie iednego z nich, a za wysokość linią równą wysokości obudwu: chcąc zaś wykreślić równoległobok, któregoby powierzchnia równa była różnicy powierzchni dwóch danych; trzeba mu dać za podstawę

linią równą podstawie iednego z danych, a za wysokość linią równą różnicy wysokości obudwu.

W przypadku 2gim, kiedy wysokości dwóch danych równoległoboków są równe, a podstawy różne; nazwawszy ieden równoległobok R , drugi r , podstawę iednego P , drugiego p , a wysokości obudwu W , i odbywszy działanie iak wyżej, będzie

$$R + r = W (P + p). \quad R - r = W (P - p); \text{ i t. d.}$$

W przypadku 3, kiedy dwóch danych równoległoboków i podstawy i wysokości są różne, zamieniwszy ieden z nich na inny równy mu co do powierzchni, któryby miał za podstawę linią równą podstawie lub wysokości drugiego równoległoboku danego; będą dwa równoległoboki mające równe podstawy, iak w przypadku 1, albo równe wysokości iak w przypadku 2.

Tymże sposobem postąpić należy, chcąc znaleźć prostokąt równy co do powierzchni summie, lub różnicy dwóch danych kwadratów, lub iednego kwadratu drugiego prostokąta. Lecz aby znaleźć kwadrat równy summie albo różnicy dwóch danych kwadratów, sposoby dotąd wyłożone nie są dostateczne: ułatwi to iedno z następujących twierdzeń.

159. Twierdz. Kwadrat wykreślony na linii AB , fig. 86. która iest summą dwóch linii AC i BC , składa się z kwadratu wykreślonego na linii AC , z kwadratu wykreślonego na linii BC , i z dwóch prostokątów, których bokami przyległemi są linie AC i BC ; czyli AB^2 , albo $(AC + BC)^2 = AC^2 + BC^2 + 2 AC \times BC$.

Dowód. Na linii AB wykreśliwszy kwadrat $ABDE$, i wzięwszy $AH = AC$, przez punkt H poprowadźmy HF równoległą od AB , przez punkt

C poprowadźmy CI równoległą od BD. Tym sposobem kwadrat AD podzielony został na części: pierwsza AG jest kwadratem wykreślonym na linii AC: gdyż wzięliśmy $AH = AC$; druga FI jest kwadratem wykreślonym na linii BC; ponieważ $AB = AE$, $AC = AH$; więc $AB - AC = AE - AH$; czyli $CB = EH = IG = GF$.

Nakoniec trzecia i czwarta część są dwa prostokąty HI, CF, których boki HG i CG równe są linii AC; boki zaś HE i GF równe są linii BC.

Albo tak: Linią AC oznaczywszy głoską a , a linią CB głoską b , będzie linia $AB = a + b$. Więc $AB^2 = (a + b)(a + b)$; czyli $AB^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. To jest, kwadrat z linii AB równy jest summie kwadratów z linii AC i BC, więcéy podwójnym iloczynem z ważności linii AC, przez ważność linii BC; czyli co na iedno wychodzi, więcéy dwoma prostokątami z linii AC i BC.

160. Twierd. Kwadrat wykreślony na linii AB fig. 87. która jest różnicą dwóch linii AC, i BC, składa się z kwadratu linii AC, z kwadratu linii BC, mniéy dwoma prostokątami z linii AC i BC; czyli

$$AB^2 \text{ albo } (AC - BC)^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC.$$

Dowód. Na linii AC wykreśliwszy kwadrat AD, i wzięwszy $AH = AB$, z punktu H poprowadźmy HF równoodległą od AC, i z punktu B poprowadźmy BI równoodległą od CD nakoniec na linii HE wykreślmy kwadrat LE.

Łatwo jest okazać, że LE jest kwadratem z linii BC; AG jest kwadratem z linii AB; że LJ jest prostokątem z linii AC i BC; CI jest prostokątem z linii AC i BC. Od całej figury ACD KLH, czyli od kwadratu z linii AC i od kwadratu z linii BC odiawszy dwa prostokąty LI, CI

czyli dwa prostokąty z AC i BC, zostanie AG kwadrat z linii AB.

Oznaczywszy linie AC, BC głoskami a i b , i odbywszy działanie iak w twierdzeniu poprzedzającym, wypadnie $AB^2 = (a-b)(a-b)$; czyli $AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

161. Twierd. *Prostokąt mający za podstawę summe dwóch linii AB, CB, fig. 88. a ich różnicę za wysokość, równy jest różnicy kwadratów z tychże linii: czyli*

$$(AB+BC)(AB-BC)=AB^2-BC^2.$$

Dowod. Wykreśliwszy na liniach AB, AC kwadraty AD, AI, przedłużmy AB do K tak, aby było $BK=BC$, i dopełniemy prostokąta AL: prostokąt ten ma za podstawę linią AK równą summie dwóch danych linii AB i BC, a za wysokość linią AE równą różnicy tychże linii: gdyż $AE=AF-FE=AB-BC$. A zatem prostokąt $AL=(AB+BC)(AB-BC)$. Ten sam prostokąt $AL=AH+BL$; a że $BL=FI$, co jest łatwo okazać; więc $AL=AH+FI$. $AH+FI=AD-DI=AB^2-BC^2$: gdyż kwadrat $DI=CB^2$. Więc $AL=AB^2-BC^2$; czyli $(AB+BC)(AB-BC)=AB^2-BC^2$.

Oznaczywszy linie AB, BC głoskami a i b , i odbywszy działanie iak wyżej, wypadnie $(AB+BC)(AB-BC)=(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

162. Twierd. *Wtrójkacie prostokątnym ABC fig 89. kwadrat AK z przeciwprostokątnej AB równy jest summie kwadratów AH i CG z dwóch ramion kąta prostego.*

Dowod. Z wierzchołka kąta prostego C spuściwszy CD prostopadłą do AB, i przedłużywszy ją aż do przecięcia się z bokiem IK w punkcie M, poprowadźmy linie AG, CK: kąt $CBG=ABK$, bo obadwa proste: więc kąt $CBG+CBA=ABK$

+ CBA; czyli kąt $ABG = CBK$. A zatém w dwóch trójkątach ABG , CBK bok $BG = CB$ iako boki kwadratu BE , bok $AB = BK$ iako boki kwadratu AK , i kąty między temi bokami zawarte ABG , CBK równe: więc dwa te trójkąty przystaną do siebie (24), a tém samym powierzchnie ich są równe. Trójkąt ABG jest połową kwadratu BE : gdyż mają tę samą podstawę BG , i wysokość CB (74): gdy bowiem kąty BCA i BCE czynią dwa kąty proste, linie AC i CE składają iedną linią prostą AE (17), która jest równoodległa od BG . Trójkąt CBK jest połową prostokąta BM , gdyż mają tę samą podstawę BK , i wysokość BD . Gdy więc połowa kwadratu BE , równa jest połowie prostokąta BM , tém samym i cały kwadrat BE równy jest całemu prostokątowi BM . Poprowadziwszy linie od F do B , i od C do I tym samym sposobem dowiedlibyśmy, że kwadrat AH równy jest prostokątowi AM .

Lecz summa prostokątów AM i BM czyni kwadrat AK ; więc kwadrat AK z przeciwprostokątnéy AB równy jest summie kwadratów AH i BE z dwóch ramion kąta prostego.

165. *Wniosek* 1. Prostokąt AM i kwadrat AK mając te samą podstawę AI są do siebie iak wysokości AD , AB : podobnież prostokąt BM i kwadrat AK , mając tę samą podstawę KB są do siebie iak wysokości BD i AB : to jest $ADMI$: $ABKI = AD : AB$. $BDMK$: $ABKI = BD : AB$. W tych dwóch proporcjach zamiast prostokątów $ADMI$, $BDMK$ położywszy równe im kwadraty $ACHF$, $BCEG$: będzie $ACHF$: $ABKI = AD : AB$. $BCEG$: $ABKI = BD : AB$. to jest, kwadraty z ramion kąta prostego, mają się do kwadratu przeciwprostokątnéy, iak odcinki AD , BD przyległe tym ramionom, do przeciwprostokątnéy.

164. *Wniosek.* 2. ADMI, BDMK maące równe podstawy, są do siebie iak wysokości AD, BD; to iest, $ADMI : BDMK = AD : BD$. Zamiast prostokątów położywszy równe im kwadraty, będzie $ACHF : BCEG = AD : BD$. To iest, kwadraty z ramion kąta prostego, mają się do siebie iak przyległe tém ramionom odcinki przeciwprostokątney.

165. *Zagad.* *Wykréslić kwadrat równy summie dwóch kwadratów danych.*

Rozwiqz. Wykrésliwszy kąt prosty dając mu za iedno ramie bok iednego kwadratu, za drugie ramie bok drugiego kwadratu danego, i końce tych dwóch ramion złączywszy linią prostą; utworzy się trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna będzie bokiem kwadratu szukanego (162).

166. *Wniosek.* Gdyby dwa dane kwadraty były sobie równe, kwadrat trzeci znaleziony równy ich summie, byłby dwa razy większy od iednego z danych. A zatém chcąc mieć kwadrat dwa razy większy od danego; trzeba wykréslić kąt prosty, dając mu za ramiona dwie linie równe bokowi danego kwadratu; złączywszy końce tych ramion linią prostą, utworzy się trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna będzie bokiem kwadratu szukanego.

Uwaga. W danym kwadracie ABCD *fig.* 90. poprowadziwszy przekątnią AC, w trójkącie ABC prostokątnym przy B, iest $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (162) czyli $AC^2 = 2 AB^2$ gdyż $BC = AB$. To iest, kwadrat przekątny iest dwa razy większy od kwadratu z boku AB, czyli od kwadratu danego.

Prawdę tę można okazać naocznie. Przez punkta D i B poprowadziwszy linie HG, EF ró-

wnoodległe od AC, aż do przecięcia się z liniami HE, GF przez punkt A i C poprowadzonymi równoodległe od DB przekątnéy danego kwadratu ABCD, utworzy się nowy kwadrat EFGH, który jest kwadratem z AC przekątnéy danego kwadratu, i który zamyka 8 trójkątów równych między sobą, i takich, iakich dany kwadrat ABCD zamyka 4. Więc kwadrat EFGH jest dwa razy większy od kwadratu ABCD.

A zatém chcąc wykreślić kwadrat dwa razy większy od danego, trzeba w danym kwadracie poprowadzić przekątną: ta będzie bokiem kwadratu szukanego.

167. *Wniosek.* Ponieważ kwadrat z przekątnéy AC jest dwa razy większy od kwadratu ABCD, czyli od kwadratu z boku AB, będzie więc $AB^2 : AC^2 = 1 : 2$. A zatém $AB : AC = 1 : \sqrt{2}$. To jest. bok kwadratu tak się ma do przekątnéy tegoż kwadratu, iak 1 do pierwiastku liczby 2. A że 1, i $\sqrt{2}$ są dwie liczby niespółmierne, gdyż prawdziwego pierwiastku liczby 2 mieć nie można; więc bok i przekątna kwadratu, są dwie linie niespółmierne.

168. Z poprzedzającego twierdzenia wypada, że chcąc wykreślić kwadrat trzy razy większy od danego, trzeba narysować trójkąt prostokątny, w którymby iedno ramie kąta prostego, było równe bokowi danego kwadratu, a drugie ramie równe przekątnéy tegoż kwadratu: przeciwprostokątna będzie bokiem kwadratu szukanego. Chąc mieć kwadrat 4 razy większy od danego, trzeba trójkątowi prostokątnemu dać ramiona kąta prostego równe przekątnéy danego kwadratu; przeciwprostokątna będzie bokiem kwadratu szukanego; albo też wykreślić kwadrat.

któregoby bok był dwa razy większy od boku kwadratu danego. Chcąc mieć kwadrat 5 razy większy od danego, trzeba dać trójkątowi prostokątnemu jedno ramie kąta prostego równe przekątnéy danego kwadratu, drugie równe bokowi kwadratu 3 razy większego niż jest dany; przeciwprostokątna będzie bokiem kwadrata szukanego: albo też znaleźć kwadrat równy summie danego i 4 razy większego niż jest dany. Podobnież chcąc mieć kwadrat 6 razy większy od danego, trzeba znaleźć kwadrat równy summie kwadratu danego, i pięć razy większego niż jest dany; albo też trzeba znaleźć kwadrat równy summie dwóch kwadratów innych, z którychby jeden był dwa razy, drugi 4 razy większy od danego; albo na koniec, trzeba znaleźć kwadrat 3 razy większy od danego; przekątna tego kwadratu, będzie bokiem kwadratu 6 razy większego niż jest dany.

Tym sposobem można znaleźć kwadrat tyle razy większy od danego, ile się podoba. Lecz można także i następującym sposobem rozwiązać to samo zagadnienie:

Daymy że trzeba znaleźć kwadrat 5 razy większy od danego kwadratu *ac fig. 91*. Prowadzę linią AB 5 razy dłuższą od boku ab danego kwadratu; na téy linii iako na średnicy kręślę półkole; wziąwszy potem $AD = ab$, z punktu D wyprowadzam DC prostopadłą do AB aż do przecięcia się z okręgiem w punkcie C ; nakoniec prowadzę cięciwę AC ; cięciwa ta będzie bokiem kwadratu szukanego: gdyż poprowadziwszy cięciwę CB , kąt ACB jest prosty (128), a zatem kwadrat z ramienia kąta prostego AC , równy jest prostokątowi z linii AB i AD (162), ten zaś prostokąt mając podstawę 5 razy większą od wy-

sokości $AE=AD$ z wykreślenia, może być podzielonym na 5 kwadratów mających za boki linią AD ; czyli prostokąt ten może być podzielony na 5 kwadratów takich, iak iest kwadrat dany ac : a zatem prostokąt ten iest od kwadratu danego ac 5 razy większy; a tém samém i kwadrat z linii AC będzie od danego kwadratu 5 razy większy.

169. Zagad. *Wykreślić kwadrat równy różnicy dwóch kwadratów danych $ABKI$, $CBGE$ fig. 89.*

Rozwiąź. Kreślę kąt prosty ACB , dając mu za iedno ramie bok CB kwadratu mniejszego; z punktu B iako ze środka promieniem równym bokowi kwadratu większego, kręślę łuk przecinający drugie ramie kąta prostego w punkcie A : linia AC będzie bokiem kwadratu szukanego: gdyż poprowadziwszy linią AB , w trójkącie ACB prostokątnym przy C iest $AB^2=AC^2+BC^2$. Odiawszy po obu stronach BC^2 , zostanie $AB^2-BC^2=AC^2$. To iest, różnica między kwadratem z boku AB , którym iest kwadrat dany $ABKI$, i między kwadratem z boku BC , którym iest drugi kwadrat dany $CBGE$ iest kwadrat z linii AC .

Sposób 2. Prowadzę linią AB fig. 91. równą bokowi kwadratu większego z dwóch danych, i na nię iako na średnicy wykreśliwszy półkole, z punktu B prowadzę cięciwę CB równą bokowi kwadratu mniejszego, z punktu A poprowadziwszy cięciwę AC , ta będzie bokiem kwadratu szukanego: gdyż kąt ACB iest prosty (128), a zatem $AB^2=AC^2+BC^2$; więc $AB^2-BC^2=AC^2$.

170. Zagad. *Prostokąt AF fig. 91. zamienić na kwadrat równy mu co do powierzchni.*

Rozwiąz. Na większym boku danego prostokąta iako na średnicy, kręślę półkole; wziąwszy potem $AD = AE$, i z punktu D wyprowadziwszy DC prostopadłą do AB , aż do przecięcia się z okręgiem w punkcie C, prowadzę cięciwę CA ; ta będzie bokiem kwadratu szukanego: gdyż poprowadziwszy cięciwę CB , w trójkącie ACB prostokątnym przy C, kwadrat z ramienia kąta prostego AC równy jest prostokątowi z przeciwprostokątnéy AB , i z odcinka AD przyległego temu ramieniowi (162), to jest, $AC^2 = AB \times AD$; czyli, $AC^2 = AB \times AE$; gdyż $AD = AE$ z wykreślenia: to jest, kwadrat z linii AC równy jest prostokątowi danemu.

171. *Wniosek.* Ponieważ wielokąt iakikolwiek można zamienić na trójkąt (142), trójkąt zaś na prostokąt (156), a prostokąt na kwadrat równy mu co do powierzchni; więc każdy wielokąt zamienić można na kwadrat równy mu co do powierzchni.

172. *Twierd.* W trójkącie ACB fig. 75, z końca C, boku CB przeciwnego kątowi ostremu A, spuściwszy CD prostopadłą do AB ramienia tegoż kąta A, będzie kwadrat z przeciwprostokątnéy CB równy summie kwadratów z dwóch ramion kąta ostrego AC i AB , mniéj dwoma prostokątami z ramienia AB na które spuszczone jest prostopadła, i z odcinku AD przyległego temuż kątowi ostremu A; to jest, będzie $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 AB \times AD$.

Dowód. W trójkącie CDB prostokątnym przy D, jest $BC^2 = CD^2 + DB^2$ (162). W trójkącie ACD , $CD^2 = AC^2 - AD^2$ (169). Linia $DB = AB - AD$; a zatem $DB^2 = AB^2 + AD^2 - 2 AB \times AD$ (160). W równaniu więc pierwszém z

drugiéy strony zamiast $CD^2 + DB^2$ położywszy znalezione ich ważności, równanie to zamieni się w następujące:

$$BC^2 = AC^2 - AD^2 + AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD: \text{czyli } BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \times AD.$$

Albo tak, Linia $DB = AB - AD$: więc $DB^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD$ (160). W tém równaniu dodawszy po obu stronach CD^2 , będzie $DB^2 + CD^2 = AB^2 + AD^2 + CD^2 - 2AB \times AD$A.

W trójkącie CDB jest $DB^2 + CD^2 = CB^2$, w trójkącie CDA jest $AD^2 + CD^2 = AC^2$ (162). W równaniu A z jednéy strony z $DB^2 + CD^2$ położywszy CB^2 , z drugiéy strony zamiast $AD^2 + CD^2$ położywszy AC^2 ; równanie to zamieni się w następujące: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \times AD$.

175. *Twierd.* W trójkącie ACB fig. 75. Nro 2 z końca C boku BC przeciwnego kątowi roztwartemu A, spuściwszy CD prostopadłą do AB ramienia tegoż kąta, będzie kwadrat z przeciwwroztwartokątnéy BC równy summie kwadratów z ramion AC , AB , powiększoné dwoma prostokątami z AB i AD ; to jest, będzie $BC^2 = AC^2 + AB^2 + 2AB \times AD$.

Dowód. W trójkącie CDB prostokątnym przy D , jest $CB^2 = CD^2 + BD^2$ (162). W trójkącie CDA , $CD^2 = AC^2 - AD^2$ (169). Linia $BD = AB + AD$: więc $BD^2 = AB^2 + AD^2 + 2AB \times AD$ (159). W równaniu więc pierwszém zamiast $CD^2 + BD^2$ położywszy znalezione ich ważności, równanie to zamieni się w następujące:

$$CB^2 = AC^2 - AD^2 + AB^2 + AD^2 + 2AB \times AD: \text{czyli } CB^2 = AC^2 + AB^2 + 2AB \times AD. \text{ Sposób 2gi}$$

jak w twierdzeniu poprzedzającym.

174. *Wniosek.* Z trzech ostatnich twierdzeń wypada, że mając w liczbach wyrażone trzy bo-

ki trójkąta, można dojść czy kąt przeciwny któremukolwiek z boków jest prosty, czy ostry, czy rozwarty. Jeżeli kwadrat z jednego boku jest równy summie kwadratów z dwóch innych boków, kąt przeciwny pierwszemu bokowi jest prosty: jeżeli zaś kwadrat jednego boku jest mniejszy lub większy od summy kwadratów z dwóch innych boków, kąt przeciwny bokowi pierwszemu będzie w pierwszym przypadku ostry, w drugim rozwarty.

175. *Twierdzenie. W trójkącie ABC fig. 92. podzieliwszy podstawę AB na dwie równe części w punkcie E, i poprowadziwszy linią CE, będzie $AC^2 + BC^2 = 2AE^2 + 2CE^2$.*

Dowód: Z wierzchołka kąta C spuściwszy CD prostopadłą do AB, w trójkącie CDE prostokątnym przy D, kąt CED jest ostry (87), a zatem w trójkącie ACE jest $AC^2 = AE^2 + CE^2 - 2AE \times ED$ (172).

W trójkącie CBE, którego kąt CEB jest rozwarty (15), jest $BC^2 = CE^2 + BE^2 + 2BE \times ED$ (175), czyli $BC^2 = CE^2 + AE + 2AE \times ED$: gdyż $BE = AE$.

Dodawszy strony równania pierwszego i ostatniego, będzie,

$$AC^2 + BC^2 = AE^2 + CE^2 + CE^2 + AE^2 - 2AE \times ED + 2AE \times ED; \text{ czyli}$$

$$AC^2 + BC^2 = 2AE^2 + 2CE^2.$$

176. *Wniosek.* A zatem w każdym równoległoboku ABCD fig. 41. summa kwadratów ze czterech boków, równa jest summie kwadratów z dwóch przekątnych AC, BD: gdyż przekątne te w punkcie F dzielą się na dwie części równe; trójkąty bowiem DFC, AFB, w których bok DC = AB (79), kąt DCF = BAF, i kąt CDF = ABF,

iako naprzemianległe wewnętrzne, przystaną do siebie (26), a w szczególności $DF = BF$, i $AF = CE$. Więc w trójkącie ABC , podług twierdzenia poprzedzającego, jest $AB^2 + BC^2 = 2AF^2 + 2BF^2$. Podobnież w trójkącie ADC , jest $DC^2 + AD^2 = 2AF^2 + 2DF^2$, czyli $DC^2 + AD^2 = 2AF^2 + 2BF^2$; gdyż $DF = BF$ z dowodzenia.

Dodawszy strony równania pierwszego i ostatniego, będzie

$$AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2 = 4AF^2 + 4BF^2 \dots A.$$

Lecz $AC = 2AF$; więc $AC^2 = 4AF^2$; $BD = 2BF$; więc $BD^2 = 4BF^2$. W równaniu A zamiast $4AF^2 + 4BF^2$, położywszy $AC^2 + BD^2$, będzie $AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$, to jest, summa kwadratów ze czterech boków równoległoboku, równa jest summie kwadratów z dwóch jego przekątnych.

R O Z D Z I A Ł VII.

Opodobieństwie wielokątów, a naprzód trójkątów, i o proporcjonalności ich boków.

177. *Twierd.* W trójkącie jakimkolwiek ACB fig. 95. poprowadziwszy linią DE równo-odległą od podstawy AB ; linia ta podzieli boki AC , BC na części proporcjonalne: to jest będzie $CD : AD = CE : EB$.

Dowód. Poprowadziwszy linie proste AE BD , dwa trójkąty ADE , BDE stojące na iednej podstawie DE , i mające wierzchołki swoje A i B na linii AB równoległej od podstawy, mają iednakową podstawę i wysokość: a tém samém są sobie równe co do powierzchni (140).

Dwa trójkąty CDE, DAE, mające podstawy na linii CA, a spólny wierzchołek w punkcie E, mają równą wysokość, a zatem są do siebie iak podstawy (151): to iest,

$$CDE: DAE = CD: AD: —: —: — A.$$

Podobnie trójkąty CDE i BDE mające podstawy na linii BC, a spólny wierzchołek w punkcie D, mają równą wysokość, a zatem są do siebie iak podstawy: to iest, $CDE: BDE = CE: EB$; czyli $CDE: DAE = CE: EB$; '.... B. gdyż trójkąt BDE = DAE co do powierzchni, iakośmy dowiedli wyżej. Porównawszy z sobą dwie proporcye A i B, postrzeżemy że dwa pierwsze wyrazy CDE, DEA, w obudwu proporcjach są te same: więc tak się ma pierwszy poprzednik do swego następnika w pierwszhey proporcji, iak pierwszy poprzednik do swego następnika w drugihey: a zatem będzie też i drugi poprzednik do swego następnika w pierwszhey, iak drugi poprzednik do swego następnika w drugihey proporcji: to iest, będzie $CD: AD = CE: EB$.

178. *Wniosek.* 1. Ponieważ iest $CD: AD = CE: EB$; więc też będzie

$$1od\ CD + AD: CD = CE + EB: CE; \text{ czyli, } AC: CD = BC: CE;$$

$$2re\ CD + AD: AD = CE + EB: EB; \text{ czyli, } AC: AD = BC: EB.$$

179. *Wniosek.* 2. Kiedy dwie linie proste AB, CD, fig. 94. iakiekolwiek położenie względem siebie mające, przecięte są od iakieykolwiek liczby linii między sobą równoległych AC, EF GH itd. części dwóch pierwszych linii zawarte między równoległemi są sobie proporcjonalne, to iest, będzie $AE: CF = EG: FH = BG: DH$.

Jakoż przedłużywszy liniie AB, CD aż do przecięcia się w punkcie S, w trójkącie SEF, którego boki SE, SF przecina liniia AC równolegle od podstawy EF, jest $SE: AE = SF: CF$ (178); czyli $SE: SF = AE: CF: - : - : A$.

Podobnież w trójkącie SGH, którego boki SG, SH przecina liniia EF równolegle od podstawy GH, jest $SE: SF = EG: FH: - : - : B$.

Porównawszy z sobą proporceye A i B, będzie $AE: CF = EG: FH$.

Podobnymże sposobem dowieśdź można że $EG: FH = BG: DH$.

180. *Twierd.* Gdy w trójkącie ABC *fig.* 95. liniia DE dzieli dwa którekolwiek boki *np.* AC, BC na części proporcjonalne; *liniia ta DE będzie od trzeciego boku AB równoodległa.*

Dowod. Jakoż gdyby liniia DE niebyła równoległa od AB, natenczas z punktu D można by było wyprowadzić inną iaką linią *np.* DF od boku AB równoległą. A zatém w trójkącie ACB, którego dwa boki AC, BC przecina liniia DF równoległa od boku trzeciego AB, byłaby następująca proporcya: $AC: CD = BC: CF$; a że podług założenia $AC: CD = BC: CE$; więc gdy 5 wyrazi pierwszy proporecyi równe są trzem odpowiadającym wyrazom drugiey proporecyi, czwarty wyraz w pierwszej powinien być równy czwartemu wyrazowi drugiey proporecyi; czyli powinno być $CF = CE$. To jest, liniia z punktu D wyprowadzona równoodlegle od boku AB powinna bok CB przecinać w takiej odległości od wierzchołka C, w iakiey odległości przecina go liniia z tegoż punktu D wyprowadzona, i dzieląca dwa boki AC, BC proporcjonalnie: czyli, co na jedno wychodzi, punkta F i E powinny się znajdować na boku BC

w iednéyże odległości od punktu C; a zatem dwa te punkta F i E powinny być iednymże punktem; a tém samém liniie DE, DF, z których 1sza dzieli boki AC, BC proporcjonalniie, 2ga iest równoległa od boku AB, składaią iedną linią, bo przez dwa punkta iedna tylko liniia prosta przechodzić może.

181. *Twierd.* W tróykacie iakimkolwiek ACB fig. 96. podzieliwszy ieden z kątów np. kąt C na dwie równe części linią CD; *liniia ta podzieli bok AB na dwa odcinki AD i DB proporcjonalne bokom przyległym; to iest, będzie* $AC:BC=AD:BD$.

Dowod. Wyprowadziwszy z punktu A linią AF równoodległą od CD, aż do przecięcia się w punkcie F z przedłużonym bokiem BC; w tróykacie ABF, w którym liniia CD iest równoległa od AF: iest $CF:BC=AD:BD$ (177):

Nadto kąt $CAF=ACD$ iako wewnętrzne naprzemianległe względem siecznéy AC i równoległych AF, CD; kąt $ACD=DCB$ podług założenia; kąt $DCB=AFC$ iako iednostronne odpowiadaiące względem siecznéy FB i równoległych AF, DC; a zatem kąt $CAF=AFC$. Więc tróykąt ACF iest równoramienny (52); i bok $CF=AC$. W powyższéy więc proporcyi położywszy AC zamiast FC, będzie $AC:BC=AD:BD$.

182. *Zagad.* 1. *Przez punkt D wziety od upodobania między ramionami kąta C, fig. 97. poprowadzić linią AB tak, aby części iéy AD, BD, będące między ramionami kąta C i punktem D były równe.*

Rozwiąz. Przez punkt D poprowadziwszy DF równoodległą od BC, wziąć $FA=CF$; i przez punkta A, D poprowadzić linią prostą ADB: li-

niia ta iest szukana: gdyż w trójkacie ABC iest $AF: CF = AD: DB$ (177), a że $AF = CF$ z wykręślenia, więc i $AD = DB$.

185. Zagad. *Maiąc dane 3 linie AC, BC, DC fig. 98 znaleźć czwartą proporcjonalną.*

Rozw: Wykreśliwszy kąt iakikolwiek C, na iednym iego ramieniu biore CA równą 1szey linii daney, i CB równą 2gięy linii daney, a na drugiem ramieniu biore CD równą 3cięy linii daney: złączwszy potém punkta A i D linią prostą AD, i z punktu B poprowadziwszy BE równoodległą od AD, aż do przecięcia się z bokiem CD w punkcie E, linia CE iest szukana: gdyż w trójkacie ACD iest $AC: BC = DC: CE$ (178).

184. *Uwaga.* Gdyby druga linia dana CB była dłuższa od piérwszey AB, znaleźlibyśmy 4tą proporcjonalną tymże samym sposobem, z tą tylko odmianą, że linia CB równa 2gięy linii daney wypadłaby na przedłużeniu boku AC; a linia CE na przedłużeniu boku CD.

Gdyby 2ga i 3cia linia dana były sobie równe, na ten czas linia szukana byłaby 3cią ciągłą ieometrycznie proporcjonalną. Wykreślenie iest to samo; Krésli się naprzód iakikolwiek kąt C, potém wzięwszy CA równe piérwszey linii daney, a CB i Cb równe między sobą i równe drugięy linii daney, punkta A i b łączą się linią prostą Ab; a z punktu B prowadzi się Be równoodległą od Ab: linia Ce iest szukana, gdyż w trójkacie ACb iest $AC: CB = Cb: Ce$; czyli $AC: CB = CB: Ce$: albowiem $Cb = CB$.

185. Wiedząc sposób, którym się znayduie 4ta linia ieometrycznie proporcjonalna, można dwa zagadnienia wyżey podane (157, 158) rozwiązać innym sposobem.

a wysokość równą summie lub różnicy wysokości tegoż równoległoboku danego, i 4tęy ieometrycznie proporcjonalnéj do obudwu podstaw i wysokości 2go równoległoboku danego.

187. Zagad. *Mając dane dwa prostokąty AC i EG fig. 81, wyrazić ich stosunek w liniach:* to iest, znaleźć dwie linie proste, któreby się tak miały do siebie, iak się mają dwa dane prostokąty.

Rozw. Do wysokości BC iednego, do podstawy EF i wysokości FG drugiego prostokąta danego, szukam czwartęy ieometrycznie proporcjonalnéj, którą nazwiemy M. Prostokąt AC tak się będzie miał do prostokąta EG, iak podstawa AB do linii znalezionej M: gdyż $ABCD: EFGH = AB \times BC: EF \times FG$ (145); że zaś podług wykręślenia $BC: EF = FG: M$; więc $BC \times M = EF \times FG$. W pierwszék proporcji zamiast $EF \times FG$ położywszy $BC \times M$; proporcya ta zamieni się w następującą: $ABCD: EFGH = AB \times BC: BC \times M$. Podzieliwszy dwa drugie wyrazy przez BC, będzie $ABCD: EFGH = AB: M$.

188. Tym samym sposobem postępując można znaleźć dwie linie któreby się tak miały do siebie, iak dwa dane kwadraty. Możnaby też zagadnienie to rozwiązać sposobem następującym:

Niech będą AC, AF, fig. 99, boki danych kwadratów, których stosunek wyrazić mamy w liniach. Prowadzę linią AB, iakieykolwiek długości, byleby większą od AF boku kwadratu większego z dwóch danych: na linii AB iako na średnicy wykreśliwszy półkole, z końca A średnicy AB prowadzę dwie cięciwy AC, AF pierwszą równą bokowi danemu AC, drugą równą bokowi danemu AF; z punktu C i F spuszczam

CD, FG prostopadłe do AB: odcinki AD, AG są liniami szukanemi; to jest, dwa dane kwadraty będą się miały do siebie iak linie AD, AG. Jakoż poprowadziwszy cięciwy CB, FB, kąty ACB, AFB są proste (128). A że $AC^2 = AB \times AD$, $AF^2 = AB \times AG$ (162); więc $AC^2 : AF^2 = AB \times AD : AB \times AG$; czyli $AC^2 : AF^2 = AD : AG$.

Albo tak. Kręślę kąt prosty dając mu ramiona równe bokom dwóch kwadratów danych: poprowadziwszy potem przeciwprostokątną, i z wierzchołka kąta prostego spuściwszy do niej prostopadłą, przeciwprostokątna podzielona będzie na dwa odcinki, które są liniami szukanemi (164).

189. Jeżeli dwa trójkąty ABC, abc fig. 100. są równokątne, to jest takie, że kąt $A = a$, $B = b$, $C = c$; i jeżeli boki ich odpowiadające, czyli przyległe kątom równym są między sobą proporcjonalne; to jest, gdy jest $AB : ab = BC : bc = AC : ac$; takie dwa trójkąty nazywać będziemy podobnymi, *Triangula similia*,

W ogólności wszystkie wielokąty równokątne, i których boki oddpowiadające, to jest, przyległe kątom równym, są między sobą proporcjonalne, zwać będziemy podobnemi. I tak np. pięciokąty ABCDE, abcde fig. 108. są podobne, jeżeli kąt $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$, $E = e$; i jeżeli jest $AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = AE : ae$.

190. Twierd. Jeżeli dwa trójkąty ABC, abc fig. 100., są równokątne, będą też boki odpowiadające proporcjonalne, a tém samém trójkąty te będą podobne.

Dowód. Na boku AC wziąwszy $CD = ac$, na boku CB wziąwszy $CE = cb$ i poprowadziwszy DE; w dwóch trójkątach CDE, cab, bok $CD = ac$, bok $CE = cb$ zwykręślenia, i kąty między te-

mi bokami zawarte C i c równe z założenia; więc dwa te trójkąty przystaną do siebie podług Twierd.

1. o przystawianiu trójkątów; a w szczególności bok $DE = ab$, i kąt $CDE = cab$; że zaś kąt $cab = CAB$ podług założenia, więc i kąt $CDE = CAB$, a tém samém linia DE jest równoległa od AB (67). Będzie więc $AC: DC = BC: CE$ (178), czyli $AC: ab = BC: bc$; gdyż $ac = DC$, $bc = CE$.

W trójkącie ABC z punktu E poprowadzwszy EF równoległą od AC , będzie $BC: CE = AB: AF$ czyli $BC: bc = AB: ab$; gdyż $bc = CE$, $AF = DE = ab$.

Tę ostatnią proporcją złączyszy z powyższą $AC: ac = BC: bc$; będzie $AC: ac = BC: bc = AB: ab$.

191. *Wnioski* 1. Stąd wypada, że dwa trójkąty są równokątne, a tém samém podobne, gdy dwa kąty iednego równe są dwom kątom drugiego trójkąta: gdyż i trzeci kąt pierwszego musi być równy 5mu kątowi drugiego trójkąta (84).

192. *Wnios.* 2. Dwa trójkąty są także równokątne a tém samém podobne, gdy boki iednego są równoodległe względem boków drugiego trójkąta: bo ieżeli boki CA , CB fig. 100. są równoodległe względem boków ca , cb , a boki CB , AB są równoodległe względem boków cb , ab ; będzie kąt $C = c$, kąt $B = b$, iako zawarte między ramionami względem siebie równoodległemi, i rozchodzącemi się w iedną stronę (70), a zatém dwa te trójkąty są podobne podług poprzedzającego wniosku.

Jeżeli zaś w dwóch trójkątach ABC , abc , fig. 101. boki AB i ab , AC i ac , względem siebie równoodległe, rozchodzą się w strony przeciwne przedłużyszy bok CB aż do przecięcia się z bokam ab , ac w punktach d , f , w dwóch trójkątach ABC

adf , kąt $CBA = fda$ iako naprzemian ległe zewnętrzne względem siecznéy Cf , i dwóch równoodległych AB , ab ; kąt $ACB = afd$, iako naprzemian ległe wewnętrzne względem siecznéy Cf , i dwóch równoodległych AC , ac ; więc dwa te trójkąty ABC , adf są równokątne (191). A że trójkąty adf , abc są równokątne, gdyż mają kąt a spólny, kąt $adf = abc$ iako jednostronne odpowiadające względem siecznéy ab i dwóch równoległych Cf , bc , więc i trójkąty ABC , abc są równokątne.

193. *Wniosek 3.* Nakoniec dwa trójkąty są także równokątne a tém samém podobne, gdy boki jednego są prostopadłe względem boków drugiego trójkąta. Jakoż gdy w dwóch trójkątach CAB , cab fig. 102, boki AB i ab , AC i ac , BC i bc są względem siebie prostopadłe; z wierzchołka kąta C wyprowadziwszy iedną linią CD prostopadłą do CB a tém samém równoległą od cb (58); drugą CF prostopadłą do AC a tém samém równoodległą od ac , będzie kąt $DCB = ACF$ iako proste z wykreślenia. Dodawszy po obu stronach kąt BCF , będzie $DCB + BCF = ACF + BCF$: czyli $DCF = ACB$. A że kąt $DCF = bca$, iako zawarte między ramionami względem siebie równoodległemi z wykreślenia, i rozchodzącemi się w jednę stronę, więc i kąt $ACB = bca$.

Podobnież z punktu A wyprowadziwszy iedną linią AG prostopadłą do AB , a tém samém równoodległą od ab , drugą AH prostopadłą do AC , a tém samém równoodległą od ac , będzie kąt $CAH = BAG$ iako proste z wykreślenia. Odiąwszy po obu stronach kąt CAG , zostanie $CAH - CAG = BAG - CAG$; czyli $GAH = BAC$. A że kąt $GAH = bac$, iako zawarte między ramionami względem siebie równoodległemi z wykreślenia, i rozchodzącemi się

w iednęż stronę: więc i kąt $BAC = bac$. Dwa więc trójkąty BAC , bac są podług wniosku 1. równokątne, a tém samém podobne.

Gdyby trójkąt abc znajdował się wewnątrz trójkąta ABC , iak iest *fig.* pod liczbą 2, dowodzenie byłoby ieszcze łatwieysze: gdyż w czworokącie $A daf$ summa wszystkich kątów waży 4 kąty proste (95): a że dwa kąty przy d i f ważą dwa kąty proste z założenia, więc kąt daf z kątem A , waży dwa kąty proste. Tenże sam kąt daf z kątem przyległym cab , waży także dwa kąty proste: więc kąt $A = cab$. Tym sposobem okazać można, że kąt $B = cba$; a zatém dwa trójkąty ACB , acb są równokątne, a tém samém podobne: będzie więc $AB: ab = BC: bc$ $AC: ac$.

194. *Uwaga.* Uważać tu należy iòd, że kiedy dwa trójkąty ABC , abc *fig.* 100, są równokątne, boki ich te są odpowiadające a tém samém proporcjonalne, które są przeciwne kątom równym; i tak *np.* boki BC i bc przeciwne kątom równym A i a , są bokami odpowiadającemi: *2re*, że kiedy dwa trójkąty ABC , abc *fig.* 101. mają boki względem siebie równoodległe, te boki są odpowiadające, a tém samém proporcjonalne, które są od siebie równoodległe; *3cie*, Ze kiedy dwa trójkąty ABC , abc , *fig.* 102. mają boki względem siebie prostopadłe; te boki są proporcjonalne, które są względem siebie prostopadłe.

195. *Twierd.* Jeżeli we dwóch trójkątach trzy boki w iednym są proporcjonalne, względem trzech boków w drugim trójkącie, takie dwa trójkąty są równokątne a tém samém podobne.

Dowod. Niech będą dwa trójkąty ACB , acb *fig.* 105. których boki są między sobą proporcjonalne: na okazanie że trójkąty te są równo-

katne a t $\acute{e}$ m sam $\acute{e}$ m podobne, na boku AC wzi $\acute{a}$ wszy $CD=ac$, i poprowadziwszy DE r $\acute{o$ wnoodległ $\acute{a}$ od AB; dwa tr $\acute{o$ ykaty ACB, DCE s $\acute{a}$ podobne (190, b $\acute{e}$ dzie wi $\acute{e}$ c $AC:CD=CB:CE=AB:DE$.) Lecz z zał $\acute{o$ żenia i $\acute{e}$ st $AC:ac=CB:cb=AB:ab$. W tych dw $\acute{o$ ch ci $\acute{a}$ gach stosunek pi $\acute{e$ rwszy ci $\acute{a}$ gu 1go r $\acute{o$ wny i $\acute{e}$ st stosunkowi pi $\acute{e$ rwszemu ci $\acute{a}$ gu 2go: gdy $\acute{z}$ $CD=ac$ z wykr $\acute{e}$ slenia; a zat $\acute{e}$ m wszystkie stosunki obu dwu ci $\acute{a}$ g $\acute{o$ w musz $\acute{a}$ by $\acute{c}$ mi $\acute{e$ dzysob $\acute{a}$ r $\acute{o$ wne. A $\acute{z}$ e poprzedniki ci $\acute{a}$ gu 1go r $\acute{o$ wne s $\acute{a}$ poprzednikom ci $\acute{a}$ gu 2go, wi $\acute{e}$ c i nast $\acute{e$ pniki w ci $\acute{a}$ gu 1wszym musz $\acute{a}$ by $\acute{c}$ r $\acute{o$ wne nast $\acute{e$ pnikom w ci $\acute{a}$ gu 2gim; to i $\acute{e}$ st $CE=cb$, $DE=ab$. Dwa wi $\acute{e}$ c tr $\acute{o$ katy CDE, acb przystan $\acute{a}$ do siebie (28), a t $\acute{e}$ m sam $\acute{e}$ m s $\acute{a}$ r $\acute{o$ wnokatne: a $\acute{z}$ e tr $\acute{o$ ykaty CDE, ACB s $\acute{a}$ r $\acute{o$ wnokatne, wi $\acute{e}$ c i tr $\acute{o$ katy acb i ACB s $\acute{a}$ r $\acute{o$ wnokatne, a t $\acute{e}$ m sam $\acute{e}$ m podobne (190).

196. Twierd. *Dwa tr $\acute{o$ ykaty s $\acute{a}$ podobne, gdy dwa boki iednego s $\acute{a}$ proporcjonalne wzgl $\acute{e$ dem dw $\acute{o$ ch bok $\acute{o$ w drugiego tr $\acute{o$ ykat $\acute{a}$, i gdy k $\acute{a}$ ty mi $\acute{e$ dzysob $\acute{a}$ temi bokami zawarte, s $\acute{a}$ sobie r $\acute{o$ wne.*

Dowod. Niech b $\acute{e}$ d $\acute{a}$ dwa tr $\acute{o$ ykaty ACB, abc fig. 105. w kt $\acute{o$ rych k $\acute{a}$ t $C=c$, i $AC:ac=BC:bc$. Na boku AC wzi $\acute{a}$ wszy $CD=ac$, na boku CB wzi $\acute{a}$ wszy $CE=bc$; i poprowadziwszy DE, dwa tr $\acute{o$ ykaty CDE, cab przystan $\acute{a}$ do siebie podł $\acute{u}$ g Twierd. i o przystawianiu tr $\acute{o$ ykat $\acute{o}$ w a t $\acute{e}$ m sam $\acute{e}$ m s $\acute{a}$ r $\acute{o$ wnokatne. Poniewa $\acute{z}$ za $\acute{s}$ podł $\acute{u}$ g zał $\acute{o$ żenia i $\acute{e}$ st $AC:ac=BC:bc$; b $\acute{e}$ dzie wi $\acute{e}$ c $AC:CD=BC:CE$; gdy $\acute{z}$ $CD=ac$, $CE=bc$.

Wi $\acute{e}$ c liniia DE i $\acute{e}$ st r $\acute{o$ wnoległ $\acute{a}$ od AB (180), a t $\acute{e}$ m sam $\acute{e}$ m tr $\acute{o$ ykaty ABC, DEC s $\acute{a}$ r $\acute{o$ wno k $\acute{a}$ tne: $\acute{z}$ e za $\acute{s}$ tr $\acute{o$ ykat DCE i $\acute{e}$ st r $\acute{o$ wnokatny z tr $\acute{o$ y-

kątem acb , więc trójkąty ACB , acb są równokątne, a tém samém podobne (190).

197. Zagad. Na danéy linii AB fig. 105. wystawić trójkąt podobny danemu acb .

Rozw. Sposób 1. Przy punktach A i B , kręślę kąt $A = a$ i kąt $B = b$, ramiona tych kątów przedłużam aż do przecięcia się w punkcie C : trójkąt ACB jest szukany (191).

Sposób 2. Przedłużam bok ab do d , tak aby była linia $ad = AB$; przez punkt d prowadzę równoodległą od bc aż do przecięcia się z przedłużonym bokiem ac w punkcie f : trójkąt adf jest szukany (196).

Sposób 3. Do ab , AB i ac szukam linii 4tej ieometrycznie proporcjonalnéy (185). Przy punkcie A na danéy linii AB , kręślę kąt $A = a$, dając mu za drugie ramie znalezioną 4tą ieometrycznie proporcjonalną: końce tych dwóch ramion łączę linią prostą i będzie trójkąt podobny danemu (196).

Sposób 4ty. Szukam 4tej ieometrycznie proporcjonalnnéy; 1od. do ab , AB i ac ; 2re, do ab AB i bc , i na linii AB kręślę trójkąt ABC dając mu za boki AB i BC dwie 4te proporcjonalne znalezione, będzie trójkąt ABC podobny danemu (195).

198. Twierd. Z punktu A , fig. 104. poprowadziwszy iakąkolwiek liczbę linii AB , AC , AD i t. d. któreby się przycinały z dwiema równoodległemi GL i BF ; linie te AB , AC i t. d. podzielone będo w punktach przecięcia się z równoodległemi na części proporcjonalne, i linie równoodległe będą także podzielone na części proporcjonalne.

Dowód. Dwa trójkąty ACB , AHG , mające kąt przy A spólny i kąt $ABC = AGH$ (67), są podobne (191). Dla téżże przyczyny dwa trójkąty ACD , AIH są także podobne. Toż mówić o trójkątach AED , AKI , tudzież o trójkątach AFE , ALK . Boki zatem tych trójkątów są między sobą proporcjonalne: będzie więc.

$$AB: AG = AC: AH = BC: GH.$$

$$AC: AH = AD: AI = CD: HI.$$

$$AD: AI = AE: AK = DE: IK.$$

$$AE: AK = AF: AL = EF: KL.$$

Wszystkie te stosunki są równe: gdyż w każdym ciągu stosunek drugi jest ten sam, co w następującym ciągu stosunek pierwszy. Wziąwszy naprzód te tylko stosunki, których wyrazami są linie z punktu A poprowadzone, będzie.

$$AB: AG = AC: AH = AD: AI = AE: AK = AF: AL; \text{ więc.}$$

$$AB: AG = AC: AH = AD: AI = AE: AK = AF: AL; \text{ i t. d.; czyli.}$$

$BG: AG = CH: AH = DI: AI = EK: AK = FL: AL$; to jest, linie AB , AC , AD i t. d. podzielone są na części proporcjonalne.

Wziąwszy potem w 4 powyższych ciągach te tylko stosunki, których wyrazami są części dwóch linii równoodległych GL , BF , będzie.

$BC: GH = CD: HI = DE: IK = EF: KL$; to jest, linie równoodległe GL , BF podzielone są na części proporcjonalne.

199. Zagad. *Daną linią MN podzielić na części proporcjonalne częściom linii BF .*

Rozw. Na linii BF kręśle trójkąt równoboczny BAF ; wziąwszy potem $AG = MN$, i $AL = MN$, i poprowadziwszy linią GL , punkt A z punktami podziałów linii BF łączę liniami pro-

steni AC, AD, AE, które linią GL przecinaia w punktach H, I, K na części proporcjonalne częściom linii BF: gdyż $AB = AF$, i $AG = AL$ z wykreślenia: będzie więc $AB: AG = AF: AL$. Więc linia GL jest równoodległa od BF (180), a tém samém dwa trójkąty AGL, ABF są podobne: będzie więc $AB: AG = BF: GL$. W téy proporecyi poprzednik drugi BF, rowny jest poprzednikowi pierwszemu AB z wykreślenia; więc i następnik drugi, rowny być musi następnikowi pierwszemu; to jest, $GL = AG = MN$. A zatém podług twierdzenia poprzedzającego części linii GL czyli MN, są proporcjonalne częściom linii BE.

Gdyby dana linia do dzielenia była większa od linii BF, iak jest np. linia *mn*, na ten czas wykreśliwszy na linii BF trójkąt równoboczny BAF, iboki AB, AF przedłużywszy do *g i l*, tak aby $Ag = mn$, $Al = mn$, poprowadźmy linią *gl* przecinającą się w punktach *h, i, k* z przedłużonemi liniami AC, AD, AE. Tym sposobem linia *gl* czyli *mn* podzielona będzie na części proporcjonalne częściom linii BF.

Sbosób 2. Niech będzie linia AF fig. 105. do podzielenia na 5 części proporcjonalnych częściom linii danéy: z punktu A wyprowadziwszy linią AL nieograniczonéy długości, pod iakimkolwiek nachyleniem do linii AF, i części drugiéy linii danéy, przeniosłszy na linią AL, 1wszą część od A do G, 2gą od G do H, 3cią od H do I, 4tą od I do K, 5tą od K do L, punkt L i F złączyc linią prostą LF. i przez punkta podziałów linii AL poprowadzić linie KE, ID i t. d. równoodległe od LF, aż do przecięcia się z linią AF w punktach E, D, C, B; linia AF w tych punktach podzielona będzie na części szukane: gdyż w 4 w trójkątach ACH, ADI AEK, AFL, których dwa boki przecięte są przez,

liniie BG, CH i t. d. równoodległe od buku 3go, iest (178).

$$AB: AG = AC: AH = BC: GH,$$

$$AC: AH = AD: AI = CD: HI.$$

$$AD: AI = AE: AK = DE: IK.$$

$$AE: AK = AF: AL = EF: KL.$$

Wszystkie te stosunki są równe: gdyż drugi stosunek w iednym ciągu, iest tenże sam co stosunek pierwszy w ciągu następującym. Biorąc te tylko stosunki, których wyrazami są znalezione części linii AF i dane części linii AL, będzie.

$AB: AG = BC: GH = CD: HI = DE: IK = EF: KL$; to iest, części AB, BC, i t. d. linii AF, są proporcjonalne częściom AG, GH i t. d. linii AL.

Uwaga. Aby się ustrzedz, uchybienia w prowadzeniu liniiy KE, ID i t. d. równoodległych od, LF, można z końca F linii AF poprowadzić linią FM tak, aby kąt $AFM = LAF$; wziawszy potem na linii FM część $FQ = LK$, $QP = KI$, $PO = IH$, $ON = HG$, $NM = GA$; punktą A i M, G i N, H i O i t. d. połączyć liniami prostemi AM, GN, HO i t. d. które linią dana podzielią w punktach B, C i t. d. na części szukane.

200. *Wniosek* Gdyby części linii GL fig. 104. były między sobą równe, części linii BF byłyby także między sobą równe. A stąd wypada sposób łatwy podzielenia linii daney na iakąkolwiek liczbę części równych.

Sposób 1. Poprowadziwszy linią BF fig. 104. nieograniczonę długości, i oznaczywszy na nię tyle części równych iakiękolwiek długości na ile ma być podzielona linią dana GL, lub gl; wykreślić na linii BF trójkąt równoboczny BAF, i wziawszy

na bokach AB, AF, lub na ich przedłużeniu linii AG, AL, lub Ag, Al równe linii danéy do podzielenia, przez punkt A i przez punkta podziału linii BF, poprowadzić linie proste, które przetną linią daną GL, lub gl, na części szukane.

Sposób. 2. Z punktu A linii AF *fig. 105*, danéy do podzielenia na części równe, poprowadziwszy linią AL. nieograniczonéy długości, pod jakimkolwiek do linii AF nachyleniem; i zaczynając od punktu A, oznaczywszy na linii AL tyle części równych iakiéykolwie długości, na ile ma być linia AF podzielona; poprowadzić linie BG, CH i t. d. równoodległe od linii LF: linia AF będzie w punktach B, C i t. d. podzielona na części szukane.

Sposób. 3. Są także inne sposoby podzielenia linii prostéy na części równe. Niechby *np.* trzeba było podzielić ją 20 równych części linią *mn. fig. 104*, która do takowego dzielenia jest dla swéy małości niewygodna, lecz którą wygodnie podzielić można na części równych 4 i 5. Damy, że *ma* jest 4tą, a *mb* jest 5tą częścią linii *mn*; linia *ab* będąca różnicą między 4tą i 5tą częścią linii danéy, będzie iéy częścią zostą gdyż $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$. Znalazłszy zostą część linii *mn*, łatwo będzie podzielić ją na części szukane.

Sposób. 4. Sposób następujący dzielenia linii na części równe, może być także wygodnie użyty. Niechby *np.* linią AM, *fig. 105* potrzeba było podzielić na części równych 5. Z końców linii danéy wyprowadziwszy dwie linie MF, AL od siebie równoodległe nieograniczonéy długości, na jednéy z nich MF wziąć 5 części równych iakiéykolwiek długości MN, NO, i t. d. przeniosłszy potem te same części na linią AL, zaczynając

od A ku, L , i połączwszy punkta podziałów liniami prostem GN , HO , i t. d. w równoodległoboku LM poprowadzić przekątną AF , która linie GN , HO i t. d. równe linii daney AM , podzieli na części szukane: gdyż w trójkącie AFM , którego dwa boki AF i MF dzieli linia EQ równoodległa od boku trzeciego AM , jest $MF: QF = AM: EQ$.

A że linia QF jest 5tą częścią linii MF według wykreślenia, więc i EQ będzie 5tą częścią linii AM . Tymże sposobem okazać można $DP = \frac{2}{3}$ częściom linii AM i t. d.

201. Znając sposób dzielenia linii prostej na części równe, łatwo będzie wykreślić *podziałkę*, *scala*, która służy do mierzenia linii prostych. Naywygodniejsza jest podziałka dziesiętna, która się kręśli sposobem następującym: podzieliwszy linią AB *fig.* 106, na 10. części równych, i punktów A i B poprowadziwszy AD , AC prostopadłe do AB nie ograniczonéj długości, na iednéj z nich *np.* na linii AD wziąć 10. części równych iakiéykolwiek długości, i tę same części przenieść na linią BC , poczynając od B do C . Poprowadziwszy potém przez punkta podziałów linie prostę iak wyraża figura, łatwo jest okazać, że *np.* część linii oznaczonéj liczbą 1. równoodległéj od AB , zawarta między liniami BC i Ba jest 10tą częścią linii $Ca = Ab$. A że Ab jest 10tą częścią linii AB z wykreślenia, więc 10ta część linii Ab , będzie setną częścią linii AB . Podobnież części linii oznaczonych liczbami 2, 3, 4, i t. d. równoodległych od AB , zawarte, między liniami BC i Ba są $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{4}{100}$, i t. d. Linii AB . Sznur mierniczy ma, iak wiadomo, prętów 10, a pręt pręcików 10. Gdyby więc linią

AB wyrażała sznur 1, linia Ab lub Ca wyrażałyby 1 pręt, a linie zawarte między liniami BC i Ba wyrażałyby 1, 2, 3, 4 i t. d. pręciki. Linia *np. cd.* wynosi 5 prętów i 3 pręciki; linia *ef* wynosi 7 prętów i 6 pręcików. Przedłużwszy linią AB do E tak aby $BE = AB$ i dokończywszy figury; linia *cg* wynosi sznur 1, prętów 5, pręcików 3; linia *eh* wynosi sznur 1, prętów 7 i 6 pręcików i t. d.

202. *Twierd.* W trójkącie prostokątnym ACB *fig.* 107, z wierzchołka kąta prostego C spuściwszy CD prostopadłą do AB;

10d. *Prostopadła ta podzieli trójkąt dany na dwa inne podobne danemu, a tém samym podobne między sobą; 2re. Przeciwprostokątna podzielona będzie na dwa odcinki, między którymi prostopadła ta jest średnią ieometrycznie proporcjonalną; 5cie ramiona kąta prostego w trójkącie danym, będą średniami ieometrycznie proporcjonalnymi między przeciwprostokątną i odcinkami przyległemi.*

Dowód. 10d Dwa trójkąty ACD, ACB mają kąt A spółny, kąt prosty ADC pierwszego, równy kątowi prostemu ACB drugiego trójkąta: więc i trzeci kąt ACD który oznaczamy głoską *m*, w pierwszym, równy jest trzeciemu kątowi B oznaczonemu głoską *n* w drugim trójkącie. Azatém dwa te trójkąty są podobne (190). Podobnież dwa trójkąty CBD, ACB mają kąt B spółny, kąt CDB pierwszego równy kątowi ACB 2go trójkąta; więc i trzeci kąt DCB czyli *o* w pierwszym równy jest 3mu kątowi BAC czyli *o* w drugim trójkącie, a zatém dwa te trójkąty są podobne.

2re: Aby okazać, że prostopadła CD jest średnią ieometrycznie proporcjonalną między AD, i BD,

czyli że jest $AD:DC=DC:DB$, uważmy dwa podobne trójkąty ACD i BCD , których bokami są linie AD , DC i DB tę proporcją składające. Ponieważ w trójkątach podobnych boki odpowiadające, to jest, przyległe albo też przeciwne kątom równym są proporcjonalne (194), będzie więc bok AD przeciwny kątowi m w 1szym trójkącie ACD , do boku CD przeciwnego kątowi m w 2gim trójkącie DCB , iak bok CD przeciwny kątowi o w 1szym, do boku DB przeciwnego kątowi o w 2gim trójkącie; czyli $AD:DC=DC:DB$.

5cie. Aby okazać, że AC jest średnią ieometrycznie proporcjonalną między AD i AB , czyli że jest $AB:AC=AC:AD$, uważmy dwa podobne trójkąty ACB i ACD , których bokami są linie AB , AC , AD proporcją tę składające: będzie więc iak wyżéy, bok AB przeciwny kątowi prostemu w 1szym trójkącie ACB , do boku AC przeciwnego kątowi prostemu w 2gim trójkącie ACD , iak bok AC przeciwny kątowi m w 1szym, do boku AD przeciwnego kątowi m w 2gim trójkącie; czyli $AB:AC=AC:AD$.

Podobnież na okazanie że jest $AB:BC=BC:BD$ uważmy dwa podobne trójkąty ABC , DBC , których bokami są linie AB , BC i BD , składające tę proporcją: będzie więc, bok AB przeciwny kątowi prostemu w pierwszym trójkącie ABC , do boku BC , przeciwnego kątowi prostemu w 2gim trójkącie DCB , iak bok BC przeciwny kątowi o w 1szym do boku BD przeciwnego kątowi o w 2gim trójkącie: czyli $AB:BC=BC:BD$.

205. *Wniosek.* Ponieważ podług 5ciey części poprzedzającego twierdzenia jest.

$AB:AC=AC:AD$, $AB:CB=CB:DB$; więc:
 $AB \times AD = AC^2$, $AB \times DB = CB^2$. A zatém

$$AB \times AD + AB \times DB = AC^2 + CB^2. \text{ czyli}$$

$$AB (AD + DB) = AC^2 + CB^2; \text{ czyli}$$

$AB \times AB = AB^2 = AC^2 + CB$; gdyż $AD + DB = AB$; to jest, w trójkącie prostokątnym ACB kwadrat przeciwprostokątnej AB, równy jest summie kwadratów z dwóch ramion kąta prostego; własność którąśmy już wyżej (162) innym sposobem okazali.

204. Zagad. *Mając dane dwie linie, znaleźć między nimi średnią ieometrycznie proporcjonalną.*

Rozw. Poprowadziwszy iakiękolwiek długości linią prostą, i wzięwszy na nię linią AD fig. 91. równą pierwszey linii daney i DB równą drugię linii daney, na linii AB iako na średnicy wykreślić pułkole; i z punktu D wyprowadzić linią DC prostopadłą do AB, aż do przecięcia się z półokręgiem w punkcie C: prostopadła CD będzie szukana: gdyż poprowadziwszy dwie cięciwy AC, BC, w trójkącie AGB prostokątnym przy C (128), jest $AD : CD = CD : DB$ (202).

Sposób 2. Poprowadziwszy linią AB równą większey z dwóch linii danych, i od końca B wzięwszy BD równą mniejszey z dwóch linii danych; na linii AB iako na średnicy, wykreślić pułkole, i z punktu D poprowadzić DC prostopadłą do AB, aż do przecięcia się z półokręgiem w punkcie C; punkt C punktem B złączywszy cięciwą CB, ta będzie linią szukana: gdyż poprowadziwszy cięciwę CA, w trójkącie ACB prostokątnym przy C, jest $AB : CB = CB : BD$ (202).

205. Zagad 2. *Dany prostokąt ABCD fig. 80, zamienić na kwadrat równy mu co do powierzchni.*

Rozw. Między podstawą, AB i wysokością BC danego prostokąta, znajdziemy średnią ieometrycznie proporcjonalną (204), którą oznaczmy głoską M : ta będzie bokiem szukanego kwadratu: gdyż podług wykreślenia jest $AB : M = M : CB$; więc $AB \times CB = M^2$: to jest, powierzchnia danego prostokąta, równa jest powierzchni kwadratu wykreślonego na linii M .

206. Zagad. 3. *Dany trójkąt ABC fig. 107. zamienić na kwadrat równy mu co do powierzchni.*

Rozw. Między połową podstawy AB i między wysokością CD danego trójkąta znajdziemy średnią ieometrycznie proporcjonalną, którą oznaczmy głoską M ; ta będzie bokiem szukanego kwadratu: gdyż podług wykreślenia jest $\frac{1}{2} AB : M = M : CD$; więc $\frac{1}{2} AB \times CD = M^2$; to jest, powierzchnia danego trójkąta, równa jest powierzchni kwadratu wykreślonego na linii M .

207. *Wniosek.* Okazaliśmy wyżey (142), że każdy wielokąt może być zamieniony na trójkąt równy mu co do powierzchni: w zagadnieniu poprzedzającym podaliśmy sposób zamienienia trójkąta na kwadrat równy mu co do powierzchni: a zatem każdy wielokąt można zamienić na kwadrat równy mu co do powierzchni.

208. *Twierd. Wielokąty foremne o iednéyże liczbie boków są podobne.*

Dowód. Ponieważ kąty wewnętrzne wielokąta, wazą kątów prostych 2 razy tyle, ile wielokąt ma boków mniéy 4 (95), w dwóch zatem wielokątach o iednéyże liczbie boków kąty wewnętrzne iednego tyle wazą kątów prostych, ile ich wazą kąty wewnętrzne wielokąta drugiego. A że kąty iednego wielokąta są między sobą równe, i kąty drugiego wielokąta są także między

sobą równe, gdyż dwa te wielokąty są podług założenia foremne; będą więc kąty iednego równe kotom drugiego wielokąta; to iest, dwa te wielokąty będą równokątne.

2re. Ponieważ wielokąty te są foremne, więc boki iednego wielokąta są między sobą równe, i boki drugiego wielokąta, są także między sobą równe. Jeżeli więc bok ieden w 1szym wielokącie iest *np.* dwa razy większy od boku iednego w drugim; będzie też bok drugi w piérwszym, dwa razy większy od boku drugiego w 2gim wielokącie; i bok trzeci w 1szym dwa razy większy od boku 5go w 2gim wielokącie i t. d. to iest boki tych dwóch wielokątów będą między sobą proporcjonalne.

Kiedy więc dwa te wielokąty są równokątne i mają boki proporcjonalne, są tém samém podobne.

209. Twierd. *Dwa iakiekolwiek wielokąty np. dwa pięciokąty ABCDE, abcde fig 108. złożone z téżże saméy liczby trójkątów podobnych między sobą i podobnie utożonych, są sobie podobne; i odwrotnie.*

Dow. W dwóch trójkątach ABC, *abc* podobnych z założenia iest kąt $B = b$; kąt $ACB = acb$. Podobnież w trójkątach CAD, *cad* podobnych z założenia iest kąt $ACD = acd$; gdy więc iest $ACB = acb$, $ACD = acd$; więc $ACB + ACD = acb + acd$; czyli kąt $BCD = bcd$. Tymże sposobem okać można równość kątów CDE i *cde*, DEA i *dea*. Co się się tycze kątów BAE, *bue*, te są także sobie równe: gdyż piérwszy z nich składa się z kątów BAC, CAD, DAE równych kątom odpowiadającym *bac*, *cad*, *dae* z których składa się kąt drugi.

Nadto w trójkątach ABC i abc , ACD i acd , ADE i ade podobnych między sobą z założenia, iest:

$$AB: ab = BC: bc = AC: ac.$$

$$AC: ac = CD: cd = AD: ad.$$

$$AD: ad = DE: de = AE: ae.$$

Wszystkie te stosunki są równe: gdyż w pierwszym ciągu ostatni stosunek iest ten sam co pierwszy w drugim ciągu, ostatni zaś w drugim ciągu, iest ten sam co pierwszy w trzecim. Biorąc zatem te tylko stosunki, których wyrazy są bokami wielokątów, będzie $AB: ab = BC: bc = CD: cd = DE: de = AE: ae$. Dwa więc te wielokąty będąc równokątnemi, i mając boki odpowiadające proporcjonalne są podobne (189).

Odwrotnie. Gdy są dwa wielokąty podobne, składają się z jednéjże liczby trójkątów podobnych i podobnie ułożonych.

Dow. Niech będą dwa wielokąty $ABCDE$, $abcde$ podobne: z wierzchołka dwóch kątów A , a , odpowiadających sobie poprowadziwszy przekątne AC , AD , ac , ad ; trójkąty ABC i abc , ACD i acd , ADE i ade będą między sobą podobne. Iakoż w trójkątach ABC , abc kąt $B=b$ z założenia, i boki AB , BC są proporcjonalne bokom ab , bc z założenia; więc dwa te trójkąty są podobne (196) będzie więc $BC: bc = AC: ac$; i kąt $ACB = acb$ iako przyległe bokom proporcjonalnym BC , bc . Ze zaś podług założenia kąt $BCD = bcd$; będzie więc $BCD - ACB = bcd - acb$; czyli $ACD = acd$.

A że $BC: bc = CD: cd$ podług założenia,

$BC: bc = AC: ac$ z dowodzenia; więc

$CD: cd = AC: ac$.

Dwa więc trójkąty ADC , adc mając kąty ACD , acd równe, zawarte między bokami względem siebie proporcjonalnymi są sobie podobne (196), a w szczególności kąt $ADC = adc$, iako przyległe bokom proporcjonalnym CD i cd , będzie więc $CD : cd = AD : ad$. Tymże samym sposobem dowieść można podobieństwa innych trójkątów.

210. *Uwaga.* W dwóch jakichkolwiek wielokątach podobnych, w dwóch np. pięciokątach $ABCDE$, $abcde$ fig. 109, z dwóch końców któregośkolwiek boku np. AB i ab poprowadziwszy przekątne AD , AC , BD , BE , ad , ac , bd , be : łatwo byłoby okazać sposobem któregośmy użyłi w twierdzeniu poprzedzającym, że trójkąty ABC , ABD , ABE , których spólną podstawą jest bok AB wielokąta 1go, tudzież trójkąty abc , abd , abe , których spólną podstawą jest bok ab wielokąta 2go odpowiadający bokowi AB że mówię, te wszystkie trójkąty są między sobą podobne. I odwrotnie założwszy, że trójkąty te są między sobą podobne, łatwo byłoby okazać że wielokąty $ABCDE$, $abcde$ są także podobne.

211. *Zagad.* Na daney linii ab fig. 108. *wykręślić wielokąt podobny danemu BD .*

Rozw. W danym wielokącie BD prowadzę przekątne AC , AD ; na daney linii ab kręślę trójkąt abc podobny trójkątowi ABC ; na linii ac kręślę trójkąt acd podobny trójkątowi ACD , na linii ad kręślę trójkąt ade podobny trójkątowi ADE . Wielokąt $abcde$ będzie podobny danemu (209).

Sposób 2gi. Wierzchołki kątów danego wielokąta $ABCDE$ fig. 109. złączwszy z dwoma końcami któregośkolwiek boku np. AB przez prze-

kątne AC, AD, BD, BE i na danéy linii *ab* wykreśliwszy trójkąty *acb*, *adb*, *ueb* podobne względem trójkątów ACB, ADB AEB: punkt *d* złączyć z punktem *c* i *e*, liniami prostemi *dc*, *de*; wielokąt *abcde* będzie podobny danemu (210).

Sposób 5ci. Na boku AB danego wielokąta ABCDE *fig.* 108. wziąć linią *Ab*, równą linii danéy; z punktu *b* poprowadzić *bc* równoodległą od BC, aż do przecięcia się z przekątną AC w punkcie *c*; z punktu *c* poprowadzić *cd* równoodległą od CD, aż do przecięcia się z przekątną AD w punkcie *d*, z punktu *d* poprowadzić *de* równoodległą od DE, aż do przecięcia się z bokiem AE w punkcie *e*: wielokąt *Abcde* będzie szukany.

Gdyby dana linia *ab* dłuższa była od boku AB, na ten czas przedłużywszy bok AB tak, aby wraz z przedłużeniem równy był linii danéy, prowadząc iak wyżej równoodległe od boku BC, CD, DE, aż do przecięcia się z liniami AC, AD, AE przedłużonemi, wykreślimy wielokąt podobny danemu.

212. *Twierd.* W dwóch wielokątach podobnych ABCDE, *abcde* *fig.* 110. na dwóch odpowiadających sobie bokach AB, *ab*, wzięwszy dwa punkta G i g podobnie położone, to jest tak, aby było $BG: bg = BC: bc$; i poprowadziwszy linie GF, *gf* tak, aby kąt $FGB = fgb$; albo też tak, aby linie te GF, *gf*, przecinały boki DC i *dc* na części proporcjonalne bokom wielokąta; w obudwu przypadkach linie GF *gf* będą proporcjonalne bokom wielokątów: to jest, będzie $FG: fg = BC: bc$.

Dowód. W pierwszym przypadku, kiedy kąt $FGB = fgb$, poprowadziwszy przekątne CG,

cg ; w dwóch trójkątach CBG , cbg , kąt $B = b$ i $BG: bg = BC: bc$ podług założenia; więc dwa te trójkąty są sobie podobne (196), będzie zatem, $BG: bg = CG: cg$; a że iest.

$BG: bg = BC: bc$; więc $CG: cg = BC: bc$; i kąt $BCG = bcg$, kąt $BGC = bgc$. A że kąt $BCF = bcf$, iako odpowiadające w wielokątach podobnych, więc $BCF - BCG = bcf - bcg$; czyli kąt $GCF = gcf$; kąt $FGB = fgb$ podług założenia, kąt $BGC = bgc$ z dowiedzenia; więc $FGB - BGC = fgb - bgc$; czyli $FGC = fgc$.

Trójkąty zatem FGC , fgc są równokątne (191), a tém samém podobne: będzie więc $FG: fg = CG: cg$; a że $CG: bc$; więc $FG: fg = BC: bc$.

W 2gim przypadku, założywszy że linie FG , fg tak są prowadzone, iż przecinają boki DC , dc na części proporcjonalne bokom wielokątów, czyli że iest $FC: fc = BG: bg = BC: bc$; poprowadziwszy, iak wyżey przekątne CG , cg , i okazawszy, że dwa trójkąty CBG , cbg są podobne, będzie

$CG: cg = BG: bg$; a że podług założenia

$FC: fc = BG: bg$; więc $CG: cg = FC: fc$.

Dwa więc trójkąty CGF , cgf mające kąty przy C i c równe, zawarte między bokami względem siebie proporcjonalnemi, są podobne (196), a zatem $FG: fg = FC: fc = BC: bc$.

213. Twierd. Obwody dwóch wielokątów podobnych, są do siebie w stosunku dwóch boków odpowiadających sobie w tych wielokątach.

Dow. Ponieważ wielokąty $ABCDE$, $abcde$ fig. 110 są podobne, będzie więc.

$AB: ab = BC: bc = CD: cd = DE: de: EA: ea$; więc

$AB + BC + CD + DE + EA : ab + bc + cd + de + ea = AB : ab$; to jest; obwód wielokąta ABCDE do obwodu wielokąta $abcde$, iak bok 1wszego AB do boku ab w drugim wielokącie.

214. Twierd. *Powierzchnie wielokątów podobnych mają się iak kwadraty z boków odpowiadających.*

10d. Niech będą dwa trójkąty ABC, abc fig. 111. podobne, mamy dowieść, że powierzchnia trójkąta ACB, tak się ma do powierzchni trójkąta abc , iak kwadrat z boku $np.$ AC do kwadratu z boku ac , czyli, że jest trójkąt ACB: $acb = AC^2 : ac^2$.

Z wierzchołka kąta C i c spuściwszy CD i cd pierwszą prostopadłą do AB, drugą prostopadłą do ab ; dwa trójkąty ACD acd prostokątne przy D i d i w których kąt A równy kątowi a , są podobne (191), będzie więc.

CD: $cd = AC : ac$; a że pódług założenia

AB: $ab = AC : ac$, więc rozmnożywszy w tych dwóch proporcjach wyrazy sobie odpowiadające, będzie.

$AB \times CD : ab \times cd = AC \times AC : ac \times ac$; czyli

$AB \times CD : ab \times cd = AC^2 : ac^2$. Podzieliwszy dwa pierwsze wyrazy przez 2, będzie.

$\frac{AB \times CD}{2} : \frac{ab \times cd}{2} = AC^2 : ac^2$; to jest, poło-

wa iloczynu podstawy trójkąta ABC przez wysokość tegoż trójkąta, tak się ma do połowy iloczynu podstawy trójkąta abc przez wysokość tegoż trójkąta, iak kwadrat z boku AC do kwadratu z boku ac . A że iloczyny te równe są, pierwszy powierzchni trójkąta ABC, drugi powierzchni trójkąta abc (150) więc powierzchnie tych dwóch trójkątów mają się iak kwadraty z boków odpowiadających.

2re. Niech będą dwa iakiekolwiek wielokąty podobne, *np.* dwa pięciokąty $ABCDE$, $abcde$ *fig.* 108. Z wierzchołka kątów A , a , poprowadziwszy przekątne AC , AD , ac , ad ; obadwa te wielokąty podzielone będą na równą liczbę trójkątów podobnie ułożonych i podobnych (209); będzie zatem podług pierwszey części niniejszego twierdzenia, trójkąt.

$$ABC: abc = BC^2: bc^2.$$

$$ACD: acd = CD^2: cd^2$$

$ADE: ade = DE^2: de^2$ A że dla podobieństwa wielokątów iest.

$$BC: bc = CD: cd = DE: de; \text{ a t\acute{e}m sam\acute{e}m}$$

$$BC^2: bc^2 = CD^2: cd^2 = DE^2: de^2, \text{ wi\acute{e}c b\acute{e}dzie te\acute{z}}$$

$ABC: abc = ACD: acd = ADE: ade$. A zatem summa wszystkich poprzedników do summy wszystkich następników iak którykolwiek poprzednik do swego następnika; to iest.

$ABC + ACD + ADE: abc + acd + ade = ABC: abc$; czyli $ABCDE: abcde = ABC: abc$. A że $ABC: abc = BC^2: bc^2$, wi\acute{e}c $ABCDE: abcde = BC^2: bc^2$; to iest, powierzchni\acute{e} dwóch wielokątów podobnych mają się iak kwadraty z boków odpowiadających.

Uwaga. Stosunek kwadratowy zowie się inaczej stosunkiem *dwumno\acute{z}nym*, *ratio duplicata*. Przeto te\acute{z} twierdzenie poprzedzające zwyczajnie tak się wyraża: *Dwa wielokąty podobne są do siebie w stosunku dwu-mno\acute{z}nym boków odpowiadających.*

215. Zagad. Mając dane dwa wielokąty podobne, wykreślić trzeci podobny któremu kolwiek z dwóch danych, i któregoby powierzchnia

równa była summie lub różnicy dwóch wielokątów danych.

Rozw. 1. Wykreśliwszy trójkąt ABC fig. 112. prostokątny przy C , w którymby ramiona kąta prostego AC , BC były bokami odpowiadającymi dwóch danych wielokątów P i Q , na przeciwprostokątnéj AB wykreślny wielokąt R podobny wielokątom P i Q , i w którymby bok AB był odpowiadający bokom AC , BC w dwóch wielokątach danych: wielokąt R jest szukany: gdyż ponieważ wielokąty te są podobne, więc podług twierdzenia poprzedzającego $P : Q = AC^2 : BC^2$; a tém samém,

$P + Q : Q = AC^2 + BC^2 : BC^2$. A że też jest $Q : R = BC^2 : AB^2$; więc złożywszy te dwie proporcye, będzie $P + Q : R = AC^2 + BC^2 : AB^2$. W téj proporcyi ponieważ 2gi poprzednik $AC^2 + BC^2$ równy jest swemu następnikowi (162); więc i poprzednik 1szy $P + Q$ równy jest także swojemu następnikowi R ; to jest, dwa dane wielokąty P i Q równe są znalezionemu R .

2. Chcąc znaleźć wielokąt Q podobny dwóm wielokątom danym P i R , i któregoby powierzchnia równa była różnicy tychże dwóch wielokątów danych, trzeba wykreślić trójkąt prostokątny ABC , dając mu za jedno ramie kąta prostego AC bok wielokąta mniejszego P , a za przeciwprostokątną AB bok odpowiadający wielokąta większego R : BC będzie bokiem odpowiadającym wielokąta szukanego Q : gdyż ponieważ wielokąty R i P są podobne, będzie $R : P = AB^2 : AC^2$; a tém samém.

$R - P : P = AB^2 - AC^2 : AC^2$. A że jest także $P : Q = AC^2 : BC^2$; więc złożywszy te dwie proporcye, będzie $R - P : Q = AB^2 - AC^2 :$

BC^2 . W téy proporcyi poprzednik 2gi $AB^2 - AC^2$ równy iest swemu następnikowi BC^2 (169); więc i poprzednik 1wszy $R - P$ równy iest także swemu następnikowi Q ; to iest, różnica powierzchni dwóch danych wielokątów R i P równa iest wielokątowi znalezionemu Q .

216. Zagad, *Wykreślić wielokąt podobny danemu, i któregoby powierzchnia do powierzchni danego, miała się w stosunku danym; lub któregoby powierzchnia równa była danemu kwadratowi.*

Rozw. 1. Dajmy że powierzchnia danego wielokąta X fig. 113, ma być do powierzchni wielokąta szukanego w stosunku dwóch iakichkolwiek linii prostych M i N . Poprowadziwszy linią AB iakieykolwiek długości, i wzięwszy na niéy dwie części AD i BD , któreby się miały do siebie w stosunku dwóch linii M i N ; na linii AB iako na średnicy wykreślić półkole, i z punktu D wyprowadzić DC prostopadłą do AB . Poprowadziwszy potém cięciwy AC , BC , i wzięwszy CE równą ce bokowi danego wielokąta X ; z punktu E poprowadzić EF równoodległą od AB , aż do przecięcia się w punkcie F z cięciwą CB : linia CF będzie bokiem szukanego wielokąta odpowiadającym bokowi ce : to iest, na linii CF wykreśliwszy wielokąt podobny danemu, wielokąt ten będzie szukany. Jakoż w trójkacie ACB , iest $AC: CB = EC: FC$ (178), a tém samem

$$AC^2: BC^2 = EC^2: FC^2. \text{ A że}$$

$AC^2: BC^2 = AD: BD$ (164); więc złożwszy dwie te proporcye będzie $EC^2: FC^2 = AD: BD$. Ze zaś $AD: BD = M: N$ podług wykreślenia, więc $EC^2: FC^2 = M: N$; a tém samém

wielokąt wykreślony na boku EC, czyli *ec*, to jest, wielokąt dany X, ma się do podobnego wielokąta wykreślonego na boku FC, iak linia M do linii N: gdyż wielokąty podobne mają się iak kwadraty z boków odpowiadających (214).

Gdyby bok *ec* wielokąta X większy był od AC, na ten czas linią CA przedłużylibyśmy do *e* tak, aby $Ce = ce$: w reszcie wykreślenie i dowodzenie byłoby to samo.

2re. Chcąc wykreślić wielokąt podobny danemu X, któregoby powierzchnia równa była danemu kwadratowi N^2 , trzeba naprzód wielokąt dany X zamienić na kwadrat M równy mu co do powierzchni; potem do boków tych dwóch kwadratów, to jest do M i N, tudzież do boku *ec* danego wielokąta X znaleźć 4tą ieometrycznie proporcjonalną; ta będzie bokiem szukanego wielokąta odpowiadającym bokowi *ec*. Jakoż oznaczywszy 4tą ieometrycznie proporcjonalną głoską P, a wielokąt na niéy wykreślony głoską Z, ponieważ dwa wielokąty X i Z są podobne z wykreślenia, będzie więc $X : Z = ec^2 : P^2$; — : — : — : — : — : — Λ .

A że podług wykreślenia M: $N = ec : P$, a tém samém $M^2 : N^2 = ec^2 : P^2$, złożywszy tę proporcją zproporcją oznaczoną głoską Λ , będzie $X : Z = M^2 : N^2$.

W téy proporcyi ponieważ poprzednik 1szy X jest równy z wykreślenia poprzednikowi 2mu M^2 , więc i następnik 1wszy Z, jest także równy następnikowi 2mu N^2 ; to jest, wielokąt znaleziony, równy jest co do powierzchni danemu kwadratowi.

217. Twierd. Z punktu C wziętego za kołem fig. 114. poprowadziwszy dwie linie CA,

CB przecinaiać okrąg w punktach D i A, B i F; będzie $CA: CB = CF: CD$.

Dowod. Poprowadziwszy dwie cięciwy AF, BD, dwa trójkąty ACF, BCD, mają kąt C spólny, kąty A i B równe, gdyż obudwu miarą jest połowa łuku DF: więc dwa te trójkąty są podobne; będzie zatem $CA: CB = CF: CD$.

Uwaga. W proporcyi téy $CA: CB = CF: CD$, sieczna iedna CA i część iéy za kołem CD, są wyrazami skrajnemi; sieczna druga CB i część iéy za kołem CF, są wyrazami średniemi proporcyi; to iest, tak się ma sieczna 1wsza do 2giéy, iak część za kołem sieczney 2giéy, do części za kołem siecznéy 1wszéy. Stosunek takowy nazywa się odwrotny, *ratio inversa*, dla różnicy od stosunku prostego *directa*, któryby był na ten czas, gdyby się miała sieczna 1wsza do 2giéy, iak część za kołem siecznéy 1wszéy, do części za kołem drugiéy. Dla tego też poprzedzaiące twierdzenie zwyczajnie tak się wyraża: z punktu wziętego za kołem poprowadziwszy dwie sieczne; sieczne te są do siebie w stosunku odwrotnym części swoich za kołem.

218. *Twierd. Z punktu C wziętego za kołem, poprowadziwszy styczną CB fig. 115, i sieczną CA, przecinaiać okrąg w punktach A i D; będzie styczna CB średnią ieometrycznie proporcjonalną między całą sieczną CA, i częścią iéy za kołem CD; to iest, będzie $CA: CB = CB: CD$.*

Dowod. Poprowadziwszy dwie cięciwy BA, BD, dwa trójkąty ABC, BDC mają kąt C spólny, kąt A = DBC, gdyż obadwa mają za miarę połowę łuku BD (126), a zatem dwa te trójkąty są podobne; będzie więc $CA: CB = CB: CD$.

219. *Twierd.* Wziąwszy w kole punkt *C* fig. 116. od upodobania, i przez ten punkt poprowadziwszy dwie cięciwy *AB*, *DF* w punkcie *C* przecinające się; części tych cięciw będą do siebie w stosunku odwrotnym; to jest będzie $AC:DC=FC:BC$.

Dowod. Poprowadziwszy cięciwy *FA*, *BD*, trójkąty *CFA*, *CBD* mają kąty przy *C* równe, kąt *A* równy kątowi *D*, gdyż obadwa mają za miarę połowę łuku *BF*: więc dwa te trójkąty są podobne; będzie zatem $AC:DC=FC:BC$.

220. *Uwaga.* Porównawszy to twierdzenie z twierdzeniem wyżey podaném (217), łatwo jest postrzedz, że one są dwoma przypadkami następującego twierdzenia:

Gdy dwie linie proste przecinające się z sobą w punkcie wziętym w kole lub za kołem, przedłużone będą tak aby każda z nich przecinała okrąg we dwóch punktach; odległości spólnego ich przecięcia się od punktów przecięcia się ich z okręgiem są do siebie w stosunku odwrotnym.

221. *Wniosek.* Gdyby cięciwa *AB* fig. 117. przechodziła przez środek koła, a cięciwa *DF* była do nięj prostopadła, a tém samém w punkcie *C* na dwie równe części podzieloną (108); na ten czas proporcya $AC:DC=FC:BC$ (219), zamieniłaby się w następującą: $AC:DC=DC:BC$; gdyż $FC=DC$; to jest, *DC* jest średnią geometrycznie proporcjonalną między odcinkami *AC* i *BC* średnicy *AB*: cośmy już wyżey innym sposobem okazali (202).

222. *Zagad.* Dana linią *BC* fig. 118. po-
dzielić w stosunku średnim i skrajnym: to jest, po-

dzielić tę linią na dwie części tak, aby część większa CF była średnią ieometrycznie proporcjonalną między całą linią BC i częścią mniejszą BF, czyli aby było $BF : CF = CF : CB$.

Rozw. Z końca B linii daney poprowadzwszy BS prostopadłą do BC i równą połowie linii BC; punkt S z drugim końcem C daney linii złączyć linią prostą SC; z punktu S iako ze środka promieniem SB nakreślić koło którego okrag linią SC przecina w punkcie D; nakoniec z punktu C iako ze środka promieniem CD wykreślić łuk DF, który linią daną BC podzieli w punkcie F na części szukane.

Gdyż ponieważ BC iako prostopadła z końca promienia SB wyprowadzona, jest styczna z kołem (114), przedłużywszy zatem CS do A, będzie $CD : CB = CB : CA$ (218). Azatem

$$CB - CD : CA - CB = CD : CB.$$

Ze zaś podług wykreślenia $CB - CD = CB - CF = BF$; a linią BS równą połowie BC, a tém tamém $BC = 2BS = AD$; będzie więc

$$CA - CB = CA - AD = CD = CF;$$

ostatnia zatem proporcya zamieni się w następującą. $BF : CF = CF : CB$.

225. Zagad. Nakreślić koło, któreby okrag przeszedł przez dwa dane punkta A i D, i stykał się z daną linią CE fig. 119.

Rozw. Złączywszy dwa dane punkta linią prostą AD i przedłużywszy ją aż do przecięcia się z linią daną CE w punkcie C; między liniami CA i CD znaleźć średnią ieometrycznie proporcjonalną, którą będzie linią CF, podług tego co się wyżej powiedziało (204) Z punktu C pro-

mieniem CF wykreślić łuk FB, przecinający linię daną CE w punkcie B. Nakoniec wykreślić koło, to któregooby okrąg przechodził przez trzy punkta A, B, D sposobem podanym wyżej (111), koło to będzie szukane: iakoż podług wykreślenia $AC: CF = CF: CD$; czyli $AC: CB = CB: CD$: gdyż $CB = CF$ z wykreślenia. A że AC jest sieczną koła ADB, a CD jest częścią ięć za kołem, więc CB jest styczna tegoż koła (218). Gdy więc okrąg znalezione koła przechodzi przez dwa dane punkta A i D, i dotyka się linii daney CE w punkcie B, koło zatém ADB jest szukane.

Gdy linia AD jest od CE równoodległa, na ten czas punkt szukany B oznaczv prostopadłą ze środka linii AD spuszczone do CE.

R O Z D Z I A Ł VIII.

o Wielokątach w koło wpisanych i opisanych na kole.

224. *Uwaga 1.* Powiedzieliśmy wyżej (111), że mając dane trzy punkta, byle nie w linii prostej, można zawsze wykreślić koło, któregooby okrąg przechodził przez te trzy punkta. Z tego wypada, że mając dany iakikolwiek trójkąt ABC fig. 120 można zawsze wykreślić koło, któregooby okrąg przechodził przez wierzchołki trzech kątów tego trójkąta: taki trójkąt zowie się trójkątem w koło wpisany, *triangulum circulo inscriptum*. W powszechności każdy wielokąt nazywa się wielokątem w koło wpisany, gdy przez wierzchołki wszystkich iego kątów przechodzi okrąg iednego koła; koło zaś takie zowie się kołem opisanem na wielokącie.

225. *Uwaga. 2.* Zastanowiwszy się nad trójkątem ABC w koło wpisany, można niektóre

iego własności wyżej dowiedzione innym sposobem okazać. I tak *10d*, trzy kąty trójkąta ważą dwa kąty proste: gdyż każdy z nich ma za miarę połowę łuku zawartego między jego ramionami (125); a że łuki między ramionami tych trzech kątów zawarte równają się całemu okręgowi, więc miarą tych trzech kątów jest połowa okręgu, czyli miara dwóch kątów prostych.

12re. Gdy dwa kąty B i C są równe, połowa łuku AC równa będzie połowie łuku AB , a tém samym i cały łuk AC równy całemu łukowi AB : gdy zaś łuki te są równe, będą też i cięciwy ich AC , AB równe (106), a że cięciwy te są bokami trójkąta ABC , więc trójkąt ten jest równoramienny.

5cie. Odwrotnie równość boków AC , AB ciągnie za sobą równość łuków AC , AB i równość kątów B i C .

4te. Gdy trzy kąty A , B , C są równe, łuki też CB , CA , AB będą równe, i cięciwy tych łuków CB , CA , AB które tu są bokami trójkąta, będą równe: to jest, trójkąt będzie równoboczny,

5te. Odwrotnie równość boków CB , CA , AB , ciągnie za sobą równość łuków CB , CA , AB , i równość kątów A , B , C .

6te. Jeżeli kąt $A > B$ będzie też łuk $CB > AC$, a tém samym i cięciwa CB , która tu jest bokiem trójkąta, większa od cięciwy AC (122), i t. d.

226. Zagad. *Wewnątrz danego trójkąta ABC fig. 121. wykreślić koło takie, aby boki trójkąta były stycznymi tego koła.*

Rozw. Dwa którekolwiek kąty A i B podzielwszy na dwie równe części (46), przez linie AS, BS przecinające się w punkcie S, i z punktu S do którekolwiek boku trójkąta *np.* do boku AB spuściwszy prostopadłą SD, punkt S będzie środkiem, a prostopadła SD promieniem koła szukanego.

Gdyż spuściwszy do innych dwóch boków prostopadłe SE, SF, w dwóch trójkątach ASD, ASE, bok AS jest spółny, kąty przy A równe z wykreślenia, kąt $ADS = AES$ iako proste: więc dwa te trójkąty przystaną do siebie (26), a w szczególności $SD = SE$. Tymże sposobem z trójkątów SDB, SFB mogących do siebie przyrastać dowiedziemy, że $SF = SD$. Trzy więc prostopadłe SD, SE, SF są sobie równe. Okrąg zatem koła z punktu S promieniem SD nakreślonego, przejdzie przez punkta E i F; i boki trójkąta ABC w punktach D, E, F, będą stycznymi z kołem (114.)

Koło wewnątrz trójkąta wykreślone, którego boki trójkąta są stycznymi, zowie się kołem w trójkąt wpisane: a trójkąt zowie się trójkątem opisanym na kole; *Triangulum circumlo circumscriptum*. W powszechności każdy wielokąt, którego wszystkie boki są stycznymi iednego koła wykreślonego wewnątrz wielokąta, zowie się *wielokątem na kole opisanym*, a koło takie zowie się kołem wpisane w wielokąt.

Poprzedzające więc zagadnienie można inaczej tak wysłowić: *wpisać koło w dany trójkąt*.

227. *Uwaga.* Ponieważ przez trzy punkta A, C, B *fig.* 120, okrąg tylko iednego koła przechodzić może (112); więc wzięwszy punkt 4ty D za kołem, rzeczą jest widoczną, że okrąg koła ACB nie może przejść przez punkt D, a tém sa-

mém czworokąt ADCB nie może być w koło wpisany. Lecz gdyby 4ty punkt F znajdował się na okręgu koła ACB, czworokąt AFCB byłby w koło wpisany. Stąd się okazuje, że nie każdy czworokąt, a tém bardziéj nie każdy wielokąt mający boków więcéj niż 4, może być w koło wpisany.

228. Twierd. *Każdy wielokąt foremny może być w koło wpisany i opisany na kole.*

Dowód. Niech będzie iakikolwiek wielokąt foremny ABCDEF *fig.* 122. Nakrészmy koło któregoby okrąg przechodził przez trzy wierzchołki trzech przyległych kątów, A, B, C; niech punkt S będzie środkiem tego: koła mamy okazać, że okrąg iego przejdzie przez wszystkie wierzchołki kątów wielokąta. Jakoż z punktu S poprowadzimy linie proste SA, SB, SC, SD i t. d. do wszystkich wierzchołków kątów wielokąta, trzy pierwsze linie SA, SB, SC są podług wykrészlenia, promieniami tego koła, a tém samém równe: więc dwa trójkąty SBA, SBC, w których bok SB spólny, bok SA = SC, bok BA = BC, przystaną do siebie (28), a w szczególności kąt SBA = SBC; a zatém ieden z nich *np.* SBC iest połową obudwu, czyli kąt SBC iest połową kąta ABC; że zaś kąt ABC = BCD, gdyż wielokąt ABCE jest foremny; więc kąt SBC iest także połową kąta BCD. Nadto w trójkacie SBC bok SB = SC z wykrészlenia; więc kąt SBC = SCB, zatém i kąt SCB iest połową kąta BCD, a tém samém kąt SCD iest drugą połową tegoż kąta BCD. Więc kąt SCB = SCD. W dwóch zatém trójkątach SCB, SCD, bok SC iest spólny, bok CB = CD z założenia, i kąty między temi bokami zawarte

SCB, SCD równe: więc dwa te trójkąty przystaną do siebie (24) a w szczególności bok $SB = SD$: a zatem okrag przechodzący przez 3 punkta A, B, C, przejdzie także i przez punkt D. Tymże sposobem okazać można, że okrag przechodzący przez 3 punkta B, C, D, przejdzie także przez punkt E i t. d. Więc ten sam okrag który przechodzi przez punkta A, B, C, przejdzie przez punkta D, E, F, to jest, przez wszystkie wierzchołki kątów wielokąta.

2re. Ze środka S koła opisanego na wielokącie, spuściwszy prostopadłe SM, SN i t. d. do boków wielokąta, wszystkie te prostopadłe będą między sobą równe: gdyż boki wielokąta są cięciwami koła opisanego: cięciwy te są między sobą równe, wielokąt bowiem ABCDEF jest foremny; a zatem odległości tych cięciw od środka koła, to jest, prostopadłe SM, SN i t. d. są między sobą równe (124). Wziąwszy więc linią SM za promień i z punktu S iako ze środka nakręśliwszy koło, okrag tego koła przejdzie przez wszystkie punkta M, N, O i t. d., i boki wielokąta w punktach M, N, O i t. d. będą styczne tego koła (114), a zatem koło to będzie wpisane w wielokąt.

229. *Uwaga.* Punkt S spólny środek koła wpisanego w wielokąt i na nim opisanego, może być także uważany iako środek wielokąta, dla téj przyczyny kąty ASB, BSC i t. d. zawarte między dwoma promieniami do końców boków wielokąta poprowadzonymi, zowią się kątami we środku wielokąta.

Wszystkie kąty we środku wielokąta foremnego, są między sobą równe: gdyż cięciwy AB,

BC i t. d., a tém samym i łuki AB, BC i t. d. będące miarami tych kątów, są równe. A że wszystkie te kąty ważą 4 kąty proste (16), więc iednego ważność znajdzie się podzieliwszy 4 przez liczbę boków wielokąta. I tak np. w ośmio- kacie foremnym ieden kąt we środku iest $\frac{1}{8}$ czte- rech kątów prostych czyli $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ iednego kąta pro- stego i t. d.

250. *Wniosek.* A stąd wypada, że wpisać w koło wielokąt foremny o iakiéykolwiek liczbie boków, iest to samo, co podzielić okrąg koła danego na tyle łuków równych, ile wielokąt mieć powinien boków, i poprowadzić cięciwy tych łuków; cięciwy te będą bokami wielokąta foremne- go w koło wpisanego: gdyż iód boki AB, BC i t. d. iako cięciwy łuków równych, są sobie równe.

2re. Trójkąty ABS, BCS, CDS i t. d. przy- staną do siebie (28), więc kąty SBA, SBC, SCB, SCD i t. d. są równe: a tém samym i kąty ABC, BCD i t. d. będą sobie równe. A zatem figura ABCDEF będzie wielokątem foremnym.

251. Zagad. *W dane koło wpisać trójkąt równoboczny.*

Rozw. Ponieważ trójkąt równoboczny iest wielokątem foremnym mającym trzy bo- ki, trzeba więc okrąg koła danego podzielić na 3 części równe; a cięciwa 3ciéy części okręgu bę- dzie bokiem trójkąta szukanego (250); albo też okrąg podzielić na 6 części równych, a cięciwa dwóch takowych części, będzie bokiem trójkąta szukanengo: gdyż $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Aby zaś podzielić okrąg na 6 części równych, trzeba w daném kole popro- wadzić cięciwę równą promieniowi tegoż koła;

cięciwa ta odetnie łuk równy szóstéj części okręgu.

Jakoż niech będzie sześciokąt foremny *ABCDEF* fig. 123. w koło wpisany: na okazanie że bok tego sześciokąta, będący cięciwą szóstéj części okręgu, iest równy promieniowi tegoż koła, poprowadźmy promienie *SA*, *SB*: w trójkącie *ABS*, kąt *ASB*, we środka sześciokąta iest $\frac{1}{6}$ częścią 4 kątów prostych, czyli $\frac{4}{6}$ lub $\frac{2}{3}$ iednego prostego (250); więc dwa kąty *SAB*, *SBA* ważą resztę do 2 kątów prostych: czyli kąt *SAB* + *SBA* = $2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ kąta prostego. A że kąty te są równe; gdyż *SA* = *SB*; więc każdy z nich waży połowe $\frac{4}{3}$, to iest, kąty *SAB*, *SBA* ważą po $\frac{2}{3}$ kąta prostego. Trójkąt zaś *ASB*, niaący wszystkie trzy kąty równe, iest równoboczny: więc bok *AB* = *SA*; to iest, *bok sześciokąta w koło wpisanego równy iest promieniowi tegoż koła*. Poprowadziwszy linie *AC*, *CE*, *EA*, z których każda iest cięciwą dwóch szóstych części okręgu, będzie *ACE* trójkąt równoboczny w koło wpisany.

252. *Uwaga*. Podaliśmy wyżéj (110), sposób podzielenia łuku danego na dwie równe części. Kiedy więc okrag koła podzielony być może na 6 części równych, można go także podzielić na 12 części równych: na ten koniec dosyć będzie łuk równy szóstéj części okręgu podzielić na dwie równe części, iedna takowa część będzie równa dwunastéj części okręgu. Podzieliwszy znówu łuk równy dwunastéj części okręgu na dwie części równe, będziemy mieli 24tą część okręgu i t. d. Można więc okrag podzielić na części równych 12, 24, 48 i t. d. czyli, co na

iedno wychodzi, w dane koło można wpisać wielokąty foremne o 12, 24, 48 i t. d. bokach.

255. *Uwaga. 2.* W czworokącie ABCS boki przeciwne są sobie równe, a zatem czworokąt ten jest równoległobokiem (79): będzie więc $AC^2 + BS^2 = AB^2 + BC^2 + CS^2 + AS^2$ (176); czyli $AC^2 + BS^2 = 4BS^2$; gdy linie AB, BC, CS, AS, są między sobą równe; a zatem i kwadraty ich są także równe. W ostatniem równaniu odiawszy po obu stronach BS^2 , zostanie $AC^2 = 3BS^2$; to jest, AC^2 trzy razy większy od BS^2 . A zatem $BS^2 : AC^2 = 1 : 3$, a tém samém $BS : AC = 1 : \sqrt{3}$, to jest, promień koła tak się ma do boku trójkąta równobocznego w to koło wpisanego, iak iedność do pierwiastku liczby 3. A stąd wypada iód, że mając wiadomy promień koła, można będzie wyrachować bok trójkąta równobocznego w toż koło wpisanego; i odwrotnie; że ponieważ prawdziwy pierwiastek liczby 3 nie może być wyrażony w liczbach, więc promień koła i bok trójkąta równobocznego w toż koło wpisanego, są dwie linie niespółmierne (58).

254. *Zagad. Wdane koło wpisać kwadrat.*

Rozw. W daném kole poprowadziwszy dwie średnice AC, BD do siebie prostopadłe fig. 124, i końce ich połączywszy cięciwami AB, BC, CD, DA, czworokąt ABCD w koło wpisany jest kwadratem szukanym: gdyż wszystkie kąty iako zawarte w półkolu (128) są proste; wszystkie boki są między sobą równe, bo są cięciwami czterech łuków równych, iako będących miarą 4 kątów prostych, mających swój wierzchołek w punkcie S.

255. *Uwaga.* Wpisawszy w koło kwadrat, łatwo będzie można wpisać wielokąty foremne o 8, 16, 32 it. d. bokach używając sposobu wyżej podanego (252).

256. 2. *Uwaga.* W trójkącie ASB prostokątnym przy S, jest $AB^2 = AS^2 + BS^2$; czyli $AB^2 = 2 BS^2$; gdyż $AS = BS$ iako promienie; to jest, kwadrat z boku AB, czyli kwadrat w koło wpisany, jest dwa razy większy od kwadratu z promienia tegoż koła; a zatem $BS^2 : AB^2 = 1 : 2$, a tém samém $BS : BA = 1 : \sqrt{2}$: to jest, promień koła tak się ma do boku kwadratu w toż koło wpisanego, iak iedność do piérwiastku liczby 2. Maiąc zatem wiadomy promień koła, można będzie wyrachować bok kwadratu w koło wpisanego: i odwrotnie.

257. *Zagad.* W koło dane wpisać pięciokąt foremny.

Rozw. Aby zagadnienie to rozwiązać, trzeba okrag koła danego podzielić na 5 części równych; a cięciwa piątéy części okręgu, będzie bokiém pięciokąta szukanego: albo też podzielić okrag na 10 części równych, a cięciwa dwóch dziesiątych części okręgu będzie bokiém pięciokąta szukanego: gdyż $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$: trzeba więc znaleźć cięciwę dwóch dziesiątych części okręgu, albo co na iedno wychodzi, bok dziesięciokąta foremnego w koło wpisanego.

Daymy, że AB fig. 125 jest bokiém dziesięciokąta foremnego w koło wpisanego. Ze środka koła S poprowadziwszy dwa promienie SA, SB do końców A i B boku dziesięciokąta, kąt we środku tego wielokąta ASB jest dziesiątą częścią 4 kątów prostych, czyli $\frac{4}{10}$ albo $\frac{2}{5}$ iednego

kąta prostego: więc w trójkącie ASB, dwa drugie kąty SAB, SBA ważą resztę do dwóch kątów prostych, to iest, ważą obadwa razem $\frac{3}{2}$ kąta prostego: a że kąty te SAB, SBA są równe, bo SA, SB są promienie, więc ieden z nich *np.* kąt SAB waży połowę $\frac{3}{2}$, to iest waży $\frac{3}{4}$ kąta prostego: a że kąt ASB waży $\frac{2}{2}$ kąta prostego, więc kąt SAB iest dwa razy większy od kąta ASB. Podzieliwszy więc kąt SAB na dwie równe części przez linią AC, będzie kąt CAS = ASB, a tém samém w trójkącie ACS, będzie bok AC = CS.

W trójkącie ABC kąt przy B, iakośmy okazali wyżéy, waży $\frac{3}{4}$ kąta prostego; kąt CAB waży $\frac{2}{2}$ kąta prostego z wykréslenia: więc óci kąt ACB waży resztę do dwóch kątów prostych: to iest, waży $\frac{3}{4}$ kąta prostego; a zatém trójkąt ABC mający przy podstawie BC dwa kąty równe, iest równoboczny, będzie więc AC = AB; więc trzy te linie AC, CS, AB są między sobą równe: znalazłszy więc iedną z nich, znajdziemy tém samém i dwie inne.

Dwa trójkąty ASB, ACB mają kąt przy B spólny; kąt ASB = CAB z wykréslenia: a zatém są podobne, będzie więc AS: AB = AB: BC; czyli, BS: CS = CS: BC; gdyż AS = BS, AB = CS: to iest, promień BS w punkcie C podzielony iest w stosunku średnim i skrajnym (222), i bok 10 kąta AB równa się odcinkowi CS, który iest większy od drugiego odcinka CB: gdy bowiem w ostatniéy proporcyi poprzednik piérwszy BS większy iest od swego następnika CS, więc i poprzednik drugi CS musi być większy od swego następnika CB. Chcąc zatém wpisać pięciokąt foremny w dane koło, trzeba naprzód promień danego koła podzielić w sto-

sunku średnim i skrajnym: odcinek większy promienia tak podzielonego, będzie cięciwą 10tę części okręgu: poprowadziwszy potem cięciwę dwóch dziesiątych części okręgu, ta będzie bokiem pięciokąta szukanego.

Uwaga. Wpisawszy w koło pięciokąt dziesięciokąt foremny, łatwo będzie w to samo koło wpisać wielokąty foremne o 20, 40, 80 i t. d. bokach sposobem wyżéy podanym.

W powyższym sposobie dochodzenia boku dziesięciokąta foremnego w koło wpisanego, przypuszczamy, że bok ten iest już znaleziony, i przez ciąg rozumowań dochodzimy na końcu, iż bok ten równa się większéy części promienia podzielonego w stosunku średnim i skrajnym. W następującym sposobie dowodzenia teyże prawdy przypuszczenie takowe nie ma mieysca; lecz za to przpuścić należy iako rzecz skądinąd wiadomą i potrzebuującą tylko dowodzenia, że większa część promienia podzielonego w stosunku średnim i skrajnym równa się bokowi dziesięciokąta foremnego w koło wpisanego.

Niech będzie promień SB podzielony w punkcie C w stosunku średnim i skrajnym. Wziąwszy cięciwę $AB = CS$, i poprowadziwszy SA , CA ; ponieważ podług założenia $BS : CS = CS : BC$, a $AB = CS$ z wykręślenia, będzie więc $BS : AB = AB : BC$; trójkąty zatem SBA , CBA są podobne (196), a tém samém kąty przeciwne bokom proporcjonalnym są równe; to iest kąt $S = CAB$, i kąt $SAB = ACB$: a że kąt $SAB = B$, gdyż trójkąt SBA iest równoramienny, więc i kąt $ACB = B$, a tém samém bok $AB = AC$; że zaś $AB = CS$ z wykręślenia, więc $AC = CS$: trójkąt zatem

ACS iest równoramienny, a tém samym kąt $S = CAS$.

Lecz kąt $ACB = S + CAS$ (85); czyli

kąt $SAB = 2S$; a tém samym

kąt $B = 2S$.

W ostatnich dwóch równaniach dodawszy strony odpowiadające, będzie

Kąt $SAB + B = 4S$. Dodawszy po obu stronach kąt S , będzie kąt $SAB + B + S = 5S$; to iest, w trójkącie SBA summa wszystkich trzech kątów iest 5 razy większa od kąta S , czyli co na iedno wychodzi, kąt S iest piątą częścią trzech kątów trójkąta: a że trzy kąty trójkąta ważą dwa kąty proste; więc kąt S iest piątą częścią dwóch kątów prostych, czyli dziesiątą częścią 4 kątów prostych; a tém samym łuk AB będący miarą kąta S , iest dziesiątą częścią całego okręgu, więc cięciwa łuku tego AB równa z wykręślenia większey części promienia podzielonego w stosunku średnim i skrajnym, iest bokiem dziesięciokąta foremnego w koło wpisane.

258. Zagad. *Wpisać w koło wielokąt foremny o 15 bokach.*

Rozw. Bok sześciokąta czyli promień koła iest cięciwą 6tęj części okręgu; bok dziesięciokąta iest cięciwą 10 tej części okręgu. Różnica między $\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{10}$ iest $\frac{1}{15}$. Więc z punktu A przeniosłszy bok dziesięciokąta od A do D , i promień koła od A do E , łuk $DE = AE - AD$, czyli łuk DE iest różnicą między $\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{10}$ częścią okręgu, a tém samym iest $\frac{1}{15}$ częścią okręgu. Więc cięciwa tego łuku będzie bokiem piętnastokąta foremnego w koło wpisane.

Uwaga. Wpisawszy w koło piętnastokąt foremny, łatwo będzie w to samo koło wpisać wielokąty foremne o 30, 60, 120 i t. d. bokach sposobem wyżey podanym.

239. *Uwaga.* 2. W powyższych zagadnieniach podaliśmy sposób podzielenia okręgu, 16d na części równych 3, 6, 12 i t. d.; 2re, na 4, 8, 16 i t. d.; 5cie, na 5, 10, 20 i t. d.; 4te, na 15, 50, 60 i t. d.

Są także sposoby dzielenia okręgu na inne części równe, a mianowicie na 25, 50, 100, 200, 400 i t. d.; na 45, 90, 180, 560 i t. d.; lecz sposoby te w Jeometrii Elementarney wyłożone być nie mogą.

240. Część $\frac{1}{360}$ okręgu zowie się *stopniem gradus*. Wprowadzono ten podział okręgu na stopnie dla łatwiejszego oznaczania wielkości kątów, których miarą są łuki między ramionami zawarte, iekośmy powiedzieli wyżey (119); a dla większey dokładności każdy stopień dzieli się jeszcze na 60 części równych zwanych *minutami pierwszemi*, *minuta prima*, każda minuta na 60 części równych zwanych *sekundami*, *minuta secunda*, każda sekunda na 60 części równych zwanych *tercyami*, *minuta tertia* i t. d. Zero położone u góry z prawey strony liczby iakięy oznacza stopnie, a znamie jedno, dwa, trzy i t. d. także położenie mające, oznacza minuty, sekundy, tercyę i t. d. np. łuk iakikolwiek $a = 37^{\circ}$, 15, 24, znaczy, że łuk ten ma stopni 37, minut 15, i sekund 24.

Ponieważ miarą kąta prostego jest czwarta część okręgu (120), więc kąt prosty ma 90 stopni; kąt rozwarty więcęy a kąt ostry mnięy niż 90 stopni.

Można było inną iakąkolwiek część okręgu wziąć za stopień: zgodzono się iednak na część $\frac{1}{360}$ dla téy podobno przyczyny, że liczba 360 iest podzielna przez wszystkie liczby, zaczawszy od 1, aż do 10, wyłączwszy tylko liczbę 7.

Późniéy we Francyi przyjęto inny podział okręgu na stopnie: $\frac{1}{400}$ część okręgu nazwano *grade* stopniem; setną część stopnia nazwano minutą, setną część minuty nazwano sekundą i t. d. W takim więc podziale kąt prosty ma 100 stopni; kąt roztwarty więcey, a kąt ostry mniéy a niżeli 100 stopni: łuk *np.* iakikolwiek $a = 24, 91$ znaczy, że łuk ten ma stopni 24 i minut 91, podług nowego podziału.

Nowy ten podział w tém iest wygodny, że działania arytmetyczne z ułomkami dziesiętnymi wymagaia nie wiele pracy.

Wreszcie stopnie dawnego podziału łatwo być mogą obrócone na stopnie podziału nowego, i odwrotnie. Chcąc *np.* 72 stopnie podziału dawnego obrócić na stopnie podziału nowego, trzeba ułożyć następującą proporcją:

$$90: 100 = 72: X = 80.$$

Podobnież chcąc *np.* 50 stopni nowego podziału obrócić na stopnie podziału dawnego, trzeba ułożyć następującą proporcją:

$$100: 90 = 50: X = 45. \text{ i t. d.}$$

241. Powiedzieliśmy wyżej (121), że w niektórych szczególnych przypadkach można kąt dany, a tém samém łuk będący miarą tego kąta podzielić na części równych 3, 5 i t. d. Zagadnienia poprzedzające ułatwia do tego drogę; trzeba tylko uważać iaką częścią całego okręgu iest dany łuk. Niechby *np.* dany łuk był 4tą częścią okręgu koła; bok dwunastokąta foremnego w

koło wpisanego, byłby cięciwą 5cięcy części danego łuku, a bok dwudziestokąta foremnego w toż koło wpisanego byłby cięciwą 5tęcy części tegoż łuku. Gdyby łuk dany był 5tą częścią okręgu koła, bok piętnastokąta foremnego w to koło wpisanego byłby cięciwą 5cięcy części danego łuku i t. d.

242. Zagad. *Mając wiadomy bok wielokąta foremnego o iakiéykolwiek liczbie boków w koło wpisanego, znaleźć ważność boku innego wielokąta foremnego w toż koło wpisanego, który ma boków dwa razy więcej niż wielokąt pierwszy.*

Rozw. Niech będzie AB fig. 126, bok wielokąta pierwszego, AM bok wielokąta drugiego. Przedłużwszy promień MS do N, i poprowadzwszy cięciwę AN, w trójkącie MAN prostokątnym przy A (128). i w którym AB jest prostopadła do MN (109), jest $MN : AM = AM : MO$ (202). Więc $AM^2 = MN \times MO$. A że $MN = 2MS$, a $MO = MS - SO$; będzie więc

$$AM^2 = 2SM (MS - SO) : - : - : - A.$$

W trójkącie ASO prostokątnym przy O, jest $SO^2 = AS^2 - AO^2$ (169) : czyli $SO^2 = MS^2 - (\frac{1}{2}AB)^2$: gdyż $MS = AS$, $AO = \frac{1}{2}AB$. Więc $SO = \sqrt{MS^2 - (\frac{1}{2}AB)^2}$. W równaniu zatém A zamiast SO położywszy znalezioną ważność, równanie to zamieni się w następujące: $AM^2 = 2MS (MS - \sqrt{MS^2 - (\frac{1}{2}AB)^2})$.

Wziąwszy promień MS równy 1, będzie

$AM^2 = 2 (1 - \sqrt{1 - (\frac{1}{2}AB)^2})$; to jest: potęgę boku danego wielokąta podnieść do kwadratu; kwadrat ten odjąć od 1, z pozostałéy reszty

wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, który odjęty od 1 i rozmnożony przez 2, będzie kwadratem boku wielokąta szukanego; a zatem pierwiastek tego kwadratu będzie ważnością tegoż boku.

Łuk AM wpunkcie P podzieliwszy na dwie równe części, i poprowadziwszy dwie cięciwy AP, PM; cięciwy te byłyby dwoma przyległami bokami wielokąta foremnego w koło wpisane, mającego boków dwa razy więcej niż wielokąt drugi; i byłoby podług powyższego zagadnienia $AP^2 = 2(1 - \sqrt{1 - (\frac{1}{2} AM)^2})$; i tak daléy.

243. Zagad. *Maiąc wielokąt foremny o iakiejkolwiek liczbie boków ABCD i t. d. fig. 127 w koło wpisany, opisać na tém kole drugi wielokąt podobny pierwszemu.*

Rozw. Ze środka koła S, spuściwszy promienie Sa, Sb i t. d. prostopadłe do boków wielokąta ABCD EF, i przez punkta a, b, c i t. d. poprowadziwszy styczne koła GH, HI i t. d., aż do przecięcia się z sobą w punktach G, H, I, K i t. d. wielokąt GHI i t. d. będzie szukany: gdyż poprowadziwszy linie SG, SH, SI i t. d., trójkąty SHa, SHb prostopadłe przy a i b mają bok SH w spólny; bok Sa = Sb; więc przystaną do siebie (52), a w szczególności kąt HSa, = HSb, a zatem i miary tych kątów są równe; to iast, łuk Ba = Bb. Więc linia SH przechodzi przez środek łuku ab, czyli linia SH przechodzi przez wierzchołek kąta B. Tymże sposobem okazać można, że linia SI przechodzi przez wierzchołek kąta C i t. d. Ze zaś linia GH iest równoległa od AB, gdyż obie dwie są prostopadłe do Sa, i linia HI równoległa od BC i t. d. będzie kąt GHI = ABC (70). Po-

dobnież okazać można, że kąt $HIK = BCD$ i t. d. Więc kąty wielokąta opisanego równe są kątom wielokąta wpisanego. Nadto w dwóch trójkątach GSH , ASB podobnych, tudzież w drugich dwóch HSI , BSC podobnych, iest $GH : AB = SH : SB$, $HI : BC = SH : SB$; a że $SH : SB = SH : SB$, więc $GH : AB = HI : CB$.

W téj proporcyi następnik 1wszy AB równy iest następnikowi 2mu BC z założenia; więc i poprzedniki są równe: to iest, $GH = HI$. Tymże sposobem okazać można, że $HI = IK$, $IK = KL$ i t. d. a zatém wielokąt GHI i t. d. ma boki wszystkie między sobą równe; iest więc foremny i podobny wielokątowi wpisanemu.

Sposób 2gi. Niech będzie wielokąt foremny ABC i t. d. w koło wpisany *fig. 128*. Poprowadziwszy promienie SA , SB , SC i t. d. i z końców A , B , C i t. d. tych promieni poprowadziwszy linie GH , HI , IK i t. d. prostopadłe do tych promieni, i przecinające się z sobą w punktach H , I , K i t. d.; wielokąt GK będzie szukany.

Gdyż w dwóch trójkątach ABG , BCH , bok $AB = BC$ iako boki wielokąta foremnego; kąt $BAG = CBH$ mają bowiem za miarę połowę łuków równych AB , BC (126), kąt $ABG = BCH$ dla téż przyczyny, więc dwa te trójkąty przystaną do siebie, a w szczególności kąt $G = H$.

Tymże sposobem okazać można, że dwa trójkąty BCH , CDI przystaną do siebie; będzie więc kąt $H = I$. Toż mówić o innych trójkątach; a zatém wielokąt $GHIK$ i t. d. ma kąty równe.

Nadto trójkąty ABG , BCH , CDI i t. d. są równoramienne; gdyż kąty ich przy podstawie AB , BC , CD i t. d. są równe, iako mające za miarę połowę łuków AB , BC i t. d.; więc bok $AG = BG$, $BH = CH$ i t. d. a że wszystkie te trójkąty mogą do siebie przyrastać, więc będzie $AG = GB = BH = HC = CI$ i t. d. Ze zaś każdy bok wielokąta opisanego $GHIK$ i t. d. złożony jest z dwóch takowych linii, więc wszystkie boki będą między sobą równe. Wielokąt zatem opisany $GHIK$ i t. d. mając wszystkie kąty równe, i boki równe jest foremny.

244. *Uwaga.* Przez wszystkie wierzchołki kątów kwadratu $ABCD$ fig. 124 w koło wpisanego poprowadziwszy styczne; utworzy się $EFGH$ kwadrat na kole opisany, który jest kwadratem średnicy tegoż koła: gdyż bok tego kwadratu FF jest równy DB średnicy koła. A zatem kwadrat na kole opisany jest to samo co kwadrat średnicy.

245. *Odwrotnie.* Mając wielokąt foremny $GHIK$ i t. d. fig. 127. opisany na kole, aby wpisać w to samo koło drugi wielokąt foremny podobny pierwszemu, wierzchołki kątów danego wielokąta złączmy ze środkiem koła liniami SG , SH , SI i t. d. które okrąg przecinaia w punktach A , B , C i t. d. Punkta te połączmy liniami prostymi AB , BC i t. d. wielokąt AD będzie szukany: gdyż iód trójkąty SGH , SHI , SIK i t. d. mogą do siebie przystać; a w szczególności kąty ich przy S są między sobą równe, więc i miary ich, to jest, łuki AB , BC , CD i t. d. są także równe, a tém samém i cięciwy AB , BC , CD i t. d. będące bokami wielokąta szukanego, są między sobą równe. *2re.* Ponieważ $GS = HS$ i

$AS = BS$, więc GS . $AS = HS$: BS a zatem linia AB jest równoległa od linii GH (180). Podobnymże sposobem okazać można, że linia BC jest równoległa od HI . A zatem kąt $ABC = GHI$, jako zawarte między liniami względem siebie równoległymi i wiodnemi strefnemi rozchodzącemi się. Dla téż przyczyny kąt $BCD = HIK$ i t. d., a że kąty GHI , HIK i t. d. są równe z założenia, więc i kąty ABC , BCD i t. d. będą sobie równe. Wielokąt zatem wpisany $ABCD$ i t. d. mając boki i kąty równe, jest foremny.

Sposób 2gi Niech będzie wielokąt foremny $GHIK$ i t. d. *fig. 128.* opisany na kole: aby wpisać w to samo koło drugi wielokąt foremny podobny danemu, punkta zetknięcia się boków wielokąta danego z okręgiem, to jest punkta A , B , C i t. d. połączwszy liniami prostymi AB , BC i t. d. wielokąt $ABCD$ i t. d. będzie szukany: gdyż w dwóch trójkątach ABG , BCH ; bok $AG = BH$, bok $BG = HC$ iakośmy okazali w zagadnieniu poprzedzającym (243); kąt $AGB = BHC$ z założenia: a zatem dwa te trójkąty przystaną do siebie, a w szczególności $AB = BC$. Tymże sposobem okazać można, przez przytanie dwóch trójkątów BCH i CDI , tudzież drugich dwóch CDI i DEK i t. d., że bok $BC = CD$, bok $CD = DE$ i t. d. Boki zatem wielokąta $ABCD$ i t. d. są między sobą równe: a tém samém łuki AB , BC , CD i t. d. których boki te są cięciwami, są między sobą równe. A stąd wypada, że i kąt $ABC = BCD$: gdyż pierwszy z nich obeymuie ramionami swoimi łuk AEC , drugi obeymuie ramionami swoimi łuk BFD : te zaś dwa łuki są sobie równe, każdy bowiem z nich złożony jest ze 4 łuków między sobą równych. Podobnież okazać mo-

zna, że kąt $BCD = CDE$, kąt $CDE = DEF$ i t. d. Wielokąt zatem $ABCD$ i t. d. mając wszystkie boki i kąty równe jest szukany.

246. Zagad. *Mając wiadomy bok AB , wielokąta foremnego $ABCD$ i t. d. w koło wpisane-go fig. 127. znaleźć wartość boku HG wielokąta GHI i t. d. na témże kole opisanego.*

Rozw. Poprowadziwszy Sa prostopadłą do AB , dwa trójkąty SAm , SGa prostokątne przy m i a , i mające kąt S spólny są podobne, więc $Sm : Sa = Am : Ga$. Rozmnożywszy 2gi stosunek przez 2, będzie $Sm : Sa = 2 Am : 2 Ga$; czyli $Sm : Sa = AB : HG$. Więc

$$GH = \frac{AB \times Sa}{Sm} : - : - : - : - : A.$$

Wtrójkacie ASm jest $Sm^2 = AS^2 - Am^2$ (169) czyli $Sm^2 = Sa^2 - (\frac{1}{2} AB)^2$; a zatem $Sm = \sqrt{Sa^2 - (\frac{1}{2} AB)^2}$. Wadność tę położywszy w równaniu A zamiast Sm , będzie

$$GH = \frac{AB \times Sa}{\sqrt{Sa^2 - (\frac{1}{2} AB)^2}}$$

Taka jest wartość boku GH wielokąta foremnego na kole opisanego. Oznaczywszy bok AB wielokąta w koło wpisane gloską a , bok HG wielokąta na kole opisanego gloską A , a promień Sa uczyniwszy $= 1$, będzie

$$A = \frac{a \times 1}{\sqrt{1 - (\frac{1}{2} a)^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 - (\frac{1}{2} a)^2}}$$

Podobnie oznaczywszy gloską b bok wielokąta wpisane mającego dwa razy więcej boków, niż wielokąt 1wszy wpisany, a gloską B bok wie-

lokata opisanego, mającego dwa razy więcej boków, niż wielokąt 1wszy opisany; będzie

$$B = \frac{b}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}b\right)^2}} \quad \text{i t. d.}$$

247. Twier. Obwody wielokątów foremnych o iednój liczbie boków, są w stosunku promieni kół opisanych lub wpisanych, a ich powierzchnie są w stosunku dwumnożnym tychże promieni.

Dow. 1ód. Niech będą dwa wielokąty foremne o iednój liczbie boków ABCDEF, *abcdef* fig. 122: wpisawszy w nie i opisawszy na nich koła, których środki są S, s, poprowadźmy promienie SA, SB, SC i t. d., *sa, sb, sc* i t. d. W dwóch trójkątach ABS, *abs*, kąt ASB = *asb*, kąt SAB = *sab*: gdyż każdy z nich iest połową kąta w wielokącie: więc dwa te trójkąty są podobne. Będzie zatem SA: *sa* = AB: *ab*. Ze zaś i obwody tych dwóch wielokątów mają się iak AB: *ab* (214); więc obwody te mają się także iak SA, *sa*: to iest, iak promienie kół opisanych.

2re. Zpunktów S i s do boków AB i *ab* spuściwszy prostopadłe SM, *sm*, dwa trójkąty AMS *ams* prostopadłe przy M, *m*, i w których kąt SAM = *sam*, są podobne; więc SA: *sa* = SM: *sm*; a że podług dowiedzenia, SA: *sa* = AB: *ab*; więc AB: *ab* = SM: *sm*. a tém samym obwód iednego wielokąta, do obwodu drugiego, iak SM: *sm* czyli iak promienie kół wpisanych w te wielokąty; linie bowiem SM, *sm* są promieniami kół wpisanych.

3cie. Ponieważ iest AB: *ab* = SA: *sa* i AB: *ab* = SM: *sm*, będzie więc AB²: *ab*² = SA²: *sa*²

i $AB^2 : ab^2 : SM^2 : sm^2$: Aże powierzchnie tych wielokątów mają się do siebie iak $AB^2 : ab^2$ (214), więc będą się też miały iak $SA^2 : sa^2$, albo iak $SM^2 : sm^2$, to iest kwadraty promieni kół opisanych lub wpisanych; czyli, powierzchnie wielokątów foremnych o iednój liczbie boków są w stosunku dwumnożnym promieni kół opisanych lub wpisanych.

248. Twierd. *Powierzchnia wielokąta foremnego na kole opisanego ABCD i t. d. fig. 122. równa iest iloczynowi iego obwodu przez połowę promienia koła wpisanego w ten wielokąt.*

Dowód. Do wierzchołków wszystkich kątów danego wielokąta poprowadziwszy promienie SA, SB, SC i t. d., powierzchnia wielokąta podzielona będzie na tyle trójkątów mogących do siebie przystać ile wielokąt ma boków. Każdy z tych trójkątów np. ASB, biorąc w nim za podstawę bok wielokąta AB, ma za wysokość SM promień koła wpisanego. Będzie więc powierzchnia trójkąta.

$ASB = AB \times \frac{1}{2} SM$. Podobnież powierzchnia trójkąta

$BSC = BC \times \frac{1}{2} SM$: gdyż $SN = SM$: a zatém powierzchnia trójkątów $ASB + BSC = AB \times \frac{1}{2} SM + BC \times \frac{1}{2} SM$, czyli $ASB + BSC = (AB + BC) \frac{1}{2} SM$.

Tymże sposobem postępując daléy, okażemy, że powierzchnia wszystkich trójkątów składających powierzchnią wielokąta danego, równa iest $(AB + BC + CD + DE + EF) \frac{1}{2} SM$, to iest, powierzchnia wielokąta ABCD i t. d. równa iest

iloczynowi jego obwodu, przez połowę promienia koła w ten wielokąt wpisanego (*)

249. *Wniosek.* Stąd wypada, że kiedy jest kilka wielokątów foremnych o różny liczbę boków, na jednymże kole opisanych, powierzchnie ich mają się do siebie, jak ich obwody: gdyż nazwawszy jeden wielokąt Q , drugi q , obwód pierwszego O , 2go o , a promień koła na którym te wielokąty są opisane, czyli co na jedno wychodzi, promień koła w te wielokąty wpisanego nazwawszy R , będzie podług poprzedzającego twierdzenia $Q = \frac{1}{2} RO$; $q = \frac{1}{2} Ro$; a zatem $Q : q = \frac{1}{2} RO : \frac{1}{2} Ro$. Podzieliwszy drugi stosunek przez $\frac{1}{2} R$, będzie $Q : q = O : o$, to jest, wielokąty Q i q są do siebie jak ich obwody.

250. *Twierd.* Powierzchnia wielokąta foremnego w koło wpisanego, mającego parzystą liczbę boków, równa jest iloczynowi połowy promienia koła opisanego przez obwód innego wielokąta foremnego w toż koło wpisanego, lecz mającego dwa razy mniej boków niż wielokąt dany.

Dow. Niech będzie AD fig. 125, szóstokąt foremny w koło wpisany, ACE trójkąt foremny czyli równoboczny w toż koło wpisany. Poprowadziwszy promienie SA , SB , SC i t. d. w trójkącie SBA wzięwszy za podstawę SB , wysokością jego będzie AG prostopadła do SB (109): a za-

(*) Prostopadła SM spuszczone ze środka koła w wielokąt foremny wpisanego, do boku tegoż wielokąta zowie się po grecku *Apothema*.

tém powierzchnia trójkąta $SBA = AG \times \frac{1}{2} SB$.
 Podobnież powierzchnia

trójkąta $SBC = CG \times \frac{1}{2} SB$.

Więc $SBA + SBC = (AG + CG) \frac{1}{2} SB$; czyli powierzchnia czworokąta $ABCS = AC \times \frac{1}{2} SB$.

Tymże sposobem okazać można, że powierzchnia czworokąta $CDES = CE \times \frac{1}{2} SB$, i $AFES = EA \times \frac{1}{2} SB$. A zatem powierzchnia wszystkich trzech czworokątów, czyli powierzchnia sześciokąta $AD = (AC + CE + EA) \frac{1}{2} SB$; to jest, powierzchnia sześciokąta foremnego w koło wpisanego, równa jest iloczynowi obwodu trójkąta równobocznego w toż koło wpisanego, przez połowe promienia koła opisanego.

Ten sam jest sposób dowodzenia, gdy wielokąt w koło wpisany ma inną iakąkolwiek liczbę parzyftą boków. Oznaczywszy zatem głoską W obwód wielokąta foremnego o iakiéykolwiek liczbie boków w koło wpisanego, a promień koła opisanego głoską R ; iloczyn $\frac{1}{2} R W$ oznaczać będzie powierzchnią wielokąta foremnego w koło wpisanego. Uważać tu tylko potrzeba, że jeżeli W znaczy obwód trójkąta, kwadratu, pięciokąta i t. d. iloczyn $\frac{1}{2} R W$ wyrażać będzie w pierwszym przypadku powierzchnią sześciokąta, w drugim powierzchnią ośmiokąta, w 5cim powierzchnią dziesięciokąta i t. d.

251. Zagad. *Mając wiadome powierzchnie dwóch wielokątów foremnych, podobnych iednego w koło wpisanego, drugiego opisanego na kole, znaleźć powierzchnie dwóch innych wielokątów foremnych, iednego wpisanego, drugiego opisanego; mających boków po dwa razy więcej, niż wielokąty pierwsze.*

Rozw. Niech będzie ab , *fig.* 129. bok danego wielokąta wpisanego, AB równoodległa od ab bok wielokąta opisanego. Poprowadziwszy promień Sm prostopadły do ab , tudzież cięciwę am i styczne aP , bN , cięciwa am będzie bokiem wielokąta wpisanego dwa razy więcej boków mającego, a PN będzie bokiem wielokąta opisanego dwa razy więcej boków mającego; co jest łatwo okazać podług wiadomości poprzedzających.

Niech będzie q powierzchnia wiadoma wielokąta wpisanego, którego bokiem jest ab , Q powierzchnia wiadoma wielokąta opisanego, którego bokiem jest AB ; x powierzchnia szukana wielokąta wpisanego, którego bokiem jest am ; X powierzchnia szukana wielokąta opisanego, którego bokiem jest PN .

Dwa trójkąty aDS , amS mające spólny wierzchołek w punkcie a , są do siebie iak podstawy SD , i SM (151), to jest

$$aDS : amS = SD : Sm.$$

Te same dwa trójkąty, uważając je iako części wielokątów q i x , są do siebie iak te wielokąty: gdyż iaką częścią powierzchni wielokąta q jest trójkąt aDS , taką częścią powierzchni wielokąta x jest trójkąt amS , o czém widocznie przekonać się można, dokończywszy figury: będzie więc.

$aDS : amS = q : x$. Złożywszy dwie te proporce, będzie $q : x = SD : Sm$ — : — : A .

Trójkąty maS i mAS mające spólny wierzchołek w punkcie m , są do siebie iak podstawy aS , AS , to jest

$$maS : mAS = aS : AS.$$

Te same trójkąty uważane iako części powierzchni wielokątów x i Q , są do siebie iak te wielokąty, to iest

$$maS : mAS = x : Q.$$

Złożywszy dwie ostatnie proporcye, będzie $x : Q = aS : AS : - : - : - : B$.

Wtrójkacie ASm , w którym aD iest równo-odległa od Am , iest $SD : Sm = aS : AS$ (178). Więc złożywszy dwie proporcye oznaczone głoskami A i B , będzie $q : x = x : Q$; a tém samém $x^2 = Q \times q$, $x = \sqrt{Q \times q}$. To iest, powierzchnia szukana wielokąta wpisanego x równa iest pierwiastkowi iloczynu dwóch powierzchni wielokątów danych Q i q .

2re. Dwa trójkąty SPm , SPA maiące spólną wysokość Sm , są do siebie iak podstawy mP , AP , to iest

$$SPm : SPA = mP : AP.$$

Ponieważ zaś linia SP dzieli kąt ASm na dwie równe części, co łatwo iest okazać za pomocą trójkątów SPm , SPa mogących do siebie przyśtać, będzie wiec

$$mP : AP = Sm : AS \text{ (181)}; \text{ że zaś}$$

$$Sm : AS = SD : Sa, \text{ czyli}$$

$Sm : AS = SD : Sm$, gdyż $Sm = Sa$; a podług pierwszégó części niniejszego zagadnienia,

$SD : Sm = q : x$, złożywszy więc wszystkie te proporcye, będzie $SPm : SPA = q : x$, a tém samém $SPm : SPm + SPA = q : q + x$; czyli $SPm : ASm = q : q + x$. Rozmnożywszy poprzedniki przez 2, będzie $2SPm : ASm = 2q : q + x$.

Lecz $2SPm = SPm + SPA = apmS$ i ASm uważane iako części powierzchni wielokątów X i Q są do siebie iak te wielokąty, to iest:

$2SPm : ASm = X : Q$; więc

$X : Q = 2q : q + x$; a tém samém

$$X = \frac{2q \times Q}{q + x}$$

252. *Uwaga.* Znalazłszy wielokąty x, X , chcąc potém znaleźć powierzchnie dwóch innych wielokątów y wpisanego, Y opisanego, któreby miały po dwa razy więcej boków, niż wielokąty x, X ; tymże samym sposobem postępując znaleźlibyśmy, że $y = \sqrt{X \times x}$;

$$Y = \frac{2x \times X}{x + y}$$

Podobnież oznaczywszy głoskami z, Z powierzchnie dwóch innych wielokątów mających po dwa razy więcej boków, niż wielokąty y, Y ;

$$\text{byłoby } z = \sqrt{Y \times y}; \quad Z = \frac{2y \times Y}{y + z} \text{ i t. d.}$$

255. *Twierd.* Gdy są dwa koła nakręślone z jednego środka S , dwoma promieniami nierównymi AS, BS *fig. 130*, które się zowią kołami *spółśrodkowemi, circuli concentrici*; można zawsze w koło większe wpisać wielokąt foremny, na kole zaś mniejszem opisać wielokąt podobny pierwszemu tak, że obwód wielokąta wpisanego w żadnym punkcie nie zeydzie się z okręgiem koła mniejszego, obwód zaś wielokąta opisanego w żadnym punkcie nie zeydzie się z okręgiem koła większego.

Dow. Przez punkt B poprowadziwszy styczną CD , aż do przecięcia się z okręgiem większym w punktach C i D , podzielmy o-

krąg większy na tyle części równych, aby każda część była mniejsza od łuku CAD. Dajmy że taką częścią jest łuk EAF, który w punkcie A jest podzielony na dwie części równe. Poprowadzimy cięciwę EF, cięciwa ta jest w odległości większej od środka koła S, niżeli cięciwa CD (124). A że ta cięciwa jest równoodległa od cięciwy CD, gdyż obiedwie są prostopadłe do AS (109); więc dwie te cięciwy zeyść się z sobą nie mogą: a zatem i cięciwa EF z okręgiem koła mniejszego zeyść się nie może; a tém samém i obwód wielokąta foremnego w koło większe wpisanego, którego bokiem jest cięciwa EF, z okręgiem koła mniejszego zeyść się nie może.

Poprowadziwszy promienie ES, FS przecinające się z cięciwą CD w punktach I, H, linia IH będzie bokiem wielokąta opisanego na kole mniejszém podobnego wielokątowi wpisanemu w koło większe (245). Gdyby bok ten IH mógł się zeyść z okręgiem koła większego, zeyście się to w innym punkcie nie mogłoby naślapić, chyba w punkcie I lub H, które ze wszystkich punktów linii HI są najbardziej oddalone od okręgu mniejszego, a tém samém najbardziej przybliżone do okręgu większego. Lecz gdyby punkt *np.* I znajdował się na okręgu większym, na ten czas linia SI byłaby równa linii SE; co być nie może, gdyż pierwsza jest częścią drugiey: więc i bok IH wielokąta drugiego nie może się zeyść z okręgiem większym. Toż mówić o innych bokach tego wielokąta. A zatem obwód wielokąta opisanego na kole mniejszém, nie może się zeyść z okręgiem koła większego.

R O Z D Z I A Ł IX.

O powierzchni koła i o stosunku okręgu do średnicy.

254. Wiadomości w Rozdziale V i innych wyłożone, dały nam poznać rozmaite własności koła, do znaczney liczby twierdzeń o liniach prostych, o kątach i wielokątach ścisły wpływ mających. Lecz pozostała jeszcze do wyłożenia rzecz w dalszey Jeometrii istotnie potrzebna, to jest, czyby nie można iakowym sposobem zmierzyć okręgu koła i iego powierzchni, ieżeli nie z taką dokładnością, z iaką mierzyć możemy linie proste i płaszczyzny liniami prostemi zakończone; to przynaymnięz z jak największém do rzeczywistey ważności przybliżeniem. Wiadomości w poprzedzającym Rozdziale podane o wielokątach foremnych w koło wpisanym i opisanym na kole ułatwią nam do tego drogę.

255. Przypatrzwszy się z uwagą dwom wielokątom foremnym o iednakowey liczbie boków, iednemu w koło wpisanemu, drugiemu opisanemu na kole, postrzeżemy 16d, że obwód opisanego większy jest, niż obwód wpisanego wielokąta: gdyż w trójkątach ABG, BCH i t. d. *fig. 128*, $AG + BG > AB$, $> BH + CH > BC$ i t. d. (22).

256. 2re. Podwajaiąc ciągle liczbę boków wielokąta wpisanego i opisanego, obwód pierwszego będzie się co raz powiększał, obwód zaś drugiego będzie się coraz zmniejszał. Jakoż niech będzie *fig. 151*, *ab* bok wielokąta foremne-

go w koło wpisanego, aM , bM połowy dwóch boków przyległych wielokąta na kole opisanego. Poprowadziwszy promień Sm prostopadły do ab , i cięciwy am , bm , tudzież linią AB prostopadłą do Sm ; cięciwy am , bm będą dwoma bokami przyległemi wielokąta wpisanego mającego dwa razy więcej boków niż wielokąt pierwszy wpisany; linie zaś aA , Am , mB , Bb będą połowami boków wielokąta opisanego, mającego dwa razy więcej boków, niż wielokąt opisany pierwszy.

W trójkacie amb iest $am + bm > aó$ (22), to iest, summa dwóch boków wielokąta wpisanego drugiego, większa iest od iednego boku wielokąta pierwszego: a zatém summa wszystkich boków, czyli obwód wielokąta wpisanego drugiego większa iest od summy wszystkich boków czyli od obwodu wielokąta wpisanego pierwszego. Tymże sposobem okazać można, że obwód trzeciego wielokąta wpisanego mającego dwa razy więcej boków niż wielokąt drugi, większy iest od obwodu wielokąta drugiego i t. d.

Podobnież w trójkacie AMB iest $AB < AM + MB$; czyli $Am + mB < AM + MB$. Dodawszy po obu stronach $aA + Bb$, będzie

$aA + Am + mB + Bb < aA + AM + MB + Bb$; czyli $aA + Am + mB + Bb < aM + Mb$. To iest, summa dwóch boków wielokąta opisanego drugiego mnieysza iest od boku wielokąta opisanego pierwszego. A zatém summa wszystkich boków, czyli obwód wielokąta drugiego mnieysza iest od summy wszystkich boków czyli od obwodu wielokąta pierwszego. Tymże sposobem okazać można, że obwód trzeciego wielokąta opisa-

nego mającego dwa razy więcej boków niż wielokąt opisany drugi, mniejszy jest od obwodu wielokąta drugiego i t. d.

257. 5cie. Kiedy więc obwód wielokąta wpisanego tym jest większy, im więcej boków ma wielokąt, a obwód wielokąta opisanego tym jest mniejszy, im więcej boków ma wielokąt; idzie zatem, że im więcej dwa te wielokąty mają boków, tym mniejsza zachodzi różnica między ich obwodami. Można nawet wpisać w koło i na niem opisać dwa wielokąty foremne o iednóżyż liczbie boków takie, że różnica między ich obwodami mniejsza będzie od wszelkiéy ilości naznaczonéy. Gdyż ponieważ obwody wielokątów foremnych o iedneyże liczbie boków mają się do siebie iak promienie kół wpisanych (247), oznaczwszy obwód wielokąta MI fig. 128, głoską O, obwód zaś wielokąta AD głoską W, będzie O: W = Sm: Sq; a tym samym O — W · O = Sm — Sq: Sm; czyli O — W: O = mq: Sm.

$$mq \times O$$

A zatem $O - W = \frac{mq \times O}{Sm}$; czyli uczyniwszy

promień Sm = 1, $O - W = mq \times O$. W tym równaniu jeżeli mq równa się $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ i t. d. części promienia Sm czyli 1, iloczyn $mq \times O$ będzie równy $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ i t. d. części obwodu wielokąta opisanego, a tym samym O — W, czyli różnica między obwodami tych wielokątów, równa będzie $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ i t. d. części obwodu tegoż wielokąta opisanego.

Wziawszy zatem mq fig. 125, równą $\frac{1}{10}$, lub innéy iakiéykolwiek części promienia Sm, byleby tylko linia ta mq była mniejsza od ilości nazna-

czonéy, co będzie zawsze rzeczą podobną do uskutecznienia, i przez punkt q poprowadziwszy cięciwę FG prostopadłą do Sm , gdyby cięciwa ta nie była bokiem wielokąta foremnego w koło wpisanego, dosyćby było podzielić okrąg tego koła na takie części równe, aby każda część mniejsza była od łuku FG . Dajmy że taką częścią jest łuk ab , który przeniosłszy na łuk FG tak aby promień Sm dzielił go w punkcie m na dwie równe części, i poprowadziwszy cięciwę ab ; cięciwa ta będąca bokiem wielokąta foremnego w koło wpisanego, odetnie linią mc mniejszą od mq , a tém samém ieszcze bardziéy mniejszą od ilości naznaczonéy, niż jest linia mq .

Można więc różnicę między obwodami dwóch tych wielokątów uczynić mniejszą od wszelkiéy ilości naznaczonéy, podwajając podług potrzeby liczbę boków wielokąta wpisanego.

258. 4te. Obwód wielokąta wpisanego AD fig. 128, o iakieýkolwiek liczbie boków, zawsze jest mniejszy od okręgu koła: gdyż zawsze linie proste AB , BC i t. d. krótsze są od linii krzywych czyli od łuków AmB , BnC i t. d. (5). Obwód zaś wielokąta opisanego MI , o iakieýkolwiek liczbie boków, zawsze jest większy od okręgu koła: gdyż linie złamane AGB , BHC i t. d. bardziéy od linii prostych AB , BC i t. d. oddalone, dłuższe są niż linie krzywe, czyli łuki AmB , BnC i t. d. mniéy oddalone od tychże linii prostych AB , BC i t. d. (*). Okrąg zatém koła co

(*) Prawda ta jest wypadkiem szczególnym następującego twierdzenia: wszelkie linie wypukłe, to jest te, które linia prosta we dwóch tylko

do swojej długości, środek trzymamy między obwodem wielokąta opisanego i wpisanego. Kiedy więc różnica między obwodami dwóch tych wielokątów, może być mniejsza od wszelkiej ilości naznaczonej; tem bardziej różnica między okręgiem koła i obwodem jednego z tych dwóch wielokątów **mniejsza** być może od **wszelkiej** ilości naznaczonej; bo z trzech ilości nierównych różnica między największą i najmniejszą, zawsze jest większa, niż między średnią i największą, lub między średnią i najmniejszą.

259. *Twierd.* Jeżeli dwie wielkości nie odmienne A i B są takie, że można dowieść, iż ich różnica $A - B$ jest mniejsza niż trzecia wielkość naznaczona δ tak mała, iak tylko być może: dwie te wielkości A i B są między sobą równe.

punktach przecinać może, iak jest np. okrąg koła, i obwód wielokąta mającego wszystkie kąty wyskakujące, są tem dłuższe, im się bardziej od linii prostej oddalają.

Dowód. Niech będą dwie linie wypukłe, ACB , AMB fig. 132: poprowadziwszy linią prostą DE dotykającą się linii wypukłej ACB w punkcie C ; linia ta DE będzie krótsza niż łuk DME ; będzie więc $ADEB < AMB$. Wziąwszy potem punkta H , L pośrednie między punktami A i C , B i C , i poprowadziwszy styczne FG , IK , utworzy się nowa linia wypukła $AFGIKB$ mniejsza od linii wypukłej $ADEB$: gdyż $FG < FD + DG$, $IK < EI + EK$. Tym sposobem postępując dalej, można by wykreślić nieograniczoną liczbę linii wypukłych corazbardziej zmniejszających się w miarę przybliżenia się ich do linii wypukłej ACB , która tem samem będzie nie tylko krótsza od

Dowód. Jakoż gdyby dwie te wielkości nie były równe, tedy zachodziłaby między nimi różnica, którą oznaczywszy przez D , byłoby $A - B = D$, a tém samém byłaby rzecz niepodobna wziąć między nimi różnicę mniejszą od D , co się sprzeciwia założeniu.

Uwaga. Trzeba się tu dobrze zastanowić nad tém, że w powyższém twierdzeniu dwie wielkości A i B są *nieodmienne*: gdyż można np. otrzymać wyrażenie $\sqrt{2}$ tak blizkie pierwiastku prawdziwego, że różnica między znalezionym a prawdziwym może być mniejsza od wszelkiéy ilości naznaczoney; a iednak pierwiastek znaleziony nigdy nie będzie równy prawdziwemu: lecz tu pierwiastek tylko prawdziwy liczby 2 jest ilością nieodmienną, pierwiastek zaś znaleziony jest ilością odmienną, bo za każdym przybliżeniem otrzymujemy wypadek odmienny, wielkości zaś A i B są obiedwie nie odmienne.

260. Twierd, *Okręgi kół są do siebie w stosunku swoich promieni.*

Dow. W koła dane, których okręgi oznaczamy przez C, c , wpisawszy dwa wielokąty foremne o jedneyże liczbie boków, i obwody ich oznaczawszy głoskami W, w , a promienie kół głoskami R, r ; ponieważ obwody wielokątów podobnych mają się iak promienie kół opisanych

AMB, lecz od wszelkich innych linii wypukłych, srodkuiących między wypukłą AMB i ACB, bardziéy od linii prostéy AB oddalonych a niżeli jest liniia ACB.

(247), będzie więc $W: w = R: r$, a tém samém

$\frac{W}{w} = \frac{R}{r}$. Nadto można przynajmniéj w my-

śli sobie wyftawić, że liczba boków w tych wielokątach iest tak wielka, iż różnica między obwodem każdego z nich a okręgiem koła opisanego iest mniejsza, niż wielkość iakakolwiek tak mała, iak

tylko być może. Kiedy więc $\frac{C}{c}$ iest stosunkiem dwóch okręgów, różnica między stosunkami

$\frac{C}{c}$ i $\frac{W}{w}$ ieżliby iaka była, może być przywiedzio-

na do takiego stopnia małości, do iakiego ią przywieść zechcemy. Ze zaś ta sama różni-

ca zachodziłaby między stosunkami $\frac{C}{c}$ i $\frac{R}{r}$,

gdyż $\frac{W}{w} = \frac{R}{r}$; wypada stąd iż można dowieść, że

różnica między ilościami nieodmiennemi $\frac{C}{c}$ i $\frac{R}{r}$ iest mniejsza niż trzecia wielkość naznaczona tak mała

iak tylko być może; będzie więc podług twierdzenia poprzedzającego $\frac{C}{c} = \frac{R}{r}$, czyli $C: c = R: r$ (*)

(*) *Dowodzenie to i twierdzenie poprzedzające wyłożone tu są w kształcie takim, iaki ie czyni do okazania innych prawd w dalszém Jeometryi*

Sposób 2gi. Oznaczywszy okręgi dwóch kół głoskami C, c, a ich promienie R, r; trzeba dowieść że iest R: $r = C: c :: — : — :: — \Lambda$.

Dow. Jeżeli ta proporcya iest fałszywa, tedy ostatni iéy wyraz c iest albo zamały do uczynienia proporcyi, albo zawielki.

W 1szym przypadku weźmy ilość m wieksza od c , i daymy na to, ieżeli byé może, że ta proporcya iest prawdziwa:

$$R: r = C: m, \text{ w któr y } m > c,$$

Opiszmy na kole c wielokąt foremny taki, aby r  znica między iego obwodem, który zw c będziemy o , i okręgiem c mnieysza była od r  znicy między ilością m i tym   okręgiem c ; to iest, aby było $o - c < m - c$. Dodawszy po obu stronach c , wypadnie $o < m$.

Opiszmy i na kole C wielokąt foremny podobny wielokątowi opisanemu na c . Poniew   obwody wielokątów podobnych, mała się do siebie iak promienie kół wpisanych (247); oznaczywszy

naywygodnieysze, i iaki zgadza się nayb rdzie y z wyst wieniem w Jeometrii używanem. To samo dowodzenie mogłoby inacze y tak by  wy    one. Wpisawszy w dwa dane koła wielok taty foremne podobne o liczbie boków tak wielkie y iak tylko by  mo  , obwody tych wielokątów bez widocznego uchybie nia, mogą być wzięte za okręgi kół opisanych: gdyż boki tych wielokątów będące cięciwami łuków niesko nczenie małych, nie r   niłyby się przynajmniej na oko od tych   łuków. A    obwody wielokątów foremnych podobnych mała się iak promienie kół opisanych, więc i okręgi mała się iak promienie.

więc obwód 2go wielokąta głoską O , będzie $R: r = O: o$, A że z przypuszczenia iest $R: r = C: m$; więc złożywszy dwie te proporcye, wypadnie $O: C = o: m$.

W téy proporcyi drugi poprzednik o iest mniejszy od swego następnika z dowiedzenia; 1szy zaś poprzednik O , czyli obwód wielokąta opisanego, iest większy od swego następnika C , czyli od okręgu koła (258). Proporcya więc ta iest fałszywa. Lecz proporcya ta powstała ze złożenia dwóch proporcyyi poprzedzających, z których 1wsza $R: r = O: o$, iest dowiedziona wyżey; 2ga zaś $R: r = C: m$, musi być fałszywa. Nie może więc w proporcyi A ostatni wyraz c być zamały.

W przypadku 2gim, ieżeli ostatni wyraz c w proporcyi A iest za wielki, weźmy ilość n mniejszą od c , i daymy na to, ieżeli być może, że ta proporcya iest prawdziwa, $R: r = C: n$, wktóréy $n < c$.

Wpiszmy w koło c wielokąt feremny o takiéy liczbie boków, aby różnica między okręgiem c i obwodem tego wielokąta zwanym w , mniejsza była od różnicy między okręgiem c i ilością n ; to iest aby było $c - w < c - n$. Dodawszy po obu stronach w i n , a odiawszy c , zostanie $n < w$.

Wpiszmy w koło C wielokąt foremny podobny wielokątowi wpisanemu w koło c . Ponieważ obwody wielokątów podobnych mają się do siebie iak promienie kół opisanych; oznaczywszy więc obwód wielokąta w koło C wpisanego głoską W , będzie: $R: r = W: w$. A że podług przypuszczenia iest $R: r = C: n$; złożywszy zaś dwie ostatnie proporcye, będzie $C: W = n: w$.

W téy proporcyi 2gi poprzednik n mniejszy jest od swego następnika w z dowiedzenia; 1wszy zaś poprzednik C to jest okrag koła, większy jest od swego następnika W , to jest, od obwodu wielokąta w toż koło wpisanego: proporcya więc ta jest fałszywa. Lecz proporcya ta powstała ze złożenia dwóch proporcyy ią poprzedzających, z których 1sza $R: r = W: w$, jest wyżéy dowiedziona: 2ga zatém $R: r = C: n$, musi być fałszywa. Nie może więc ostatni wyraz c proporcyy A być za wielki.

Albo tak: Jeżeli w 2gim przypadku wyraz 4ty c proporcyy A jest za wielki, tedy albo wyraz ten potrzeba zmniejszyć; albo też powiększyć wyraz 5ci C , co wychodzi na iedno: a na ten czas w proporcyy A odmieniwszy mieysce wyrazów, byłoby $r: R = c: m$, gdzie $m > C$, co podług 1go przypadku być nie może; a tém samém ostatni wyraz c proporcyy A nie może być za wielki.

A kiedy wyraz ten c nie jest ani za mały, ani za wielki do uczynienia proporcyy A ; więc jest taki iak być powinien, a tém samém proporcya ta jest prawdziwa: to jest, okręgi kół mają się iak ich promienie.

Sposób 3ci. Niech będą dwa koła nakreślone promieniami sc , SC fig. 155: będzie okrag koła nakreślonego promieniem sc , do okręgu koła nakreślonego promieniem SC , iak promień sc do promienia SC ; czyli oznaczywszy okrag koła 1go c , 2go C , będzie $sc: SC = c: C : - : - : - : - A$.

Jeżeli ta proporcya jest fałszywa, więc będzie sc do SC iak c do wyrazu 4go, albo mniejszego od C , albo większego. Daymy że

wyraz 4ty *C* jest za wielki, i ze środka *S* promieniem *Sc* mniejszym od promienia *SC* nakreśliwszy koło, którego okrąg oznaczamy głoską *c*, niech będzie, jeżeli być może, ta proporcya prawdziwa; $sc:SC = c:c$.

Wpiszmy w koło którego promień *SC*, wielką foremny *ABC* i t. d. tak aby obwód jego nigdzie nie schodził się z okręgiem koła *c* (255). Wpiszmy także i w koło, którego promień *sc* wielokąt *abcd* i t. d. podobny pierwszemu. Ponieważ obwody wielokątów podobnych, mają się iak promienie kół opisanych, oznaczywszy zatem obwód wielokąta *abcd* i t. d. głoską *w*, obwód wielokąta *ABCD* i t. d. głoską *W*, będzie $sc:SC = w:W$; a że podług przypuszczenia $sc:SC = c:c$; więc złożywszy dwie te proporcye, będzie $w:c = W:c$.

W téj proporcyi poprzednik 1szy *w*, czyli obwód wielokąta *abcd* i t. d. mniejszy jest od swego następnika *c*, to jest od okręgu koła opisanego; poprzednik zaś 2gi *W*, czyli obwód wielokąta *ABCD* i t. d. większy jest od swego następnika *c*, to jest, od okręgu koła wykreślenego promieniem *Sc* (258). A zatem proporcya ta jest fałszywa; to jest, nie może być, aby promień *sc* miał się do promienia *SC*, iak okrąg koła wykreślonego promieniem *sc*, do okręgu koła wykreślonego promieniem *Sc* mniejszym od promienia *SC*.

W przypadku 2gim, jeżeli w proporcyi *A* 4ty wyraz *C* jest zamały, trzeba go powiększyć, albo zmniejszyć wyraz 5ci *c*; a na ten czas w proporcyi *A* odmieniwszy mieysce wyrazów, byłoby $SC:sc = C$ do okręgu koła mniejszego od okręgu *c*, co podług przypadku 1go być nie może.

Kiedy więc w proporcyi A 4ty wyraz C nie może być ani mniejszy, ani większy od okręgu C, musi zatem być równy okręgowi C. Więc okręgi kół mają się iak ich promienie

261 *Wnioski*. Stąd wypada iòd, że okręgi kół mają się także iak średnice: gdyż wpo-
wyższyć proporcyi $C: c = R: r$ rozmnożywszy
2gi stosunek przez 2, będzie $C: c = 2R: 2r$; a
że $2R$ i $2r$ znaczą średnice tych kół, więc ozna-
czywszy średnice głoskami S i s, będzie $C: c = S: s$.

262. 2re Dwa łuki CB, *cb fig. 155*, kół
nierównych, będące miarą dwóch kątów S, s ró-
wnych, które się zowią *łukami podobnemi*, są do
siebie także w stosunku promieni lub średnic kół
do których należą: gdyż ponieważ kąty S i s są
równe, więc iaką częścią 4 kątów prostych jest
kąt S, taką częścią 4 kątów prostych jest kąt s;
a tém samém iaką częścią okręgu swego jest łuk
CB będący miarą kąta S, taką częścią okręgu swe-
go jest łuk *bc* będący miarą kąta s: Łuki więc
te są do siebie w stosunku swoich okręgów: a że
okręgi mają się iak ich promienie lub średnice,
więc i łuki, CB, *cb* mają się iak promienie lub
średnice kół, do których należą.

265. 3cie. Z tego także twierdzenia wy-
pada, że gdyby wiadomy był stosunek okręgu ie-
dnego tylko koła do iego promienia lub średnicy,
iuz tém samém byłby wiadomy stosunek okręgu
każdego innego koła do iego promienia lub śre-
dnicy. Jakoż niech π oznacza ten stosunek wiado-
my; czyli co na iedno wychodzi, niech π będzie
okrag koła którego średnica jest 1; niech C ozna-

cza okrąg innego koła, którego promień jest R , będzie podług poprzedzającego twierdzenia

$$1: \pi = 2R : C, \text{ więc } C = 2\pi R.$$

Gdyby więc stosunek π czyli okrąg koła mającego za średnicę 1 był wiadomy, łatwo byłoby znaleźć okrąg C każdego innego koła, którego promień R iako linia prosta może być zawsze wiadomy. Idzie więc tylko o znalezienie stosunku okręgu iednego koła do średnicy: ułatwi to następujące zagadnienie.

264. Zagad. *Znaleźć stosunek przybliżony oknęgu do średnicy.*

Rozw. Ażeby to zagadnienie rozwiązać, potrzeba iód wpisać w koło wielokąt foremny taki, aby stosunek obwodu iego do średnicy był wiadomy.

2re. Opisać na kole wielokąt podobny wpisanemu (243).

3cie. Za pomocą wiadomego boku wielokąta wpisanego wyrachować naprzód bok, a potém obwód wielokąta opisanego (246).

4te. Podwoiwszy liczbę boków obu tych wielokątów, wyrachować naprzód bok i obwód wielokąta drugiego wpisanego (242), potém bok i obwód wielokąta drugiego opisanego.

5te. To ostanie działanie powtórzywszy kilkanaście razy, gdy nakoniec znajdziemy dwie liczby, iedne mniejszą wyrażającą obwód wielokąta wpisanego, drugą większą wyrażającą obwód wielokąta opisanego, takie, że ich różnica jest bardzo mała; na ten czas liczba środek między nimi trzymająca, to jest, większa od ważności obwodu wielokąta wpisanego, a mniejsza od

ważności obwodu wielokąta opisanego, może być wzięta za ważność okręgu, który co do długości swojej, trzyma środek między obwodami dwóch tych wielokątów (258). Ważność tę porównawszy z ważnością średnicy, otrzymamy stosunek przybliżony okręgu koła do średnicy.

Wpiszmy *np.* w koło sześciokąt foremny; ponieważ bok tego sześciokąta równy jest promieniowi koła opisanego (251), wzięwszy więc promień koła $= 1$, obwód sześciokąta wpisanego będzie 6.

Oznaczywszy bok sześciokąta wpisanego a , opisanego A , bok 12 kąta wpisanego b , opisanego B , bok 24 kąta wpisanego c , opisanego C , i tak dalej; będzie podług tego cośmy powiedzieli wy-

$$\text{żę (246), } A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}}.$$

Ze zaś $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} (4 - 1) = \frac{3}{4} \times 3$; a wy-
ciągając pierwiastek z iloczynu, trzeba go wycią-
gnąć z każdego czynnika; gdy więc w iloczynie
 $\frac{3}{4} \times 3$ czynnik $\frac{3}{4}$ jest kwadratem, którego pier-
wiastek jest $\frac{\sqrt{3}}{2}$, powyższe równanie zamieni się

$$\text{w następujące: } A = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}; \text{ rozmnożywszy}$$

$$\text{licznik i mianownik przez 2, będzie } A = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{czyli } A = \frac{2}{\sqrt{3}}; \text{ a tém samém}$$

$$6A = \frac{12}{\sqrt{3}}; \text{ i ta jest ważność obwodu 6ką-}$$

$$\text{ta opisanego; a że obwód sześciokąta wpisanego}$$

$$\text{jest 6; więc okrag koła będzie większy od 6, a}$$

$$\text{mniejszy od } \frac{12}{\sqrt{3}}.$$

Podobnież podług zagadnienia podanego wy-
żéy (242), będzie bok 12kąta wpisanego, czyli

$$b = \sqrt{2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \right)} = \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{3} \right)} \\ = \sqrt{2 - \frac{1}{2} \sqrt{3}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}; \text{ a tém samém} \\ \text{obwód 12kąta wpisango, czyli}$$

$$12b = 12 \sqrt{2 - \sqrt{3}}; \text{ i t. d.}$$

Wyciągnawszy pierwiastek z liczby 3, będzie
 $\sqrt{3} = 1,732050807568877$; przez pierwiastek
ten podzieliwszy 12, będzie obwód 6kąta opisa-
nego, czyli $6A = 6,928203250275$.

Tenże pierwiastek liczby 3 odiawszy od 2,
zostanie $0,267949192431123$; z czego wyciągną-
wszy pierwiastek kwadratowy, będzie

$b = 0,517638090205$; pierwiastek ten roz-
mnożywszy przez 12, będzie obwód 12kąta wpi-
sanego, czyli $12b = 6,211657082460$.

Tym sposobem postępując daléy, znajdzie-
my obwody wielokątów wpisanych i opisanych,
począwszy od 6kątów, aż do wielokątów mają-
cych po 12288 boków, iak wyraża następująca
tablica.

$6a = 6,0000000.$	$6A = 6,9282052.$
$12b = 6,2116571.$	$12B = 6,4507806.$
$24c = 6,2652572.$	$24C = 6,5195199.$
$48d = 6,2787004.$	$48D = 6,2921724.$
$96e = 6,2820659.$	$96E = 6,2854292.$
$192f = 6,2829049.$	$192F = 6,2857461.$
$584g = 6,2851152.$	$584G = 6,2855260.$
$768h = 6,2851678.$	$768H = 6,2852205.$
$1536i = 6,2851809.$	$1536I = 6,2851941.$
$5072k = 6,2851842.$	$5072K = 6,2851875.$
$6144l = 6,2851850.$	$6145L = 6,2851858.$
$12288m = 6,2851852.$	$12288M = 6,2851854.$

(*)

(*) Dla większéy dokładności 'obwody tych wielokątów rachowane były do dwunastu liczb dziesiętnych; w tablicy zaś

Widzimy tu iak obwody wielokątów tych coraz się bardziéy do siebie przybliżaią, tak dalece, że różnica między obwodami dwóch wielokątów ostatnich mających po 12288 boków, równa się tylko dwom iednościom dziesiętnym siódmego rzędu. A że okrag koła większy iest od obwodu wielokąta wpisanego, a mniejszy od obwodu wielokąta opisanego; liczba więc trzymająca środek między ważnościami dwóch tych obwodów, to iest liczba 6,2851853 może być naznaczona za ważność okręgu koła, którego promień iest 1. Stosunek zatém okręgu do średnicy będzie 2: 6,2851853, czyli podzieliwszy obadwa wyrazy przez 2, będzie 1: 3,1415926. A zatém 3,1415926 iest ważnością stosunku przybliżonego, któryśmy wyżej oznaczyli przez π (263).

W działaniach nie wymagaiących ścisłéy dokładności, można przeftać na dwóch liczbach dziesiętnych: będzie więc stosunek średnicy do okręgu 1: 3,14, czyli rozmnożywszy przez 100 oba wyrazy, iak 100: 314.

Archimedes wpisawszy w koło i opisawszy na niém dwa wielokty foremne o 96 bokach, znalazł, że okrag koła iest mniejszy od $5 \frac{1}{7} \frac{0}{8}$, a większy od $5 \frac{1}{7} \frac{0}{7}$. Podług tego więc rachunku będzie stosunek średnicy do okręgu 1: $5 \frac{1}{7} \frac{0}{8}$; czyli obróciwszy całkowitą na ułomek, i obadwa wyrazy rozmnożywszy przez 70, a potem ie podzieliwszy przez 10; będzie stosunek średnicy do

położone są tylko z 7 dziesiętnemi, lecz ostatnia liczba dziesiętna iest raz większa, drugi raz mniejsza od znalezionej. I tak obwód 12 kąta wpisanego w tablicy będący iest większy od znalezionej, i powinienby mieć na końcu zero nie 1; lecz za to obwód 24 kąta w tablicy położony iest mniejszy od znalezionej: znaleziony bowiem wypada 6,265257226560.

okręgu 7: 22. Późniéy dokładność w téy mierze posunięto daléy; lecz ze wszystkich stosunków wiadomych dwa następujące, pod względem dokładności, zasługują na szczególną uwagę: 1szy 115: 555; 2gi 1250: 5927.

265. *Uwaga.* Działanie powyższe, za pomocą którego wynaydują się obwody wielokątów foremnych w koło wpisanych i opisanych na kole, zabiera nie mało czasu. Lecz można je cokolwiek skrócić sposobem następującym. Damy że AB fig. 126, iest bokiem 6kąta foremnego w koło wpisanego; będzie więc AM bokiem 12kąta, AP bokiem wielokąta mającego boków 24 i t. d. Poprowadziwszy średnicę AC , i cięciwy CB , CM i t. d. w trójkątach prostokątnych ABC , AMC i t. d. iest

$$CB = \sqrt{AC^2 - AB^2}; CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} \text{ i t. d.}$$

Niech będzie promień $AS = 1$; a tém samém średnica $AC = 2$; bok 6kąta $AB = a$, bok 12kąta $AM = b$ i t. d. cięciwa $CB = m$, $CM = n$. $CP = o$ i t. d. Równania więc powyższe zamieniają się w następujące.

$$m = \sqrt{4 - a^2}. \quad n = \sqrt{4 - b^2}$$

Ze zaś $a = 1$, $b = \sqrt{2} = \sqrt{5} (264;)$ a tém samém $a^2 = 1$, $b^2 = 2 = \sqrt{5}$; położywszy więc te ważności w równaniach poprzedzających, będzie

$$m = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}; n = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\ = \sqrt{2} + \sqrt{3}; \text{ czyli } n = \sqrt{2 + m}; \text{ gdyż } m = \sqrt{3} \text{ z dowodzenia.}$$

Tymże sposobem okazać można, że cięciwa CP , czyli $o = \sqrt{2 + n}$; $p = \sqrt{2 + o}$ i t. d. Odbywszy działanie, będzie $m = \sqrt{3} = 1,7320508075$. Więc $n = \sqrt{2 + 1,7320508075} = 1,9518516525$. $o = \sqrt{2 + 1,9518516525} = 1,9828897227$ i t. d.

Znalazłszy ważność cięciw m, n, o i t. d. łatwo będzie znaleźć ważność dla b, c, d i t. d.: gdyż w trójkącie ACM iest $AM = \sqrt{AC^2 - CM^2}$,

czyli $b = \sqrt{4 - n^2}$. A że $n = \sqrt{2 + 1,7520508075}$,

czyli $n = \sqrt{3,7520508075}$; a tém samém

$n^2 = 3,7520508075$; więc ważność tę odiawszy od 4, zostanie 0,2679491925; z czego wyciągnawszy pierwiastek kwadratowy, będzie 0,51763809 ważnością boku dwunastokąta wpisanego; co rozmnożywszy przez 12, będzie obwód tegoż wielokąta 6,2116571, iak w tablicy powyższej (264) i t. d.

266. Zastanowiwszy się nad powierzchniami dwóch wielokątów foremnych o iedneyże liczbie boków, z których ieden iest na kole opisany, drugi wpisany w koło, łatwo iest postrzedz że powierzchnia opisanego większa iest od powierzchni wpisanego. Cięgle podwajaiąc liczbę boków obudwu tych wielokątów postrzeżemy, że powierzchnia wpisanego coraz się bardziéy powiększa, powierzchnia opisanego coraz się bardziéy zmniejsza. A stąd wypada, że im większą liczbę boków mają dwa te wielokąty, tém mnieysza różnica zachodzi między ich powierzchniami. Można nawet różnicę tę uczynić mnieyszą od wszelkiéy ilości naznaczonéy.

Jakoż ponieważ powierzchnie wielokątów podobnych mają się iak kwadraty z promieni kół wpisanych (247), ocnaczywszy zatem powierzchnią wielokąta MI fig. 128 głoską O, powierzchnią wielokąta AD głosko W: będzie O: W = $Sm^2 : Sq^2$; a tém samém O — W: O = $Sm^2 - Sq^2$:

O ($Sm^2 - Sq^2$)
 Sm^2 . Więc O — W = $\frac{O(Sm^2 - Sq^2)}{Sm^2}$

Ze zaś czynnik $Sm^2 - Sq^2$ może być mnieyszym od wszelkiéy ilości naznaczonéy (257);

więc $O - W$, to jest różnica między powierzchniami tych wielokątów, może być mniejsza od wszelkiéy ilości naznaczonéy.

Albo tak: Różnica między powierzchnią wielokąta opisanego MI i wpisanego AD , składa się z tylu trójkątów ABG, BCH i t. d. ile wielokąty te mają boków. Powierzchnia każdego z tych trójkątów równa się iloczynowi połowy iego podstawy, którą iest bok wielokąta wpisanego, przez wysokość Gq ; a zatem powierzchnia wszystkich tych trójkątów, czyli różnica między powierzchnią wielokąta opisanego i wpisanego, równać się będzie iloczynowi połowy obwodu wielokąta wpisanego przez Gq . A że Gq można uczynić mniejszą od wszelkiéy wielkości naznaczonéy; więc i różnica między powierzchnią wielokąta opisanego i wpisanego, może być mniejsza od wszelkiéy wielkości naznaczonéy.

267. Powierzchnia koła mniejsza iest od powierzchni wielokąta opisanego, a większa od powierzchni wielokąta wpisanego. Kiedy więc różnica między powierzchniami tych dwóch wielokątów może być mniejsza od wszelkiéy wielkości naznaczonéy; tém bardziéy różnica między powierzchnią koła i powierzchnią wielokąta opisanego lub wpisanego, mniejsza być może od wszelkiéy wielkości naznaczonéy.

268. *Twierd.* Jeżeli są trzy wielkości A, B, X , z których A iest odmienna, ale zawsze większa od B i od X , które są nieodmienne, lecz takie, że A może być razem do B i do X tak przybliżoną iak się podoba, czyli że różnica tak między A i B , iako też między A i X , może być mniejsza od wszelkiéy wielkości naznaczonéy; będzie $B = X$.

Jakoż ieżeli $X > B$, będzie

$A > X$ z założenia, $X > B$ z przypuszczenia: kie-

dy więc różnica między A i B, może być mniejsza od wszelkiej wielkości naznaczonej, iakośmy założyli, tém bardziej różnica między X i B może być mniejsza od wszelkiej wielkości naznaczonej.

Jeżeli $B > X$ będzie

$A > B$ z założenia, $B > X$ z przypuszczenia, kiedy więc różnica między A i X może być mniejsza od wszelkiej wielkości naznaczonej, iakośmy założyli, tém bardziej różnica między B i X, może być mniejsza od wszelkiej wielkości naznaczonej.

Dwie zatem wielkości nie odmienne B, X, są takie, że różnica między nimi może być mniejsza od wszelkiej wielkości naznaczonej, a tém samém $B = X$ (259).

269. Twierd. *Powierzchnia koła równa jest iloczynowi jego okręgu przez połowę promienia*; czyli, oznaczywszy okrąg koła głoską X, trzeba dowieść, że $X = \frac{1}{2} RC$.

Dowód. Opisawszy na kole wielokąt foremny o jakiegokolwiek liczbie boków, i obwód jego oznaczywszy głoską O; powierzchnia tego wielokąta równać się będzie iloczynowi $\frac{1}{2} RO$ (248). Iloczyn ten $\frac{1}{2} RO$, wyrażający powierzchnię wielokąta opisanego, większy jest tak od powierzchni koła oznaczonej głoską X. iako też od iloczynu $\frac{1}{2} RC$: gdyż zawsze będzie $O > C$. Lecz przez ciągłe podwajanie liczby boków, można będzie nakoniec otrzymać wielokąt opisany taki, że różnica między obwodem O i okręgiem koła C, a tém samém między iloczynem $\frac{1}{2} RO$ i $\frac{1}{2} RC$, może być mniejsza od wszelkiej ilości naznaczonej (258). Podobnież różnica między powierzchnią tegoż wielokąta i powierzchnią koła, może być mniejsza od wszelkiej wielkości naznaczonej (266).

Trzy więc te ilości $\frac{1}{2} RO$, $\frac{1}{2} RC$; i prawdziwa powierzchnia koła X , są zupełnie takie, o iakich mówiliśmy wyżej (268): będzie więc $X = \frac{1}{2} RC$.

Sposób 2gi. Jeżeli to równanie $X = \frac{1}{2} RC$ jest fałszywe, to jest, jeżeli powierzchnia koła nie jest równa iloczynowi okręgu przez połowę promienia, tedy iloczyn ten jest albo mniejszy, albo większy od powierzchni koła.

W 1wszym przypadku jeżeli iloczyn $\frac{1}{2} RC$ jest mniejszy od powierzchni koła, weźmy ilość M większą od C , i daymy nato, jeżeli być może, że powierzchnia koła równa się iloczynowi $\frac{1}{2} RM$, czyli że jest $X = \frac{1}{2} RM$.

Opiszmy na kole daném wielokąt foremny o takiéy liczbie boków, aby różnica między jego obwodem, który oznaczamy głoską O , i okręgiem C mniejsza była, niż jest między ilością M i tymże okręgiem C ; to jest, aby było $O - C < M - C$. Dodawszy po obu stronach C , będzie $O < M$. Rozmnożywszy obie strony przez $\frac{1}{2} R$, będzie $\frac{1}{2} RO < \frac{1}{2} RM$. A że podług przypuszczenia $X = \frac{1}{2} RM$; więc będzie $\frac{1}{2} RO < X$; to jest, iloczyn obwodu wielokąta opisanego przez połowę promienia koła wpisanego, czyli powierzchnia wielokąta opisanego (248), mniejsza jest od powierzchni koła, co być nie może. A zatem i to być nie może, aby iloczyn $\frac{1}{2} RC$ był mniejszy od powierzchni koła.

W 2gim przypadku, jeżeli iloczyn $\frac{1}{2} RC$ jest większy od powierzchni koła, weźmy ilość N mniejszą od C , i daymy nato, jeżeli być może, że $X = \frac{1}{2} RN$.

Wpiszmy w koło dane wielokąt foremny o takiéy liczbie boków, aby różnica między okręgiem C i obwodem tego wielokąta oznaczonym głoską W , mniejsza była od różnicy między okręgiem C i ilością N , to jest, aby było $C - W$.

$\angle C - N$. Dodawszy po obu stronach W i N , a odiawszy C , będzie $N < W$. Rozmnożywszy a bie strony przez $\frac{1}{2} R$, będzie $\frac{1}{2} RN < \frac{1}{2} RW$. A że podług przypuszczenia $X = \frac{1}{2} RN$, będzie więc $X < \frac{1}{2} RW$; to jest, powierzchnia koła mniejsza jest od powierzchni wielokąta w toż koło wpisanego (250); co być nie może. Więc i to być nie może, aby iloczyn $\frac{1}{2} RC$ był większy od powierzchni koła.

Kiedy więc iloczyn $\frac{1}{2} RC$ nie może być ani mniejszy, ani większy od powierzchni koła, musi być zatém iéy równy.

Sposób 5ci. Powierzchnią koła, którego promień SM fig. 155. oznaczywszy głoską X , a iego okrag głoską C , trzeba dowieśdź, że $X = \frac{1}{2} SM \times C$.

Gdyby iloczyn ten $\frac{1}{2} SM \times C$, nie był równy powierzchni koła X , byłby od niéy albo mniejszy, albo większy; czyli, co na iedno wychodzi, iloczyn ten byłby równy albo powierzchni koła mniejszego od X , albo większego.

Daymy iódt, że iloczyn ten równy jest powierzchni koła mniejszego wykréslonego promieniem Sm : oznaczywszy powierzchnią tego koła głoską x , będzie podług przypuszczenia $\frac{1}{2} SM \times C = x$.

Opiszmy na kole mniejszém wielokąt foremny abc i t. d. taki, aby obwód iego nie scho-
dził się nigdzie z okręgiem koła większego (255). Oznaczywszy obwód tego wielokąta głoską o , powierzchnia iego równać się będzie iloczynowi $\frac{1}{2} Sm \times o$. Ze zaś okrag koła większego $C > o$, a tém samém $\frac{1}{2} Sm \times C > \frac{1}{2} Sm \times o$; więc tém bardziéy $\frac{1}{2} SM \times C > \frac{1}{2} Sm \times o$. Lecz $\frac{1}{2} SM \times C = x$ podług przypuszczenia; bęłzie więc $x > \frac{1}{2} Sm \times o$; to jest, powierzchnia koła mniejszego, byłaby większa od powierzchni wielokąta na niém opisanego, co być nie może. Więc i to być nie może,

ażeby iloczyn $\frac{1}{2} SM \times C$ był mniejszy od powierzchni koła X , czyli, nie może być aby iloczyn okręgu koła przez połowę promienia był mniejszy od powierzchni tegoż koła.

2re. Podobnymże sposobem dowiedzimy, że iloczyn okręgu koła przez połowę promienia, nie może być większy od powierzchni koła, czyli, co na iedno wychodzi, że iloczyn ten nie może być równy powierzchni koła większego. Bo dajmy że wyzna czyć trzeba powierzchnią koła wykreślonego promieniem Sm . Oznaczywszy okrąg koła tego głoską c , a iego powierzchnią głoską x ; trzeba dowieść, że iloczyn okręgu tego koła przez połowę promienia, nie może być równy powierzchni X koła większego wykreślonego promieniem SM , czyli, że nie może być $\frac{1}{2} Sm \times c = X$.

Jakoż na kole mniejszem opisawszy, iak wyżéy, wielokątforemny abc i t. d. i obwód iego oznaczywszy głoską o , powierzchnia tego wielokąta, będzie równa iloczynowi $\frac{1}{2} Sm \times o$. Ze zaś obwód $o > c$, a tém samém $\frac{1}{2} Sm \times o > \frac{1}{2} Sm \times c$; więc gdyby iloczyn $\frac{1}{2} Sm \times c$ równy był powierzchni koła większego X podług przypuszczenia, wypadłoby $\frac{1}{2} Sm \times o > X$, to iest, powierzchnia wielokąta opisanego na kole mniejszym, byłaby większa od powierzchni koła wykreślonego promieniem SM , co być nie może; a zatem i to być nie może aby iloczyn $\frac{1}{2} Sm \times c$ był większy od powierzchni x , czyli, nie może być, aby okrąg koła rozmnożony przez połowę promienia był większy od powierzchni tegoż koła.

Kiedy więc iloczyn okręgu koła przez połowę promienia, nie może być ani mniejszy ani większy od powierzchni tegoż koła; musi być zatem iéy równy.

270. *Wnioski.* 1. Oznaczywszy przez π okrąg koła, którego średnica $= 1$, a przez R promień,

przez C okrąg drugiego koła, będzie podług tego cośmy powiedzieli wyżéy (265), $C = 2\pi R$. Rozmnożywszy obie strony przez $\frac{1}{2}R$, będzie $\frac{1}{2}RC = \pi R^2$. To iest, powierzchnia koła równa iest także iloczynowi kwadratu iego promienia, przez stosunek okręgu do średnicy, czyli przez okrąg koła którego średnica iest 1.

271. 2. Oznaczywszy okrąg iednego koła przez C, 2go przez c, promień 1go przez R, 2go przez r; będzie $C : c = R : r$. Rozmnożywszy poprzedniki przez R, a następniiki przez r, będzie $RC : rc = R^2 : r^2$. Podzieliwszy dwa pierwsze wyrazy przez 2, będzie $\frac{1}{2}RC : \frac{1}{2}rc = R^2 : r^2$. A że $R : r = 2R : 2r$, czyli oznaczywszy średnice tych dwóch kół głoskami S i s, będzie $R : r = S : s$, a tém samém $R^2 : r^2 = S^2 : s^2$; więc $\frac{1}{2}CR : \frac{1}{2}rc = S^2 : s^2$. To iest, powierzchnie kół są do siebie w stosunku kwadratowym, czyli dwumnożnym swoich promieni lub średnic.

272. 3. Niech będzie część koła APMS fig. 126, między dwoma promieniami AS, MS i łukiem APM zawarta, która się zowie *wycinkiem* koła, *sector circuli*: jeżeli powierzchnia tego wycinka iest $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ i t. d. częścią powierzchni koła, łuk też wycinka APM będzie, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ i t. d. częścią okręgu tegoż koła (118). Powierzchnia zatem wycinka APMS tak się ma do powierzchni koła, iak łuk wycinka APM do okręgu koła; czyli oznaczywszy powierzchnią koła przez X, iego okrąg przez C, a promień przez R, będzie $APMS : X = APM : C$. Rozmnożywszy wyrazy 2go stosunku przez $\frac{1}{2}R$, będzie

$$APMS : X = \frac{1}{2}R \times APM : \frac{1}{2}RC.$$

W téy proporecyi następnik 1wszy X, to iest, powierzchnia koła danego, równy iest następni-kom 2mu $\frac{1}{2}RC$, to iest iloczynowi okręgu przez połowę promienia; a zatem i poprzednik 1wszy

APMS równy być musi poprzednikowi $2mu \frac{r}{2} R$ $\times$ APM; to jest, powierzchnia wycinka koła, równa jest iloczynowi łuku tegoż wycinka, przez połowę promienia.

273. 4. Powierzchnia odcinka APMA, jest różnicą między powierzchnią wycinka APMS, i powierzchnią trójkąta AMS; powierzchnia drugiego odcinka AMNA, jest różnicą między powierzchnią koła i powierzchnią odcinka APMA. A zatem powierzchnie tych dwóch odcinków, mogą być łatwo wyrachowane.

274. Zagad. *Wykreślić koło któregoby powierzchnia równa była summie lub różnicy powierzchni dwóch kół danych.*

Rozw. W przypadku 1szym wykreślić trójkąt prostokątny i dać mu za ramiona przyległe kątowi prostemu promienie dwóch kół danych; przeciwprostokątna będzie promieniem koła szukanego. W przypadku 2gim wykreślić trójkąt prostokątny, i dać mu za jedno ramie kąta prostego promień koła mniejszego, a za przeciwprostokątną promień koła większego: drugie ramie kąta prostego będzie promieniem koła szukanego.

Dowodzenie zupełnie jest takie, iakiego użyliśmy wyżej (215), mówiąc o wielokątach podobnych, których powierzchnie są do siebie w stosunku dwumnożnym boków odpowiadających, tak iak powierzchnie kół są do siebie w stosunku dwumnożnym promieni.

275. Uwaga. Gdyby dwa dane koła były między sobą równe, trzecie koło znalezione równe summie ich powierzchni byłoby od jednego z nich dwa razy większe. W ogólności można znaleźć koło 3, 4, 5 i t. d. razy większe od koła danego tym samym sposobem iakiśmy podali wyżej (168), na znalezienie kwadratu 3, 4, 5 i t. d. razy większego niż kwadrat dany.

276. Zagad. *Mając dane koło, wykreślić drugie spółśrodkowe z danem, któregoby powierzchnia była trzy razy mniejsza od powierzchni koła danego.*

Rozw. Między całym promieniem koła danego i 3cią jego częścią znaleźć średnią ieometrycznie proporcjonalną (204); ta będzie promieniem koła szukanego. Dajmy że AB fig. 99. jest promieniem koła danego, AD 3cia część tego promienia; linia AC średnio ieometrycznie proporcjonalna między AB i AD jest promieniem koła szukanego: gdyż podług wykreślenia jest $AB: AC = AC: AD$; czyli zamiast linii położywszy ich ważności w liczbach, będzie $5: \sqrt{5} = \sqrt{5}: 1$. Więc $AB: AC = 5: \sqrt{5}$; a tém samém $AB^2: AC^2 = 9: 5$; gdyż $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$. Ze zaś powierzchnie kół mają się iak kwadraty z promieni, oznaczywszy zatem powierzchnią koła danego przez X , powierzchnią koła znalezionego przez x , będzie

$$X: x = AB^2: AC^2; \text{ czyli}$$

$$X: x = 9: 5.$$

W téy proporcyi następnik 2gi, jest 5 razy mniejszy od swego poprzednika; więc i następnik 1wszy x jest 5 razy mniejszy od swego poprzednika X ; to jest, powierzchnia koła znalezionego jest 5 razy mniejsza od powierzchni koła danego.

Tym samym sposobem postępując, łatwo będzie rozwiązać dwa następujące zagadnienia:

10d. *Mając dane koło znaleźć drugie spółśrodkowe z danem, któregoby powierzchnia była tyle razy mniejsza lub większa od powierzchni danego, ile się podoba.*

2re. *Dane koło podzielić kołami spółśrodkowymi na tyle równych części, na ile się podoba.*

277. Zag. Mając dane dwa koła spółśrodkowe, wyrachować różnicę ich powierzchni.

Rozw. Oznaczwszy powierzchnią koła większego przez R , jego okrąg przez C , R , przez powierzchnią koła mniejszego przez x , jego okrąg przez c , promień przez r , będzie podług tego cośmy powiedzieliwyżéy (269); $X = \frac{1}{2} RC$, $x = \frac{1}{2} rc$. Odiąwszy strony równania 2go od stron równania 1wszego, zostanie.

$$X - x = \frac{1}{2} RC - \frac{1}{2} rc : - : - : A.$$

Ze zaś $R : r = C : c$ (260); więc $Rc = rC$; a tém samym $\frac{1}{2} Rc = \frac{1}{2} rC$. Odiąwszy po obu stronach $\frac{1}{2} rC$, zostanie $\frac{1}{2} Rc - \frac{1}{2} rC = 0$.

W równaniu więc oznaczoném głoską A , dodawszy z prawéy strony $\frac{1}{2} Rc - \frac{1}{2} rC$, równość nie zginie, a równanie to weźmie następującą postać:

$$X - x = \frac{1}{2} RC - \frac{1}{2} rC + \frac{1}{2} Rc - \frac{1}{2} rc.$$

Rozłożywszy drugą stronę na czynniki będzie

$$X - x = (R - r) \left(\frac{1}{2} C + \frac{1}{2} c \right); \text{ czyli,}$$

$$X - x = (R - r) \left(\frac{C + c}{2} \right) : = : - : B.$$

Nadto ponieważ $R : r = C : c$, a tém samym $r : R + r = c : C + c$; podzieliwszy następni

$$\text{ki przez } 2, \text{ będzie } r : \frac{R + r}{2} = c : \frac{C + c}{2}.$$

$$\text{Niech będzie } \frac{R + r}{2} = P. \text{ Wziąwszy li-}$$

nią oznaczoną przez P za promień, i okrąg koła tym promieniem wykręślonego oznaczywszy przez O ; będzie

$$r : P = c : O; \text{ a że z dowiedzenia}$$

$$r : \frac{R + r}{2} = c : \frac{C + c}{2}; \text{ kiedy więc w tych dwóch}$$

proporcjach trzy pierwsze wyrazy iednéy proporcji są równe trzem odpowiadającym wyrazom proporcji drugiéy, wyraz 4ty iwszély, równy także być musi wyrazowi 4temu drugiéy proporcji; to jest,

to jest, $\frac{C+c}{2} = O$. W równaniu zatém B

położywszy O zamiast $\frac{C+c}{2}$, będzie

$X - x = (R - r) O$. To jest, różnica powierzchni dwóch kół spółśrodkowych $X - x$, równa jest iloczynowi różnicy ich promieni $R - r$, przez okrąg koła O wykreślonego promieniem równym połowie summy dwóch promieni kół danych $\frac{R+r}{2}$

Uwaga. Wszelka ilość równaiąca się połowie summy dwóch ilości innych, jest między niemi średnią artymetycznie proporcjonalną. Powyższe zatém wyrażenie

$X - x = (R - r) O$, można inaczéy tak wyśłowić: różnica powierzchni dwóch kół spółśrodkowych równa jest iloczynowi różnicy ich promieni przez okrąg koła wykreślonego promieniem równaiącym się linii średniéy arytmetycznie proporcjonalnéy, między promieniami dwóch danych kół spółśrodkowych.

Można także wyznaczyć tę powierzchnią innym sposobem, iak jest w następującém twierdzeniu.

278. Twierd. Różnica powierzchni dwóch kół spółśrodkowych, równą jest prostokątowi mającemu za wysokość różnicę dwóch promieni, a za podstawę linią prostą równą okręgowi koła wykreślonego promieniem równaiącym się linii średniéy arytmetycznie proporcjonalnéy między promieniami dwóch danych kół spółśrodkowych.

Dowód. Niech będą SC , *Sc fig. 154* promienie dwóch kół spółśrodkowych. Dajmy że linia prosta CE prostopadła do SC , równa jest okręgowi C koła większego. Poprowadziwszy linią prostą SE , i z punktu c linią ce równoodległą od CE , aż do przecięcia się z linią SE w punkcie e , w dwóch trójkątach SCE , Sce podobnych jest $SC: Sc = CE: ce$; czyli $SC: Sc = C: ce$ gdyż

$$CE = C \text{ podług wykręślenia, a zatem } ce = \frac{Sc \times C}{SC}$$

Aże okręgi kół mają się iak promienie (260); oznaczywszy więc przez c okrag koła wykręślonogo promieniem Sc , będzie $SC: Sc = C: c$; a za-

$$\text{tém } c = \frac{Sc \times C}{SC}.$$

Z dwóch ostatnich równań wypada, że $ce = c$, to jest, że linia ce równa się okręgowi koła wykręślonogo promieniem Sc .

Powierzchnia trójkąta $SCE = \frac{1}{2} SC \times CE$ (150). Powierzchnia trójkąta $Sce = \frac{1}{2} Sc \times ce$. Ze zaś CE równa się okręgowi koła wykręślonogo promieniem SC podług założenia, a ce równa się okręgowi koła wykręślonogo promieniem Sc podług dowiedzenia, powierzchnia zaś koła równa jest iloczynowi iego okręgu przez połowę promienia (269); powierzchnia zatem trójkąta SCE równa jest powierzchni koła większego, powierzchnia trójkąta Sce równa jest powierzchni koła mniejszego; a tém samém różnica między powierzchniami dwóch tych trójkątów, to jest, czworobok $CceE$ jest równy różnicy między powierzchniami dwóch danych kół spółśrodkowych.

Podzieliwszy linią Cc w punkcie ϵ na dwie równe części i poprowadziwszy linią ϵe równoodległą od CE , aż do przecięcia się z linią SE

w punkcie $\acute{e}$; przez punkt $\acute{e}$ poprowadźmy linią Bb prostopadłą do CE , przecinaiającą się w punkcie b z linią ce : prostokąt $CcbB$ równy jest co do powierzchni czworobokowi $CceE$: gdyż dwa prostokątne trójkąty $eb\acute{e}$, $\acute{e}BE$, mające kąty przy $\acute{e}$ równe i boki $b\acute{e}$, $B\acute{e}$ równe (79), mogą do siebie przystać (26). Prostokąt zatem $CcbB$ równy jest różnicy dwóch kół spółśrodkowych.

Prostokąt ten ma za wysokość linią Cc , która jest różnicą dwóch promieni, a za podstawę linią $CB = cb$, która jest równa okręgowi $\acute{e}$ koła wykreślonego promieniem Sc ; co tym samym sposobem okazać można, iakim okazaliśmy, że linia ce jest równa okręgowi koła wykreślonego promieniem Sc . Idzie więc tylko o to, aby okazać, że promień Sc jest średnim arytmetycznie proporcjonalnym między promieniami SC i Sc ; czyli, co na jedno wychodzi, że promień Sc równy jest połowie summy dwóch promieni SC i Sc ; co jest łatwo okazać przedłużwszy SC do A tak aby $CA = Sc$, i zważywszy, że z dwóch ilości nierównych, iakiemi tu są promienie SC i Sc , mniejsza równa jest połowie ich summy mniej połową ich różnicy, większa równa połowie ich summy więcej połową ich różnicy.

279. *Uwaga.* Ponieważ powierzchnia koła równa jest iloczynowi jego okręgu przez połowę promienia (269); podzieliwszy więc powierzchnią koła przez połowę promienia, wypadnie na iloraz okrąg koła. Nadto dowiedliśmy wyżej (267), że można w koło wpisać lub na niem opisać wielokąt foremny taki, iż różnica między jego powierzchnią i powierzchnią koła może być mniejsza od wszelkiej ilości naznaczonej. Nakoniec okazaliśmy (251), że mając wiadome powierzchnie dwóch wielokątów foremnych podobnych jednego w koło wpisanego, drugiego opisanego na kole,

można znaleźć powierzchnie dwóch innych wielokątów foremnych jednego wpisanego, drugiego opisanego mających boków po dwa razy więcej niż wielokąty pierwsze. Wiadomości te podają inny sposób, cokolwiek łatwiejszy od podanego wyżej (264), wynalezienia stosunku okręgu do średnicy.

Trzeba *10d* wpisać w koło i opisać na niem dwa wielokąty foremne o iedneyże liczbie boków, którychby powierzchnie mogły być łatwo wyrachowane.

2re. Podwoiwszy liczbę boków wielokąta wpisanego i opisanego, wyrachować powierzchnie dwóch drugich wielokątów mających po dwa razy więcej boków, niż dwa wielokąty pierwsze.

5cie. To ostatnie działanie powtórzywszy kilkanaście razy, gdy nakoniec znajdziemy dwie liczby, iedną mnieyszą wyrażającą powierzchnią wielokąta wpisanego, drugą większą wyrażającą powierzchnią wielokąta opisanego takie, że ich różnica jest bardzo mała; na ten czas liczba środków między niemi trzymająca, może być wzięta za powierzchnią koła, którą podzieliwszy przez połowę promienia, wypadnie na iloraz ważność okręgu koła; nakoniec ważność tę porównawszy z ważnością średnicy, otrzymamy stosunek przybliżony okręgu do średnicy.

Ponieważ kwadrat w koło wpisany jest dwa razy większy od kwadratu promienia (256), wzięwszy więc promień koła $= 1$, będzie powierzchnia kwadratu wpisanego $= 2$. A że kwadrat na kole opisany jest kwadratem średnicy (244), a tém samém 4 razy większy od kwadratu promienia; będzie więc powierzchnia kwadratu opisanego $= 4$.

Oznaczywszy powierzchnią kwadratu wpisanego przez a , opisanego przez A , powierzchnią ośmiokąta wpisanego przez b , opisanego przez B ,

powierzchnią 16kąta wpisanego przez c , opisanego przez, C i t. d.; będzie

$$16d, a = 2. A = 4.$$

Ze zaś $b = \sqrt{A \times a}$; $B = \frac{2a \times A}{a + b}$ (251); będzie więc

$$2re, b = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{8} = 2,8284271.$$

$$B = \frac{4 \times 4}{2 + \sqrt{8}} = \frac{16}{4,8284271} = 3,3157085.$$

Podobnież ponieważ $c = \sqrt{B \times b}$; $C = \frac{2b \times B}{b + c}$; położywszy więc zamiast B i b znalezione ich ważności, i odhywszy działanie, znajdziemy powierzchnie c i C 16kąta wpisanego i opisanego.

Tym sposobem postępując dalej, znajdziemy powierzchnie wielokątów wpisanych i opisanych, coraz bardziéy do siebie zbliżających się. I tak np. powierzchnia wielokąta mającego boków 128 wpisanego = 3,1403511, opisanego zaś o téy-że saméy liczbie boków = 3,1422256. Powierzchnia wielokąta o 2048 bokach, wpisanego = 3,1415877, opisanego zaś = 3,1415951. Powierzchnia wielokąta o 16384 bokach wpisanego = 3,1415925; opisanego zaś = 3,1415927.

Powierzchnie te różnią się tylko między sobą dwiema jednościami dziesiętnemi siódmego rzędu. Liczba zatem 3,1415926, może być wzięta za ważność powierzchni koła (*). Ze zaś powierz-

(*) *W wielokątach mających po 16384 boków, podwoiwszy liczbę boków, otrzymamy wielokąty o 32768 bokach, których powierzchnie w pierwszych siedmiu liczbach dziesiętnych od siebie się nie różnią; odhywszy bowiem działanie potrzebne, wypadnie powierzchnia tak wpisanego iak opisanego = 3,1415926.*

chnia koła, równa jest iloczynowi promienia przez połowę okręgu; kiedy więc promień jest 1, połowa okręgu będzie $= 3,1415926$. Azatém oznaczwszy promień koła przez R , średnicę przez S , a okrąg koła przez C , będzie $R: \frac{1}{2} C = 1: 3,1415926$. Rozmnożywszy pierwszy stosunek przez 2, będzie $2R$, czyli $S: C = 1: 3,1414926$.

TRYGONOMETRYA

PROSTOKRĘŚLNA.

I. **Z**twierdzeń o przystawianiu i z zagadnień o kręśleniu trójkątów prostokręślnych, to jest liniami prostymi zakończonych, łatwo wniesć można, że jeżeli z sześciu części trójkąta, któremi są jego boki i kąty, trzy części są wiadome, drugie trzy mogą być wyznaczone, i trójkąt może być wykreślony, byleby jeden bok przynajmniej znajdował się między częściami wiadomemi. Lecz kręślenie trójkątów zależące od większey lub mniejszey wprawy i dokładności narzędzi do tego używanych, podlega rozmaitym uchybieniom, na których sprostowanie Jeometrya nie może podać żadnych prawideł, kiedy nawet linia prosta nie może być tak wykreślona, aby nie miała żadney szerokości; gdy tym czasem w rachunku arytmetycznym wszelkie omyłki bez trudności poprawić można.

Dla dopełnienia więc nauki o trójkątach prostokręślnych, na które wszelkie inne wielokąty podzielone i zamienione być mogą, wypada do wykreślenia ieometrycznego przydać rachunek arytmetyczny, aby z trzech części trójkąta wyrażonych liczbami, drugie trzy części liczbami także wyrarażone być mogły z taką dokładnością, do iakięy tylko rachunek algiebraiczny doprowadzić można. Część Jeometryi podająca na to sposoby, zowie się *Trygonometrią prostokręślną*.

II. Niech będzie trójkąt *ACB* fig. 103, w którym wiadome są kąty *A*, *B* i bok *AB*. Weźmy trójkąt inny *abc*, którego wszystkie części są wiado-

me, i w którym kąt $a = A$, $b = B$: więc dwa te trójkąty są podobne (191), a zatem

$ab: AB = ac: AC$; $ab: AB = bc: BC$. Więc
 $ab \times AC = AB \times ac$; $ab \times BC = AB \times bc$; a tém

$$\text{samém } AC = \frac{AB \times ac}{ab}; \quad BC = \frac{AB \times bc}{ab}.$$

Jeżeli więc ab , ac , bc i AB są wyrażone w liczbach, znajdziemy także w liczbach boki AC i BC ; a że dwa te trójkąty są równokątne, kiedy więc kąty trójkąta abc są wiadome, będą także wiadome kąty trójkąta ABC a tym sposobem wszystkie części trójkąta ABC są wiadome i mogą być wyrażone w liczbach, czyli, iak odtąd mówić będziemy, trójkąt ABC jest *rozwiązany*.

III. Stąd się okazuje, że gdybyśmy mieli ciąg trójkątów, którychby kąty miały wszelką ważność iaką tylko mieć mogą, i którychby wszystkie części były wiadome; w ciągu tym musiałby się znajdować ieden trójkąt równokątny z trójkątem danym do rozwiązania, za pomocą którego trójkąt dany moglibyśmy rozwiązać sposobem wyżej okazanym.

Abyśmy ciąg taki trójkątów ułożyli, dosyć będzie uważać trójkąty prostokątne, na które wszystkie inne podzielone być mogą przez spuszczenie prostopadłej z wierzchołka kąta największego na bok przeciwny. Wszystkie takie trójkąty mogą być wykreślone w czwartéj części koła, spuszczając ze wszystkich punktów łuku AB fig. 155, linie SC , SCi t. d. prostopadłe do promienia RA , i prowadząc promienie RS , RSi t. d. Trójkąty RCS , $RCSi$ i t. d. tym sposobem utworzone, będą przy punktach C , Ci t. d. prostokątne; a kąty ich przy R będą miały wszelkie ważności, iakie tylko kąty, ostre mieć mogą: gdyż miarą ich są łuki AS , ASi t. d. których wielkość zależy od naszej woli; kąty zaś CSR , $CSRi$ i t. d. w miarę

powiększających się kątów przy R zmniejszać się będą: gdyż kąt przy S, z kątem przy R w każdym trójkącie RCS waży jeden kąt prosty; i nie może być żaden trójkąt prostokątny dany do rozwiązania, któryby nie był podobny jednemu z trójkątów wykreślonych w czwartéj części koła.

IV. Wszystkie te trójkąty RCS i t. d., mają jednakową przeciwprostokątną równą promieniowi RA. Możliwość utworzyć inny ciąg trójkątów prostokątnych, którychby jedno ramie kąta prostego, równe było promieniowi RA: na ten koniec, dosyć jest z końca promienia RA wyprowadzić styczną AT nieograniczonéj długości, i ze środka koła R przez punkta S, S i t. d. poprowadzić sieczne RN, RN i t. d. Rzeczą jest przez się widoczną, że kąty ostre przy R w trójkątach prostokątnych RNA, RNA i t. d. będą miały wszelką ważność, iaką tylko kąty ostre mieć mogą, i że tém samém między temi trójkątami, musi być jeden podobny trójkątowi prostokątnemu danemu do rozwiązania.

V. W trójkątach RCS i t. d. przeciwprostokątna nie odmienia się, boki CS i t. d. rosną w miarę rosnących kątów CRS i t. d., i łuków AS i t. d. Wielkość zatém kątów CRS i t. d. i łuków AS i t. d., zależy w trójkątach prostokątnych od wielkości boków CS, CS i t. d. Boki te nazwano *Wstawami*, *sinus*, łuków i kątów im odpowiadających. I tak CS jest wstawą łuku AS i kąta ARS; CS jest wstawą łuku AS i kąta ARS i t. d. *Wstawa więc łuku jest prostopadła spuszczone z końca tego łuku na promień przechodzący przez drugi koniec tegoż łuku.*

VI. Linie RC. RC i t. d. które zmniejszają się w miarę powiększających się łuków AS, AS i t. d. są równe liniom SO, SO i t. d. prostopadłym do promienia RB, który jest prostopadły do

promienia RA. Linii te SO i t. d. są t^om względem łuków BS, BŚ i t. d. cz^om są linie SC, ŚC i t. d. względem łuków AS, AŚ i t. d. To jest, linia SO jest wstawą łuku BS; linia SO jest wstawą łuku BŚ i t. d. Dwa łuki, które do siebie dodane lub od siebie odjęte równe są czwaat^ey części okręgu, nazywamy *Dopełnieniem* ieden drugiego, *complementum*. I tak ług BS jest dopełniem łuku AS, BŚ jest dopełniem łuku AS i t. d. Linie zat^em SO, SO i t. d. są wstawami dopełnia łuków AS, i t. d, *sinus complementi*. Wstaw dopełnienia inacz^ey zowie się *dostawą*, *cosinus*. Wi^ec linie SO, SO i t. d. tudzież równe im linie RC, RĆ i t. d. są dostawami łuków AS, AS i t. d. *Dostawa zat^em łuku jest wstawą dopełnienia tegoż łuku, i równa się części promienia będąc^ey między śródkiem koła i wstawą.*

Linia AC, AĆ i t. d. równa promieniowi AR zmniejszonemu dostawą łuku SA, SA, i t. d. nazywa się wstawą *odwróconą*, *sinus versus*, tegoż łuku. Lecz linia ta w dalsz^ey Matematyce używana, do rozwiązywania trójkątów nie będzie nam potrzebna.

VII. W trójkątach wi^ec prostokątnych RCS i t. d. przeciwprostokątna RS i t. d. jest promieniem koła; boki CS i t. d. są wstawami, a boki RC i t. d. są dostawami kątów ostrych R mających swój wierzchołek w środku koła. W każdem wi^ec trójkacie prostokątnym wzięwszy przeciwprostokątną za promień, a wierzchołek iedenego z dwóch kątów ostrych za środek koła, bok przeciwny kątowi ostremu mającemu swój wierzchołek w środku koła będzie iego wstawą, a bok przyległy temuż kątowi iego dostawa.

VIII. W trójkątach ARN, ARN i t. d. bok AR nie odmienia się; boki zaś RN, RŃ i t. d. tudzież boki AN, AŃ i t. d. rosną w miarę ro-

śnacych kątów ARN i t. d. i łuków AS i t. d. które są miarą tychże kątów. Boki RN , RN i t. d. zowią się *Sieczne*, *secantes*, łuków AS i t. d. i kątów ARN i t. d., boki zaś AN , AN i t. d. *styczne*, *tangentes*, tychże łuków i kątów.

Sieczna zatem trygonometryczna łuku, jest promień przez koniec tego łuku poprowadzony i przedłużony aż do zeyścia się ze styczną wyprowadzoną z drugiego końca tegoż łuku; *Styczna* zaś trygonometryczna łuku jest część styczney przez ieden koniec tego łuku poprowadzoney, zawarta między dwoma promieniami przez obadwa końce tegoż łuku poprowadzonymi.

IX. W trójkątach więc prostokątnych ARN i t. d., bok AR jest promieniem koła, boki AN i t. d. są stycznymi, a przeciwprostokątne RN i t. d. siecznymi kątów ostrych ARN i t. d. mających swój wierzchołek w środku koła. W każdym więc trójkacie prostokątnym, wziawszy iedno ramie kąta prostego za promień, a wierzchołek iednego z kątów ostrych za środek koła, drugie ramie kąta prostego będzie styczną, a przeciwprostokątna sieczną kąta ostrego mającego swój wierzchołek w środku koła.

X. Z końca B łuku AB fig: 156, wyprowadziwszy styczną Bn , i przedłużywszy ją aż do zeyścia się z sieczną Rn ; liniia Bn będzie styczną a liniia Rn sieczną łuku BS . Ze zaś łuk BS jest dopełnieniem łuku $AS(V)$, więc liniia Bn jest styczną dopełnienia łuku AS , i zowie się inaczey *dotychną*, *cotangens*; liniia zaś Rn jest sieczną dopełnienia tegoż łuku AS , i zowie się *dosieczną*, *cosecans*.

XI. Wszystkie te liniie trygonometryczne będąc bokami podobnych trójkątów RCS , RNA , RBn , ROS , są między sobą proporcjonalne: mając zatem wiadome ważności iednych, łatwo, będzie wyznaczyć ważności drugich,

Jakoż w trójkącie RCS prostokątnym przy C iest $CS^2 + RC^2 = RS^2$; czyli, oznaczywszy promień RS przez R, łuk AS przez a , linie zaś trygonometryczne przez początkowe głoski ich nazwisk; będzie

$wst^2 a + dos^2 a = R^2$; więc $wst^2 a = R^2 - dos^2 a$;
 $dos^2 a = R^2 - wst^2 a$; a tém samém

$wst a = \sqrt{R^2 - dos^2 a} : - : - : - : 1.$
 $dos a = \sqrt{R^2 - wst^2 a} : - : - : - : 2.$

2re. W trójkątach RAN, RCS podobnych iest RC: CS = RA: AN; czyli $dos a : wst a = R : sty a$;

więc $sty a = \frac{R \cdot wst a}{dos a} : - : - : 3.$

3cie. W trójkątach RCS, RBn podobnych, iest CS: RC = BR: Bn; czyli $wst a : dos a = R :$

$dot a$; więc $dot a = \frac{R \cdot dos a}{wst a} : - : - : 4.$

4te. W trójkątach RCS, RAN podobnych iest RC: RS = RA: RN; czyli $dos a : R = R :$

$siec a$; więc $siec a = \frac{R^2}{dos a} : - : - : 5.$

5te. W trójkątach RCS, RBn podobnych iest CS: RS = RB: Rn; czyli, $wst a : R = R : dosiec a$;

więc $dosiec a = \frac{R^2}{wst a} : - : - : - : - : 6$

Przypatrzywszy się równaniom 1, 2, 3, 4, 5 i 6, oznaczaiącym ważność 6ciu linii trygonometrycznych, postrzeżemy, że ważność styczney i dotychney, siechney i dosiechney zależy od wyznaczenia ważności wstawy, dostawy i promienia. Ze zaś długość promienia w mierzeniu kątów za pomocą łuków koła iest rzeczą obojętną, więc wziąwszy promień = 1, ważność innych linii trygonome-

trycznych zależeć będzie od wyznaczenia wstawy i dostawy: a właściwie mówiąc od wyznaczenia ważności saméy tylko wstawy: gdyż dostawa zależy od ważności wstawy, iak się z równania pod liczbą 2 przekonać można.

Następujące twierdzenie o ważności wstaw i dostaw summy lub różnicy dwóch łuków, zasługuje na naywiększą uwagę: gdyż zamyka w sobie wszystkie własności wstaw i dostaw.

XII. Twierd. *Niech będą dwa iakiekolwiek łuki a, b; będzie*

$$\text{wst } a. \text{ dos } b \pm \text{wst } b. \text{ dos } a$$

$$\text{wst } (a \pm b) = \frac{\text{wst } a. \text{ dos } b \pm \text{wst } b. \text{ dos } a}{R}$$

$$\text{dos } (a \pm b) = \frac{\text{dos } a. \text{ dos } b \pm \text{wst } a. \text{ wst } b}{R}$$

Dowod. Niech będzie fig. 157, łuk $AM = a$, $MN = b$: wzięwszy łuk $MN = MN$, i poprowadziwszy cięciwę NN i promień MR , z punktów N , M , E i N spuścimy NC , MP , EF i NC prostopadłe do AR , tudzież NG i ED prostopadłe do NC .

Podług tego cośmy powiedzieli wyżej (V), linia MP jest wstawą, a PR dostawą łuku $AM = a$. Linia NE z wykreślenia prostopadła do promienia MR (109), jest wstawą, a RE dostawą łuku $MN = b$.

Linia NC jest wstawą łuku $AN = AM + MN = a + b$.

Linia $\dot{N}C$ jest wstawą łuku $\dot{A}\dot{N} = AM - MN = a - b$.

Linia RC jest dostawą łuku $AN = AM + MN = a + b$.

Linia $\dot{R}\dot{C}$ jest dostawą łuku $\dot{A}\dot{N} = AM - MN = a - b$.

Lecz $NC = DC + DN = EF + DN$: gdyż $EF = DC$,

$$\dot{N}C = GC = DC - DG = EF - DG.$$

$$RC = RF - FC = RF - ED: \text{gdyż } ED = FC;$$

$$RC = RF + FC.$$

Nadto, w trójkątach NNG, END podobnych jest NN: EN = NG: DN = NG: ED.

A że poprzednik 1szy NN jest dwa razy większy od swego następnika EN (108); więc i linia NG dwa razy większa od DN, i NG czyli CC dwa razy większa od ED czyli FC; a tém samém DG = DN, ED czyli FC = FC.

W powyższych zatem równaniach zamiast linii DG i FC położywszy równe im linie DN i ED będzie

$$\text{wst } (a + b) = NC = EF + DN:$$

$$\text{wst } (a - b) = NC = EF - DN.$$

$$\text{dos } (a + b) = RC = RF - ED.$$

$$\text{dos } (a - b) = RC = RF + ED.$$

Idzie więc tylko o wynalezienie ważności czterech linii EF, RF, DN i ED, z których dwie pierwsze są bokami trójkąta EFR podobnego trójkątowi MPR, dwie drugie są bokami trójkąta EDN podobnego témuż trójkątowi MPR: gdyż boki 1go są z wykreślenia prostopadłe do boków 2go trójkąta. Będzie więc

$$RM: MP = RE: EF. RM: PR = RE: RF.$$

$$RM: NE = RP: DN. RM: EN = MP: ED.$$

Czyli położywszy ważności trygonometryczne,

$$R: \text{wst } a = \text{dos } b: EF; \text{ więc } EF = \frac{\text{wst } a. \text{ dos } b}{R}$$

$$R: \text{dos } a = \text{dos } b: RF, \text{ więc } RF = \frac{\text{dos } a. \text{ dos } b}{R}$$

$$R: \text{wst } b = \text{dos } a: DN; \text{ więc } DN = \frac{\text{wst } b. \text{ dos } a}{R}$$

$$R: \text{wst } b = \text{wst } a: ED; \text{ więc } ED = \frac{\text{wst } a. \text{ wst } b}{R}$$

W powyższych zatem czterech równaniach zamiast linii EF, RF, DN i ED położywszy zna-

lezione ich ważności, równania te zamieniają się w następujące:

$$\text{wst } (a + b) = \frac{\text{wst } a \cdot \text{dos } b + \text{wst } b \cdot \text{dos } a}{R}$$

$$\text{wst } (a - b) = \frac{\text{wst } a \cdot \text{dos } b - \text{wst } b \cdot \text{dos } a}{R}$$

$$\text{dos } (a + b) = \frac{\text{dos } a \cdot \text{dos } b - \text{wst } a \cdot \text{wst } b}{R}$$

$$\text{dos } (a - b) = \frac{\text{dos } a \cdot \text{dos } b + \text{wst } a \cdot \text{wst } b}{R}$$

Równania te za pomocą podwójnego znaku $\pm$ wyrażającego sumę i różnicę wstaw i dostaw, można zamienić na dwa równania, któreśmy założyli w twierdzeniu.

XIII. Chcąc znaleźć wstawę i dostawę łuku dwa razy większego, niż jest łuk dany a , dosyć jest w równaniu iwszém i 5ciém, ze czterech równań poprzedzających, zamiast łuku b wziąć łuk a ; tym sposobem dwa te równania zamieniają się w następujące:

$$\text{wst } (a + a) = \frac{\text{wst } a \cdot \text{dos } a + \text{wst } a \cdot \text{dos } a}{R}$$

$$\text{dos } (a + a) = \frac{\text{dos } a \cdot \text{dos } a - \text{wst } a \cdot \text{wst } a}{R}; \text{ czyli}$$

$$\text{wst } 2a = \frac{2 \text{wst } a \cdot \text{dos } a}{R}; \quad \text{dos } 2a = \frac{\text{dos }^2 a - \text{wst }^2 a}{R}$$

W tychże samych równaniach zamiast b położywszy łuk $2a$, otrzymamy ważność wstawy i dostawy łuku trzy razy większego, niż jest łuk dany a : będzie bowiem

$$\text{wst } (a + 2a) = \text{wst } 3a = \frac{\text{wst } a \cdot \text{dos } 2a + \text{wst } 2a \cdot \text{dos } a}{R};$$

$$\text{dos } (a + 2a) = \text{dos } 3a = \frac{\text{dos } a \cdot \text{dos } 2a - \text{wst } a \cdot \text{wst } 2a}{R}$$

Tym sposobem postępując, można otrzymać wstawę i dostawę łuku 4, 5 i t. d. razy większego, niż jest łuk dany.

$$\text{XIV. Z równania } \cos 2a = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{R}$$

(XIII), można także otrzymać wstawę i dostawę łuku dwa razy mniejszego niż jest łuk dany a : iakoż zamiast łuku a , wzięwszy łuk $\frac{1}{2} a$, równanie to zamieni się w następujące:

$$\cos a = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} a - \sin^2 \frac{1}{2} a}{R}. \text{Zniósłszy miano-}$$

wnik, będzie

$$\cos^2 \frac{1}{2} a - \sin^2 \frac{1}{2} a = R \cdot \cos a. \text{ Ze zaś}$$

$\cos^2 \frac{1}{2} a + \sin^2 \frac{1}{2} a = R^2$ (XI); więc strony tych dwóch równań raz od siebie odiawszy, drugi raz do siebie dodawszy, będą dwa następujące równania:

$$2\sin^2 \frac{1}{2} a = R^2 - R \cdot \cos a. \quad 2\cos^2 \frac{1}{2} a = R^2 + R \cdot \cos a.$$

Podzieliwszy obie strony przez 2, będzie $\sin^2 \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} R \cdot \cos a$; $\cos^2 \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{2} R \cdot \cos a$.

$$\text{Więc } \sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} R \cdot \cos a};$$

$$\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{2} R \cdot \cos a}.$$

Drugą stronę przed znakiem pierwiastkowym podzieliwszy przez 2, a wyrazy będące pod znakiem pierwiastkowym rozmnożywszy przez 2^2 , czyli przez 4, co wypadnie na to samo, iak gdyby strona ta była podzieloną i rozmnożoną przez 2, będzie

$$\sin \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} \sqrt{2 R^2 - 2 R \cdot \cos a};$$

$$\cos \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} \sqrt{2 R^2 + 2 R \cdot \cos a}.$$

Za pomocą tych dwóch równań, można będzie znaleźć wstawę i dostawę nie tylko połowy łuku danego, ale też łuku 4, 8, 16 i t. d. razy mniejszego, niż jest łuk dany; gdyż wstawa i

dostawa łuku dwa razy mniejszego niż jest łuk $\frac{1}{2}a$, będzie wstawą i dostawą łuku 4 razy mniejszego, niż jest łuk a ; i t. d.

Te same dwa równania otrzymać można sposobem następującym:

Podzieliwszy łuk AM *fig. 158*, na dwie części równe w punkcie N , i poprowadziwszy promień RN , i cięciwę AM : cięciwa ta w punkcie C jest podzielona na dwie równe części, i jest prostopadła do promienia RN (108): linia zatem CM jest wstawą łuku MN , czyli połowy łuku AM (V). W trójkącie AMP prostokątnym przy P , jest $AM = \sqrt{MP^2 + AP^2}$.

A że $AP = AR - PR = R - \text{dos } AM = R - \text{dos } a$; $MP = \text{wst } AM = \text{wst } a$; położywszy więc ważności te w równaniu powyższém, będzie

$AM = \sqrt{\text{wst}^2 a + R^2 - 2R \cdot \text{dos } a + \text{dos}^2 a}$.
Ze zaś $\text{wst}^2 a + \text{dos}^2 a = R^2$ (XI); będzie więc

$AM = \sqrt{2R^2 - 2R \cdot \text{dos } a}$. Podzieliwszy obie strony przez 2, będzie $\frac{1}{2} AM = MC = \text{wst } \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} \sqrt{2R^2 - 2R \cdot \text{dos } a}$.

Dla znalezienia linii RC , która jest dostawą łuku MN czyli połowy łuku danego AM , poprowadźmy cięciwę BM i promień RN do niej prostopadły. W trójkącie BMP jest $BM = \sqrt{MP^2 + BP^2}$.

A że $BP = BR + RP = R + \text{dos } a$, $MP = \text{wst } a$; będzie więc

$BM = \sqrt{\text{wst}^2 a R^2 + 2R \cdot \text{dos } a + \text{dos}^2 a}$;

Położywszy R^2 zamiast $\text{wst}^2 a + \text{dos}^2 a$, i obie strony podzieliwszy przez 2, będzie

$\frac{1}{2} BM = MC' = RC = \text{dos } \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} \sqrt{2R^2 + 2R \cdot \text{dos } a}$.

XV. Linia MP będąca wstawą łuku AM , jest oraz wstawą łuku MB , który do łuku AM dodany, czyni półokregu AMB : gdyż linia ta jest

prostopadłą z końca M łuku BM spuszczone do promienia RB przechodzącego przez drugi koniec B tegoż łuku MB. Dwa łuki lub dwa kąty, które do siebie dodane czynią półokręgu lub dwa kąty proste, zowiemy *spełnieniem* ieden drugiego, *supplementum*. I tak łuk BM większy od czwartéj części okręgu jest spełnieniem łuku AM mniejszego od czwartéj części okręgu; łuk AM jest spełnieniem łuku BM. Stąd wniesiemy, że *wstawa łuku jest ta sama, co wstawa spełnienia tegoż łuku*.

XVI. Poprowadziwszy cięciwę MN równo-odległą od średnicy AB, *fig. 149*, i spuściwszy MP i NQ prostopadłe do AB, będzie $NQ = MP$, i łuk $BN = AM$ (116). Ze zaś łuk BN jest spełnieniem łuku AN, więc i łuk AM jest spełnieniem tegoż łuku AN. Dwa te łuki mające równe wstawy MP i NQ, mają także równe dostawy SP i SQ; lecz kierunek tych dostaw jest odwrotny: dostawa SP łuku AM mniejszego od 4tęj części okręgu leży po lewéj stronie średnicy DC; dostawa zaś SQ łuku AN większego od 4tęj części okręgu, leży po prawéj stronie téjże średnicy DC; gdy tym czasem ich wstawy MP i NQ leżą obiedwie z iednéj strony średnicy AB. Odwrotność ta kierunku dostaw i wszelkich innych linii wyraża się w rachunku dwoma znakami + i —, z których pierwszy wyraża ilości dodayne, drugi odjemne. I tak jeżeli dostawa SP leżąca po lewéj stronie średnicy DC uważa się iako ilość dodayna, czyli ma przed sobą znak +, dostawa SQ leżąca po prawéj stronie téjże średnicy DC uważa się iako ilość odjemna, i ma przed sobą znak —. Dostawa zatém łuku większego od 4tęj części okręgu jest równa dostawie iego spełnienia wziętęj ze znakiem —; i odwrotnie dostawa łuku mniejszego od 4tęj części okręgu równa jest dostawie

iego spełnienia wziętę ze znakiem $+$; czyli, *dostawa łuku równa jest dostawie iego spełnienia wziętę ze znakiem przeciwnym.*

XVII. Nakoniec widzimy tu, że MC wstawa łuku MN *fig. 158* jest połową AM cięciwy łuku ANM dwa razy większego od łuku MN; podobnież MĆ wstawa łuku MN jest połową MB cięciwy łuku MNB dwa razy większego od łuku MN. Stąd wniesiemy, że *wstawa łuku równa jest połowie cięciwy łuku dwa razy większego.* A zatem gdy wstawy są wiadome, łatwo można wyrachować cięciwy, i odwrotnie.

XVIII. Ponieważ średnica jest cięciwą półokręgu: połowa więc średnicy czyli promień, będzie wstawą połowy pół okręgu czyli czwartę części okręgu (XVII); iakoż wstawą łuku AB *fig. 156*, równego czwartę części okręgu jest promień BR z końca B tego łuku spuszczoney prostopadłe do promienia AR przechodzącego przez drugi koniec A tegoż łuku. A że średnicą ze wszystkich cięciw koła jest największa (101); więc wstawa czwartę części okręgu jest ze wszystkich wstaw największa. Wziąwszy y zatem promień $= 1$; wstawa czwartę części okręgu będzie 1; wstawy zaś innych łuków będą mniejsze od 1, a tęp samę ważności ich będą ułomkowe.

Ze zaś kwadrat dostawy równa się kwadratowi promienia zmniejszonemu kwadratem wstawy (XI); kiedy więc wstawą czwartę części okręgu jest promień, dostawa czwartę części okręgu będzie $= 0$. Iw samę rzeczy dostawa łuku równa się części promienia zawartę między wstawą i środkiem koła (VI); kiedy więc wstawa BR łuku AB równego czwartę części okręgu, przypada na środek koła R, dostawa tegoż łuku niknie czyli równa się 0.

Ponieważ promień jest cięciwą łuku równego 6tęj części okręgu; więc połowa promienia będzie wstawą łuku równego 12tęj części okręgu (XVII) Wziąwszy zatem promień $= 1$, wstawa 12tęj części okręgu będzie $= \frac{1}{2}$. A że dostawa łuku równa się pierwiastkowi różnicy między kwadratem promienia i kwadratem wstawy (XI), kiedy więc promień $= 1$, wstawa 12tęj części okręgu $= \frac{1}{2}$, będzie dostawa 12tęj części okręgu

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

12sta część okręgu jest 5cią częścią łuku AB równego 4tęj części okręgu. Oznaczywszy zatem 4tą część okręgu przez Q , będzie

1od. wst $Q = 1$; dos $Q = 0$.

2re. wst $\frac{1}{3} Q = \frac{1}{2}$; dos $\frac{1}{3} Q = \frac{1}{2} \sqrt{3}$.

Maiąc wstawy i dostawy tych dwóch łuków, można będzie znaleźć nie tylko styczne, dotyczne, sieczne i dosieczne tychże łuków, za pomocą formuł wyżej (XI) podanych; ale też wstawy, dostawy i t. d. innych wszystkich łuków, biorąc łuki te, tak podług nowego podziału okręgu na 400 stopni, iako też podług podziału dawnego na stopni 360. Lecz pierwéy uczynić potrzeba dwie następujące uwagi:

XIX. 1od. Łuk co do długości zawsze jest mniejszy niż iego styczna, a większy niż iego wstawa. Jakoż wziąwszy łuk $Am = AM$ fig. 159, i poprowadziwszy cięciwę Mm , i styczne TM , Tm ; styczne te przetną się z promieniem AR w punkcie T : gdyż dwa trójkąty RTM , RTm mogą do siebie przystać. Lecz łuk MAm czyli $AM + Am < TM + Tm$, $AM + Am > MP + Pm$ (258); że zaś $AM = Am$, $TM = Tm$, $PM = Pm$; będzie więc $2AM < 2TM$; $2AM > 2PM$; a tém samém $AM < TM$, $AM > PM$.

2re. Stosunek między styczną i wstawą coraz bardziej przybliża się do 1, w miarę coraz bardziej zmniejszającego się łuku; czyli, co na jedno wychodzi, im jest łuk mniejszy, tém jest mniejsza różnica między jego styczną i wstawą.

Jakoż ponieważ $\text{sty } a = \frac{\text{R. wst } a}{\text{dos } a}$ (XI), czyli wzię-

wszy promień = 1, $\text{sty } a = \frac{\text{wst } a}{\text{dos } a}$; więc o-

bie strony rozmnożywszy przez dos a , i podzie-

liwszy przez sty a , będzie $\text{dos } a = \frac{\text{wst } a}{\text{sty } a}$: że

zaś dostawa łuku tém jest większa, im jest łuk mniejszy, to jest dostawa tém bardziej przybliża się do promienia czyli do 1, im jest łuk mniejszy; więc im łuk a jest mniejszy, tém bardziej ważność dos a , a tém samém i ważność ułamka

$\frac{\text{wst } a}{\text{sty } a}$, przybliża się do 1; co dowodzi, że różni-

ca między mianownikiem i licznikiem tego ułamka, to jest między sty a i wst a musi być bardzo mała, a jeszcze mniejsza między ważnością łuku a , i ważnością jego wstawy lub styczney. Wziawszy np. $\text{PM} = 0,0001$, będzie

$$\text{RP} = \sqrt{\text{RM} - \text{PM}^2} = \sqrt{1 - 0,00000001} = 0,999\,999\,995.$$

$$\text{MP} = \frac{\text{RM} \times \text{PM}}{\text{RP}} = \frac{1 \times 0,0001}{0,999\,999\,995} =$$

0,000 100 000000 5; ważność ta styczney MT różni się tylko od ważności wstawy PM w 15tém liczbie dziesiętny; można ją więc wziąć za ważność łuku AM wyrażonego w częściach promienia RA.

XX. Po tych uwagach i po wiadomościach które ie poprzedziły, nie trudno będzie wskazać sposób, którym ważność wstaw, dostaw i t. d. wszystkich łuków wynaleziono i ułożono w tablice.

Ponieważ wstawa 4tęej części okręgu czyli wst $Q=1$, dos $Q=0$ (XVIII), uczyniwszy więc $a=Q$, i położywszy naznaczone ważności w dwóch równaniach wyżej znalezionych (XIV),

wst $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 2R}$. dos a , dos $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 + 2R}$. dos a ; równania te zamienia się w następujące:

wst $\frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2 \times 0} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0,707106781186$.
dos $\frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2 \times 0} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0,707106781186$.

Ważność tę wstawy i dostawy $\frac{1}{2}Q$ można także następującym sposobem wyprowadzić.

Jeżeli łuk AB fig. 140. równy czwartęej części okręgu jest wpuncie M podzielony na dwie części równe, na ten czas linia MP czyli wstawa łuku $\frac{1}{2}AB$, równa jest linii RP czyli dostawie tegoż łuku: w trójkacie bowiem RPM kąt PRM = RMP, co iest łatwo okazać. Ze zaś $MP^2 + RP^2 = MR^2$; czyli, $2MP^2 = MR^2 = 1$; więc $MP^2 = \frac{1}{2}$; a tém samém $MP = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4} \times 2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Maiąc ważność wstawy i dostawy łuku $\frac{1}{2}Q$, można będzie znaleźć ważność wstawy i dostawy połowy tego łuku czyli $\frac{1}{4}Q$. Jakoż niech będzie $\frac{1}{2}Q = a$: w równaniach powyższych (XIV), położywszy znalezione lub naznaczone ważności, będzie

wst $\frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2 \times 0,707106781186} = 0,582685452565$;

dos $\frac{1}{4}Q = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2 \times 0,707106781186} = 0,923879552511$.

Lecz dzieląc tym sposobem każdy łuk na dwie części równe, nie dojdziemy ani do części dziesiątych

które są stopniami minutami, i t. d. podług nowego podziału okręgu, ani do części takich, któreby można wziąć za stopnie, minuty i t. d. podziału dawnego. Znajdziemy tylko łuki coraz mniejsze, a tém samém coraz bardziéj przybliżające się do swoich wstaw: i tak za 14tym podziałem będzie łuk $= \frac{1}{16384} Q$, którego wstawa $= 0,000095875799$. Wstawa ta mniejsza jest od wstawy 0,0001; łuk więc ten nie różni się od swoiéj wstawy w pierwszych 12tu liczbach dziesiętnych (XIX). Łuki zatém mniejsze ieszcze mniéj różnić się będą od swoich wstaw.

Łuki tak mało różniące się od swoich wstaw i stycznych, mogą być uważane za proporcjonalne tym liniom: będzie więc

$$\text{wst}_{\frac{1}{16384}} Q : \text{wst}_{\frac{1}{100000}} Q = \frac{1}{16384} Q : \frac{1}{100000} Q.$$

czyli $= 100000 : 16384$. A zatém

$$\text{wst}_{\frac{1}{100000}} Q, \text{ czyli } \text{wst } 0,00001 Q = \frac{16584 \times \text{wst}_{\frac{1}{16384}} Q}{100000} = 0,000015707965.$$

Nadto ponieważ łuki małe są proporcjonalne swoim wstawom, łuków zatém 2, 3, 4 i t. d. razy większych od łuku 0,00001 Q, będą wstawy 2, 3, 4 i t. d. razy większe od wstawy tegoż łuku; będzie więc

$$\text{wst } 0,00002 Q = 2 \text{wst } 0,00001 Q,$$

$$\text{wst } 0,00003 Q = 3 \text{wst } 0,00001 Q.$$

$$\text{wst } 0,00004 Q = 4 \text{wst } 0,00001 Q \text{ i t. d.}$$

Tym sposobem znajdziemy ieszcze wiele łuków większych od łuku 0,00001 Q, których wstawy i styczne nie różnią się między sobą w pierwszych 12tu liczbach dziesiętnych. A chociaż za dalszém powiększaniem się łuków, różnica ta coraz się bardziéj powiększa; można iednak tym sposobem postępując doysć aż do łuku $= 0,001 Q$, którego wstawa i styczna tymże sposobem znalezione, ie-

sze się między sobą nie różnią w pierwszych 8miu liczbach dziesiętnych.

W łukach większych od $0,001 Q$, różnica ta znacznieby się powiększyła: w ten czas więc użyć potrzeba 4 równań wyżej znalezionych (XII i XIII),

$$\text{wst } 2a = 2\text{wst } a \cdot \text{dos } a;$$

$$\text{dos } 2a = \text{dos}^2 a - \text{wst}^2 a;$$

$$\text{wst}(a \pm b) = \text{wst } a \cdot \text{dos } b \pm \text{wst } b \cdot \text{dos } a.$$

$$\text{dos}(a \pm b) = \text{dos } a \cdot \text{dos } b \pm \text{wst } a \cdot \text{wst } b;$$

Wziąwszy naprzód $a = 0,001 Q$, potem $a = 0,002 Q$ i t. d. z dwóch równań pierwszych otrzymamy

$\text{wst } 0,002 Q$; $\text{dos } 0,002 Q$; $\text{wst } 0,004 Q$; $\text{dos } 0,004 Q$ i t. d. Wziąwszy znowu naprzód $a = 0,001 Q$, $b = 0,002 Q$; potem $a = 0,002 Q$, $b = 0,003 Q$ i t. d. z dwóch równań drugich otrzymamy

$\text{wst } 0,003 Q$, $\text{dos } 0,003 Q$; $\text{wst } 0,005 Q$, $\text{dos } 0,005 Q$ i t. d.

XXI. Ten sam sposób postępowania można przytłosować do dawnego podziału okręgu na 560° , z tą tylko różnicą, że działanie rozpocząć należy od wstawy i dostawy łuku $= \frac{1}{3} Q = 50^\circ$ (XVIII). Łuk ten ciągle dzieląc na dwie części równe, i za każdym podziałem wynaydując ważność wstawy i dostawy łuków coraz bardziej zmniejszających się, dojdziemy nakoniec do łuków bardzo mało różniących się od swoich wstaw i stycznych, które mogą być wzięte za proporcjonalne tymże wstawom i stycznym. Dalszy sposób postępowania zupełnie jest podobny do podanego wyżej.

XXII. Zamiast ważności wstaw, dostaw, stycznych i dotyczących w tablicach zwyczajnych położone są ich logarytmy, dla ułatwienia rachunku w rozwiązaniu dwóch następujących zagadnień

do wyrachowania części trójkąta istotnie potrzebnych:

1. *Mając dany łuk, znaleźć logarytm jego wstawy, albo dostawy, albo styczney albo dotyczney.*

2. *Mając dany logarytm wstawy, albo dostawy, albo styczney, albo dotyczney łuku; znaleźć ten łuk.*

Rozwiązanie tych zagadnień zależy od sposobu rozłożenia i uporządkowania tablic, który jest rozmaity, lecz zawsze na wstępie dzieła tablic wyłożony.

XXIII. Tablice te nie obeymują łuków większych nad 4tą część okręgu, i nie mają po większey części ważności siecznych i dosiecznych: obaczmy iednak niżej, że one są dostateczne do wynalezienia ważności wstawy, dostawy, styczney i dotyczney wszystkich łuków choćby też największych. Co się zaś tycze siecznych i dosiecznych, te nie wchodzą do rozwiązywania trójkątów, iak się o tém przykonamy w zagadnieniach rozwiązywanie to za cel mających, które wkrótce podamy, wyłożywszy piérwéy twierdzenia istotnie potrzebne do wyrachowania części trójkątów, co jest właściwym przedmiotem Trygonometrii.

XXIV. *W każdym trójkącie prostokątnym tak się ma promień do wstawy iednego z kątów ostrych, iak przeciwprostokątna do boku przeciwnego temu kątowi.*

Niech będzie ABC fig. 141. trójkąt prostokątny przy A, z punktu B iako ze środka promieniem BM równym promieniowi podług którego ułożone są tablice nakrészliwszy łuk MF, który będzie miarą kąta B, i z punktu M do AB spuściwszy prostopadłą MP, która będzie wstawą kąta B; w trójkątach BMP, BCA podobnych, iest

$BM: MP = CB: AC$; czyli, położywszy wartość trygonometryczną $R: \text{wst } B = CB: AC$.

XXV. *W każdym trójkącie prostokątnym tak się ma promień do styczney iednego z kątów ostrych, iak bok przyległy temu kątowi do boku przeciwnego.*

Wykreśliwszy, iak wyżej, łuk MF , i z punktu F do AB poprowadziwszy prostopadłą FD , która będzie styczną kąta B : w trójkątach BFD , CAB podobnych iest $BF: FD = AB: AC$, czyli $R: \text{sty } B = AB: AC$.

XXVI. *W trójkącie prostokręślnym iakimkolwiek wstawy mają kątów się iak boki tym kątom przeciwne.*

Niech będzie trójkąt ABC fig. 75, z wierzchołka C spuściwszy CD prostopadłą do AB , prostopadła ta padnie albo wewnątrz trójkąta iak iest na figurze 1, albo zewnątrz, iak iest na figurze 2. W 1wszym przypadku, w trójkątach prostokątnych ACD , BCD iest

$R: \text{wst } A = AC: CD$; $R: \text{wst } B = BC: CD$ (XXIV), więc $R \times CD = \text{wst } A \times AC$; $R \times CD = \text{wst } B \times BC$; a tém samém $\text{wst } A \times AC = \text{wst } B \times BC$. Więc $\text{wst } A: \text{wst } B = BC: AC$.

W przypadku 2gim w dwóch trójkątach prostokątnych CDA , CDB , iest

$R: \text{wst } DAC = AC: CD$; $R: \text{wst } B = CB: CD$; więc $R \times CD = \text{wst } DAC \times AC$; $R \times CD = \text{wst } B \times BC$; a zatém

$\text{wst } DAC \times AC = \text{wst } B \times BC$; a tém samém $\text{wst } DAC: \text{wst } B = BC: AC$. Ze zaś kąt DAC iest spełnieniem kąta CAB czyli kąta A (XXV), a tém samém $\text{wst } DAC = \text{wst } A$; będzie więc $\text{wst } A: \text{wst } B = BC: AC$.

Tę samę własność można także następującym sposobem wyprowadzić:

Dany trójkąt ACB *fig. 142*, opisawszy kołem, i ze środka S promieniem Sa równym promieniowi tablicy wykreśliwszy koło, poprowadzić promienie AS , BS , CS przecinające okrąg drugiego koła w punktach a , b , c , i poprowadzić cięciwy ab , bc , ac ; trójkąt abc będzie podobny trójkątowi ABC , gdyż ponieważ aS i bS są równe jako promienie jednego koła, tudzież AS i BS są także równe; więc w trójkącie ASB jest $AS: aS = BS: bS$; a tém samym bok ab jest równoodległy od AB . Tymże sposobem okazać można, że bok bc jest równoodległy od BC , bok ac równoodległy od AC . A zatem trójkąty ABC i abc są podobne: będzie więc

$AB: ab = BC: bc = AC: ac$; czyli

$AB: BC: AC = ab: bc: ac$; więc

$AB: BC: AC = \frac{1}{2}ab: \frac{1}{2}bc: \frac{1}{2}ac$. Ze zaś kąty trójkąta abc , których wierzchołki są na okręgu, mają za miarę połowy łuków, których cięciwami są boki tym kątom przeciwne; a wstawa łuku równa jest połowie cięciwy łuku dwa razy większego (XVII); więc $\frac{1}{2}ab = \text{wst } c = \text{wst } C$; $\frac{1}{2}bc = \text{wst } a = \text{wst } A$; $\frac{1}{2}ac = \text{wst } b = \text{wst } B$; a tém samym

$AB: BC: AC = \text{wst } C: \text{wst } A: \text{wst } B$.

XXVII. *W każdym trójkącie prostokreślnym dostawa iednego z kątów tak się ma do promienia, iak summa kwadratów z boków przyległych temu kątowi zmniejszona kwadratem boku trzeciego, do podwóynego iloczynu dwóch piérwszych boków.*

W trójkącie ACB *fig. 73*, z wierzchołka kąta któregokolwiek np. C spuściwszy CD prostopadłą do AB , i dla skrócenia bok CB przeciwny kątowi A oznaczywszy przez a , bok AC przeciwny kątowi B przez b , bok AB przeciwny kato-

wi C przez c , a odcinek AD przez x ; będzie $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$ (172) Dodawszy po obu stronach $2cx$, a odiawszy a^2 , i podzieliwszy przez

$$2c, \text{ będzie } x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

W trójkącie prostokątnym ACD jest R: wst DCA = $b : x$ (XXIV). A że kąt DCA jest dopełnieniem kąta A, gdyż obadwa czynią kąt prosty, a tém samém wst DCA = dos A (VI); będzie więc R: dos A = $b : x$.

$$\text{A zatém } x = \frac{\text{dos A} \times b}{R}. \text{ Porównawszy z sobą}$$

dwie znalezione ważności dla x , będzie $\frac{\text{dos A} \times b}{R}$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}; \text{ podzieliwszy obie strony przez}$$

$$b, \text{ wypadnie } \frac{\text{dos A}}{R} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \text{ a tém sa-}$$

mém dos A : R = $b^2 + c^2 - a^2 : 2bc$. Gdyby trójkąt ACB był roztwarto kątny, iaki jest pod liczbą 2, w którym prostopadła CD pada zewnątrz trójkąta, na ten czas byłoby $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$

$$(173); \text{ a tém samém } x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}. \text{ (A).}$$

W trójkącie CDA jest wst ACD = dos

$$\text{CAD} = \frac{R. x}{b}. \text{ (XXIV), że zaś kąt CAB czyli}$$

kąt A jest spełnieniem kąta ACD, i ma tę samę dostawę co i kąt CAD lecz odjemną (XVI), będzie więc — dos A =

$$\frac{R. x}{b}; \text{ atém samém } — x$$

$$= \frac{\cos A \times b}{R}$$
. Ważność tę położywszy zamiast — x

w równaniu (A), będzie $\frac{\cos A \times b}{R} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$, iak

iest w przypadku pierwszym.

XXVIII. W równaniu $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$ (XXVII), dodawszy po obu stronach $2cx$, a od-
 iawszy a^2 i c^2 , będzie $2cx - c^2 = b^2 - a^2$. Stro-
 ny tego równania rozłożywszy na czynniki, wy-
 padnie

$$c(2x - c) = (b + a)(b - a); \text{ a zatem } c : b + a = b - a : 2x - c.$$

Ze zaś $AB = c$, $AD = x$; więc $BD = c - x$,
 a tém samém $AD - BD = x - c + x = 2x - c$.
 Ostatnia więc proporcya zamieni się w następu-
 iącą:

$AB : AC + BC = AC - BC : AD - BD$. To iest:

*W trójkącie, w którym prostopadła z wierz-
 chołka do podstawy spuszczone pada wewnątrz
 trójkąta, podstawa tak się ma do summy dwóch
 innych boków, iak różnica tychże boków, do ró-
 żnicy odcinków podstawy.*

Jeżeli kąt A iest roztwarty fig. 75 Nro 2,
 na ten czas $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$ (175). Więc a^2
 $- b^2 = c^2 + 2cx$; czyli $(a + b)(a - b) = c(2x$
 $+ c)$; a zatem $c : a + b = a - b : 2x + c$. to iest,
 kiedy prostopadła z wierzchołka spuszczone do pod-
 stawy pada zewnątrz trójkąta, tak się ma pod-
 stawa do summy dwóch innych boków, iak ró-
 żnica tychże boków, do summy odcinków podsta-
 wy $BD + AD$.

Tę samę własność można wyprowadzić spo-
 sobem następującym. Z punktu C iako ze środka
 promieniem CB wykreśliwszy koło fig. 145, i bok AC
 przedłużywszy do przecięcia się z okręgiem w pun-

cie E, będzie podług tego cośmy powiedzieli wy-
żey (217), $AB: AE := AF: AM$; czyli $AB: AC +$
 $CE = AC - CF: AD - DM$. Ze zaś $CE = CF = BC$,
a $DM = BD$; będzie więc $AB: AC + BC = AC -$
 $BC: AD - BD$.

Kiedy kąt A jest roztwarty, fig. 73 Nro 2,
Dowodzenie i wykreślenie podobne do poprze-
dzającego.

XXIX. *W każdym trójkącie prostokręślnym
tak się ma summa dwóch boków do ich różnicy,
jak stycznca połowy summy kątów tym bokom
przeciwnych do styczney połowy różnicy tychże
kątów.*

$$\text{W równaniach } \text{wst}(a+b) = \frac{\text{wst } a \text{ dos } b + \text{wst } b \text{ dos } a}{R},$$

$$\text{wst}(a-b) = \frac{\text{wst } a \text{ dos } b - \text{wst } b \text{ dos } a}{R} \text{ (XII), stro-}$$

ny odpowiadające raz do siebie dodawszy, drugi
raz odiawszy, będzie

$$\text{wst}(a+b) + \text{wst}(a-b) = \frac{2 \text{wst } a \text{ dos } b}{R};$$

$$\text{wst}(a+b) - \text{wst}(a-b) = \frac{2 \text{wst } b \text{ dos } a}{R}.$$

Niech będzie $a+b=A$, $a-b=B$; a zatém
 $(a+b) + (a-b) = 2a = A+B$; więc $a =$
 $\frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$.

$(a+b) - (a-b) = 2b = A-B$; więc $b =$
 $\frac{A-B}{2} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B$.

Położywszy te ważności w dwóch powyż-
szych równaniach, będzie

$$\text{wst } A + \text{wst } B = \frac{2}{R} \text{wst} \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \right) \text{dos} \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \right);$$

$$\text{wst } A - \text{wst } B = \frac{2}{R} \text{wst } \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \right) \text{dos } \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \right).$$

Strony odpowiadające tych równań podzieliwszy przez siebie, wypadnie

$$\frac{\text{wst } A + \text{wst } B}{\text{wst } A - \text{wst } B} = \frac{\text{wst } \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \right) \text{dos } \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \right)}{\text{dos } \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \right) \text{wst } \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \right)}.$$

Ze zaś wstawa łuku podzielona przez dostawę równa się styczney tegoż łuku (XI), będzie więc

$$\frac{\text{wst } A + \text{wst } B}{\text{wst } A - \text{wst } B} = \text{sty } \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \right) \times \frac{\text{dos } \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \right)}{\text{wst } \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \right)}.$$

Rozmnożywszy obie strony przez $\text{wst } \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \right)$, a podzieliwszy przez $\text{dos } \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \right)$, wypadnie.

$$\frac{\text{wst } A + \text{wst } B}{\text{wst } A - \text{wst } B} \times \frac{\text{wst } \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \right)}{\text{dos } \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \right)} = \text{sty } \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \right); \text{ czyli}$$

$$\frac{\text{wst } A + \text{wst } B}{\text{wst } A - \text{wst } B} \times \text{sty } \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \right) = \text{sty } \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \right); \text{ więc}$$

$$\frac{\text{wst } A + \text{wst } B}{\text{wst } A - \text{wst } B} = \frac{\text{sty } \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \right)}{\text{sty } \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \right)}. \quad \text{A t\acute{e}m sam\acute{e}m}$$

$$\text{wst } A + \text{wst } B : \text{wst } A - \text{wst } B = \text{sty } \frac{A + B}{2} : \text{sty } \frac{A - B}{2}$$

Ze zaś w trójkacie wstawy katów, mają się iak boki tym kątom przeciwne (XXVI); oznaczwszy zat\acute{e}m boki przeciwne kątom A i B głoskami a i b , będzie $a : b = \text{wst } A : \text{wst } B$; a t\acute{e}m sam\acute{e}m $a + b : a - b = \text{wst } A + \text{wst } B : \text{wst } A - \text{wst } B$. Proporcją tę porównawszy z proporcją powyższą wypadnie

$$a + b : a - b = \text{sty } \frac{A + B}{2} : \text{sty } \frac{A - B}{2}.$$

Możnaby to samo okazać sposobem następującym. Niech będzie, *fig.* 144, łuk $AM = A$,

Łuk $AN = B$: będzie $MP = \text{wst } A$, $NQ = \text{wst } B$. Poprowadziwszy NC równoodległą od średnicy AB , i przedłużywszy MP do m ; będzie

$$MR = MP - PR = MP - NQ = \text{wst } A - \text{wst } B;$$

$$mR = mP + PR = MP + NQ = \text{wst } A + \text{wst } B.$$

Z punktu C iako ze środka promieniem CD równym promieniowi koła $ACBm$ nakreśliwszy łuk EDG , i przez punkt D poprowadziwszy styczną FH , aż do przecięcia się z liniami CM , Cm w punktach F i H ; linia DF będzie styczną łuku DE (VIII), linia DH będzie styczna łuku DG , z których pierwszy jest miarą kąta MCN , drugi miarą kąta mCN ; a że kąty te mają wierzchołki na okręgu, więc kąt MCN jest także miarą połowa łuku $MM = AM - AN = A - B$; kąt zaś mCN jest miarą połowa łuku $mN = AM + AN = A + B$. Będzie zatem $DF = \text{sty} \frac{A - B}{2}$:

$$DH = \text{sty} \frac{A + B}{2}.$$

Ze zaś linie Mm , FH są od siebie równoodległe, więc w trójkątach MCR i FCD , tudzież w trójkątach mCR i DCH podobnych jest

$RC : DC = MR : DF$, $RC : DC = mR : DH$; a zatem $mR : MR = DH : DF$; czyli

$$\text{wst } A + \text{wst } B : \text{wst } A - \text{wst } B = \text{sty} \frac{A + B}{2} :$$

$$\text{sty} \frac{A - B}{2}; \text{ reszta iak wyżéy.}$$

XXX. Po wyłożeniu tych twierdzeń, można będzie z łatwością wyrachować części trójkątów prostokrésznych we wszystkich przypadkach, iakie tylko wydarzyć się mogą.

A naprzód co do trójkątów prostokątnych, niech będzie A kąt prosty, B i C dwa inne kąty

trójkąta prostokątnego ABC ; niech a oznacza przeciwprostokątną, b bok przeciwny kątowi B , c bok przeciwny kątowi C . Ponieważ w trójkącie prostokątnym summa dwóch kątów ostrych B i C równa się jednemu prostemu, więc kąty te są dopełnieniem jeden drugiego; a zatem $\text{wst } C = \text{dos } B$, $\text{wst } B = \text{dos } C$; podobnież $\text{fty } C = \text{dot } B$, $\text{sty } B = \text{dot } C$.

Dla rozwiązania trójkąta, czyli dla wyrażenia części jego w liczbach, iakośmy już uważali, potrzeba mieć trzy części dane, między którymi powinien być przynajmniej jeden bok. W trójkącie prostokątnym ABC kąt A jest zawsze wiadomy iak prosty: dla rozwiązania więc trójkąta prostokątnego dosyć jest oprócz kąta prostego, mieć dwie części dane, między którymi powinien być przynajmniej jeden bok.

Dwie te dane części mogą być 1^od przeciwprostokątna i jeden z boków przyległych kątowi prostemu; 2^ore dwa boki przyległe kątowi prostemu; 3^ocie przeciwprostokątna i jeden z kątów ostrych; 4^ote jeden z boków przyległych kątowi prostemu i jeden z kątów ostrych. Wszystkie więc przypadki rozwiązywania trójkątów prostokątnych sprowadzić można do czterech następujących zagadnień.

XXXI. Zagad. 1. *Mając daną przeciwprostokątną a i bok b , znaleźć dwa kąty ostre B i C , i bok trzeci c .*

Rozw. c: $b = R : \text{wst } B$ (XXIV); więc $\text{wst } B = \frac{R \cdot b}{a}$; czyli odbywając działanie za pomo-

cą logarytmów $\log$, $\text{wst } B = \log R + \log b - \log a$. Znalazwszy kąt B , łatwo będzie znaleźć kąt C , który jest kąta B dopełnieniem. Można także kąt C znaleźć przez następującą proporcją: $a : b = R : \text{dos } C$.

Co się tycze boku c , ten znaleźć można dwoma sposobami: iód znalazłszy kąt C , będzie R :

$$\text{sty } C = b : c \text{ (XXV)}, \text{ a zatém } c = \frac{\text{Sty } C \cdot b}{R};$$

czyli $\log c = \log \text{sty } C + \log b - \log R$. Zre, $c^2 = a^2 - b^2$ (169); a zatém $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; czyli $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$; czyli $\log c = \frac{1}{2} \log (a+b) + \frac{1}{2} \log (a-b)$.

XXXII. Zagad. 2. *Mając dane dwa boki b i c przyległe kątowi prostemu, znaleźć przeciwprostokątną a i dwa kąty ostre B i C .*

Rozw. $c : b = R : \text{sty } B$ (XXV): więc $\text{sty } B = \frac{R \cdot b}{c}$. Znalazłszy kąt C , przeciwpro-

stokątną a znajdziemy przez proporcją: $\text{wst } B : R = b : a$. Można by także znaleźć przeciwprostokątną a , przez następujące równanie: $a^2 = b^2 + c^2$ (162); więc $a = \sqrt{b^2 + c^2}$; lecz wyrażenie to nie jest wygodne do rachunku przez logarytmy.

XXXIII. Zagad. 3. *Mając daną przeciwprostokątną a i ieden kąt ostry B , znaleźć dwa boki b i c .*

Rozw. $R : \text{wst } B = a : b$; $R : \text{dos } B = a : c$; więc $b = \frac{\text{wst } B \cdot a}{R}$; $c = \frac{\text{dos } B \cdot a}{R}$.

XXXIV. Zagad. *Mając dany bok b przyległy kątowi prostemu, i ieden z kątów ostrych, znaleźć bok drugi i przeciwprostokątną.*

Rozw. $\text{wst } B : R = b : a$; $R : \text{dot } B = b : c$. Więc $a = \frac{\text{wst } B}{R \cdot b}$; $c = \frac{\text{dot } B \cdot b}{R}$.

XXXV. Co się tycze trójkątów ostrokątnych i roztwartokątnych, w tych oznaczywszy trzy ką-

ty przez A, B, C , a boki tym kątom przeciwne przez a, b, c , ażeby za pomocą trzech danych części wyrachować inne trzy części trójkąta, potrzeba mieć dane albo ieden bok a i dwa którekolwiek kąty; albo dwa boki a i b , i kąt A przeciwny bokowi danemu a ; albo dwa boki a i b i kąt C między niemi zawarty; albo nakoniec trzy boki a, b i c . Wszystkie więc przypadki rozwiązywania tych trójkątów można sprowadzić do czterech następujących zagadnień.

XXXVI. Zag. 1. *Mając dany bok a i dwa kąty trójkąta, znaleźć dwa inne boki b i c .*

Rozw. wst A : wst $B = a: b$; wst A : wst $C = a: c$ (XXV); więc

$$b = \frac{\text{wst } B \cdot a}{\text{wst } A}; \quad c = \frac{\text{wst } C \cdot a}{\text{wst } A}.$$

XXXVII. Zag. 2. *Mając dane dwa boki a i c , i kąt A przeciwny iednemu z boków danych, znaleźć bok trzeci b i dwa inne kąty B i C .*

Rozw. $a: c = \text{wst } A: \text{wst } C$; więc $\text{wst } C = \frac{\text{wst } A \cdot c}{a}$. Mając wiadomy kąt A i C , znajdzie-

my tém samém i kąt B . Dla znalezienia zaś boku b , ułożymy następującą proporcją:

$$\text{wst } A: \text{wst } B = a: b.$$

Uwaga. Jeżeli kąt A iest ostry, a bok $a < c$; na ten czas znaleziona przez powyższą proporcją $\text{wst } C = \frac{\text{wst } A \cdot c}{a}$, będzie albo wstawą ką-

ta bca fig. 49, albo też wstawą kąta bca' , który iest spełnieniem kąta bca , iakośmy to uważali wyżej (92). W tym więc przypadku podwójne być może rozwiązanie.

XXXVIII. Zagd. 3. *Maiąc dane dwa boki a i b i kąt C między niemi zawarty, znaleźć dwa inne kąty A i B i bok trzeci c.*

Rozw. Ponieważ kąt C jest wiadomy, tém samém wiadoma będzie summa dwóch innych kątów $A + B$, i połowa téj summy $\frac{A+B}{2}$. Je-

żeli więc $a > b$, a tém samém $A > B$; znajdziemy połowę różnicy tychże kątów A i B, przez następującą proporcya:

$$a + b : a - b = \text{sty} \frac{A+B}{2} : \text{sty} \frac{A-B}{2} \quad (\text{XXIX}).$$

Znalazłszy połowę różnicy, znajdziemy kąt większy A i mniejszy B. Jakoż niech s oznacza summę, r różnicę tych dwóch kątów: czyli niech będzie $A + B = s$, $A - B = r$. Strony tych dwóch równań raz do siebie dodawszy, drugi raz od siebie odiawszy, wypadnie $2A = s + r$; $2B = s - r$; więc $A = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}r$, $B = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}r$. To jest, kąt większy A równa się połowie ich summy więcéy połową różnicy; kąt mniejszy B równa się połowie summy mniéy połową różnicy.

Znalazłszy dwa kąty A i B, bok trzeci c znajdziemy przez proporcya: wst A: wst C = a: c.

XXXIX. Zag. 4. *Maiąc dane trzy boki a, b, c, znaleźć trzy kąty A, B, C.*

Rozw. dos A: $R = b^2 + c^2 - a^2 : 2bc$ (XXVII).

więc dos $A = R \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Tymże

sposobem znajdziemy dwa inne kąty.

Możnaby także zagadnienie to rozwiązać sposobem następującym: niech będzie trójkąt ACB fig. 143, w którym wszystkie trzy boki są wiadome, i w którym kąt C jest największy i bok $AC > BC$, czyli $b > a$. Zwiérzchołka kąta C spu-

ściwszy CD prostopadłą do AB, czyli do c , i odcinek większy AD oznaczywszy przez x , odcinek mniejszy LB przez y , będzie

$c: b+a=b-a: x-y$ (XXVIII). Znalazłszy różnicę odcinków $x-y$, wiedząc prócz tego ich sumę $x+y=c$, znajdziemy odcinek większy AD, i mniejszy BD, z których pierwszy równa się połowie ich sumy więcej połową różnicy, drugi równa się połowie ich sumy mniej połową różnicy. W trójkątach zatem prostopadłych ACD, BCD znajdziemy kąty A i B sposobem podanym wyżej (XXXI); mając zaś wiadome te dwa kąty, w trójkącie ABC znajdziemy kąt C, który jest ich spełnieniem.

Jeżeli kąt A jest roztwarty *fig. 75*, pod liczbą 2, na ten czas z proporcji $c: a+b=a-b: 2x+c$ (XXVIII), znajdziemy sumę dwóch odcinków $BD+AD$; a że różnica tychże odcinków $BD-AD=AB$, mając zatem wiadomą sumę i różnicę odcinków a tém samym połowę ich sumy i połowę różnicy, znajdziemy odcinek większy BD i mniejszy AD. W trójkątach zatem prostopadłych BDC, ADC, w których przeciwprostokątne BC, AC i boki BD, AD są wiadome, znajdziemy kąt B i CAD (XXXI), a tém samym i kąt CAB, który jest spełnieniem kąta CAD.

XL. Sposób pierwszy, podług którego rozwiązaaliśmy ostatnie zagadnienie, użytym być może nie tylko w tym przypadku, gdy są dane trzy boki trójkąta: lecz i wtenczas gdy są dane dwa boki i kąt między nimi zawarty, albo też jednemu z dwóch danych boków przeciwny:

w równaniu bowiem $\cos A = R \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

jeżeli wiadome są dwa boki b, c i kąt A między nimi zawarty, łatwo będzie znaleźć bok trzeci a , i dwa inne kąty; podobnież gdy są wiadome dwa

boki a , c i kąt A iednemu z nich przeciwny, łatwo będzie znaleźć bok trzeci b i dwa inne kąty. To tylko iest rzeczą niedogodną, że w równaniu tém nie można użyć logarytmów dla znalezienia ważności licznika $b^2 + c^2 - a^2$. Lecz można temu zapobiec sposobem następującym.

Ponieważ $\text{dos } 2a = R^2 - \text{wst }^2 a$ (XI); w równaniu zatem $\text{dos } 2a = \frac{\text{dos }^2 a - \text{wst }^2 a}{R}$ (XIII)

położywszy $R^2 - \text{wst }^2 a$ zamiast $\text{dos }^2 a$, będzie,
 $\text{dos } 2a = \frac{R^2 - 2\text{wst }^2 a}{R}$.

Niech będzie $\text{dos } 2a = \text{dos } A$, $\text{wst } 2a = \text{wst } A$, a tém samém $\text{wst } a = \frac{1}{2} A$, $\text{wst }^2 a = \text{wst }^2 \frac{1}{2} A$, $2\text{wst }^2 a = 2\text{wst }^2 \frac{1}{2} A$. Położywszy te ważności w powyższem równaniu, będzie

$$\text{dos } A = \frac{R^2 - 2\text{wst }^2 \frac{1}{2} A}{R}; \quad \text{atém samém } \frac{\text{dos } A}{R} = \frac{R^2 - 2\text{wst }^2 \frac{1}{2} A}{R^2} \text{Ze zaś (XVII)}$$

$$\frac{\text{dos } A}{R} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \text{ będzie więc}$$

$$\frac{R^2 - 2\text{wst }^2 \frac{1}{2} A}{R^2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \text{ a zatem}$$

$$R^2 - 2\text{wst }^2 \frac{1}{2} A = R^2 \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right).$$

Przeniosłszy R^2 na drugą stronę, rozmnożywszy obie strony przez -1 i drugą stronę sprowadziwszy do iednakowego mianownika; wypadnie

$$2\text{wst }^2 \frac{1}{2} A = R^2 \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{2bc} \right); \text{ a że}$$

$$a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = a^2 - (b - c)^2 = (a - b + c)(a + b - c) \text{ będzie więc}$$

$$2 \text{wst}^2 \frac{1}{2} A = R^2 \frac{((a-b+c)(a+b-c))}{2bc};$$

dzieliwszy przez 2, i wyciągnawszy pierwiastek kwadratowy, wypadnie

$$\text{wst} \frac{1}{2} A = R \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}.$$

Niech będzie $a+b+c = s$; a zatem $a-b+c = s-2b$, $a+b-c = s-2c$; a t $\acute{e}$ m sam $\acute{e}$ m

$$\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc} = \frac{(s-2b)(s-2c)}{4bc}.$$

Podzieliwszy z drugi $\acute{e}$ y strony mianownik i licznik przez 4, b $\acute{e}$ dzie

$$\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc} = \frac{(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{bc};$$

wypadnie wi $\acute{e}$ c $\text{wst} \frac{1}{2} A = R \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{bc}};$

To i $\acute{e}$ st; chc $\acute{a}$ c znale $\acute{z}$ ć k $\acute{a}$ t tr $\acute{o}$ y $\acute{k}$ ata kt $\acute{o}$ rego trzy boki s $\acute{a}$ dane, trzeba od po $\acute{t$ owy summy trzech bok $\acute{o}$ w odiać naprz $\acute{o$ d ieden, pot $\acute{e}$ m drugi bok przyleg $\acute{l}$ y k $\acute{a}$ towi szukanemu, dwie pozosta $\acute{l}$ e reszty przez siebie rozmno $\acute{z}$ yć; iloczyn ten podzielić przez iloczyn dw $\acute{o$ ch bok $\acute{o}$ w k $\acute{a}$ towi szukanemu przyleg $\acute{l}$ ych; wyciągn $\acute{a}$ ć z tego ilorazu pierwiastek kwadratowy: pierwiastek ten b $\acute{e}$ dzie wstaw $\acute{a}$ po $\acute{t$ owy k $\acute{a}$ ta szukanego. Promie $\acute{n}$ czyni si $\acute{e}$ zwy-
czajnie = 1, a t $\acute{e}$ m sam $\acute{e}$ m w mno $\acute{z$ eniu i dziele-
niu opuszcza si $\acute{e}$.

XLI. Zagadnienia te z $\acute{l}$ atwośc $\acute{i}$ ą być mog $\acute{a}$ przy $\acute{t}$ osowane do Jeometrii praktyczn $\acute{e}$ y wymiar grunt $\acute{o}$ w za przedmiot maj $\acute{a}$ c $\acute{e}$ y, iako te $\acute{z}$ do in-
nych wszy $\acute{l$ kich umiej $\acute{e}$ tnośc $\acute{i}$ matematyczno fizy-
cznych. Przytoczymy tu kilka przyk $\acute{l}$ ad $\acute{o}$ w po-
toczniejszych.

Przyk $\acute{l}$ ad: 1. Chc $\acute{a}$ c zmierzyc na gruncie z punktu A fig: 145, odleg $\acute{l}$ ość niedost $\acute{e}$ pnego

przedmiotu X, trzeba wymierzyć na gruncie podławę AB, i za pomocą narzędzia zwanego *kątomierzem*, wymierzyć dwa kąty XAB, XBA zawarte między podławą AB i promieniami ocznymi AX, BX z punktów A i B do przedmiotu X wykierowanemi: tym sposobem utworzy się trójkąt ABX, w którym bok ieden AB i wszystkie trzy kąty są wiadome. Szukana więc odległość AX znajdziemy przez proporcya, wst AXB: wst ABX = AB: AX (XXVI), więc $\log AX = \log. AB + \log \text{wst ABX} - \log. \text{wst AXB}$.

Daymy że $AB = 588$ prętów; kąt $BAX = 103^{\circ} 50'$ podług dawnego podziału, kąt $ABX = 56^{\circ} 15'$; będzie więc kąt $AXB = 40^{\circ}, 15'$.

Logarytm AB 2,7695775

Log. wst ABX 9,7718150

Summa 12,5411925

Log. wst AXB 9,8105159

Log. AX 2,7508764. Loga-

rytm ten odpowiada liczbie 558, 1; będzie więc, $AX = 558, 1$ prętów.

Chcąc z tegoż punktu A znaleźć odległość drugiego przedmiotu niedostępnego Y, trzeba wymierzyć kąty YAB, ABY: tym sposobem utworzy się trójkąt AYB, w którym bok ieden AB i wszystkie trzy kąty są wiadome. Szukana więc odległość AY znajdziemy przez proporcya, wst AYB: wst ABY = AB: AY. Daymy że kąt $BAY = 55^{\circ} 6'$, kąt $ABY = 118^{\circ} 48'$; będzie więc kąt $AYB = 26^{\circ} 6'$. Odbywszy działanie za pomocą logarytmów, iak wyżej, znajdziemy $AY = 1171$ prętów.

XLII. *Przykład 2.* Chcąc znaleźć odległość dwóch przedmiotów niedostępnych X, Y, trzeba wynaleźć AX i AY, iak w przykładzie poprzedzającym; kąt XAY będzie wiadomy: gdyż kąt ten jest różnicą dwóch kątów wiadomych $BAX = 103^{\circ} 50'$, i $BAY = 55^{\circ} 6'$: będzie więc kąt $XAY = 68^{\circ} 24'$.

W trójkącie zatem AXY mając wiadome z przykładu 1go dwa boki AY , AX i kąt między nimi zawarty XAY , znajdziemy styczną połowy summy dwóch innych kątów przez proporcją: $AY + AX : AY - AX = \text{sty} \frac{AXY + XYA}{2} : \text{sty} \frac{AXY - XYA}{2}$

(XXIX). Odbywwszy działanie za pomocą logarytmów, wypadnie $\frac{AXY - XYA}{2} = 28^{\circ}, 55'$. Ze

zaś $\frac{AXY + XYA}{2} = 55^{\circ}, 48'$; a kąt większy AXY

równy połowie summy obudwu więcéy połową ich różnicy, kąt mnieýszy XYA równy połowie ich summy mnieý połową różnicy; będzie więc kąt $AXY = 84^{\circ} 25'$, kąt $XYA = 27^{\circ} 15'$. W trójkącie zatem XYA mając wiadome wszystkie kąty i bok AX , znajdziemy XY przez proporcją, wst $XYA : \text{wst } XAY = AX : XY$ (XXVI). Odbywwszy działanie za pomocą logarytmów, wypadnie $XY = 1095$ prętów.

XLIII. *Przykład 3.* Niech będzie DX fig. 146, szerokość rzeki którą zmierzyć potrzeba: wymierzwszy na gruncie podstawę AB równoodlegle od koryta rzeki, która tém samém będzie prostopadła do szerokości rzeki DX , i za pomocą kątomiaru wyznaczwszy kąt ABX zawarty między podstawą AB i promieniem ocznym BX wykierowanym z punktu B do przedmiotu X będącego na drugim brzegu rzeki; będzie trójkąt BAX prostokątny przy A , w którym kąt B i bok AB iest wiadomy: bok zatem AX znajdziemy przez proporcją, $R : \text{sty } B = AB : AX$ (XXV). Znalazłszy tym sposobem AX , i odiawszy AD odległość podstawy AB od brzegu rzeki, zostanie DX szerokość szukana (*).

(*) W braniu podstaw na gruncie trzeba zachować tę ważną przestrożę, aby podstawy te nie by-

Gdyby AX była wysokość wierzy, którą potrzeba zmierzyć, na ten czas wymierzwszy podstawę AF , i z punktu F za pomocą kątomiaru wymierzwszy kąt DCX zawarty między linią poziomą DC równoległą od podstawy AF , i promieniem ocznym CX wykierowanym z punktu C do wierzchołka wierzy X ; utworzy się trójkąt prostokątny CDX , w którym bok CD czyli AF , i kąt DCX są wiadome, bok zatem DX znajdziemy przez proporcją, R : fty $DCX = DC : DX$. Znalazłszy tym sposobem DX , i dodawszy wysokość narzędzia CF czyli AD , będzie AX wysokość szukana.

Jeżeli punkt A jest niedostępny, natenczas dla zmierzenia wysokości AX , można oznaczyć odległość CX sposobem takim, iakiego użyliśmy w przykładzie 1wszym: w trójkącie zatem prostokątnym CDX mając wiadomy bok CX i kąt DCX znajdziemy DX przez proporcją, R : $\text{wst } DCX = CX : DX$.

XLIV. Przykład 4. Mając dane na mappie trzy punkta A , B , C *fig. 147*, chcąc wyznaczyć położenie 4go punktu M leżącego na teyże co i pierwsze trzy punkta płaszczyźnie, i z którego kąty AMB , AMC są wymierzone; trzeba na linii AB wykreślić odcinek koła $AMDB$, w którymby się zmieścił kąt dany BMA (156); potem wykreślić drugi odcinek koła MAC , w którymby się zmieścił drugi kąt dany AMC ; dwa łuki przetną się w punktach A i M ; punkt M będzie punktem szukanym: gdyż ze wszystkich punktów łuku $AMDB$ można widzieć AB pod kątem równym kątowi

ły ani zbyt małe, ani zbyt wielkie względem odległości szukaney. Tu np. podstawa AB może wynosić około połowy odległości AX .

danemu AMB , i ze wszystkich punktów łuku AMC można widzieć AC pod kątem równym kątowi danemu AMC ; więc punkt M , w którym się te dwa łuki przecinają, jest punktem takim, z którego widzieć można razem AB i AC pod kątami równymi kątom AMB , AMC .

W trójkącie ABC , którego trzy boki będące odległościami trzech danych punktów A , B i C , są wiadome, znajdziemy kąt BAC podług formuły podanej wyżej (XL). Poprowadziwszy średnicę AD , i cięciwę DB , w trójkącie BDA prostokątnym przy B , jest bok AB i kąt przeciwny $BDA = AMB$ wiadomy; znajdziemy więc AD .

Podobnie poprowadziwszy średnicę AE i cięciwę CE , w trójkącie ACE prostokątnym przy C , bok AC jest wiadomy z założenia, kąt $CAE = AMC - 90^\circ$: gdyż miara kąta CAE to jest połowa łuku CE równa się połowie łuku będącej miarą kąta AMC z mniejszą częścią okręgu; o czém łatwo przekonać się można. W trójkącie zatem ACE mając wiadomy bok AC i kąt przyległy CAE , znajdziemy AE (XXXIV).

Poprowadziwszy linie proste MD i ME , ponieważ kąty AND i AME są proste iako zawarte w półkolu; więc dwie linie ME i MD czynią jedną linią prostą DE . Linią zatem AM której długość i położenie oznaczyć potrzeba, jest wysokością trójkąta DAE , w którym boki AD i AE są wiadome, i kąt między niemi zawarty DAE równa się summie dwóch kątów wiadomych BAC i CAE mniey kątem DAB , który jest także wiadomy iako dopełnienie kąta wiadomego BDA w trójkącie prostokątnym ABD ; znajdziemy więc kąt ADE (XXXVIII).

Nakoniec w trójkącie prostokątnym ADM znajdziemy AM . Odległość ta AM i kąt $BAM = DAB + DAM$ oznaczają położenie punktu M .

XLV. W wielu przypadkach można także w Jeometrii użyć wygodnie formuł trygonometrycznych, iak się okaże z następujących zagadnień.

Zagad. 1. *Mając wiadome dwa boki trójkąta i kąt między niemi zawarty, znaleźć iego powierzchnią.*

Rozw. Powierzchnia trójkąta ABC fig. 145, równa jest połowie iloczynu iego podstawy AB przez wysokość CD (150) Oznaczywszy zatem powierzchnią trójkąta przez P , będzie $P = \frac{AB \times CD}{2}$

W trójkącie prostokątnym ACD iest, R: wst A = AC:CD (XXIV): więc $CD = AC \times \text{wst A}$. Ważność tę położywszy w równaniu powyższém, będzie $P = \frac{AB \times AC}{2} \times \text{wst A}$; to iest, *powierzchnia trójkąta równa się połowie iloczynu dwóch iego boków rozmnożonego przez wstawę kąta między temi bokami zawartego.*

XLVI, Zag. 2. *Mając wiadome trzy boki trójkąta, wyrachować promień koła na nim opisanego.*

Rozw. W trójkącie ABC fig. 148, ozaczywszy boki przeciwne kotom A, B, C, przez a, b, c , powierzchnią trójkąta przez P , a BS szukany promień koła opisanego przez x ; będzie podług zagadnienia poprzedzającego, $P = \frac{bc}{2} \times \text{wst A}$.

Poprowadziwszy średnicę BD i cięciwę CD, w trójkącie prostokątnym BCD iest, R: wst CDB = BD: BC. Aże kąt CDB = A, $BD = 2BS = 2x$, $BC = a$, $R = 1$; więc $1: \text{wst A} = 2x: a$; a zatem $\text{wst A} = \frac{a}{2x}$. Ważność tę położywszy w równa-

niu powyższém, będzie $P = \frac{abc}{4x}$ więc x

$= \frac{abc}{4P}$; To iest, *promień koła na trójkacie opisanego, równa się iloczynowi trzech boków trójkąta podzielonemu przez wziętą 4 razy jego powierzchnię.*

Co się tycze SF promienia koła wpisanego w trójkąt ABC *fig. 121*, łatwo iest okazać, że promień ten równa się powierzchni trójkąta podzielonéy przez połowę summy trzech jego boków.

XLVII. Zag. 5. *Wynaleźć stosunek przybliżony okręgu do średnicy.*

Rozw. Ponieważ łuk co do długości zawsze iest większy od swoiéy wstawy, a mnieyszy od styczney; różnica zaś między wstawą i styczną tém iest mnieysza, im iest mnieyszy łuk (XIX); znalazłszy więc sposobem podanym wyżej (XX), ważność wstawy i styczney łuku równego *np.* iednéy sekundzie, i obie te ważności podwoiwszy, znajdziemy dwie liczby bardzo mało między sobą różniące się, z których pierwsza będąca ważnością cięciwy łuku równego dwom sekundom (XVII), iest cokolwiek od tego łuku mnieysza, druga zaś cokolwiek od tegoż ługu większa: liczba zatém środek między niemi trzymająca, będzie ważnością łuku równego dwom sekundom. Wziąwszy potém obie te podwoione ważności tyle razy, ile razy łuk równy dwom sekundom mieści się w pół okręgu, otrzymamy dwie liczby bardzo mało między sobą różniące się, iedną mnieyszą od ważności półokręgu, drugą większą. Liczba zatém środek między temi dwiema liczbami trzymająca, może być wziętą za ważność półokręgu, którą podwoiwszy i porównawszy z ważnością średnicy, otrzymamy przybliżony stosunek okręgu do średnicy.

XLVIII. Do wyrachowania części trójkątów prostokréślnych, potrzebne są tylko sty-

czne i dotyczące łuków mniejszych od czwartej części okręgu, a wstawy i dostawy łuków mniejszych od połowy okręgu; o czém łatwo przekonać się można przeyrzawszy z uwagą podane wyżéyzagadnienia. Lecz w różnych przytłosowaniach Trygonometrii potrzebne są częstokroć łuki nie tylko większe od połowy okręgu, ale też większe od całego okręgu, a nawet łuki równe kilku okręgom koła. Wypada więc poznać ważność wstaw, dostaw i t. d. łuków tak wielkich iak tylko być mogą.

Wystawmy sobie, że promień SM , *fig* 149. może się około punktu S obracać tak, że punkt M obiega cały okrąg w kierunku $ACBDA$. Rzeczą jest przez się widoczną, że im bardziéy punkt M oddali się od punktu A , tém będzie większy łuk AM . Gdy punkt M znajduje się na punkcie A , to jest, gdy łuk $AM = 0$, iego wstawa jest także 0 , i styczną o . Jakoż wstawa MP jest odległością punktu M od promienia AS : kiedy więc punkt M znajduje się na punkcie A , odległość ta musi być o ; toż mówić o styczney AT która także musi być o , gdy punkt M znajduje się na punkcie A ; w ten czas bowiem sieczna ST przechodząca przez punkt M , musiałaby przechodzić przez punkt A .

Ze zaś dostawa łuku równa się piérwiałkowi różnicy między kwadratem promienia i kwadratem wstawy (XI); kiedy więc łuku o wstawa jest o , dostawa tegoż łuku musi być równa promieniowi. I w rzeczy saméy dostawa łuku jest wstawa dopełnienia tegoż łuku; dopełnieniem zaś łuku o jest łuk równy 4tej części okręgu, którego wstawą jest promień. A że sieczną łuku równa się kwadratowi promienia podzielonemu przez dostawę tegoż łuku (XI): kiedy więc łuku o dostawą jest promień, sieczną łuku o będzie kwadrat promienia podzielony przez promień,

czyli sieczna łuku o jest promień. Co się tycze dosiecznóy i stycznóy łuku o , z tych pierwsza równa jest siecznóy, druga stycznóy dopełnienia łuku o , czyli 4tęy części okręgu. Dla poznania więc ważności dosiecznóy i stycznóy łuku o , trzeba piérwéy poznać sieczną i styczną 4tęy części okręgu.

Oznaczwszy zatém promień przez R , będzie wst $o = o$, sty $o = o$, dos $o = R$, siec $o = R$.

XLIX. Im bardziéy punkt M przybliża się do C , czyli im bardziéy rośnie łuk AM , tém bardziéy powiększa się iego wstaw, styczn i sieczna, a tém bardziéy zmniejsza się iego dostawa, styczn i dosieczna; co jest przez się widoczna. Gdy punkt M znajduje się w połowie drogi od A do C , czyli gdy łuk AM równa się 8męy części okręgu, i iego dopełnienie czyli łuk MC równa się także 8męy części okręgu; na ten czas wstaw równa jest dostawie, styczn równa stycznóy sieczna równa dosiecznóy. Nadto w trójkącie AST prostokątnym przy A , kąt $AST = ATS$: gdyż miarą piérwszego jest łuk AM równy 8męy części okręgu, czyli 45° ; a zatém i dopełnienie iego, to jest, kąt $ATS = 45^\circ$. Więc bok $AT = AS$; to jest, styczn 8męy części okręgu równa się promieniowi. I w rzeczy saméy ponieważ styczn łuku równa się iloczynowi promienia i wstawy podzielonemu przez dostawę tegoż łuku (XI); kiedy więc wstaw i dostawa 8męy części okręgu są sobie równe, styczn 8męy części okręgu równa będzie promieniowi. Toż mówić o stycznóy tego łuku. Ze zaś okrąg koła mającego R zapromień równa się $2\pi R$ (263) atém samém kiedy $R = 1$, okrąg koła $= 2\pi$; biorąc więc koło którego promień $= 1$, będzie sty $\frac{1}{4}\pi = 1$, dot $\frac{1}{4}\pi = 1$. Ważność wstawy i dostawy tego łuku wyprowadziliśmy wyżej (XX). A co się tycze ważności siecznóy i dosiecznóy tegoż łuku

ku, te łatwo iest wyprowadzić z równań podanych wyżej (XI).

L. Gdy punkt M przyydzie do C, czyli gdy łuk AM równa się 4tęy części okręgu, na ten czas wstawa łuku tego będzie promień, a dostawa = o, iakośmy iuż powiedzieli wyżej (XVIII).

Ważność ta wstawy i dostawy 4tęy części okręgu, może być także następującym sposobem wyprowadzona. Ponieważ dostawa łuku iest wstawą iego dopełnienia, a dopełnieniem łuku o iest łuk równy 4tęy części okręgu; więc dostawa łuku o to iest promień, będzie wstawą czwartęy części okręgu; a wsta łuku o, to iest o będzie dostawą 4tęy części okręgu.

Ponieważ stycznaz AT iest równoodległa od promienia CS przechodzącego przez drugi koniec łuku AC równego 4tęy części okręgu; więc dwie te linie zeyść się z sobą nie mogą, choćby nadaléy były ptzedłużone.

Styczna zatém 4tęy części okręgu iest ilością nieskończoną: ilość nieskończona wyraża się zwyczajnie znakiem takim ∞ . Będzie więc sty $\frac{1}{2} \pi = \infty$.

Dopełnieniem 4tęy części okręgu iest łuk o. Styczna zatém łuku o, to iest o będzie dotyczną 4tęy części okręgu; a stycznaz 4tęy części okręgu czyli ∞ , będzie dotyczną łuku o; czyli, dot $\frac{1}{2} \pi = o$; dot $o = \infty$ (*).

Co się tycze siecznéy i dosięcznéy łuku równego 4tęy części okręgu, z tych pierwsza iest

(*) Ponieważ sty $a = \frac{R. \text{ wsta}}{\text{dos } a}$ (XI), a $\text{wst } \frac{1}{2} \pi =$

R , $\text{dos } \frac{1}{2} \pi = o$; będzie więc sty $\frac{1}{2} \pi = \frac{R^2}{o}$;
ułomek ten oznacza także ilość nieskończoną.

łością nieskończoną, druga zaś równa się promieniowi który jest sięczną łuku o będącego dopełnieniem 4tęj części okręgu; co i stąd jest rzeczą widoczną, że ponieważ dosieczna łuku równa się kwadratowi promienia podzielonemu przez wstawę (XI); kiedy więc wstawa 4tęj części okręgu jest promień, dosieczną 4tęj części okręgu będzie kwadrat promienia podzielony przez promień, czyli dosiec $\frac{1}{2} \pi = 1$.

LI. Gdy punkt M oddala się od C ku B, wstawy zmniejszają się, a dostawy rosną. I tak wstawa łuku AN większego od 4tęj części okręgu jest NQ, a dostawa NG czyli SQ, która jest odjemna iak się wyżej okazało XVI.

Ze zaś sty $AN = \frac{\text{R. wst AN}}{\text{dos AN}}$ (XI); kiedy

więc dostawa łuku AN jest odjemna, styczną tegoż łuku powinna być odjemna: iloraz bowiem ilości dodaynéy podzielonéy przez ilość odjemną jest odjemny. I w rzeczy saméy styczną łuku AN jest część prostopadłéy AT zawarta między promieniem AS i sieczną NS przez drugi koniec tego łuku poprowadzoną (VIII); lecz sieczna ta dostatecznie przedłużona, zeydzie się zlinią AT w punkcie t poniżej średnicy AB. Styczna zatém łuku AN jest linia At równa stycznéy AT, lecz mająca kierunek odwrotny, a tém samém odjemna. Nadto ponieważ At jest styczną łuku Am, który jest spełnieniem łuku AN, gdyż Nm jest średnica; więc styczną łuku większego od 4tęj części okręgu, równa się stycznéy iego spełnienia wziętęy ze znakiem—. Toż mówić o stycznéy tegoż łuku, którą jest linia CF równa CE dotycznęy łuku AM, lecz mająca kierunek odwrotny, a tém samém odjemna. A że sieczna łuku równa się kwadratowi promienia podzielo-

nemu przez dostawę, a dosieczna równa się kwadratowi promienia podzielonemu przez wstawę; kiedy więc dostawa łuku większego od 4tęj części okręgu jest odjemna, będzie sieczna tego łuku odjemną, a dosieczna dodayna. Jakoż sieczna łuku AN iest St , dosieczna zaś iest SF .

LII. Gdy punkt M znajduje się na punkcie B , czyli gdy łuk AM równa się połowie okręgu, będzie wstawa $= 0$, dostawa $= -1$, styczná $= 0$; dotyczná $= -\infty$; sieczna $= -1$ dosieczna $= \infty$; co iest łatwo wyprowadzić z wiadomości poprzedzających.

LIII. Gdy punkt M znajduje się na punkcie n , czyli gdy łuk AM iest większy od połowy okręgu, iak iest łuk $ACBn$, wstawa iego nQ znajduiąca się poniżej średnicy AB , ma kierunek odwrotny wstawom NQ , MP znajdującym się powyżej średnicy AB ; wstawa zatem łuku większego od połowy okręgu iest odjemna. Wstawa ta nQ powiększa się, a dostawa SQ zmniejsza się coraz bardziej, w miarę przybliżania się punktu M do punktu D , tak dalece, że w punkcie D , gdzie łuk $ABD = \frac{3}{4}$ okręgu, wstawą iest promień DS wzięty odjemnie, dostawa zaś równa się 0 . Nakoniec gdy punkt M przybliża się do punktu A , czyli gdy łuki są większe od $\frac{3}{4}$ okręgu, iak iest np . łuk ABm , na ten czas wstawa mP zaczyna się zmniejszać, lecz iest zawsze odjemna; dostawa zaś SP zaczyna się powiększać, i iest znowu dodayna, aż do punktu A , gdzie wstawa równa się 0 , a dostawa promieniowi. Wstawą zatem łuku równego okręgowi iest 0 , dostawą zaś promień.

Co się tycze ważności styczney, dotyczney, sieczney i dosieczney tak łuku większego od połowy okręgu i od $\frac{3}{4}$ okręgu, iako też łuku równego $\frac{3}{4}$ okręgu i całemu okręgowi, te łatwo iest

wyprowadzić za pomocą równań podanych wyżej (XI).

LIV. Gdyby punkt M powróciwszy do punktu A, rozpoczął nowy obrot w tymże samym kierunku, w jakim odbył obrot pierwszy, mieliśmy łuki większe od całego okręgu, a nawet większe od dwóch, trzech i t. d. okręgów, gdyby punkt M po ukończonym obrocie drugim, rozpoczął obrot trzeci, potem czwarty i t. d. Lecz wszystkie te łuki mają zawsze początek w punkcie A, a koniec w punkcie M; a zatem ich wstawy, dostawy i t. d. będą te same, iakie są łuków AM wykreślonych przez punkt M w czasie pierwszego obrotu. Oznaczywszy więc łuk iakikolwiek przez a , będzie $\text{wst } a = \text{wst } (2\pi + a) = \text{wst } (4\pi + a) = \text{wst } (6\pi + a)$ i t. d. Toż mówić o dostawach, stycznych i t. d.

LV. Wszystkie te ważności wstaw i dostaw, a tём samém stycznych, dotycznych, siecznych i dosiecznych, można także wyprowadzić z pierwszego twierdzenia Trygonometrii (XII). Jakoż w pierwszém i trzecim równaniu tego twierdzenia wzięwszy promień $R=1$, będzie

$$\left. \begin{aligned} \text{wst } (a+b) &= \text{wst } a \cdot \text{dos } b + \text{wst } b \cdot \text{dos } a \\ \text{dos } (a+b) &= \text{dos } a \cdot \text{dos } b - \text{wst } a \cdot \text{wst } b \end{aligned} \right\} A.$$

W dwóch tych równaniach wzięwszy łód łuk a równy 4tęj części okręgu, który wstawa jest promień czyli 1, a dostawa równa 0, i ważności te położywszy zamiast $\text{wst } a$, $\text{dos } a$; będzie

$$\text{wst } \left(\frac{1}{2}\pi + b\right) = 1 \cdot \text{dos } b + \text{wst } b \cdot 0 = \text{dos } b;$$

$$\text{dos } \left(\frac{1}{2}\pi + b\right) = 0 \cdot \text{dos } b - 1 \cdot \text{wst } b = -\text{wst } b.$$

To jest, wstawa łuku większego od 4tęj części okręgu jest dodayna, a dostawa odjemna.

2re. Wzięwszy łuk $a = \frac{1}{2}\pi$, i łuk $b = \frac{1}{2}\pi$; dwa równania A zamieniają się w następujące:

$$\text{wst } \pi = 1. \ 0 + 1. \ 0 = 0;$$

$\text{dos } \pi = 0. \ 0 - 1. \ 1 = -1$. To jest, wstawa łuku równego połowie okręgu jest 0, a dostawa tegoż łuku jest odjemna.

3cie. W tychże równaniach A wziąwszy łuk $a = \pi$, i zamiast $\text{wst } a$, $\text{dos } a$ położywszy ważności znalezione w dwóch poprzedzających równaniach; będzie

$$\text{wst } (\pi + b) = 0. \ \text{dos } b + \text{wst } b. - 1 = -\text{wst } b;$$

$$\text{dos } (\pi + b) = -1. \ \text{dos } b - 0. \ \text{wst } b = -\text{dos } b.$$

To jest, łuku większego od połowy okręgu wstawa i dostawa jest odjemna.

4te. Wziąwszy łuk $a = \pi$, łuk $b = \frac{1}{2}\pi$, i zamiast $\text{wst } a$, $\text{dos } a$, $\text{wst } b$, $\text{dos } b$ położywszy ich ważności znalezione; równania A zamieniają się w następujące:

$$\text{wst } (\pi + \frac{1}{2}\pi) = 0. \ 0 + 1. - 1 = -1;$$

$\text{dos } (\pi + \frac{1}{2}\pi) = -1. \ 0 - 0. \ 1 = 0$. To jest, łuku równego $\frac{3}{2}$ okręgu wstawa jest odjemna, a dostawa równa 0.

5te. Wziąwszy łuk $a = \frac{3}{2}\pi$, i zamiast $\text{wst } a$, $\text{dos } a$, położywszy znaną ważność wstawy i dostawy $\frac{3}{4}$ okręgu; równania A zamieniają się w następujące:

$$\text{wst } (\frac{3}{2}\pi + b) = -1. \ \text{dos } b + \text{wst } b. \ 0 = -\text{dos } b;$$

$$\text{dos } (\frac{3}{2}\pi + b) = 0. \ \text{dos } b - (-1. \ \text{wst } b) = \text{wst } b.$$

To jest, łuku większego od $\frac{3}{4}$ okręgu wstawa jest odjemna, a dostawa dodayna.

6te. Wziąwszy łuk $a = \frac{3}{2}\pi$, łuk $b = \frac{1}{2}\pi$, i w równaniach A zamiast $\text{wst } a$, $\text{dos } a$ położywszy wstawę i dostawę $\frac{3}{4}$ okręgu, a zamiast $\text{wst } b$, $\text{dos } b$ położywszy wstawę i dostawę 4tę części okręgu, będzie

$$\text{wst } (\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi) = -1. \ 0 + 1. \ 0 = 0;$$

$\text{dos } (\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi) = 0. \ 0 - (-1. \ 1) = 1$. To jest, łuku równego całemu okręgowi wstawa jest 0, a dostawa dodayna.

7me. Nakoniec w tychże równaniach A wzięwszy łuk $a=2\pi$, i zamiast wst a , dos a położywszy znaną ważność wstawy i dostawy łuku równego okręgowi; będzie

$$\text{wst}(2\pi+b)=0. \text{ dos } b + \text{wst } b. 1 = \text{wst } b;$$

$\text{dos}(2\pi+b)=1. \text{ dos } b - 0. \text{ wst } b = \text{dos } b.$ To jest łuku równego całemu okręgowi powiększonemu łukiem b , wstawa i dostawa równa się wstawie i dostawie tegoż łuku b ; i t. d.

Stąd się okazuje, że od punktu A *fig. 149*, aż do punktu B, gdzie łuk ACB równa się połowie okręgu, wstawy są dodayne; od punktu zaś B, aż do punktu A, gdzie łuk ACBDA równa się okręgowi, wstawy są odjemne. 2re, że od punktu A do C, gdzie łuk AC równa się 4tęj części okręgu, dostawy są dodayne; od punktu C do D, gdzie łuk ACBD równa się $\frac{3}{4}$ okręgu, dostawy są odjemne; od punktu D do A, gdzie łuk ACBDA równa się okręgowi, dostawy są dodayne. Granicą zatem wstaw dodaynych i odjemnych jest średnica AB; granicą dostaw dodaynych i odjemnych jest średnica DC prostopadła do średnicy AB.

LVI. Ponieważ sty $a = \frac{\text{wst } a}{\text{dos } a}$, dot $a =$

$\frac{\text{dos } a}{\text{wst } a}$; styczną więc i dotyczną łuku w ten czas będzie dodayna, kiedy iego wstawa i dostawa mają przed sobą iednakowe znaki; co ma miejsce od punktu A do C i od punktu B do D. Kiedy zaś wstawa i dostawa mają przed sobą znaki odjemne, iak jest od punktu C do B, i od punktu D do A, na ten czas styczną i dotyczną będzie odjemna. Itak łuk ACn, którego wstawa n Q i dostawa SQ jest odjemna, powinien mieć tak styczną iak dotyczną dodayną; i w rzeczy saméy styczną łuku tego jest liniia AT, dotyczną zaś liniia

CE będąca styczną łuku CB*n*, który jest dopełnieniem łuku AC*n*: różnicą bowiem między temi dwoma łukami jest łuk AMC = czwartéj części okręgu. Łuk zaś AC*m*, którego wstawą *mP* jest odjemna, a dostawa SP dodayna, ma styczną At i dotyczną CF odjemną. Skąd się okazuje że granicą stycznych dodaynych i odjemnych jest średnica AB, granicą dotyczących dodaynych i odjemnych jest średnica CD.

LVII. Ponieważ sieć $a = \frac{R^2}{\text{dos } a}$, dosieć $a = \frac{R^2}{\text{wst } a}$; łatwo stąd wniesiemy, których łuków sieczne i dosieczne mogą być brane za dodayne lub odjemne. Lecz uważać tu potrzeba, że sieczne i dosieczne, jako linie przechodzące przez środek koła i przez koniec M łuku AM, ustawicznie odmienniają położenie swoje względem dwóch średnic AB i CD do siebie prostopadłych; gdy tym czasem wstawy i styczne są zawsze równoodległe od średnicy CD, dostawy zaś i dotyczne są zawsze równoodległe od średnicy AB. Przeto też dla siecznych i dosiecznych dodaynych i odjemnych niemożna naznaczyć stałych granicy.

LVIII. Częstokroć w rachunku wypadają łuki odjemne. Abyśmy poznali jakie są tych łuków wstawy i dostawy, uważmy, że dwa łuki równe AM, *Am* fig. 149, z których pierwszy jest dodayny, drugi odjemny, mają wprawdzie równe wstawy PM i *Pm*; lecz wstawą pierwszego jest dodayna drugiego odjemna; dostawa zaś obudwu jest ta sama PS. Podobnież dwa równe łuki AC*N*, AD*n*, z których pierwszy jest dodayny, drugi odjemny, mają równe wstawy NQ i *nQ*, lecz pierwsza dodayna, druga odjemna; dostawa zaś obudwu jest SQ. Stąd wniesiemy, że wstawy łuków odjem-

nych są odjemne; dostawy zaś te same co i łuków dodatnych równych odjemnym. W ogólności, $\text{wst} - a = -\text{wst } a$; $\text{dos} - a = \text{dos } a$

LIX. Z twierdzenia fundamentalnego wyżéy (XII) dowiedzionego, można iésze wyprowadzić wiele wniosków w dalszéy Matematyce istotnie potrzebnych: przytoczymy tu niektóre.

1ód. Dodawszy do siebie dwa piérwsze równania

$$\text{wst } (a+b) = \frac{\text{wst } a \text{ dos } b + \text{wst } b \text{ dos } a}{R},$$

$$\text{wst } (a-b) = \frac{\text{wst } a \text{ dos } b - \text{wst } b \text{ dos } a}{R}; \text{ bédzie}$$

$$\text{wst } (a+b) + \text{wst } (a-b) = \frac{2 \text{ wst } a \text{ dos } b}{R}; \text{ więc}$$

$$\text{wst } a \text{ dos } b = \frac{R}{2} \text{ wst } (a+b) + \frac{R}{2} \text{ wst } (a-b). \quad (1)$$

Drugie z dwóch tychże równań odiawszy od piérwszego, zostanie

$$\text{wst } (a+b) - \text{wst } (a-b) = \frac{2 \text{ wst } b \text{ dos } a}{R}; \text{ więc}$$

$$\text{wst } b \text{ dos } a = \frac{R}{2} \text{ wst } (a+b) - \frac{R}{2} \text{ wst } (a-b). \quad (2)$$

Kiedy łuk $a=b$, formuły (1) i (2) zamieniaią się w następującą:

$$\text{wst } a \text{ dos } a = \frac{R}{2} \text{ wst } 2a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

2re. Dodawszy do siebie dwa drugie równania twierdzenia fundamentalnego, które są:

$$\text{dos } (a+b) = \frac{\text{dos } a \text{ dos } b - \text{wst } a \text{ wst } b}{R},$$

$$\text{dos } (a-b) = \frac{\text{dos } a \text{ dos } b + \text{wst } a \text{ wst } b}{R}, \text{ bédzie}$$

$$\text{dos } (a+b) + \text{dos } (a-b) = \frac{2 \text{ dos } a \text{ dos } b}{R}; \text{ więc}$$

$$\operatorname{dos} a \operatorname{dos} b = \frac{R}{2} \operatorname{dos} (a+b) + \frac{R}{2} \operatorname{dos} (a-b). \quad (4)$$

Pierwsze z dwóch tychże równań odiawszy od drugiego, zostanie

$$\operatorname{dos} (a-b) - \operatorname{dos} (a+b) = \frac{2 \operatorname{wst} a \operatorname{wst} b}{R}; \text{ więc}$$

$$\operatorname{wst} a \operatorname{wst} b = \frac{R}{2} \operatorname{dos} (a-b) - \frac{R}{2} \operatorname{dos} (a+b). \quad (5)$$

Kiedy łuk $a=b$, ponieważ wtym przypadku $\operatorname{dos} (a-b) = \operatorname{dos} 0 = R$ (XLVIII); formuły zatem (4) i (5) zamieniają się w następujące

$$\operatorname{dos}^2 a = \frac{R}{2} \operatorname{dos} 2a + \frac{R^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\operatorname{wst}^2 a = \frac{R^2}{2} - \frac{R}{2} \operatorname{dos} 2a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

5cie. Uczyniwszy $a+b=p$, $a-b=q$, znajdziemy przez dodanie do siebie dwóch tych równań, $2a=p+q$, a przez odjęcie drugiego od pierwszego, $2b=p-q$; atém samém $a=\frac{1}{2}(p+q)$, $b=\frac{1}{2}(p-q)$. Ważności te położywszy zamiast a i b w formułach (1), (2), (4) i (5), i każdego równania stąd wynikłego podzieliwszy obie strony

przez $\frac{R}{2}$, wypadnie

$$\operatorname{wst} p + \operatorname{wst} q = \frac{2}{R} \operatorname{wst} \frac{1}{2}(p+q) \operatorname{dos} \frac{1}{2}(p-q). \quad (8)$$

$$\operatorname{wst} p - \operatorname{wst} q = \frac{2}{R} \operatorname{dos} \frac{1}{2}(p+q) \operatorname{wst} \frac{1}{2}(p-q). \quad (9)$$

$$\operatorname{dos} p + \operatorname{dos} q = \frac{2}{R} \operatorname{dos} \frac{1}{2}(p+q) \operatorname{dos} \frac{1}{2}(p-q). \quad (10)$$

$$\operatorname{dos} p - \operatorname{dos} q = -\frac{2}{R} \operatorname{wst} \frac{1}{2}(p+q) \operatorname{wst} \frac{1}{2}(p-q). \quad (11)$$

4te. Pierwsze równanie twierdzenia fundamentalnego podzieliwszy przez trzecie, wypadnie

$$\frac{\text{wst}(a+b)}{\text{dos}(a+b)} = \frac{\text{wst } a \text{ dos } b + \text{wst } b \text{ dos } a}{\text{dos } a \text{ dos } b - \text{wst } a \text{ wst } b}.$$

Aże $\frac{R \text{ wst } A}{\text{dos } A} = \text{sty } A \text{ (XI)}; \text{ czyli, } \frac{\text{wst } A}{\text{dos } A} = \frac{\text{sty } A}{R},$

atem samém

$$\frac{\text{wst}(a+b)}{\text{dos}(a+b)} = \frac{\text{sty}(a+b)}{R};$$

powyższe więc równanie zamieni się w następujące:

$$\frac{\text{sty}(a+b)}{R} = \frac{\text{wst } a \text{ dos } b + \text{wst } b \text{ dos } a}{\text{dos } a \text{ dos } b - \text{wst } a \text{ wst } b} \quad \dots (a)$$

W równaniu tém z drugiéj strony podzieliwszy tak licznik iak mianownik przez $\text{dos } a \text{ dos } b$, wypadnie

$$\text{licznik} = \frac{\text{wst } a}{\text{dos } a} + \frac{\text{wst } b}{\text{dos } b} = \frac{\text{sty } a + \text{sty } b}{R},$$

$$\text{mianownik} = 1 - \frac{\text{wst } a}{\text{dos } a} \cdot \frac{\text{wst } b}{\text{dos } b} = 1 - \frac{\text{sty } a \text{ sty } b}{R^2} = \frac{R^2 - \text{sty } a \text{ sty } b}{R^2}.$$

Położywszy ważności te zamiast licznika i mianownika drugiéj strony równania (a), i rozmnożywszy obie strony przez R , wypadnie

$$\text{sty}(a+b) = \frac{R^2 (\text{sty } a + \text{sty } b)}{R^2 - \text{sty } a \text{ sty } b} \quad \dots (b)$$

Odbywszy podobne do poprzedzającego działanie z równaniem drugiém i czwartém twierdzenia fundamentalnego, znajdziemy

$$\text{sty}(a-b) = \frac{R^2 (\text{sty } a - \text{sty } b)}{R^2 + \text{sty } a \text{ sty } b}.$$

Równanie to złączywszy z równaniem (b) za pomocą podwójnego znaku $\pm$ będzie

$$\text{sty}(a \pm b) = \frac{R^2 (\text{sty } a \pm \text{sty } b)}{R^2 \mp \text{sty } a \text{ sty } b} \quad \dots (12).$$

Kiedy łuk $a=b$, $R=1$, równanie (b) zamienia się w następujące:

$$\text{sty } 2a = \frac{2\text{sty } a}{1 - \text{sty}^2 a} \quad \dots \quad (15)$$

5te. Dwa trójkąty ARN , BRn , fig. 156 prostokątne przy A i B , i w których kąt $ARN = BRn$, iako wewnętrzne naprzemianległe względem siecznéy RN i dwóch równoodległych AR , Bn , są podobne: będzie więc

$AN:AR=BR:Bn$; czyli oznaczając linie iak w art. XI,

$$\text{sty } a:R=R:\text{dot } a; \text{ więc } \text{sty } a = \frac{R^2}{\text{dot } a}, \text{dot } a = \frac{R^2}{\text{sty } a};$$

$$\text{atém samém dot } (a+b) = \frac{R^2}{\text{sty } (a+b)}.$$

Z drugiéy strony równania tego zamiast $\text{sty } (a+b)$ położywszy ważność znalezioną w formule (12) będzie

$$\text{dot } (a+b) = \frac{R^2 - \text{sty } a \text{ sty } b}{\text{sty } a + \text{sty } b}.$$

Ze zaś $\text{sty } a = \frac{R^2}{\text{dot } a}$; z drugiéy więc strony równania ostatniego położywszy tak w liczniku iak w mianowniku $\frac{R^2}{\text{dot } a}$, $\frac{R^2}{\text{dot } b}$ zamiast $\text{sty } a$, $\text{sty } b$, wypadnie

$$\text{dot } (a+b) = \frac{\text{dot } a \text{ dot } b - R^2}{\text{dot } a + \text{dot } b} \quad \dots \quad (c)$$

Odbywszy to samo działanie z formułą (12) biorąc w niéy z nak tylko dolny, znajdziemy

$$\text{dot } (a-b) = \frac{\text{dot } a \text{ dot } b + R^2}{\text{dot } a - \text{dot } b}.$$

Równanie to złączywszy z równaniem (c) za pomocą podwoynego znaku $\pm$, będzie

$$\dot{\cos}(a \pm b) = \frac{\dot{\cos} a \dot{\cos} b \mp R^2}{\dot{\cos} b \pm \dot{\cos} a} \quad (14)$$

6te. Ponieważ $\text{sty}^2 a = \frac{R^2 \text{wst}^2 a}{\text{dos}^2 a}$, $\text{sty}^2 b =$

$$\frac{R^2 \text{wst}^2 b}{\text{dos}^2 b} \text{ (XI), więc}$$

$$\text{sty}^2 a - \text{sty}^2 b = \frac{R^2 \text{wst}^2 a}{\text{dos}^2 a} - \frac{R^2 \text{wst}^2 b}{\text{dos}^2 b}.$$

Drugą stronę sprowadziwszy do iednakowego mianownika, będzie.

$$\text{sty}^2 a - \text{sty}^2 b = \frac{R^2 (\text{wst}^2 a \text{dos}^2 b - \text{wst}^2 b \text{dos}^2 a)}{\text{dos}^2 a \text{dos}^2 b} \quad (d)$$

Aże $\text{wst}^2 a \text{dos}^2 b - \text{wst}^2 b \text{dos}^2 a =$
 $(\text{wst} a \text{dos} b + \text{wst} b \text{dos} a)(\text{wst} a \text{dos} b - \text{wst} b \text{dos} a) =$
 $R \text{wst}(a+b) R \text{wst}(a-b) = R^2 \text{wst}(a+b) \text{wst}(a-b) \text{ (XII)}$
 równanie więc (d) zamieni się w następujące:

$$\text{sty}^2 a - \text{sty}^2 b = \frac{R^4 \text{wst}(a+b) \text{wst}(a-b)}{\text{dos}^2 a \text{dos}^2 b} \quad (15)$$

Ponieważ $\dot{\cos}^2 a = \frac{R^2 \text{dos}^2 a}{\text{wst}^2 a}$, $\dot{\cos}^2 b =$

$$\frac{R^2 \text{dos}^2 b}{\text{wst}^2 b} \text{ (XI), więc}$$

$$\begin{aligned} \dot{\cos}^2 a - \dot{\cos}^2 b &= \frac{R^2 (\text{wst}^2 b \text{dos}^2 a - \text{wst}^2 a \text{dos}^2 b)}{\text{wst}^2 a \text{wst}^2 b} \\ &= \frac{R^2 (\text{wst}^2 a \text{dos}^2 b - \text{wst}^2 b \text{dos}^2 a)}{\text{wst}^2 a \text{wst}^2 b}. \end{aligned}$$

Odbywszy zlicznikiem drugiej strony działanie podobne do poprzedzającego, znajdziemy

$$\dot{\cos}^2 a - \dot{\cos}^2 b = - \frac{R^4 (\text{wst}(a+b) \text{wst}(a-b))}{\text{wst}^2 a \text{wst}^2 b} \quad (16)$$

7me. Podzieliwszy formułę (8) przez (9), wypadnie

$$\frac{\text{wst} p + \text{wst} q}{\text{wst} p - \text{wst} q} = \frac{\text{wst} \frac{1}{2}(p+q)}{\dot{\cos} \frac{1}{2}(p+q)} \times \frac{\dot{\cos} \frac{1}{2}(p-q)}{\text{wst} \frac{1}{2}(p-q)}; \text{ więc}$$

$$\frac{\text{wst } p + \text{wst } q}{\text{wst } p - \text{wst } q} \times \frac{\text{wst } \frac{1}{2}(p-q)}{\text{dos } \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\text{wst } \frac{1}{2}(p+q)}{\text{dos } \frac{1}{2}(p+q)}; \text{ czyli}$$

$$\frac{\text{wst } p + \text{wst } q}{\text{wst } p - \text{wst } q} \times \frac{\text{sty } \frac{1}{2}(p-q)}{R} = \frac{\text{sty } \frac{1}{2}(p+q)}{R}; \text{ więc}$$

$$\frac{\text{wst } p + \text{wst } q}{\text{wst } p - \text{wst } q} = \frac{\text{sty } \frac{1}{2}(p+q)}{\text{sty } \frac{1}{2}(p-q)} \quad (17)$$

Odbywszy podobne działania 1^{ód} z formułą (8) i (10), 2^{re}, z formułą (8) i (11), 3^{cie} z formułą (9) i (10), 4^{te} z formułą (9) i (11), nakoniec z formułą (10) i (11); znajdziemy,

$$\frac{\text{wst } p + \text{wst } q}{\text{dos } p + \text{dos } q} = \frac{\text{sty } \frac{1}{2}(p+q)}{R} \quad (18)$$

$$\frac{\text{wst } p + \text{wst } q}{\text{dos } p - \text{dos } q} = \frac{\text{dot } \frac{1}{2}(p-q)}{R} \quad (19)$$

$$\frac{\text{wst } p - \text{wst } q}{\text{dos } p + \text{dos } q} = \frac{\text{sty } \frac{1}{2}(p-q)}{R} \quad (20)$$

$$\frac{\text{wst } p - \text{wst } q}{\text{dos } p - \text{dos } q} = \frac{\text{dot } \frac{1}{2}(p+q)}{R} \quad (21)$$

$$\frac{\text{dos } p + \text{dos } q}{\text{dos } p - \text{dos } q} = \frac{\text{dot } \frac{1}{2}(p-q)}{\text{sty } \frac{1}{2}(p-q)} \quad (e)$$

Ze zaś $\frac{R^2}{\text{dos } p} = \text{siec } p$, $\frac{R^2}{\text{dos } q} = \text{siec } q$ (XI); atém samém

$\text{dos } p = \frac{R^2}{\text{siec } p}$, $\text{dos } q = \frac{R^2}{\text{siec } q}$; będzie więc

$$\frac{\text{dos } p + \text{dos } q}{\text{dos } p - \text{dos } q} = \frac{R^2}{\text{siec } p + \text{siec } q} \times \frac{\text{siec } p - \text{siec } q}{R^2} =$$

$$\frac{\text{siec } p - \text{siec } q}{\text{siec } p + \text{siec } q};$$

można więc zamiast równania (e) napisać następujące

$$\frac{\text{dos } p + \text{dos } q}{\text{dos } p - \text{dos } q} = \frac{\text{dot } \frac{1}{2}(p-q)}{\text{sty } \frac{1}{2}(p-q)} \frac{\text{siec } p - \text{siec } q}{\text{siec } p + \text{siec } q} \quad (22)$$

8me. Ponieważ $\text{wst } 0 = 0$, $\text{dos } 0 = R$ (XVIII),
 $\text{sty } 0 = 0$, $\text{dot } 0 = R$ (XLVIII); kiedy więc łuk $q = 0$,
 formuły (18) i (19) zamieniają się w następujące:

$$\frac{\text{wst } p}{R + \text{dos } p} = \frac{\text{sty } \frac{1}{2} p}{R} \quad \dots \dots \dots (23)$$

$$\frac{\text{wst } p}{\text{dos } p - R} = - \frac{\text{dot } \frac{1}{2} p}{R}; \text{ czyli}$$

$$\frac{\text{wst } p}{R - \text{dos } p} = \frac{\text{dot } \frac{1}{2} p}{R} \quad \dots \dots \dots (24)$$

9te. $\text{sty } a = \frac{R \text{ wst } a}{\text{dos } a} = \frac{R \text{ wst } a}{\sqrt{R^2 - \text{wst}^2 a}}$; więc

$\text{sty}^2 a = \frac{R^2 \text{ wst}^2 a}{R^2 - \text{wst}^2 a}$. Równanie to łatwo zamie-
 nić można w następujące:

$$\text{wst } a = \frac{R \text{ sty } a}{\sqrt{R^2 + \text{sty}^2 a}} \quad \dots \dots \dots (25)$$

Odbywwszy to samo działanie z równaniem

$$\text{Sty } a = \frac{R \text{ wst } a}{\text{dos } a} = \frac{R \sqrt{R^2 - \text{dos}^2 a}}{\text{dos } a}; \text{ znajdziemy}$$

$$\text{dos } a = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + \text{sty}^2 a}} \quad \dots \dots \dots , (26)$$

10te. Przypuściwszy że łuk $AS = 60^\circ$ podług
 dawnego podziału, fig. 136, cięciwa jego byłaby
 bokiem sześciokąta foremnego w koło wpisanego,
 atém samem równałaby się promieniowi tegoż
 koła (251). Cięciwa też promieniem RA i RS utwo-
 rzyłaby trójkąt równoboczny, a ze styczną AN
 łuku AS i z częścią NS jego siecznéy RN utwo-
 rzyłaby trójkąt równoramienny, z którego łatwo
 byłoby okazać, że cięciwa ta równa się części
 NS siecznéy RN ; skądbyśmy wniesli, że część
 NS siecznéy RN równa jest promieniowi RS , a tém
 samém że RS czyli $R = \frac{1}{2} RN = \frac{1}{2}$ siec 60° .

Z uwagi téy i z tego cośmy powiedzieli w artykule XLVIII i innych, wypada, że

$$R = \text{wst } 90^\circ = \text{dos } 0^\circ = \text{sty } 45^\circ = \text{dot } 45^\circ = \text{niec } 0^\circ \text{ } 45^\circ \text{ dosiec } 90^\circ = \frac{1}{2} \text{ niec } 60^\circ. \quad (27)$$

Nakoniec z artykułu LV. wypada że

$$\left. \begin{aligned} \text{wst}(90^\circ \pm b) &= +\text{dos } b; \text{ dos}(90^\circ \mp b) = \mp \text{wst } b \\ \text{wst}(180^\circ \mp b) &= \text{wst } \mp b; \text{ dos}(180^\circ \pm b) = -\text{dos } b \\ \text{wst}(270^\circ \pm b) &= -\text{dos } b; \text{ dos}(270^\circ \pm b) = +\text{wst } b \\ \text{wst}(360^\circ \pm b) &= \pm \text{wst } b; \text{ dos}(360^\circ \pm b) = +\text{dos } b \end{aligned} \right\} (28)$$

*Koniec Trygonometrii prostokréślnéy i części
pierwszéy Jometrii:*

KSIĘGOZBIÓR
MARCINA ZAMOYSKIEGO

10767

REIESTR ROZDZIAŁOW.

karta

ROZDZIAŁ I. *Wiadomości poprzednicze* — 1

ROZDZIAŁ II. *O liniach prostych przecinających się, o kątach i trójkątach.* — — — 5

ROZDZIAŁ III. *O liniach prostopadłych, pochyłych i równoodległych* — 24

ROZDZIAŁ IV. *O wielokątach w powszechności a w szczególności o ich kątach* — — 39

ROZDZIAŁ V. *O liniach prostych i o kole* — 50

ROZDZIAŁ VI. *O powierzchni wielokątów* — 76

ROZDZIAŁ VII. *O podobieństwie wielokątów a naprzód trójkątów, i o proporcjonalności ich boków* — 101

ROZDZIAŁ VIII. *O wielokątach w koło wpisanych i opisanych na kole* — 136

ROZDZIAŁ IX. *O powierzchni koła i o stosunku okręgu do średnicy* — 164

Trygonometrya prostokreślna — — 197

OMYŁKI ZNACZNIEYSZE.

Karta. Wiersz.

Czytlay,

5	51	fig 5	fig: 5
10	55	BAC	ABC
18	8	CD	CB
34	19	CF	CHF
35	14	CHE	CHF
73	4	Ss	Ss
—	15	As+AS	As+AS
75	12	AF	AE
77	20	BCF	BCE
81	19	FFGH	EFGH
88	50	FHI—EBI	FHI—BGH—EBI
115	13	BE	BF
118	19	AC	BC
127	14	CG:bc	CG:cg=BC:bc
132	15	M	M ²
144	54	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
148	29	r5, 24	15' 24"
153	18	FF	EF
157	4	kwadraty	iak kwadraty
161	52	apmS	aPmS
164	25	>BH	BH
171	18	na c	na kole c
183	19	okrąg	powierzchnią
190	4	przez	przez X,
tamże		R przez	promień przez R
200	55	ARN, ARN	ARN, ARN
205	12	dos a dos b ±	dos a dos b ±
204	5	NNG	NG
223	50	c	a
224	29	a = $\frac{wst.B}{R.b}$	a = $\frac{R.b}{wstB}$
228	14	wsta = $\frac{1}{2}A$	wsta = wst $\frac{1}{2}A$
—	25	b ² +c ² a ²	b ² +c ² —a ²
247	15	R ² — sty a + sty b	R ² — sty a. sty b.
248	22	dot a — dot b	dot b — dot a.

Fig. 1.

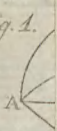


Fig. 5.



Fig. 10.

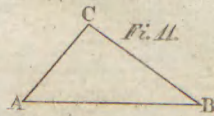
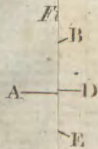


Fig. 14.

Fig. 14.

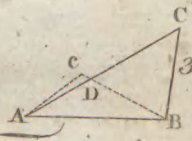
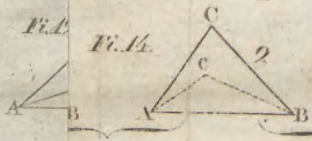


Fig. 15.

Fig. 20.

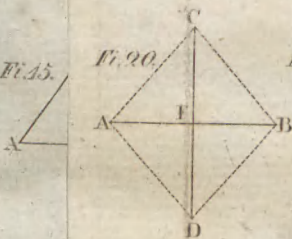


Fig. 21.

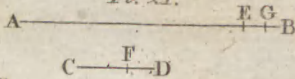
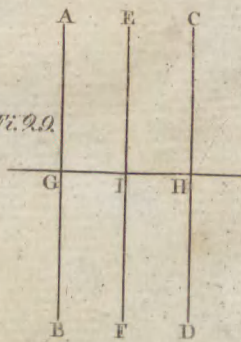
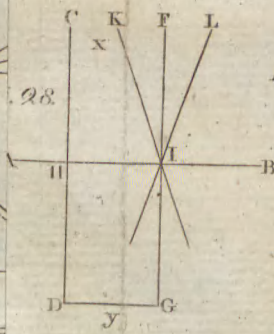
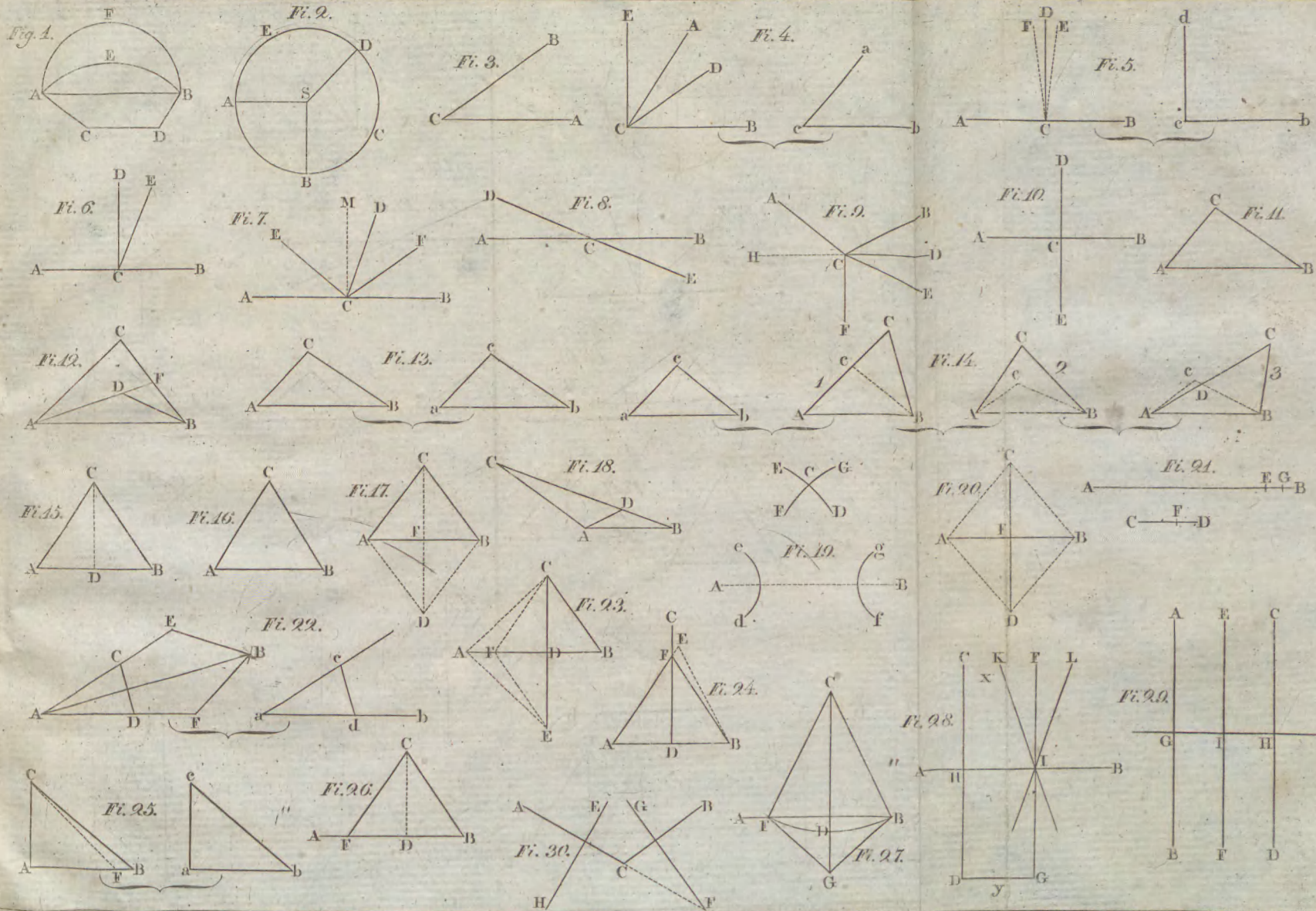
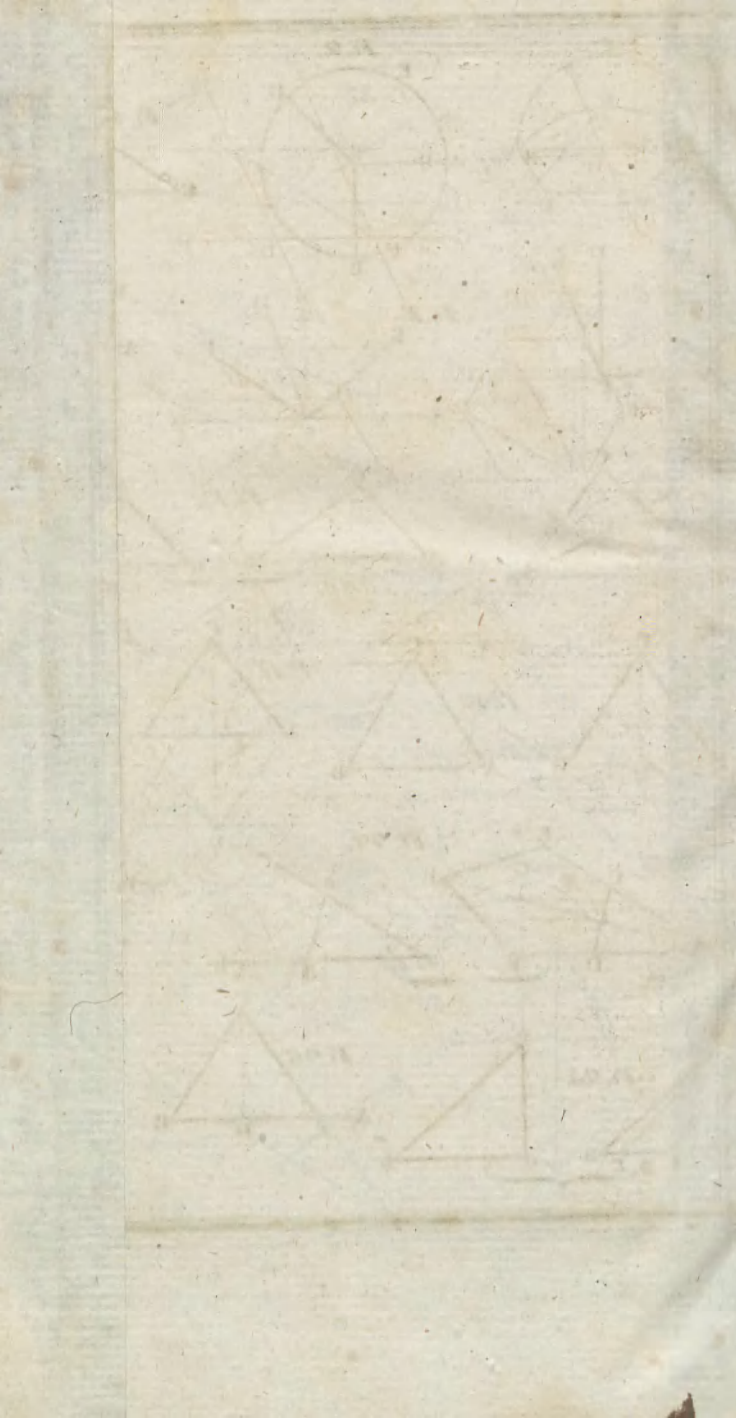


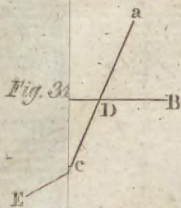
Fig. 28.

Fig. 29.

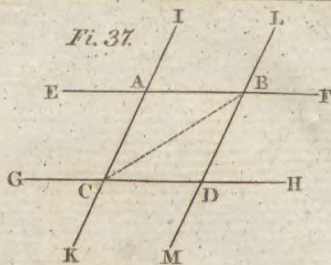




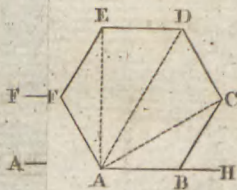




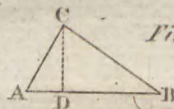
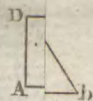
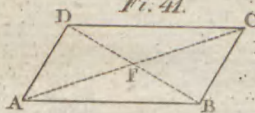
Fi. 37.



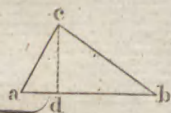
Fi. 40.



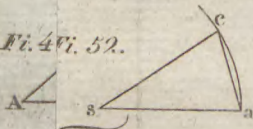
Fi. 41.



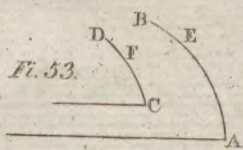
Fi. 48.



Fi. 49. Fi. 52.



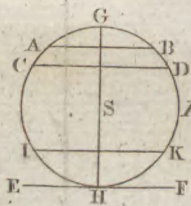
Fi. 53.



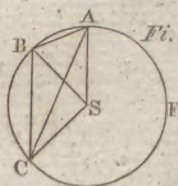
Fi. 54.



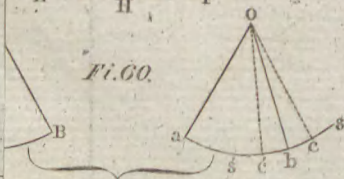
Fi. 57.

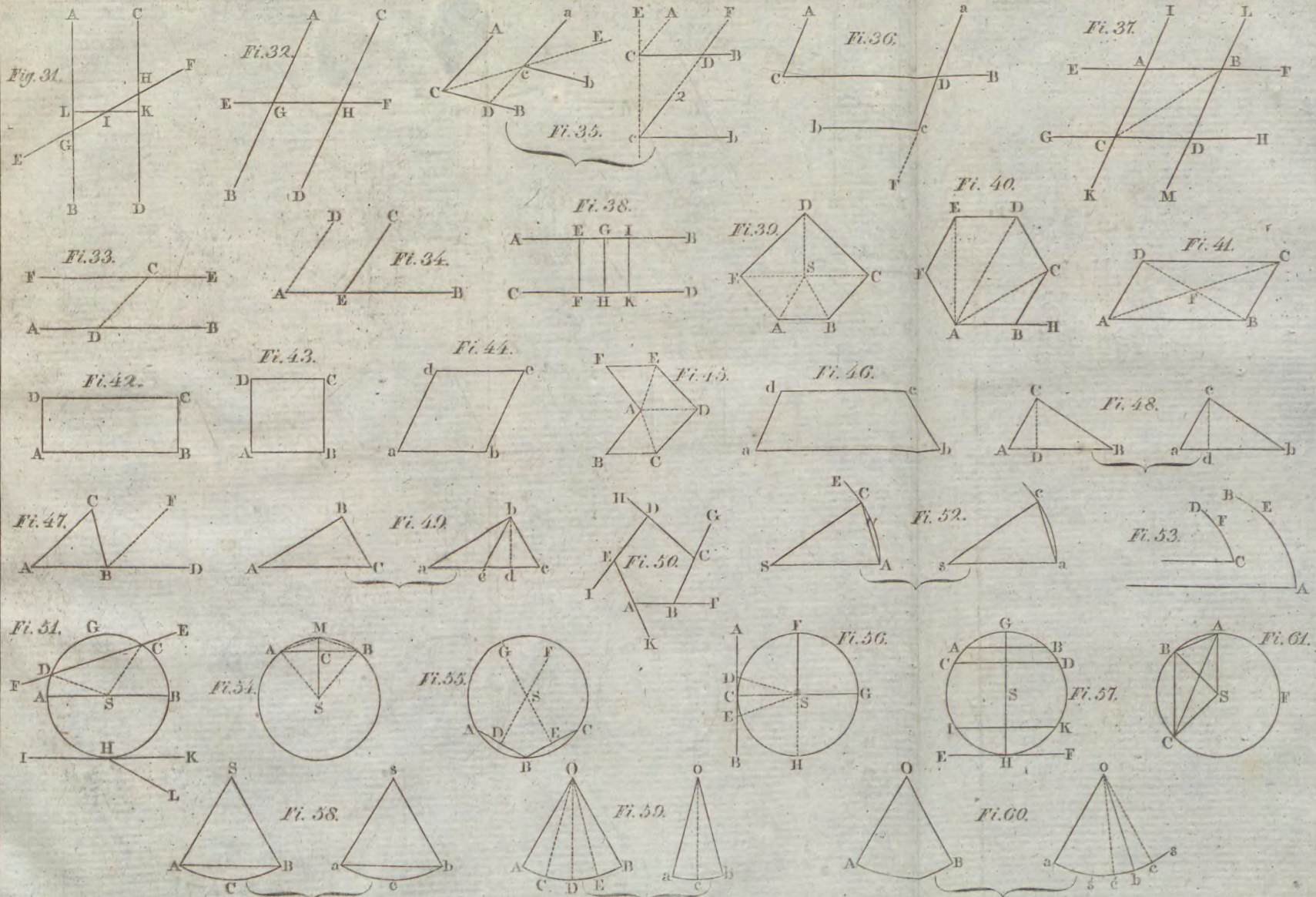


Fi. 61.



Fi. 60.





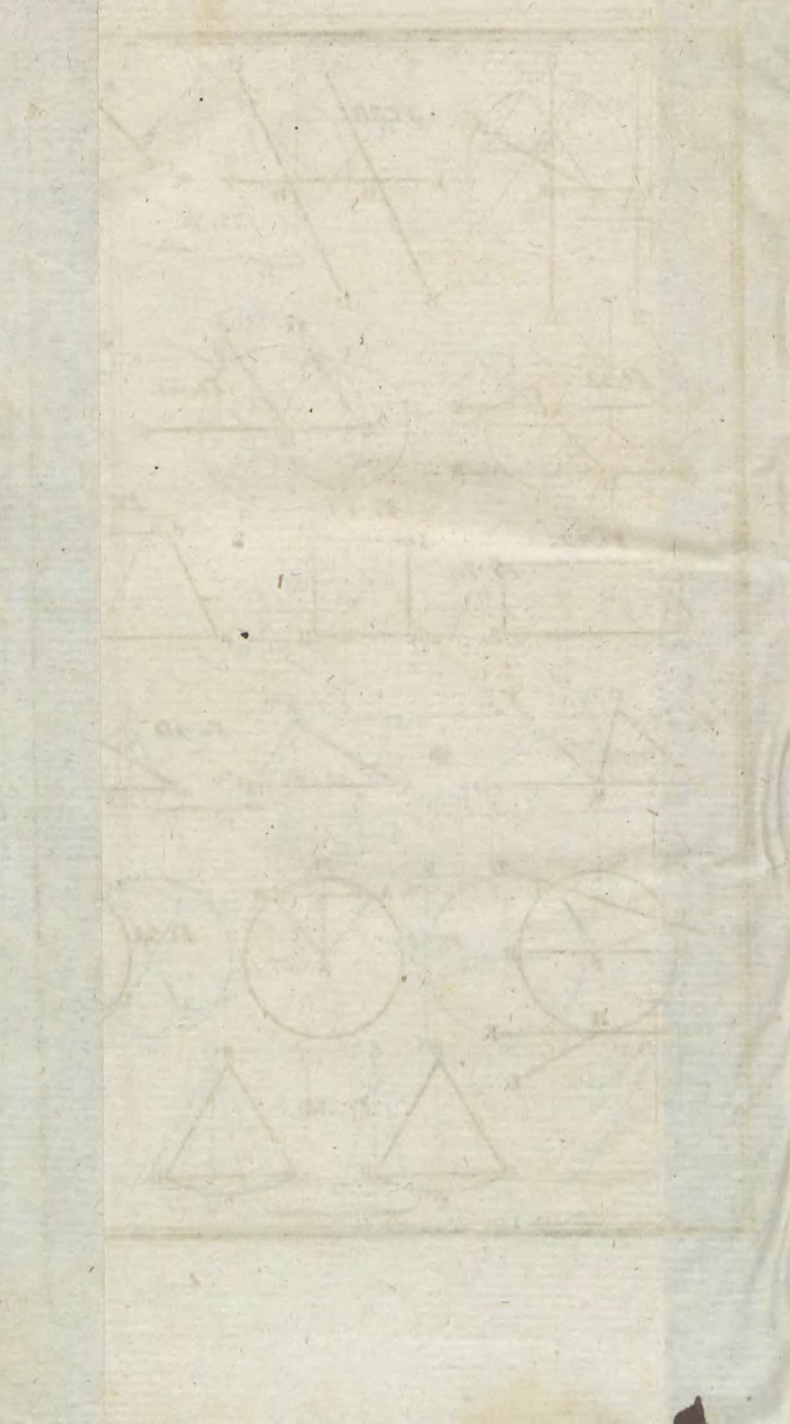
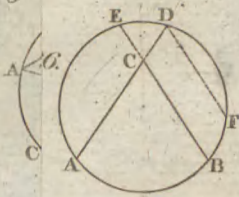
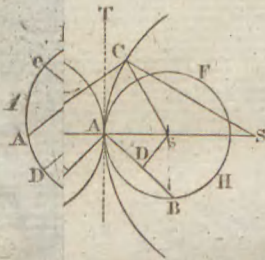
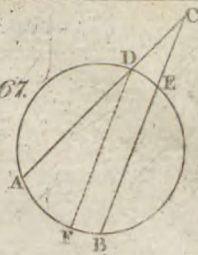


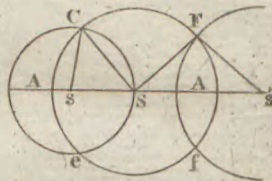
Fig.



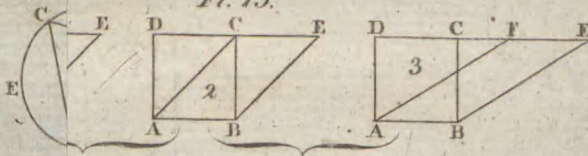
Fi. 67.



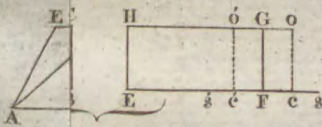
Fi. 71.



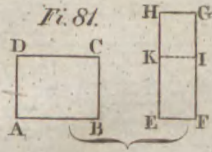
Fi. 75.



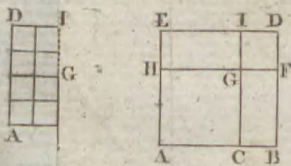
Fi. 80.



Fi. 81.



Fi. 86.



Fi. 87.

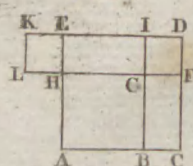
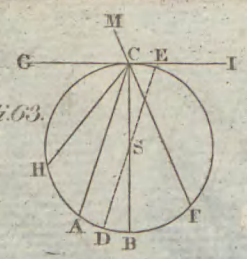


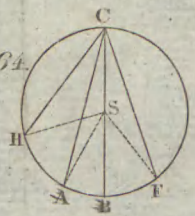
Fig. 62.



Fi. 63.



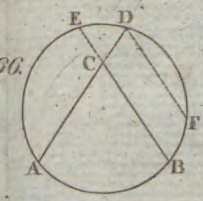
Fi. 64.



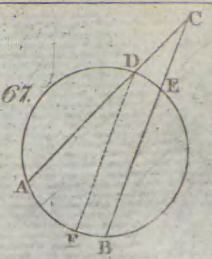
Fi. 65.



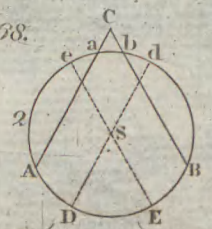
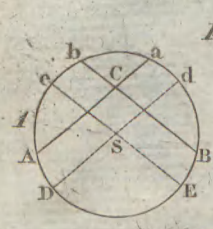
Fi. 66.



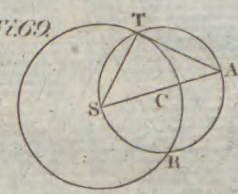
Fi. 67.



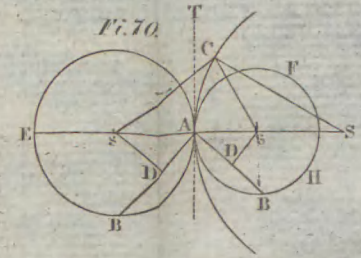
Fi. 68.



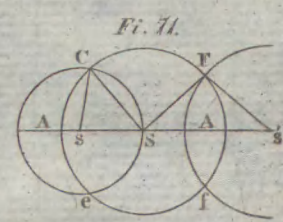
Fi. 69.



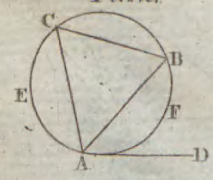
Fi. 70.



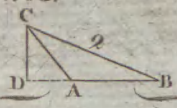
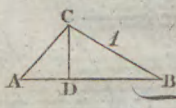
Fi. 71.



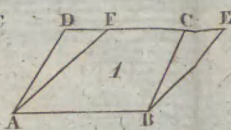
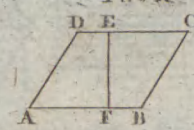
Fi. 72.



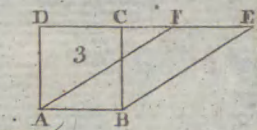
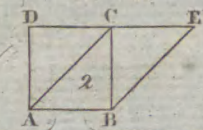
Fi. 73.



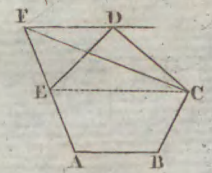
Fi. 74.



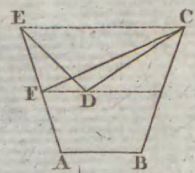
Fi. 75.



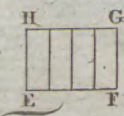
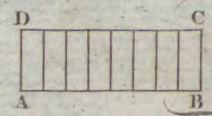
Fi. 77.



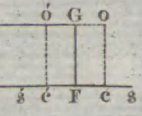
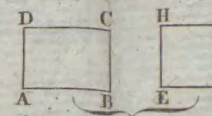
Fi. 78.



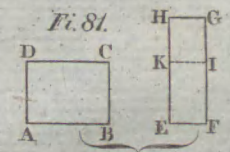
Fi. 79.



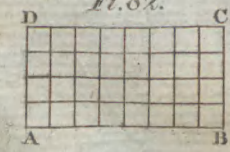
Fi. 80.



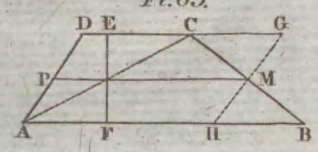
Fi. 81.



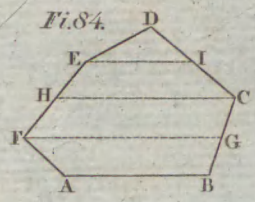
Fi. 82.



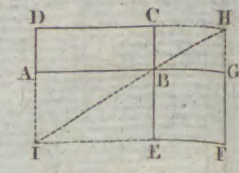
Fi. 83.



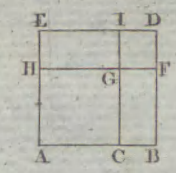
Fi. 84.



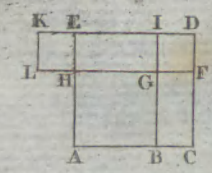
Fi. 85.



Fi. 86.



Fi. 87.



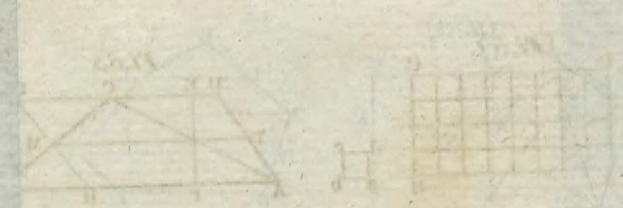
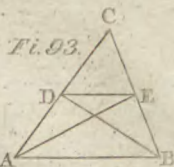
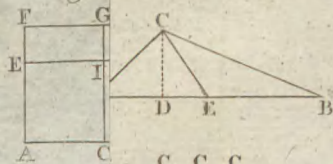
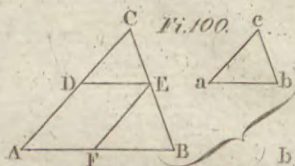
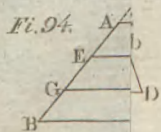
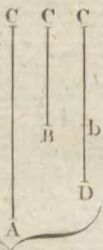


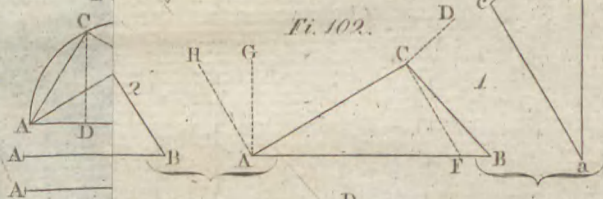
Fig. 8 Fi. 92.



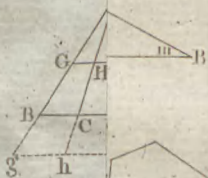
Fi. 98.



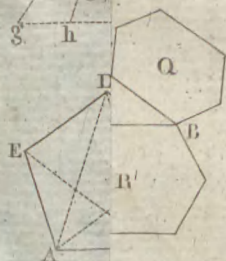
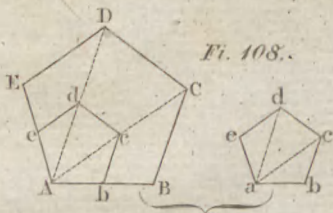
Fi. 102.



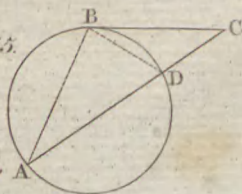
107.



Fi. 108.



Fi. 115.



III.

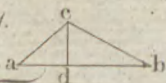
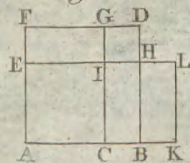


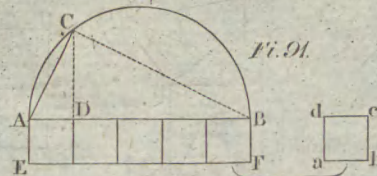
Fig. 88.



Fi. 90.



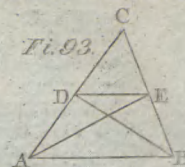
Fi. 91.



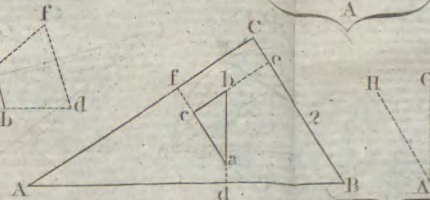
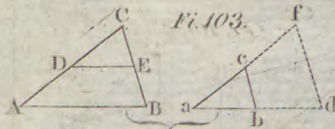
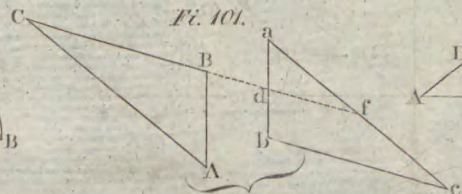
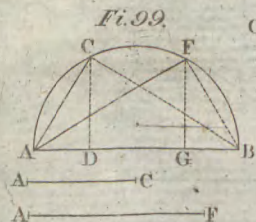
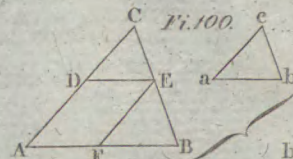
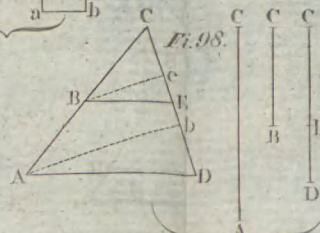
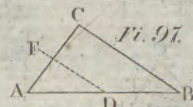
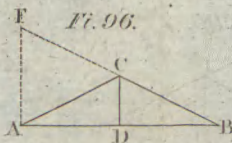
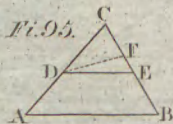
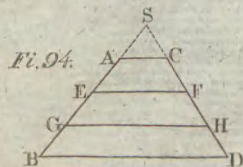
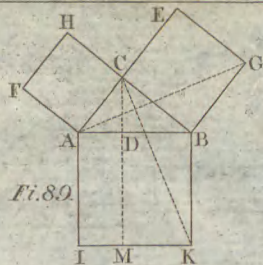
Fi. 92.



Fi. 93.

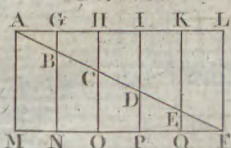


Fi. 89.

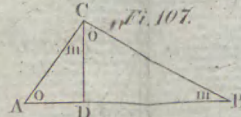
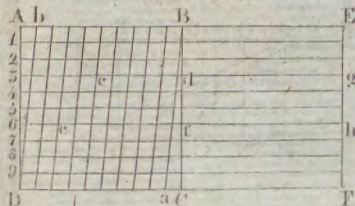


Fi. 102.

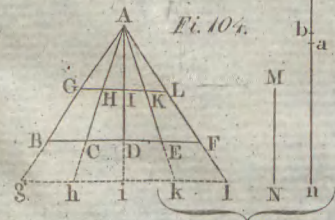
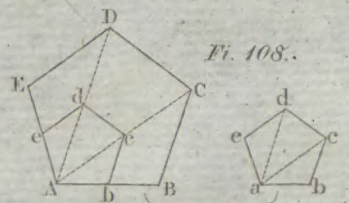
Fi. 105.



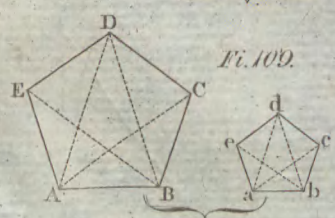
Fi. 106.



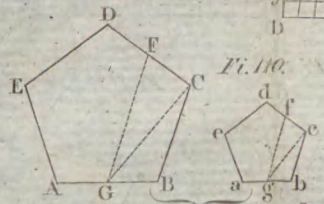
Fi. 108.



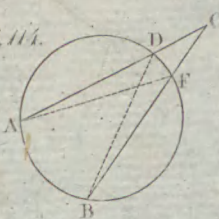
Fi. 109.



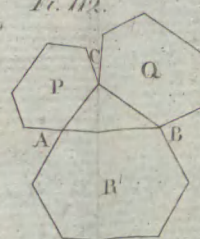
Fi. 110.



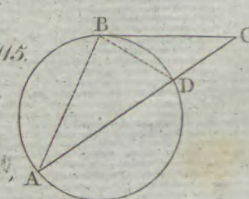
Fi. 111.



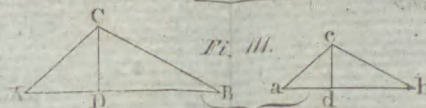
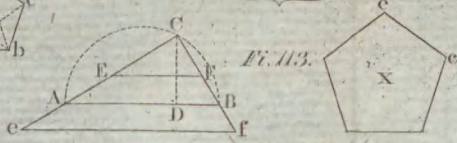
Fi. 112.

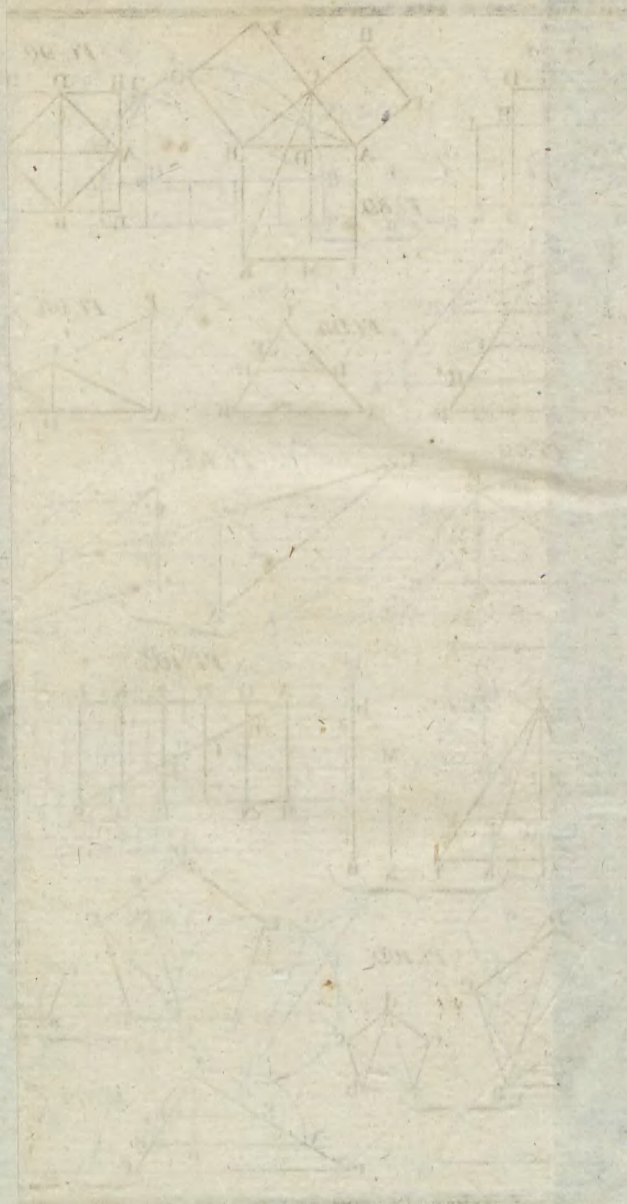


Fi. 115.

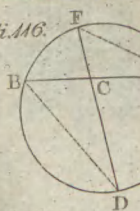


Fi. 113.





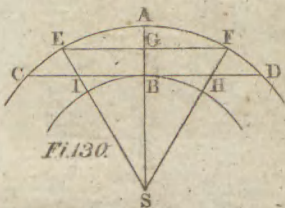
Fi. 116.



Fi. 122.

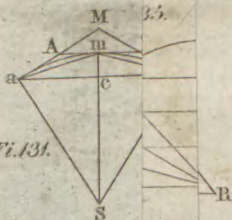


Fi. 123.

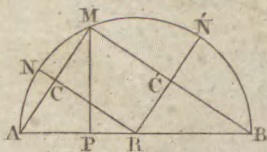


Fi. 130.

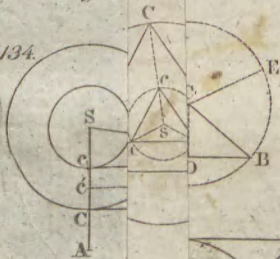
Fi. 131.



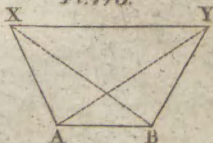
Fi. 138.



Fi. 134.



Fi. 145.



Fi.

